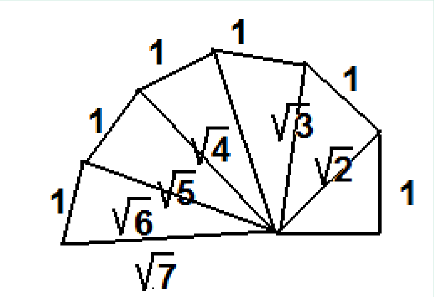
Números y potencias



Edición 2025
Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

Presentación

Después de quince años de publicaciones en mi blog y en redes, se han acumulado estudios y búsquedas sobre cuestiones diversas referentes a números y potencias, por lo que parece oportuno recogerlas todas en una misma publicación.

El rango de fechas que abarcan tiene el efecto de mostrar unos ciertos cambios en las metodologías y procedimientos empleados. Los temas más antiguos se han conservado tal como se publicaron, con sus mismos tipos de imágenes y códigos.

El tema de potencias enteras aún presenta curiosidades interesantes, por lo que esta publicación se enriquecerá prontamente, especialmente en cuestiones sobre cuadrados y cubos, las más abundantes. De hecho, en el momento de redactar esta presentación, hay en espera algún nuevo estudio.

CONTENIDO

Presentación 2

Contenido 3

Cuadrados 5

Los números cuadrados 5

Parte cuadrada y parte libre 21

¿En cuántas sumas de cuadrados? 28

Carnaval de cuadrados 42

Cuadrados en progresión aritmética 49

Hipotenuseando 52

Sumas de cuadrados con el mismo resultado 59

Un cuadrado y una unidad 68

Álgebra y cuadrados 81

Expresión cuadrática X^2+kY^2 = N 81

Descomposiciones en diferencias de cuadrados ... 89

Sumas de cuadrados con diferencias simétricas ... 99

Descomposiciones del tipo x^2+ky^2 109

Cuadrados del tipo n(n+k) 119

Cubos 145

Diferencias de cubos enteros positivos 145

Sumas de cubos con Pitágoras y Pell 156

Equivalencia entre sumas de cubos 169

Los cinco cubos 178
Suma y producto de cubo y otro tipo 193
Bases de cubos con suma cero 208
El problema del albañil 224
Diferencia de dos cubos igual a una suma 231
Otros temas 239
Acercamiento entre potencias 239
Diferencia de potencias 246
Potencias con bases en progresión aritmética 253
Diferencia de potencias con la misma base es un cuadrado 267
Alternativa a Faulhaber 270
Tríos de cuadrados y cubos 291
Potencias equidistantes de cuadrados 291
Tres potencias enteras no negativas 301
Sumas de potencias consecutivas 308
Jugamos con cifras y potencias 317

CUADRADOS

LOS NÚMEROS CUADRADOS

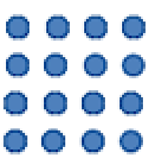
Primeras definiciones y propiedades

Incluimos aquí el estudio de los números cuadrados, considerándolos prioritariamente como números poligonales, y dejando como complementarias las cuestiones derivadas de su naturaleza como producto n*n.

*Cuadrado como n*n*

La primera idea que se tiene de los números cuadrados es que son el resultado de multiplicar un número entero por sí mismo: C=n*n (por eso, a la operación n^2 se le ha dado el nombre de *elevar al cuadrado*).

Se les llama también cuadrados perfectos. Este producto se puede representar como una matriz cuadrada de puntos.



Es conveniente disponer de un criterio para saber si un número es cuadrado. El más fiable es el de descomponer el número en factores primos y observar si todos los

exponentes son pares. Esto es así porque si un número primo *p* divide a un cuadrado, p^2 también lo divide.
Así se evitan los decimales que aparecen en otros criterios. El inconveniente radica en la programación de la extracción de factores. En el otro extremo de la definición encontramos los *números libres de cuadrados*, en los que todos los exponentes son impares.

Un criterio menos fiable es el de sacar la raíz cuadrada, tomar su redondeo a un número natural o su parte entera (llamada raíz cuadrada entera) y ver si al elevarla al cuadrado reconstruye el número inicial. Así se procede en esta función:

```
Public Function escuad(n) As Boolean

If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad
= False
End If
End Function
```

En lenguajes avanzados de programación se dispone ya de una función *issquare* o similar.

Esta definición permite considerar que un número cuadrado puede terminar solo con las cifras 0, 1, 4, 5, 6 o 9 en el sistema de numeración decimal. Es fácil comprobarlo multiplicando números por sí mismos. Así que un número que termine en 2, 3, 7, 8 no será cuadrado.

Esta definición de cuadrado también nos lleva **a que tendrá un número impar de divisores**. Si todos los exponentes de factores primos son pares, el número de divisores será un producto de impares, y por tanto impar. Puedes revisar esta idea en nuestro documento http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/teoria/teordivi.pdf

Aquí tienes un volcado del párrafo en el que se desarrolla la fórmula correspondiente:

NÚMERO DE DIVISORES

Para obtener todos los divisores de un número cuya descomposición es $n = p_1^{a1}.p_2^{a2}.p_3^{a3\ldots}$ basta considerar que son los términos del producto

$(1 + p_1 + p_1^2+\ldots p_1^{a1})(1 + p_2 + p_2^2+\ldots p_2^{a2})(1 + p_3 + p_3^2+\ldots p_3^{a3})$

Este sería un buen criterio para detectar si un número es cuadrado, pero resulta largo y lento.

Cuadrado como número poligonal

La construcción de un cuadrado siguiendo los procedimientos generales de construcción de poligonales nos llevaría a un esquema como el de la imagen:

En ella observamos sin dificultad que el número cuadrado n^2 es la suma de los primeros números impares: $1+3+5+7+9=25=5^2$

El caso general se demuestra por inducción completa:
Si n^2 equivale a la suma

(2*0+1)+(2*1+1)+(2*2+1)+(2*3+1)+…+(2*(n-1)+1),
el siguiente cuadrado, $(n+1)^2$ es igual a $n^2+(2*n+1)$, lo que completa la suma de impares.

Así que se cumple

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$

Sumas de números impares consecutivos

Una consecuencia de esta propiedad es la de que cualquier suma de números impares consecutivos equivale a la diferencia entre dos cuadrados. Por ejemplo, la suma 55+57+59+…+87+89+91 se puede calcular como la diferencia entre estas dos sumas:

(1+3+5+7+…+91)-(1+3+5+7+53)=46^2-27^2

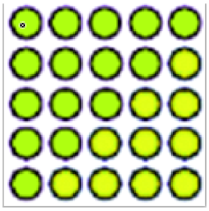
El 46 y el 27 se obtienen teniendo en cuenta, según la fórmula anterior, que los sumandos tienen la forma 2k+1. Si se toman dos sumandos impares consecutivos, el resultado será un cuadrado par 2n*2n=4n^2, pues

$$4n^2 = (2n^2 - 1) + (2n^2 + 1)$$

Si multiplicamos dos números pares (o impares) consecutivos y añadimos una unidad obtenemos también un cuadrado, pues n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2

Cuadrado como suma de dos triangulares

Otra generación de cuadrados viene dada, tal como vimos en el tema correspondiente, como suma de dos triangulares consecutivos. En la imagen se observa que el cuadrado 25 es la suma de los triangulares 10 y 15.



Como un triangular es un número combinatorio, esta propiedad se puede expresar como (elegimos el símbolo C(n) para representar el cuadrado de orden n):

$$C(n) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2}$$

Desde el punto de vista de los cuadrados esta relación no tiene más interés.

Cuadrado como suma de OBLONGO(N)+N+1

Otra relación que se queda en simple curiosidad es que si a un oblongo le añadimos su lado mayor, se convierte en un cuadrado.

En efecto, los oblongos vienen dados por la expresión n(n+1), y si le sumamos n+1 se convierte en

$n(n+1)+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

Esta propiedad es más sugestiva si se expresa al revés: si a un conjunto cuadrado le eliminas un lado, se convierte en oblongo.

Si al cuadrado 64 le quitamos un lado (8) nos queda 56, que es oblongo, por ser 7*8.

Una curiosidad

Copiamos un texto publicado por Amarnath Murthy, Mar 24 2004en la página de OEIS:

Begin with n, add the next number, subtract the previous number and so on ending with subtracting a 1: a(n) = n + (n+1) - (n-1) + (n+2) - (n-2) + (n+3) - (n-3) + ... + (2n-1) - 1 = n^2.

Como invitación a demostrarlo, insertamos ese proceso aplicado al número 12:

12		
13	11	2
14	10	4
15	9	6
16	8	8
17	7	10
18	6	12
19	5	14
20	4	16
21	3	18
22	2	20
23	1	22
210	66	**144**

$12+(2+4+6+...+18+10+22)=12+(2+22)*11/2=12+12*11=12^2$

En la primera columna se sitúan los números consecutivos a 12 y en la segunda los anteriores. Se suman y se restan unos de otros, resultando al final $144=12^2$.

Recurrencias

Hay varios métodos recursivos para calcular números cuadrados. Ninguno es especialmente útil, y se presentan aquí como una curiosidad.

Suma de un impar

Es consecuencia de la definición como suma de impares, y es que al cuadrado anterior le sumamos el doble de su lado incrementado en una unidad. Por ejemplo, $7^2+2*7+1=64=8^2$

Se puede plasmar en esta función recursiva de Excel:

Public Function cuadrado_r(n)
If n = 1 Then
cuadrado_r = 1
Else
cuadrado_r = 2 * n - 1 + cuadrado_r(n - 1)
End If
End Function

Funciona bien para números no muy grandes, pero puede fallar, por lo que la dejamos como una curiosidad.
Mediante los dos anteriores

C(n)=2C(n-1)-C(n-2)+2

Es fácil de demostrar: $n^2=2(n-1)^2-(n-2)^2+2=2n^2-4n+2-n^2+4n-4+2=n^2$

Así, de C(1)=1 y C(2)=4 obtenemos C(3)=2*4-1+2=9, C(4)=2*9-4+2=16,…

Recurrencia general para poligonales

Todos los números poligonales siguen la fórmula P(n,k)=3P(n,k-1)-3P(n,k-2)+P(n,k-3), que en nuestro caso quedaría como

C(n)=3C(n-1)-3C(n-2)+C(n-3)

Su ventaja radicaría en que usa cuadrados nada más, y no números aislados. Esto la convierte en una recurrencia de tercer orden homogénea, y la podemos tratar con nuestra hoja correspondiente: http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Bastará dar como coeficiente 3, -3, 1 y como elementos iniciales 0, 1, 4:

Recurrencias lineales de tercer orden							
Coeficientes							
A	3		**B**	-3		**C**	1
Valores iniciales							
X0	0		**x1**	1		**x2**	4

Pulsando sobre el botón de “Ver sucesión” crearemos una columna de cuadrados,

0
1
4
9
16
25
36
49
64
81
100
121
144

Sumas

La suma de los primeros números cuadrados viene dada por una de las fórmulas de Faulhaber.

(ver https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber)

La correspondiente a los números cuadrados es la siguiente:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es sencillo demostrarla por inducción completa. Aquí lo haremos restando la expresión correspondiente a **n** y la de **n-1**, para ver que el resultado es el nuevo cuadrado añadido. Así se ve en la calculadora Wiris:

$$n\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+1)}{6}-(n-1)\cdot n\cdot\frac{(2n-1)}{6} \quad = \quad n^2$$

Como curiosidad, aplicaremos nuestra herramienta de interpolación de Newton a las primeras sumas de cuadrados, 1, 5, 14, 30, 55…Es un tema complementario, que se puede ignorar:

Interpolación

Descargamos la hoja de interpolación desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Escribimos las sumas en las celdas correspondientes:

Valor natural	1	2	3	4	5
Valores función	1	5	14	30	55
Dif1		4	9	16	25
Dif2			5	7	9
Dif3				2	2
Dif4					0

Observamos que las diferencias de tercer orden son iguales (y la de cuarto es nula), lo que indica una función polinómica.

Leemos los coeficientes del polinomio:

Coeficientes (en forma de fracción)			0	2	5	4	1
	720	120	24	6	2	1	1

Escribimos el polinomio con esos coeficientes, tal como se efectúa en la interpolación de Newton:

1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3)

Como esta forma es poco legible, la simplificamos y factorizamos con Wiris:

$$1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3) \quad = \quad \frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X$$

$$\text{factorizar}\left(\frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X\right) \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot X\cdot(X+1)\cdot(2\cdot X+1) \quad \text{Calc}$$

Obtenemos la misma fórmula de Faulhaber. Aunque sea una mera curiosidad, es gratificante la coincidencia.

Teorema de los cuatro cuadrados

El teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange establece que cualquier número entero positivo se puede escribir como la suma de cuatro o menos cuadrados perfectos. Tres cuadrados son suficientes para todos los enteros positivos salvo para números de la forma $4^k(8m+7)$.

Un entero positivo se puede representar como una suma de dos cuadrados precisamente si su factorización prima no contiene potencias impares de primos de la forma 4 k + 3 (Fermat-Gauss).

También se puede expresar todo cuadrado como suma de tres cuadrados con signo. Por ejemplo, 201221 se puede expresar con estas sumas:

201221 = 11^2+685^2-518^2
201221 = 9^2+679^2-510^2
201221 = 13^2+667^2-494^2
201221 = 5^2+589^2-382^2

La cercanía entre las bases de estos cuatro ejemplos sugiere que son un subconjunto de otro mucho más amplio.

Conseguir los cuatro cuadrados (o menos) en los que se descompone cualquier entero positivo requiere algoritmos que se ralentizan cuando ese entero es grande. Un algoritmo sencillo para Excel o Calc sería el de la siguiente función, que devuelve una solución, que no tiene que ser la óptima, pero que consta de cuatro cuadrados:

```
Function cuatrocuad$(n)
Dim i, j, k, l
Dim s$
Dim novale As Boolean
s$ = ""
novale = True
i = 0
While i <= n And novale ‘Primera base de cuadrado
j = 0
While j <= i And novale ‘Segunda base
k = 0
While k <= j And novale ‘Tercera base
l = n - i ^ 2 - j ^ 2 - k ^ 2  ‘Posible cuarta base
If l >= 0 And l <= k Then
If escuad(l) Then novale = False: s = s + Str$(i) +
Str$(j) + Str$(k) + Str$(l) ‘Es una solución
End If
k = k + 1
Wend
j = j + 1
Wend
i = i + 1
Wend
If s = "" Then s = "NO"
cuatrocuad = s
End Function
```

Hay que insistir en que no devuelve la mejor solución, sino la que tiene las bases menores. Así, para 9, que es cuadrado, da la solución 2^2+2^2+1^2+0^2.

Hemos elegido un intervalo de enteros positivos al azar para una sencilla comprobación del teorema:

Número	Cuatro cuadrados o menos
3458	36 36 29 25
3459	39 31 31 16
3460	37 35 29 25
3461	39 32 30 16
3462	38 35 28 9
3463	38 37 25 25
3464	38 38 24 0
3465	37 36 28 16
3466	38 34 29 25
3467	37 37 27 0
3468	34 34 34 0
3469	34 34 34 1

Observamos que tres números sólo necesitan tres cuadrados.

Identidades

Cuadrado de suma o diferencia

Aunque son de carácter elemental, no podemos olvidar aquí los cuadrados de sumas y diferencias:

$$(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

Cercana a ellas es la *identidad babilónica*, fácil de deducir:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Identidad de Brahmagupta

En el apartado de sumas de cuadrados no puede faltar esta identidad, muy usada en cuestiones numéricas, y que se demuestra con un simple desarrollo algebraico:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 + (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

En cualquier texto de Teoría de Números se puede encontrar un uso de esta identidad.

Identidad de Euler

Euler amplió esta idea a ocho cuadrados, según podemos observar en esta imagen tomada de la página de Wikipedia

https://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_de_los_cuatro_cuadrados_de_Euler

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(w^2+x^2+y^2+z^2) =$$
$$(-aw+bx+cy+dz)^2+(ax+bw+cz-dy)^2+$$
$$(ay-bz+cw+dx)^2+(az+by-cx+dw)^2$$

PARTE CUADRADA Y PARTE LIBRE

Todos los números naturales contienen un cuadrado en alguna de sus descomposiciones factoriales (eventualmente valdría 1) y otro factor libre de cuadrados (quizás también 1).

Así, tendríamos, por ejemplo: $80=4^2*5$, $121=11^2*1$, $90=3^2*10$, $15=1^2*15$

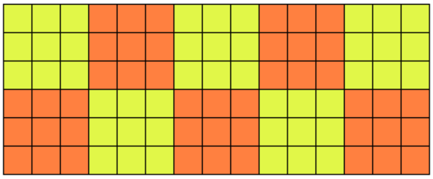
Podemos llamar parte cuadrada PC(N) a la primera y parte libre PL(N) a la segunda (se llama “core” en inglés y podemos traducir por “núcleo”) No se debe confundir con el *radical* de N, que es el mayor divisor de N que está libre de cuadrados.

Tendremos que:

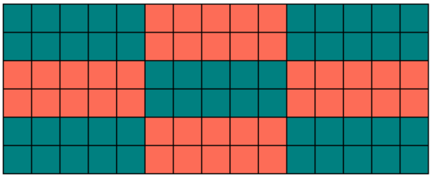
En un cuadrado perfecto PL(N)=1, en un número libre de cuadrados PC(N)=1 y en el resto de números ambos serán mayores que la unidad. En este caso los podemos llamar “cuadrables”, porque admiten su representación como un embaldosado de estructura cuadrada (las mismas filas que columnas), o bien como uno rectangular con baldosas cuadradas.

Así, el número $90=3^2*10$ es cuadrable, y admite estas dos estructuras:

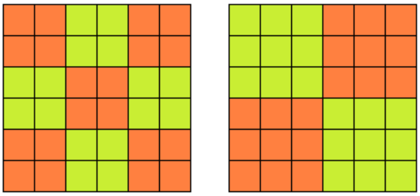
Rectangular con baldosas cuadradas



Mismo número de filas y columnas con baldosas rectangulares



Los cuadrados, como el 36, es evidente que admiten estructuras cuadradas con baldosas cuadradas, y tal vez de varias formas. Son totalmente cuadrables.



Por último, los libres de cuadrados solo admitirán estructuras rectangulares con baldosas también rectangulares. No son nada cuadrables.

¿Cómo encontrar la parte cuadrada de un número N?

Esa parte cuadrada debe ser menor o igual que la mitad de N, por ser divisor, salvo que N sea cuadrado. Por tanto, su propia raíz cuadrada lo será de la raíz cuadrada de esa mitad. Recorremos los números inferiores a esa raíz, los elevamos al cuadrado y averiguamos si son divisores o no de N.

```
Public Function partecuad(n)
Dim p, i, c

p = 1
For i = 2 To Sqr(n) + 1
 'Recorremos divisores cuadrados
c = i ^ 2
If n / c = n \ c Then p = c
 'Nos quedamos con el mayor divisor cuadrado
Next i
partecuad = p
```

End Function

La ventaja de esta función es que no depende de otras, y se puede traducir fácilmente a otros lenguajes de programación.

Es evidente que teniendo la parte cuadrada, también tienes la parte libre, ya que es el cociente del número y la parte cuadrada.

Proponemos una cuestión:

¿Qué números presentan la propiedad de que su parte cuadrada y su parte libre de cuadrados son "casi iguales", que se diferencian sólo en una unidad? Expresado de otra forma: la media aritmética de ambas partes está muy próxima a la raíz cuadrada de N.

Pueden darse dos casos, o que la parte cuadrada tenga una unidad más que la libre, o que tenga una unidad menos. ¿Cómo buscar esos números?

Caso 1: PC(N)+1=PL(N)

Comenzamos por buscar los números de la forma $n^2(n^2+1)$ para n>=1: 2 20 90 272 650 1332 2450 4160 6642 10100 14762 20880 28730 38612 50850 65792 83810 105300 130682 160400 194922 234740 280370

332352 391250 457652 532170 615440 708122 810900…

La siguiente condición de mi Buscador de números naturales

(https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) también la genera.

ES PARTECUAD(N)+1=N/PARTECUAD(N)

ES PARTECUAD(N)+1=N/PARTECUAD(N)
EVALUAR PARTECUAD(N) N/PARTECUAD(N)

Resultado de la búsqueda

Núm.	Solución	Detalles
1	2	1 2
2	20	4 5
3	90	9 10
4	272	16 17
5	650	25 26
6	1332	36 37
7	4160	64 65
8	6642	81 82
9	10100	100 101
10		

Así nos aseguramos que hemos recorrido todas las posibles partes cuadradas. Después deberemos tachar aquellos en los que n^2+1 no esté libre de cuadrados.

2, 20, 90, 272, 650, 1332, 4160, 6642, 10100, 14762, 20880, 28730, 38612, 50850, 65792, 83810, 130682, 160400, 194922, 234740, 280370, 332352, 391250, 457652, 532170, 615440, 708122, 810900, 924482, 1187010, 1337492, 1501850, 1680912, 1875530, 2314962, 2561600…(ver http://oeis.org/A069187)

Entre los tachados está 2450=49*50 y 50 es divisible entre el cuadrado de 5, y 105300=324*325, con 325 divisible también entre 25.

Con la función PARTECUAD definida más arriba, y usando para PARTELIBRE el cociente N/PARTECUAD(N) se pueden buscar las soluciones en una hoja de cálculo, Excel o Calc. La solución a nuestra cuestión sería:

N	PARTECUAD(N)	PARTELIBRE(N)
2	1	2
20	4	5
90	9	10
272	16	17
650	25	26
1332	36	37
4160	64	65
6642	81	82

Están publicados en https://oeis.org/A069187

Caso 1: PC(N)=PL(N)+1

Aquí deberíamos buscar los números del tipo $n^2(n^2-1)$, pero tampoco nos resuelve el problema. Nos resultaría la lista (prescindiendo del 0): 12, 72, 240, 600, 1260, 2352, 4032, 6480, 9900, 14520, 20592, 28392, 38220, 50400…

Pero $72=3^2(3^2-1)$ está en la lista y no cumple la condición: PC(72)=36 y PL(32)=2 y. Ha de ocurrir que (n^2-1) sea libre de cuadrados. Esto equivale a que n+1 no sea cuadrado, n-1 tampoco y que n+1 y n-1 no tengan un factor en común. Esta última excluye el caso de n impar, luego la lista queda reducida a

12, 240, 1260, 4032, 9900, 20592, 38220, 65280, 104652, 159600…

Habría que excluir después a 4032, porque n+1 es cuadrado, a 9900, porque n-1 es cuadrado, y así sucesivamente. Quedarían

12, 240, 1260, 20592, 38220, 65280, 104652, 159600…
Se puede usar
ES PARTECUAD(N)-1=N/PARTECUAD(N)
en el Buscador

Resultado de la búsqueda

Núm.	Solución	Detalles
1	12	4 3
2	240	16 15
3	1260	36 35
4		

En Excel, con nuestra función y una búsqueda similar a la del apartado anterior se obtienen más ejemplos:

12, 240, 1260, 20592, 38220, 65280, 104652, 159600, 233772, 809100, 1047552, 1335180, 1678320, 2083692, 2558400, 3109932, 7308912, 8500140, 9831360, 11313132, 12956400, 18970380, 21376752, 24005100, 26868672, 37008972, 49780080…

Los he publicado en https://oeis.org/A189883

¿EN CUÁNTAS SUMAS DE CUADRADOS?

Todo comenzó con Fermat

Hay números que se pueden descomponer en suma de dos cuadrados, pero ¿de cuántas formas? Esta cuestión ha sido ya abordada en otros blogs de Matemáticas, pero aquí añadiremos técnicas y algoritmos de hoja de cálculo.

Para conseguir una respuesta a la pregunta formulada se necesitaron esfuerzos de varios matemáticos, pero todo comenzó con Fermat y su *Teorema de Navidad* (lo comunicó a Mersenne el 25 de Diciembre de 1640, pero no lo demostró), y que actualmente expresamos así:

Un número primo se puede descomponer en suma de dos cuadrados x^2+y^2 de números enteros si y sólo si es el número 2 o bien es congruente con 1 módulo 4 (es decir, si es de la forma 4n+1).

El teorema directo es difícil de demostrar, y lo ha sido a lo largo de siglos mediante diversas técnicas (descenso infinito, enteros gausianos, etc.), siendo Euler el primero que lo logró. El inverso está a nuestro alcance:

Si es $p=1^2+1^2$ resulta el 2, que es primo.

Si $p=x^2+y^2$ con al menos un sumando distinto de 1, **x** e **y** han de ser primos entre sí, para que **p** sea primo, y además uno par y otro impar, es decir:

$$p=(2m)^2+(2k+1)^2=(4m^2+4k^2+4k)+1=4n+1$$

Un número primo congruente con 3 módulo 4 no puede descomponerse en suma de dos cuadrados de números enteros.

Gauss, en la sección 182 de sus Disquisitiones arithmeticae destacó que esa descomposición es única, salvo orden y signo y los dos números x e y han de ser primos entre sí.

De este hecho podemos obtener un criterio marginal: Si un número de la forma 4n+1 no se puede descomponer

en dos cuadrados o bien lo puede de más de una forma, no es primo.
Esta propiedad de poder descomponerse en suma de dos cuadrados se mantiene si multiplicamos dos números primos de este tipo, y además se puede duplicar el número de posibles sumas. Así, si $13 = 2^2+3^2$ y $5 = 2^2+1^2$, al multiplicarlos obtenemos:

$65 = 13*5 = 8^2+1^2 = 7^2+4^2$

Esta propiedad se desprende de la famosa identidad:

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$
que nos viene a decir que este producto también es suma de dos cuadrados y además de dos formas distintas (si los sumandos son distintos):

$65 = (2*2+3*1)^2 +(2*1-3*2)^2 = 7^2+4^2$ (obsérvese que en el cálculo se ha obtenido -4 y no 4)

$65 = (2*2-3*1)^2 +(2*1+3*2)^2 = 8^2+1^2$

Ocurre lo mismo si se multiplica el número primo por 2.

Fórmula de Gauss

Estas propiedades se resumen en un criterio que no vamos a desarrollar aquí, y es que sólo se pueden descomponer en cuadrados los números en los que los factores primos del tipo 4n+3 figuren en su descomposición **con exponente par**. Gauss fue más allá en esa sección 182, pues dio una fórmula para contar el número de formas diferentes en las que se descompone un número en suma de dos cuadrados con base no negativa:

$$N=ES[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\delta+1)/2]$$

donde ES significa “mínimo entero igual o superior” y los factores que le siguen se corresponden con los exponentes de los factores del tipo 4n+1 aumentados en una unidad. La fórmula, como advierte Gauss, sólo es válida si los factores del tipo 4n+3 forman un cuadrado perfecto.

Así, por ejemplo, el número $325=5^2*13$ se deberá descomponer en

N=ES((2+1)(1+1)/2)=ES(3*2/2)=ES(3)=3

En efecto, $325=1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$ (tres formas distintas)

Y el número 6664 sólo de una forma, pues $6664 = 2^3*7^2*17$ y aplicando la fórmula nos daría

N=ES(1+1)/2 = ES(1)=1, y su descomposición única es $6664=42^2+70^2$

Actualmente se prefiere considerar todas las sumas de cuadrados posibles, incluyendo bases negativas y teniendo en cuenta el orden. Esto multiplica por 8 el número de soluciones cuando x es distinto de y y ambos son no nulos, y por 4 en caso contrario. Así, el 13 presentaría ocho soluciones:

$13= 2^2+3^2 = (-2)^2+3^2 = 2^2+(-3)^2 = (-2)^2+(-3)^2 = 3^2 +2^2 =(-3)^2 +2^2 = 3^2 +(-2)^2 = (-3)^2 +(-2)^2$

Y el 16, cuatro:

$16 = 4^2+0^2 = (-4)^2+0^2 =0^2 + 4^2 = 0^2 + (-4)^2$

Igualmente, 8 presentaría también 4:

$8 = 4^2+4^2 = (-4)^2+4^2 =4^2 + (-4)^2 = (-4)^2 + (-4)^2$

Aparece el número π

En la sección anterior se presentaba una fórmula para encontrar el número de descomposiciones distintas en suma de dos cuadrados que puede presentar un número entero positivo. Vimos dos orientaciones: buscar sólo sumandos positivos o admitir también los negativos teniendo en cuenta además el orden.

Para un resultado inesperado que obtendremos más adelante vamos a elegir la segunda opción: encontrar, dado un número entero positivo N, todos los pares x, y de números enteros tales que $x^2+y^2=N$. Al número de esos pares lo podemos considerar como función de N, lo que nos permite definir NSC(N)=Número de pares de enteros x, y tales que $x^2+y^2=N$

Para implementar esta función en la hoja de cálculo podemos usar un código similar al siguiente (comentarios en letra normal):

```
function nsc(n)
dim i,a,b,ns

if n=0 then
ns=1 ‘Tenemos en cuenta que n puede valer 0
else
ns=0   ‘Se inicia la suma
for i=0 to sqr(n)  ‘Busca el primer sumando
a=n-i*I  ‘Calcula el Segundo sumando
if a=int(sqr(a))^2 then  ‘El segundo sumando es un cuadrado
if i*i<=a then ‘Esta línea es para no tener en cuenta el orden de los sumandos
b=sqr(a) ‘Base del segundo cuadrado
if b>0 and i>0 and b<>i then ‘Si ambas bases son positivas y distintas hay 8 posibilidades
ns=ns+8
```

```
else  'Si una es cero o son iguales, sólo hay 4
ns=ns+4
end if
end if
end if
next i
end if
nsc=ns 'Se recoge el resultado
end function
```

Esta función se puede usar en la hoja de cálculo y formar una tabla que compare N con NSC(N):

N	NSC(N)
0	1
1	4
2	4
3	0
4	4
5	8
6	0
7	0
8	4
9	4
10	8
11	0
12	0
13	8
14	0
15	0

16	4	
17	8	
18	4	
19	0	
20	8	

Aunque su distribución parece ser muy irregular, nos espera una sorpresa y es que si acumulamos los resultados y vamos calculando el promedio de NSC conforme crece N, este promedio tiene como límite π
En la siguiente tabla puedes observar que para N=20 ya se percibe esta tendencia al límite:

N	NSC(N)	Acumulada	Promedio
0	1	1	1,0000
1	4	5	5,0000
2	4	9	4,5000
3	0	9	3,0000
4	4	13	3,2500
5	8	21	4,2000
6	0	21	3,5000
7	0	21	3,0000
8	4	25	3,1250
9	4	29	3,2222
10	8	37	3,7000
11	0	37	3,3636
12	0	37	3,0833
13	8	45	3,4615
14	0	45	3,2143
15	0	45	3,0000

16	4	49	3,0625
17	8	57	3,3529
18	4	61	3,3889
19	0	61	3,2105
20	8	69	3,4500

Para N=500 el promedio oscila ya de una forma clara alrededor de 3,14:

498	0	1565	3,1426
499	0	1565	3,1363
500	16	1581	3,1620
501	0	1581	3,1557
502	0	1581	3,1494

y para N=8000 su valor es 3,14213. ¡No nos libramos del número π!

Problema del círculo de Gauss

En el anterior apartado nos aparecía el número π de forma algo sorprendente. En esta veremos que de sorpresa nada. Todo está relacionado, y se basa en la solución del llamado Problema del círculo de Gauss.

No entraremos demasiado en la parte teórica, que podéis consultar en las páginas http://mathworld.wolfram.com/GausssCircleProblem.html

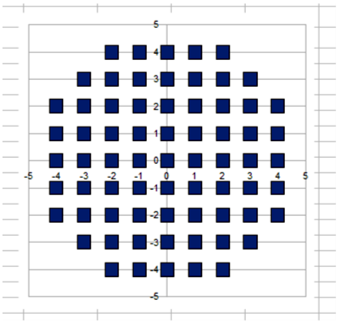
http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss_circle_problem

o en el Blog “Juan de Mairena”

http://demairena.blogspot.com/2008/01/1363-el-problema-del-crculo-de-gauss.html

Lo que presentaremos aquí es su tratamiento con hoja de cálculo, pero con una pequeña introducción.

En los dos apartados anteriores desarrollamos los números enteros positivos como sumas de dos cuadrados de base entera. Estamos en el terreno del Teorema de Pitágoras, y si representamos todas las soluciones para un número N dado como catetos de un triángulo, los puntos representados por ellos se situarán todos en el círculo de radio la raíz cuadrada de N.



Si con una hoja de cálculo creamos una lista de valores X e Y tales que $X^2+Y^2<=N$, según lo explicado, se rellenarán puntos dentro de un círculo, lo que representará perfectamente el círculo de Gauss.

En la imagen puedes ver el gráfico correspondiente a N=22.

Para conseguir esta imagen necesitaremos el algoritmo que encuentre todas las soluciones para que $X^2+Y^2<=N$

Una vez conseguida la lista de soluciones bastará con crear un gráfico del tipo XY para conseguir la aproximación al círculo.

Se puede usar un código en el Basic de LibreOffice.org similar al siguiente:

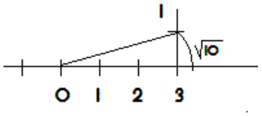
```
Sub desarrollo(n)
dim i,j,s,t,fi,a,b,x

fi=5
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(3,fi).value=0
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(4,fi).value=0
for x=1 to n
i=0
a=sqr(x)
while i<=a
j=x-i*i
if j=int(sqr(j))^2 or j=0 then
b=sqr(j)
for s=-1 to 1 step 2
for t=-1 to 1 step 2
fi=fi+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(3,fi).value=i*s
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(4,fi).value=b*t
```

```
next t
next s
end if
i=i+1
wend
next x
End Sub
```

Reflexión intrascendente

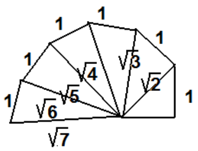
Después de redactar los últimos apartados he recordado que en mis clases de Matemáticas, al explicar los números reales, utilizábamos el Teorema de Pitágoras para representar en la recta real los irracionales cuadráticos. Así situábamos, por ejemplo, la raíz cuadrada de 10 mediante el uso de una recta graduada y un compás:



De igual forma representábamos las raíces cuadradas de 2, 13, 17, etc.

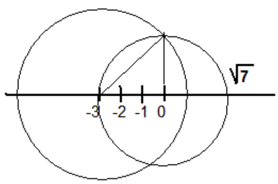
Cosa curiosa: en tantos años nadie me preguntó por la raíz de 7 ¿Cómo se representa en la recta real? ¿Qué le hubieras respondido tú?

Hay dos respuestas al menos: una es acumular triángulos rectángulos a partir de uno con hipotenusa la



raíz de 2 adosándole un cateto de medida la unidad, con lo que la hipotenusa equivaldría a la raíz de 3, y así sucesivamente, mediante catetos 1 se irían generando todas la raíces.

Otra es acudir a una diferencia de cuadrados. En la imagen puedes ver la representación de la raíz de 7 tomada como cateto de un triángulo de hipotenusa 4 y el otro cateto 3:



Pero este método tiene un inconveniente, y es que sólo son representables con diferencias de cuadrados los números impares y los múltiplos de 4. Por tanto, el número 14 no se podría construir ni con sumas de cuadrados ni con diferencias.

¿Sabrías indicar qué otras dos construcciones geométricas sobre un triángulo rectángulo nos permitirían representar todos los irracionales cuadráticos?

Así que hemos descubierto que la descomposición de un número en sumas o bien en diferencias de cuadrados clasifica a los números enteros positivos en cuatro clases.

Terminamos este estudio como lo comenzamos, con la sección 182 de las ***Disquisitiones arithmeticae***:

Todo número natural según Gauss se puede representar de la siguiente forma:

$$N = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b2} \ldots p_r^{b_r} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \ldots q_s^{c_s}$$

Donde p_i son los factores del tipo 4h+3 y los q_i del tipo 4h+1.

Con esa nomenclatura podemos afirmar:

Si a es par y todas la b_i pares (contando el 0), N se puede descomponer en suma de dos cuadrados y en diferencia de otros dos. Igualando, $N=a^2+b^2 = m^2-n^2$ y produce de forma indirecta soluciones a la ecuación $x^2+y^2+z^2=u^2$. Sería el caso del número $17 = 4^2+1^2= 9^2-8^2$, que da lugar a la identidad $4^2+1^2+8^2= 9^2$

Si a es impar y todas la b_i pares, N equivaldrá a sumas de cuadrados pero no a diferencias. Ocurre esto con el número $10 = 3^2+1^2$ que no puede escribirse como diferencia de cuadrados a causa de no poder expresarse como dos factores de la misma paridad.

Si a es par y alguna b_i impar, admitirá una descomposición en diferencias de cuadrados pero no en sumas (de dos). Así, $15=4^2-1^2$ y no se puede descomponer en suma por ser del tipo 4h+3.

Por último, no admitirán ninguna descomposición similar los que presenten a impar y alguna b_i impar. Es así el número 70 = 2*5*7, que a causa del 2 y el 7 no admitirá ser expresado como suma o diferencia de cuadrados. Insisto en la pregunta: ¿Cómo lo podríamos representar en la recta real? Es una cuestión más bien elemental.

CARNAVAL DE CUADRADOS

Consideremos el conjunto de divisores de un número natural N que son cuadrados perfectos. Sabemos que el mayor de ellos es la **parte cuadrada** del número), a la que designaremos como PC(N).

(ver
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html)

Si descomponemos N en factores primos

$$N = p_1{}^{a_1} \times p_2{}^{a_2} \times p_3{}^{a_3} \times \ldots p_k{}^{a_k} \quad (1)$$

para encontrar la parte cuadrada basta elevar a cada factor primo al mayor número par contenido en cada uno de los exponentes, es decir

$$PC(p^r) = p^{r-r\ MOD\ 2} \quad (2)$$

Así, por ejemplo, para encontrar la parte cuadrada de $26460=2^2*3^3*5*7^2$ bastará truncar cada exponente a un número par, con lo que quedaría PC(26460)= $2^2*3^2*7^2$=1764. A la raíz cuadrada de esa parte se le suele llamar **Raíz Interna** del número N

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html)

En este caso la raíz interna de 26460 sería 42=2*3*7.
Todo esto lo recordamos para poder estudiar mejor los divisores cuadrados de un número. Se pueden considerar las siguientes afirmaciones:

Los divisores cuadrados de N coinciden con los de su parte cuadrada.

Si k es divisor cuadrado de N, todos sus exponentes en (1) serán pares, pero ninguno sobrepasará al correspondiente en PC(N), luego será también divisor de esa parte cuadrada. Inversamente, todo divisor de PC(N) lo es también de N.

El número de divisores cuadrados de N coincide con el de los divisores de la raíz interna de N.

Esto es así porque si extraemos la raíz cuadrada a todos los divisores cuadrados de N, es claro que permanecerán los mismos factores primos pero con sus exponentes reducidos a la mitad, que es la misma operación sufrida por la raíz interna.

En el ejemplo elegido, si esa raíz interna es 42, poseerá ocho divisores, por ser igual a 2*3*7 (aplicando la fórmula del número de divisores resultaría (1+1)(1+1)(1+1)=8). Efectivamente, si buscamos todos los divisores cuadrados de 26460 nos resultan estos ocho: 1764, 441, 196, 49, 36, 9, 4 y 1, que son los cuadrados de los divisores de 42: 42, 21, 14, 7, 6, 3, 2 y 1.

Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores cuadrados de N y los divisores de su raíz interna, de forma que cada uno de los primeros es el cuadrado de otro del segundo conjunto.

Por ejemplo, para N=1200, su parte cuadrada es 400, su raíz interna 20, y se da la correspondencia entre los divisores de 20 y los divisores cuadrados de 20.

400	20
100	10
25	5
16	4
4	2
1	1

Esto nos da, como hemos visto, un procedimiento para contar los divisores cuadrados de un número, pero también para sumarlos, si recordamos la fórmula de la función sigma_2, que suma los cuadrados de los divisores

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/03/la-familia-de-las-sigmas-2.html)

$$\sigma_2(N) = \prod \frac{{p_i}^{2(e_i+1)} - 1}{{p_i}^2 - 1}$$

Aplicamos esa fórmula a la raíz interna. Esto es importante, porque esa raíz determina el número de divisores cuadrados. En nuestro ejemplo lo haríamos así:

SDC(26460)=(2^4-1)/(2^2-1)* (3^4-1)/(3^2-1)* (7^4-1)/(7^2-1)=5*10*50=2500

Comprueba: 1764+441+196+49+36+9+4+1=2500

Si deseas comprobar este resultado con otros números, con este codigo PARI puedes sumar todos los divisores cuadrados:

print(sumdiv(26460,d,d*issquare(d)))

Sustituyes el ejemplo 26460 por otro número cada vez que lo desees.

Con el Basic de las hojas de cálculo también lo puedes calcular mediante esta función:

```
function sumdivcuad(n)
dim i,p,a,s

p=1
s=0
for i=1 to sqr(n)
a=i*i
if n/a=n\a then s=s+a
next i
sumadivcuad=s
end function
```

Por último, el Buscador de Naturales (https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador)
nos proporciona un planteo muy intuitivo:

Buscamos desde el número	**1**
Hasta el número	**26460**

Con estas propiedades:

CUADRADO
DIVISOR 26460
EVALUAR TOTALES

Recorre los números desde 1 hasta 26460 y busca cuadrados que sean divisores de ese número, sumando después los resultados.

Solución	Detalles
1	1
4	5
9	14
36	50
49	99
196	295
441	736
1764	2500

Se repite el resultado de 2500.

Comprueba de varias formas que el número 84000 posee sólo seis divisores cuadrados cuya suma es 546. Usa también la fórmula basada en sigma_2 ((2^6-1)/(2^2-1)*(5^4-1)/(5^2-1)=21*26=546).

Como otras variantes de la función sigma, esta suma de divisores cuadrados es una función multiplicativa, por lo que basta definirla para p^r, siendo p un factor primo. Para ello, según (2) tomamos como exponente de su raíz interna (r – r MOD 2)/2, con lo que la suma de los divisores cuadrados será

$$SDC(p^r) = \frac{p^{2(\frac{r-r\,mod\,2}{2}+1)} - 1}{p^2 - 1}$$

Por ejemplo, la suma de divisores cuadrados de $2048=2^{11}$ será igual a (2^12-1)/(2^2-1)=4095/3=1365. Comprobamos: 1024+256+64+16+4+1 = 1365.

En el caso particular de que r sea igual a 2 o a 3 la suma de divisores cuadrados será p^2+1. Es muy fácil razonarlo y lo usaremos más adelante.

Otro caso particular se da cuando la raíz interna está libre de cuadrados, tipo RI(N)=p*q*r*s…, la suma buscada será $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)(1+s^2)$…Sería el caso, por ejemplo, del número 60500, cuya parte cuadrada es 12100 y la raíz interna 110=2*5*11, libre de cuadrados, por lo que la suma de divisores cuadrados de 60500 debería ser $(1+2^2)(1+5^2)(1+11^2)$=5*26*122=15860. En efecto, los divisores cuadrados de 60500 suman 12100+3025+484+121+100+25+4+1=1586.

No es difícil encontrar ternas de cuadrados perfectos que estén en progresión aritmética, tales como 1, 25 y 49, o 4, 100 y 196. ¿Cómo podríamos encontrar más ternas con una hoja de cálculo? Se podría organizar una tabla de doble entrada con los cuadrados perfectos, y después someter a su media aritmética a una condición ¿Cuál?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			1	2	3	4	5	6	7	8
3			1	4	9	16	25	36	49	64
4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
5	2	4	0	1	0	0	0	0	0	0
6	3	9	0	0	1	0	0	0	0	0
7	4	16	0	0	0	1	0	0	0	0
8	5	25	0	0	0	0	1	0	0	0
9	6	36	0	0	0	0	0	1	0	0
10	7	49	1	0	0	0	0	0	1	0
11	8	64	0	0	0	0	0	0	0	1
12	9	81	0	0	0	0	0	0	0	0
13	10	100	0	0	0	0	0	0	0	0
14	11	121	0	0	0	0	0	0	0	0
15	12	144	0	0	0	0	0	0	0	0
16	13	169	0	0	0	0	0	0	0	0
17	14	196	0	1	0	0	0	0	0	0
18	15	225	0	0	0	0	0	0	0	0
19	16	256	0	0	0	0	0	0	0	0
20	17	289	0	0	0	0	0	0	1	0
21	18	324	0	0	0	0	0	0	0	0
22	19	361	0	0	0	0	0	0	0	0
23	20	400	0	0	0	0	0	0	0	0
24	21	441	0	0	1	0	0	0	0	0
25	22	484	0	0	0	0	0	0	0	0
26	23	529	0	0	0	0	0	0	1	0

En la imagen puedes ver el resultado de una búsqueda similar, en la que se han marcado con un 1 los cuadrados perfectos pertenecientes a una terna como la propuesta. Si te animas a construir un buscador semejante podrás encontrar muchas más ternas. Ponte a prueba: *¿Con qué otros dos cuadrados forma progresión aritmética el número 10404, cuadrado de 102?*

Para concretar las ternas pedidas hemos recurrido a una exploración sistemática. Es una forma válida de trabajar en Matemáticas (así se encuentran los números primos), pero que alguien puede pensar que es algo perezosa. A continuación aportamos un análisis algo más profundo.

Enfoque algebraico

Llamemos n a la raíz cuadrada del término central, que sería n^2.
El tercer cuadrado tendrá la forma $(n+h)^2$ y el primer cuadrado $(n-k)^2$ con $k>h$ *¿por qué?*
Las diferencias entre ellos serán iguales, luego
$(n+h)^2 - n^2 = n^2 - (n-k)^2$
Simplificando: $2nh + h^2 = 2nk - k^2$
Despejando n: $n = (h^2 + k^2) / (2(k-h))$
Como $k>h$, llamamos $m=k-h$, y entonces queda:
$n = (h^2 + (h+m)^2) / (2m) = (2h^2 + 2mh + m^2) / (2m)$
Esto obliga a que m sea par, y la podemos sustituir por 2p

$\mathbf{n} = (2h^2 + 4ph + 4p^2) / (4p) = \mathbf{h^2/(2p) + h + p}$ (1)

Esto nos da un procedimiento de generación de ternas de cuadrados:

Elegimos cualquier entero p y buscamos un número par h cuyo cuadrado sea divisible entre p y cuyo cociente sea mayor que el mismo p (para que n-k sea positivo), y mediante la fórmula (1) calculamos n. Seguidamente encontramos los valores de n+h y n-k = n-h-2p

Ejemplo: p=5, h=10, n=100/10 + 10 + 5 = 25; (n+h)=35: (n-k)=25-10-5*2=5.

Por tanto, los cuadrados en progresión aritmética buscados son: 25, 625 y 1225.

Notas

- Si tres cuadrados están en progresión aritmética, sus diferencias mutuas son siempre múltiplos de 24. Intenta demostrarlo, que es un reto muy interesante. Si no lo logras, en las Soluciones tienes una demostración basada en los restos cuadráticos.
- No existen cuatro cuadrados en progresión aritmética, ni en mayor número.
- Tampoco existen tres cubos en progresión aritmética.
- Leonard Dickson en su libro "History of the Theory of Numbers" (1919), propone estas fórmulas:

$x = 2\ v^2/u - u$

$y = 2\ v^2/u + u + 2\ v$

$z = 2\ v^2/u + u + 4\ v$

donde u divide a $2\ v^2$ con un cociente mayor que u.

Este método coincide con el que se propone en este libro. Por ejemplo, para h=12 y p=6 las soluciones son n=30, n+h=42, n-k=6, y con la propuesta de Dickson se logra la misma solución con $2v^2=72$ y u=6:

x=72/6-6=6; y=72/6+6+12=30; z=72/6+6+24=4

HIPOTENUSEANDO

En mis exploraciones por la página OEIS (Enciclopedia On-line de sucesiones de números enteros, http://oeis.org/?language=spanish), me encontré con la sucesión http://oeis.org/A104863

10, 30, 31, 43, 53, 68, 86, 109, 138, 175, 222, 282, 358, 455, 578, 735, 935, 1189, …

En ella, a partir de los valores a(1)=10 y a(2)=30, se van formando los siguientes como **la parte entera de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los dos anteriores**.

Así, el tercer elemento es igual a

ENTERO(RAIZ(10^2+30^2))=ENTERO(RAIZ(1000))=ENTERO(31,62)=31.

Prueba a justificar que el siguiente es 43.

Esta definición equivale a que cada término es la hipotenusa truncada correspondiente a los términos anteriores tomados como catetos. Por eso le hemos llamado a esta sucesión la de "hipotenusear". Su expresión recurrente sería:

$$a_n = Int\left(\sqrt{{a_{n-2}}^2 + {a_{n-1}}^2}\right)$$

Esta sucesión presenta algunas características que le hacen merecer este estudio:

(1) El uso de la parte entera obliga a renunciar a las fórmulas teóricas. De hecho, en términos avanzados de la sucesión, el cumplimiento del Teorema de Pitágoras es deplorable. Observa este ejemplo, en el que a(n-2)=8348, a(n-1)= 10618 y a(n)=13506. Si elevamos al cuadrado obtenemos:

13506^2=182412036
8348^2+10618^2=182431028

Restamos y nos queda un error de 18992 unidades. Así que las hipotenusas que obtengamos con esta recurrencia **no son tales**, aunque seguiremos llamándolas así.

(2) Como también ocurre en las recurrencias lineales, el cociente entre dos términos consecutivos se va estabilizando y tiende a un límite. Esto nos permite “razonar en el límite”, aunque sepamos que es una técnica aproximada, que sólo nos valdrá para explicar (y no demostrar) algunas conjeturas que se han afirmado para esta sucesión y otras similares.

(3) La sucesión presentada es sólo un caso particular de toda una familia en la que podemos fijar a(1) y a(2) como deseemos. La mayoría de las propiedades se mantendrán. Vemos la primera:

Conjetura: El límite del cociente a(n+1)/a(n) es la raíz cuadrada del número áureo.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\emptyset}=1{,}27201965\ldots$$

La llamamos conjetura por causa de la parte entera, que nos impide mejores razonamientos. Esta cuestión, de manejarnos entre aproximaciones y conjeturas, es uno de los objetivos de este estudio.

Podemos comprobar lo anterior con hoja de cálculo. Escribimos dos catetos uno debajo de otro, como 2 y 5, y después, en columna rellenamos la fórmula

=ENTERO(RAIZ(CATETO1^2+CATETO2^2)).

No es difícil de organizar. Después, en la columna de la derecha calculamos los cocientes entre dos términos consecutivos. Algo así:

A(N)	Cociente A(N+1)/A(N)
2	
5	2,5
5	1
7	1,4
8	1,142857143
10	1,25
12	1,2
15	1,25
19	1,266666667
24	1,263157895
30	1,25
38	1,266666667
48	1,263157895
61	1,270833333

Al llegar al término 14 ya se adivina el valor deseado. Si seguimos bajando, la aproximación mejora mucho

709028	1,272018141
901897	1,272018877
1147230	1,272018867
1459299	1,27201956
1856257	1,272019648
2361195	1,272019446

Podemos razonarlo en el límite. Llamamos k al cociente a(n+1)/a(n). Por tanto, en la expresión de a(n) podemos escribir:

$$a_n = a_{n-1} Int\left(\sqrt{1+1/k^2}\right)$$

O bien, pasando a(n-1) al primer miembro,

$$k \cong \sqrt{1+1/k^2}$$

Elevando al cuadrado y agrupando, tenemos que k se debe aproximar a la solución de la ecuación $k^4 - k^2 - 1 =$

0, una bicuadrada cuya solución es el límite sugerido, la raíz cuadrada del número áureo.

Incluimos las cuatro soluciones tal como las da WolframAlpha:

Real solutions:

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Complex solutions:

$$x = -i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$x = i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Elegimos la real positiva, y, efectivamente, resulta 1,27201964951407…

Manteniendo el razonamiento en el límite, si a(n-1) y a(n) se comportan como cateto e hipotenusa respectivamente con esa razón dada, el otro cateto, a(n-2), se podrá aproximar (también en el límite) de esta forma:

$$a_{n-2} = \sqrt{{a_n}^2 - {a_{n-1}}^2} = a_n\sqrt{1 - {}^{1}/_{\emptyset}} = \frac{a_n}{\emptyset}$$

Plantéate como ejercicio demostrar el último paso. Recuerda que φ-1=1/φ

En esta sucesión a(n) tiende en el límite a a(n-2)*φ

Lo hemos demostrado en el párrafo anterior. También lo podemos razonar mediante la idea de que si el cociente entre dos términos consecutivos se aproxima a la raíz del número áureo, el correspondiente a a(n) y a(n-2) será dicho número φ.

Por tanto, en el límite, cada tres términos consecutivos forman un triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a (1, 1,272019…, 1,618033…) y cuyo ángulo menor es de 38,17º.

Un ejercicio: ¿Cuál es, en el límite, el cociente entre el área del triángulo (a(n+1), a(n), a(n-1)) y el correspondiente a (a(n), a(n-1), a(n-2))?

Para quienes conozcáis el lenguaje PARI, con una línea de código similar a esta podéis estudiar la sucesión hasta términos más avanzados:

a=1;b=7;for(i=1,30,c=truncate(sqrt(a^2+b^2));a=b;b=c;print1(c,", "))

Podéis estudiar los cocientes añadiendo el código adecuado.

Conjetura: A partir de un término mínimo, a(n) se diferencia de a(n-2)+a(n-4) en a lo sumo una unidad.

Esta conjetura está publicada en la página OEIS citada para el caso a(1)=10 y a(2)=30, en el que la diferencia se estabiliza en 1. Su verificación no depende de los términos iniciales, salvo, quizás, el tope inferior de 1. Por ejemplo, lo comprobaremos con hoja de cálculo y los términos iniciales a(1)=4 y a(2)=7:

a(n)	a(n-2)+a(n-4)
4	
7	
8	
10	
12	12
15	17
19	20
24	25
30	31
38	39
48	49
61	62
77	78
98	99

En este caso vemos que a(n) tiende a coincidir con a(n-2)+a(n-4)-1.

En el límite se puede justificar usando todos los cocientes presentados más arriba:

$$a(n-2)+a(n-4) = a(n)/\varphi+a(n)/\varphi^2 = a(n)*(\varphi+1)/\varphi^2 = a(n)$$

Así que en el límite la coincidencia es exacta: a(n-2)+a(n-4) = a(n), y la unidad como error aparece por los truncamientos.

Puedes cambiar la función ENTERO por la de REDONDEAR. Así lo hacen las sucesiones A104803, A104804, A104805 y A104806, con resultados similares.

SUMAS DE CUADRADOS CON EL MISMO RESULTADO

De nuevo tomamos un tweet de @connumeros para profundizar en una cuestión. El día 1/3/2020 publiqué en Twitter lo siguiente:

1320 es suma de cuadrados pares consecutivos, y también de impares:
Pares: 1320=12^2+14^2+16^2+18^2+20^2=(20×21×22-10×11×12)/6
Impares: 1320=5^2+7^2+9^2+11^2+13^2+15^2+17^2+19^2=(19×20×21-3×4×5)/6

Esto me dio la idea de buscar coincidencias de varias sumas de cuadrados con un mismo resultado. El problema que nos aparecerá será la lentitud de los cálculos, pues nos encontraremos con bucles dobles y triples en los algoritmos de búsqueda. Comenzamos por los más sencillos:

Coincidencias en las sumas de cuadrados

Dado un número natural cualquiera, nos podemos plantear a cuantas sumas de cuadrados equivale. Nos podemos basar en la conocida fórmula de la suma de los primeros cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con esta fórmula, si deseamos encontrar una suma **S** de cuadrados que comience en **p** y termine en **q**, su expresión sería S(p,q)=(q(q+1)(2q+1)-(p-1)p(2p-1))/6
Esta expresión se puede implementar en un algoritmo que busque los números que presentan más de dos descomposiciones en suma de cuadrados consecutivos. Lo presentaremos en PARI:

for(n=1, 25000, m=0; i=1; while(i^2<=n, j=0; while(j<i, if(i*(i + 1)*(2*i + 1) - j*(j + 1)*(2*j + 1) == 6*n, m+=1); j+=1); i+=1);if(m>1,print1(n,", ")))

En él, para cada **n** recorremos los valores de **i** mientras **i^2>=n**. Añadimos otra variable **j**, que será el inicio de la posible suma de cuadrados. Usamos la fórmula de más arriba, y si el resultado es **n**, incrementamos el contador **m**. Si este pasa de 1, imprimimos.

Prueba este código en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html y obtendrás la siguiente sucesión, que ya está publicada:

A130052 Numbers that are the sum of one or more consecutive squares in more than one way.

25, 365, 841, 1405, 1730, 2030, 3281, 3655, 3740, 4510, 4705, 4760, 4900, 5244, 5434, 5915, 5929, 7230, 7574, 8415, 8464, 9385, 11055, 11236, 11900, 12325, 12524, 14905, 16745, 17484, 18879, 19005, 19044, 19855, 20449, 20510, 21790, 22806, 23681

Aunque la idea de este algoritmo parece acertada, es más rápido este otro, que se limita a sumar cuadrados sin ningún uso de fórmulas. Así que dejamos los dos para comprobar.

```
ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0, a);while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0&&a<=n,if(a==n, m+=1); j-=1; a=a+j^2); i-=1); return(m>1)}
for(p=1, 24000, if(ok(p), print1(p,", ")))
```

Este programa lo hemos añadido a la sucesión publicada.

Coincidencias en sumas de cuadrados impares

La fórmula adecuada para sumar números impares consecutivos es muy parecida a la general:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2=\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

Aunque es útil en otros estudios, parece, tal como se comentó más arriba, que la suma directa de cuadrados es más rápida en lenguaje PARI (y en el VBASIC de Excel) que la suma con esta fórmula. La razón no es que sea ineficiente, sino que requiere bucles de búsqueda más amplios. La usaremos para comprobar.

Para VBasic de Excel usaremos la misma función para cuadrados pares o impares. El listado siguiente sirve para cuadrados impares, y en una de las líneas añadimos como comentario cómo habría que sustituirla para que sirviera para cuadrados pares:

```
Function vsumacuad3$(n) 'Pares o impares
Dim i, j, m, a
Dim s$

s = ""
```

i = Int(Sqr(n)) ‘Comenzamos con la posibilidad de un solo cuadrado

If i Mod 2 = 0 Then i = i – 1 ‘Para adaptar al caso PAR, usar ***If i Mod 2 = 1 Then i = i – 1***

m = 0 ‘Número de soluciones

While i > 0 And m < 2

a = i ^ 2

j = i ‘La variable j recorre los posibles sumandos cuadrados

While j > 0 And a <= n

If a = n Then m = m + 1: s = s + "###" + Str$(i) + ", " + Str$(j) ‘Se ha encontrado una suma

j = j – 2 ‘Tanto **j** como **i** bajan de 2 en 2 para mantener la paridad

a = a + j ^ 2

Wend

i = i - 2

Wend

If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s ‘Se añade el número de soluciones

vsumacuad3 = s

End Function

Buscar soluciones con esta función es una tarea bastante lenta. Como se ha querido llegar a un rango de 2 millones en la búsqueda, ha sido un proceso de muchos minutos. Los primeros números que presentan dos soluciones con sumas de cuadrados impares son estos:

2890, 7735, 22715, 60655, 70225, 87571, 92225, 93314, 136115, 152354, 155519, 256330, 326434, 475861, 511225, 562475, 636360, 671195, 695419, 733485, 808335, 847760, 876490, 1105819, 1107414, 1225965, 1252216, 1293425, 1373701, 1540081, 1541165, 1627899, 1633069, 1832824, 1848405, 1979649

Por ejemplo, 2890 = 37^2 + 39^2 y también 2890 = 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 19^2 + 21^2 + 23^2 + 25^2

En el lenguaje PARI puedes probar con la fórmula insertada en párrafos anteriores, pero descubrirás pronto su lentitud de proceso. Este sería el código adecuado.

```
for(n=1, 100000, m=0; i=1; while(i^2<=n, j=1; while(j<i, if(i*(i + 1)*(i+2) - j*(j + 1)*(j+2) == 6*n, m+=1); j+=2); i+=2);if(m>1,print1(n,", ")))
```

Después de transcurrir algunos minutos, te devolverá las ocho primeras soluciones: 2890, 7735, 22715, 60655, 70225, 87571, 92225, 93314. Hay que imaginar lo que tardaría en llegar a 2 millones en la búsqueda.

Es más rápido este otro programa:

```
ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0, a); i=i-(i%2==0); m=0; while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0 && a<=n, if(a==n, m+=1); j-=2; a=a+j^2); i-=2); return(m>1)}
```

concat([0], select(ok, [1..22000]))

Suma de cuadrados pares

Las técnicas usadas para los números impares sirven también para los pares, ya que sus fórmulas son similares. En el listado para impares en Vbasic ya lo adveríamos:

If i Mod 2 = 0 Then i = i – 1 ‘Para adaptar al caso PAR, usar ***If i Mod 2 = 1 Then i = i – 1***

Así obtendríamos:

100, 1460, 3364, 5620, 6920, 8120, 13124, 14620, 14960, 18040, 18820, 19040, 19600, 20976, 21736, 23660, 23716, 28920, 30296, 33660, 33856, 37540, 44220, 44944, 47600, 49300, 50096, 59620, 66980, 69936, 75516, 76020, 76176, 79420, 81796, 82040, 87160, 91224, 94724, 99856

Por ejemplo, 1460=26^2+28^2 y también 1460=20^2+22^2+24^2

Versión en PARI

Prueba este código y obtendrás el mismo listado. Lo hemos organizado sólo hasta 22000 para que no sea tan lento.

ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0,a,j); i=i-(i%2==1); m=0; while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0 && a<=n, if(a==n, m+=1); j-=2; a=a+j^2); i-=2); return(m>1)}
concat([0], select(ok, [1..22000]))

Caso de pares e impares

Llegamos a nuestro objetivo principal, que es buscar aquellos números, como 1320, que admiten sumas de cuadrados pares y también de impares.

Para ello, refundiremos los algoritmos en uno: buscaremos pares e impares por separado y uniremos los resultados mediante una conjunción lógica. En Excel supone un listado bastante largo. Por ello, damos una idea en PARI:

Se idea una función (***issum***) que admita un segundo parámetro además de n (sea t), tal que si vale 0 sirva para los pares y si es 1, para los impares, o al contrario, porque es indiferente. Después, en la función Ok refundimos los dos resultados haciendo una conjunción con la conectiva Y (&& en PARI)

Quedaría así:

```
issum(n,t)={my(i,j,a,m=0);i=sqrtint(n);if(t==0,if(i%2==0,i-=1),if(i%2==1,i-=1));while(i>0&&m<1,a=i^2;j=i;while(j>0&&a<=n,if(a==n,m+=1);j-=2;a=a+j^2);i-=2);return(m)}
isok(m)=issum(m,0)&&issum(m,1)
for(p=1,20000,if(isok(p),print(p)))
```

Con estas dos funciones refundidas obtenemos el listado que pretendíamos. Entre los números encontrados, algunos presentarán soluciones dobles para pares o para impares, pero eso no nos importa por ahora. Lo dejamos por si alguien quiere investigar.

Chocará con la lentitud de los algoritmos.

Los primeros números con esta propiedad mixta son:
164, 596, 1320, 1736, 3156, 4040, 5204, 9416, 10660, 22096, 27080, 29260, 29584, 40020, 69940, 73140, 79540, 85284, 87636, 112916, 113480, 121996, 137960, 161480, 171940, 176420, 182104, 209924, 214396, 221780, 231760, 260120, 290280, …

Por ejemplo, 1736 equivale a estas dos sumas de cuadrados:

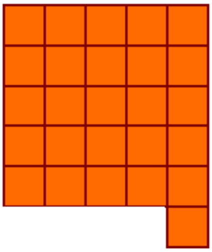
Pares: 1736=22^2+24^2+26^2
Impares:
1736=7^2+9^2+11^2+13^2+15^2+17^2+19^2+21^2

UN CUADRADO Y UNA UNIDAD

El día 5 de noviembre de 2008 se publicó en mi blog "Números y hoja de cálculo" una primera versión del tema de los números del tipo n^2+1

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2008/11/un-cuadrado-ms-una-unidad.html).

Después se amplió algo, pero como es un tema interesante, regresamos a él con nuevas ideas y materiales



En este regreso estudiaremos números tipo n^2+1 según su naturaleza. Lo normal es comenzar con los que son primos

Primos del tipo n^2+1

Con cualquier buscador, exigiendo que un número sea primo y de la forma n^2+1 obtendremos una lista con los primeros números de ese tipo. Por ejemplo, con Excel nos resultaría

P	n
2	1
5	2
17	4
37	6
101	10
197	14
257	16
401	20
577	24
677	26
1297	36

En la tabla figuran los primos P y los valores de n tales que $P=n^2+1$. Hemos usado nuestra función ESPRIMO y la condición de que P coincida con la parte entera de su raíz cuadrada incrementada después en una unidad, o bien que sea cuadrado P-1. Es lógico que el valor de n sea par, salvo el primer caso P=1.

Otra forma de caracterizarlos es que su función PHI (indicatriz de Euler) sea un cuadrado, ya que PHI(N) cuenta los coprimos con N menores que él incluido 1, y en los números primos PHI(P)=P-1, y de ahí que sea un cuadrado en este caso.

Estos números están publicados en

http://oeis.org/A002496, y según una conocida conjetura, forman una sucesión infinita

(Ver mi documento "Conjeturas" en http://www.hojamat.es/publicaciones/conjeturas.pdf)

Salvo el caso de 2, todos serán de la forma 4K+1, por ser **n** par y, según el Teorema de Navidad de Fermat, se descompondrán en suma de cuadrados de forma única. Así que, además de la suma n^2+1^2, no existirá otra similar. Efectivamente, si ampliamos la tabla anterior con nuestra función ESSUMACUAD, obtenemos un resultado único:

P	n	Sumacuad
2	1	$$ 1 1
5	2	$$ 2 1
17	4	$$ 4 1
37	6	$$ 6 1
101	10	$$ 10 1
197	14	$$ 14 1
257	16	$$ 16 1
401	20	$$ 20 1
577	24	$$ 24 1
677	26	$$ 26 1
1297	36	$$ 36 1

Este es un resultado idéntico con el Buscador de Naturales:

Solución	Detalles
2	1 + 1
5	1 + 4
17	1 + 16
37	1 + 36
101	1 + 100
197	1 + 196
257	1 + 256
401	1 + 400
577	1 + 576
677	1 + 676
1297	1 + 1296

Hasta el número

Con estas propiedades:

primo
es cuadrado(N-1)
suma c c

Hay que prestar atención a las condiciones impuestas.

N^2+1 y los restos cuadráticos

Otra forma de ver la igualdad $P=n^2+1$ es considerar que -1 es un resto cuadrático de P. Puedes estudiar los restos cuadráticos en mi documento de Teoría de las congruencias

(http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.pdf)

Para cada número primo impar P, los números menores que él se dividen en *Restos cuadráticos*, si son restos de un cuadrado, y *No restos cuadráticos*, si no existe un cuadrado que presente un resto con ese valor módulo P.

Nuestra hoja de cálculo *Congruencias2*, (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm) clasifica los posibles restos en Restos (cuadráticos) y No restos. Por ejemplo, para el 17, que es igual a 4^2+1, el -1 (en este caso equivalente a 16) sí figura como resto cuadrático. Lo vemos en la imagen:

Restos y no restos		
Módulo P	17	
1	1	3
2	6	5
4	2	6
8	5	7
9	3	10
13	8	11
15	7	12
16	4	14

En la figura el 16 (-1) como resto, y el 4 (en rojo) como raíz cuadrada.

Los primos como el 23, que no figuran en nuestro listado, no poseerán -1 como resto cuadrático (en este caso 22):

Restos y no restos		
Módulo P	23	
1	1	5
2	5	7
3	7	10
4	2	11
6	11	14
8	10	15
9	3	17
12	9	19
13	6	20
16	4	21
18	8	22

Vemos que el 22 (o su equivalente -1) figura entre los *no restos*, por lo que 23 no tiene la forma n^2+1, como era de suponer.

Estas consideraciones son triviales para el caso de números primos, pero serán útiles más adelante en el apartado de números compuestos.

Compuestos del tipo n^2+1

Otras veces n^2+1 es un compuesto, como 26 o 50. En ese caso la figura cuadrada se puede convertir en un rectángulo al añadirle un cuadradito más, pues se formaría uno de 2 por 13 o de 5 por 10 o 2*25.

Podíamos afirmar que estos compuestos son aquellos en los que n^2+1 se puede convertir en un rectángulo de lados enteros.

Según la definición de resto cuadrático, si un compuesto del tipo **$C=n^2+1$** tiene un divisor primo **p**, -1 deberá ser resto cuadrático módulo **p**, tal como vimos en el caso de los primos. Esto es muy importante, porque ningún número compuesto n^2+1 podrá ser múltiplo de p si este no admite resto -1. Sería el caso de 23: ningún elemento de la sucesión http://oeis.org/A002496 será múltiplo de 23.

En la sucesión http://oeis.org/A070303 figuran aquellos primos que no pueden ser divisores de un compuesto del tipo n^2+1:
3, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 103, 107, 109, 113, 127,…

Así que, por ejemplo, ningún número múltiplo de 7 puede convertirse en cuadrado al restarle una unidad.

Son aquellos que poseen la forma 4k+3, y no equivalen a una suma de cuadrados.

Lo puedes comprobar con este pequeño programa en PARI:
for(i=1,10^6,if(issquare(i*7-1),print(i)))

Al ejecutarlo descubrimos que no imprime nada, dentro del primer millón de primeros múltiplos de 7.

Resumiendo:

- Los restos cuadráticos clasifican, respecto a expresiones del tipo n^2+1, a los números primos en tres clases:
- Primos que no dividen a este tipo de expresiones: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43,…En la descomposición factorial de cuadrados más una unidad no figurarán estos números primos. Son los que presentan la forma 4N+3
- Números primos que sí son factores de expresiones del tipo n^2+1: 2, 13, 29, 41, 53,…Se corresponden con los primos de la forma 4N+1. Por ejemplo, $5^2+1=26=2*13$
- Por último, los que se pueden expresar como n^2+1: 5, 17, 37, 101, 197,… que son un subconjunto de los anteriores.

Así, por ejemplo, se dan estas descomposiciones:

$32^2+1=5^2*41$; $57^2+1=2*5^3*13$;
$211^2+1=2*113*197=2*113*(14^2+1)$

Los números de la forma n^2+1 tienen una propiedad muy elegante, y es que son divisores de otros números similares, y además, su cociente también es del tipo n^2+1, es decir, que para todo n, existen m y p tales que $(n^2+1)(m^2+1)= p^2+1$. En efecto, basta tomar m=n-1 y $p=n^2-n+1$:

$$(n^2+1)\cdot((n-1)^2+1) \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

$$(n^2-n+1)^2+1 \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

Triangulares del tipo n^2+1

Si a un número natural le exigimos que sea triangular del tipo n^2+1, es equivalente a que su anterior sea un cuadrado. Buscamos, pues, un cuadrado seguido de un triangular. No es difícil plantearlo. En nuestras funciones de Excel sería, usando la conectiva lógica Y:

Y(ESCUAD(N-1);ESTRIANGULAR(N))

Con ella es fácil encontrar los primeros ejemplos de triangulares con la forma n^2+1:
$10=4*5/2=3^2+1$
$325=25*26/2=18^2+1$

$11026=148*149/2=105^2+1$

Con PARI podemos usar el criterio issquare(i-1)&&issquare(8*i+1) y obtendríamos fácilmente otro elemento, el 374545.

Estudio algebraico

Podemos plantear que un número triangular sea el consecutivo a un cuadrado:

$X*(X+1)/2=Y^2+1$

Manipulamos esta igualdad buscando una ecuación diofántica tipo Pell-Fermat:

$X^2+X-2Y^2-2=0$

$4X^2+4X+1-8Y^2-9=0$

$(2X+1)^2-8Y^2=9$

$Z^2-8Y^2=9$

En este tipo de ecuaciones solemos intentar resolverlas como una ecuación de Pell (en lugar del 9 debería haber un 1 o un -1), para después aprovechar, si es posible, la recurrencia entre soluciones.

Usamos nuestra hoja de cálculo correspondiente (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell)

Sus primeras soluciones son:

Z=9, X=4, Y=3, con el triangular 4*5/2=10 y el cuadrado 3^2=9
Z=51, X=25, Y=18, Triangular 25*26/2=325 y cuadrado 18^2=324

"Engañamos" al algoritmo usando como primera solución Z=9, Y=3, con lo que el resto de soluciones se genera fácilmente de forma recursiva:

Z	Y	Constante	X	Triangular
3	**1**	**+1 ó -1**	1	1
9	3	9	4	10
51	18	9	25	325
297	105	9	148	11026
1731	612	9	865	374545
10089	3567	9	5044	12723490
58803	20790	9	29401	432224101
342729	121173	9	171364	14682895930

Excel no puede seguir con más cifras enteras. Estas soluciones están publicadas en http://oeis.org/A164055:

A164055 Triangular numbers that are one plus a perfect square. ....
1, 10, 325, 11026, 374545, 12723490, 432224101, 14682895930, 498786237505, 16944049179226, 575598885856165, 19553418069930370, 664240615491776401, 22564627508650467250, 766533094678624110085, 26039560591564569275626

Con el lenguaje PARI el planteo es muy simple:

```
for(i=1,10^8,if(issquare(i-1)&&issquare(8*i+1),print1(i,", ")))
```

Aquí se exige que i sea triangular (*issquare(8*i+1)*) y

En esta captura de pantalla se comprueba el resultado:

```
1, 10, 325, 11026, 374545, 12723490,
(18:47) gp >
```

Ha sido interesante estudiar esta sucesión desde varios puntos de vista.

Oblongos del tipo n^2+1

Es costumbre nuestra prolongar los estudios sobre triangulares a sus dobles, que son los números oblongos: O(n)=n(n+1). Nuestra sorpresa ha sido que solo existe la solución X=2=1*2 $Y=1^2$

No es difícil justificar esa ausencia. Si planteamos la ecuación lo razonaremos:

$X(X+1)=Y^2+1$

$X^2+X=Y^2+1$

$Y^2-X^2=X-1$

Esta igualdad solo se cumple para X=1 y X=Y

En los demás casos, con X>1, la diferencia entre X^2 y su siguiente cuadrado es 2X+1, siempre mayor que X-1, luego no habrá más soluciones.

Poligonales del tipo n^2+1

Hemos estudiado ya los triangulares, y los cuadrados no se pueden considerar en este caso porque no tendría sentido, así que probaremos con los pentagonales.

Nuestra función ESPOLIGONAL
(ver, por ejemplo,
https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/09/consecutivos-que-son-poligonales.html)

nos puede ayudar con la hoja de cálculo.

Con Excel

Usamos la fórmula de los pentagonales, $P(n)=(3*n^2-n)/2$, y un algoritmo similar, obteniendo:

Pentagonal Cuadrado
1 0
5 4
145 144
2501 2500
43265 43264

Comprobamos con este código PARI:

```
is(n)={my(m=1+24*n,b=(1+sqrt(m)));issquare(m)&&b%6
==0&&issquare(n-1)}
 for(i=1,5*10^8,if(is(i),print1(i,", ")))
```

Obtenemos:

1, 5, 145, 2501, 43265, 1387685, 24010001, 415425925

Es muy costoso y lento seguir. Lo dejamos en este punto.

Invitamos a repetir el trabajo con hexagonales. Entre los primeros sólo hemos encontrado 1 y 325.

ÁLGEBRA Y CUADRADOS

EXPRESIÓN CUADRÁTICA X^2+KY^2 = N

Hace unos meses publiqué en Twiter, como una curiosidad, esta tabla de desarrollos para el número 4516

Expresión	4516
x^2+y^2	54^2+40^2
x^2+2y^2	58^2+2×24^2
x^2+3y^2	29^2+3×35^2
x^2+4y^2	54^2+4×20^2
x^2+5y^2	4^2+5×30^2
x^2+6y^2	46^2+6×20^2
x^2+7y^2	22^2+7×24^2
x^2+8y^2	58^2+8×12^2
x^2+9y^2	40^2+9×18^2
x^2+10y^2	66^2+10×4^2

No existen muchos números que admitan esas diez expresiones cuadráticas con enteros. En concreto estos son los primeros:

1009, 1129, 1201, 1801, 2521, 2689, 3049, 3361, 3529, 3889, 4036, 4201, 4516, 4561, 4729, 4804, 5209, 5569, 5881, 6841, 7204, 7561, 7681, 8089, 8521, 8689, 8761, 8929, 9081, 9241, 9601, 9769, …

¿Qué hay detrás de esta lista?

Realmente, el problema radica en resolver la ecuación $X^2+kY^2=N$, con k>0 buscando soluciones enteras X>1 Y>1, para evitar trivialidades.

Despejando X en $X^2+kY^2=N$ nos queda

$$X = \sqrt{N - kY^2}$$

Por tanto, para averiguar si un número se puede desarrollar de esta forma, bastará recorrer los valores de Y entre 1 y la raíz cuadrada de N/k. El valor que dé como resultado un cuadrado en el radicando será válido.

Por ejemplo, hemos afirmado arriba que 4516 se puede desarrollar como X^2+9Y^2, con X>1 e Y>1. Según lo anterior, buscamos la raíz cuadrada de 4516/9, que resulta ser 22 (si tuviera decimales, truncaríamos). Por tanto habrá que ir probando desde Y=1 hasta Y=22 para ver qué valor da un cuadrado perfecto.

Si se posee la función ESCUAD (puedes copiarla desde nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/02/numeros-especiales-que-son-un-producto.html) para ver si un número es cuadrado perfecto, lo podemos organizar en una hoja de cálculo.

Valor de Y	4516-9Y²	Es cuadrado
1	4507	FALSO
2	4480	FALSO
3	4435	FALSO
4	4372	FALSO
5	4291	FALSO
6	4192	FALSO
7	4075	FALSO
8	3940	FALSO
9	3787	FALSO
10	3616	FALSO
11	3427	FALSO
12	3220	FALSO
13	2995	FALSO
14	2752	FALSO
15	2491	FALSO
16	2212	FALSO
17	1915	FALSO
18	**1600**	**VERDADERO**
19	1267	FALSO

No hemos encontrado una solución hasta el valor 18, que junto a la raíz cuadrada de 1600 forma la expresión vista en el primer párrafo 40^2+9*18^2=4516

Función esforma(N;k)

Esta búsqueda que hemos efectuado se podría automatizar. Dado un número N y un coeficiente k podemos diseñar una función que devuelva TRUE si es posible la expresión $N=X^2+KY^2$ y FALSE en caso contrario. Existe una variante más útil, y es que si la expresión es posible, la devuelva en forma de String, y en caso contrario la frase “NO”.

En el Basic de VBA podría tener este código (añadimos la función ESCUAD por si no la has encontrado)

Public Function escuad(n) As Boolean
If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End Function

Public Function esforma(n, k) As String
Dim a, b, i
Dim es As Boolean
If k <= 0 Then esforma = "NO": Exit Function ‘Para k<=0 no hay solución
a = Int(Sqr(n / k)) ‘Tope de búsqueda
es = False
i = 1
While i <= a And Not es
b = n - k * i * i
If escuad(b) And b > 0 Then es = True: b = Sqr(b) ‘Se encuentra una solución
i = i + 1
Wend
If es Then

esforma = Str$(b) + "^2+" + Str$(k) + "*" + Str$(i - 1) + "^2" ‘Construcción del String
Else
esforma = "NO" ‘No es expresable
End If
End Function

Con esta función podemos construir un esquema para ver si un número admite la expresión $N=X^2+KY^2$ con un valor de k dado. En esta imagen encontramos el desarrollo de 4516 con coeficiente 5:

Número N	4516
Coeficiente k	5
Es forma	4^2+ 5* 30^2

Hay que advertir que la función ESFORMA sólo da la primera solución posible, sin descartar que existan otras. En esta otra imagen se comprueba que el número 1298 no admite la expresión $N=X^2+7Y^2$

Número N	1298
Coeficiente k	7
Es forma	NO

Ordenando un poco los cálculos podemos reproducir la imagen con la que comenzamos (con formato de hoja de cálculo)

Valor de K	Forma cuadrática
1	54^2+ 1* 40^2
2	58^2+ 2* 24^2
3	67^2+ 3* 3^2
4	54^2+ 4* 20^2
5	4^2+ 5* 30^2
6	46^2+ 6* 20^2
7	22^2+ 7* 24^2
8	58^2+ 8* 12^2
9	40^2+ 9* 18^2
10	66^2+ 10* 4^2
11	NO
12	38^2+ 12* 16^2
13	NO

En el caso de k=3 nos devuelve una solución distinta, ya que hay más de una, y hemos prolongado la tabla para comprobar que para los valores k=11 y k=13 no existe solución.

Listado de números expresables

Con esta función y un bloque FOR-NEXT podemos encontrar la lista de los primeros números que se pueden expresar como $N=X^2+kY^2$ para un valor de k determinado, e incluso con un doble bucle, los que son expresables para varios valores. Así hemos construido la lista de los que son expresables para los valores k=1…10: 1009, 1129, 1201, 1801, 2521, 2689, …

Números que se puedan expresar con los valores de k=1...11 existen muchos menos. Los primeros son: 7561, 10756, 14116, 14281, …

El número 21961 satisface las expresiones para k=1…13 y los números 32356, 35044 y 35281 llegan al valor 14. Llegan hasta el 15 los números 32356, 35044 y 35281. Y así podríamos seguir, con valores cada vez más altos y escasos.

En estos listados están incluidos valores de k que pueden resultar redundantes. Por ejemplo, si un número es expresable como X^2+8Y^2, también lo es como X^2+2(2Y)^2. Así que si comprobamos la expresión X^2+8Y^2 lo estamos haciendo también con X^2+2Y^2. Como los cálculos no eran muy lentos, hemos preferido dejarlos. En otros trabajos similares se suelen estudiar tan solo los valores primos de k.

Aspecto modular

Si nos fijamos en los restos módulo k, es fácil ver que para que $N=X^2+kY^2$ ha de ser N congruente con X^2 módulo k, es decir, que N ha de ser **un resto cuadrático** módulo k. Si se dispone de un listado de esos restos, o un programa que los genere, podemos averiguar para qué polinomios del tipo dado es expresable un número. La hoja que hemos alojado en esta dirección
http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/hoja/congruencias2.xlsm
contiene restos cuadráticos para cada caso

Hemos adaptado provisionalmente esta herramienta para este caso particular. A cada número que probemos le calculamos el resto respecto a k y lo comparamos con la lista de cuadráticos. Esta prueba sólo la efectuaremos para valores de k que sean primos impares. Los demás casos se reducen a este. Vemos unos ejemplos mediante imágenes:

Restos y no restos			Número	4516
			Resto	5
Módulo P	13			
1	1	2		
4	2	3		
6	7	5		
9	3	7		
10	15	8		

Aquí vemos que el resto 5 no figura en el listado de restos cuadráticos (columna de la izquierda), 1, 4, 6, 9, 10, …módulo 13, por lo que no es expresable para ese coeficiente.

El mismo resultado obtendríamos mediante ESFORMA(4516,13).

Restos y no restos			35281
			12
Módulo P	13		Instruccior
1	1	2	Escribe el móc
3	4	5	
4	2	6	Pulsa el botón
9	3	7	
10	6	8	Resultarán **P-1**
12	5	11	A la derecha de

Por el contrario, el número 35281 sí es expresable mediante X^2+13Y^2, ya que su resto respecto al 13 es 12, y ese valor sí figura como resto cuadrático (el último de la primera columna). Lo dejamos aquí por si te apetece profundizar en la teoría de los restos cuadráticos.

DESCOMPOSICIONES EN DIFERENCIAS DE CUADRADOS

Después de jugar bastante con los números naturales, he observado la disparidad existente entre ellos respecto al número de sus descomposiciones en diferencias de cuadrados. Nos referimos al número de soluciones de $N=a^2-b^2$ con a y b enteros y a>0 y b>=0 para un N dado. Hay números que no admiten ninguna descomposición de este tipo, como el 22, y otros que admiten muchas. Un ejemplo es el 1680, que admite doce:

$1680=421^2-419^2=212^2-208^2=143^2-137^2=109^2-101^2=89^2-79^2=76^2-64^2=67^2-53^2=52^2-32^2=47^2-23^2=44^2-16^2=43^2-13^2=41^2-1^2$

En la tabla lo puedes comprobar:

a	b	a^2-b^2
421	419	1680
212	208	1680
143	137	1680
109	101	1680
89	79	1680
76	64	1680
67	53	1680
52	32	1680
47	23	1680
44	16	1680
43	13	1680
41	1	1680

¿De qué depende esto? Lo iremos viendo más adelante.

Obtención del número de descomposiciones

Al igual que hemos procedido con otros temas, comenzaremos encontrando las soluciones sin apoyo de la teoría, para más adelante fundamentarlo y después extraer propiedades y curiosidades.

Cualquier algoritmo para resolver esta cuestión se puede basar en el hecho de que una descomposición de este tipo equivale a expresar N mediante **un producto de factores con la misma paridad**, ambos pares o ambos impares. En efecto, si N=b^2-a^2 resultaría N=(a+b)(a-b), y ambos factores tienen la misma paridad, como se comprueba estudiando los cuatro casos posibles para a y b: par-par, par-impar, impar-par e impar-impar. Es fácil. A la inversa: si N=m*n, ambos de la misma paridad, resultaría que (m+n)/2 y (m-n)/2 serían enteros, cumpliéndose que N=((m+n)/2)^2-((m-n)/2)^2

El número de descomposiciones de N en diferencia de cuadrados coincide con el de productos con factores de la misma paridad y resultado N.

Para hacer más fáciles los trabajos, admitiremos que **b** pueda ser nulo, o de forma equivalente, que **los dos factores sean iguales**. Establecida esta propiedad, la búsqueda se efectuaría encontrando divisores **d** de **N** tales que **d y N/d tengan la misma paridad**. Esto lo podemos lograr fácilmente, usando divisiones enteras y aritmética modular. En el siguiente ejemplo lo implementamos como función Basic para hojas de cálculo:

Public Function numdifcuad(n)
Dim i, m
m = 0 ‘Contador de casos
For i = 1 To Sqr(n) ‘Se llega a la raíz cuadrada para evitar repeticiones de divisores
If n / i = n \ i Then ‘Si el cociente es igual al cociente entero, es que es divisor
If Abs(i - n / i) Mod 2 = 0 Then m = m + 1 ‘el divisor i y el cociente n/i tienen la misma paridad, ‘porque su diferencia da resto 0 módulo 2, luego incrementamos el contador.
End If
Next i
numdifcuad = m
End Function

Así de sencillo. Con esta función podemos contar las descomposiciones posibles para cada número. En la tabla puedes observar las correspondientes a los primeros números:

N	Núm. Descomp.
1	1
2	0
3	1
4	1
5	1
6	0
7	1
8	1
9	2
10	0
11	1
12	1
13	1
14	0
15	2
16	2
17	1
18	0
19	1
20	1
21	2
22	0

Verás que se dan muchos casos, desde el 22 o el 14, que no admiten descomposiciones, hasta el 16 o el 15, que admiten 2. Si siguiéramos leyendo hacia abajo descubriríamos que 45 es el primero que admite 3 casos: 45=23^2-22^2=9^2-6^2=7^2-2^2

Se corresponden con las descomposiciones en producto 45=45*1=15*3=9*5, todas con factores de igual paridad.

El primero con cinco casos es el 96, y así podríamos seguir hasta 1680 que vimos presenta doce.

N	NUMDIFCUAD(N)
1680	12

Estos resultados están ya publicados en https://oeis.org/A034178

A034178 Number of solutions to n = a^2 - b^2, a > b >= 0.

1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 3, 0, 1, 3, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 3, 3, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 1, 3, 3, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 1, 0, 3 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Podemos comprobar que coinciden con nuestros resultados

Análisis teórico de la situación

Es importante distinguir en principio si N es par o impar.

Caso 1: N es impar

Si N es impar, todos los posibles pares de factores N=m*n tendrán la misma paridad, luego sólo tenemos que contarlos. Recordamos que la función TAU, que cuenta los divisores, viene dada por la fórmula

$$\tau(a^p b^q c^r \ldots) = (1+p)(1+q)(1+r)\ldots$$

En ella a, b c, …representan los factores primos y p, q, r, …sus exponentes. Como los divisores han de formar pares, deberemos encontrar la mitad de la función (si esta es par), por tanto, si expresamos el número de descomposiciones mediante la función ND, tendremos:

$$ND(n) = \frac{\tau(n)}{2}$$

Lo comprobamos. Según la tabla el 21 admite dos descomposiciones. Como 21=3*7, τ(21)=(1+1)(1+1)=4, y su mitad entera es dos, como indica la tabla.

Si TAU es impar, será porque todos los exponentes serán pares, con lo que N será un cuadrado, apareciendo entonces un par nuevo al multiplicar la raíz cuadrada por sí misma. Podemos unificar ambas situaciones:

$$ND(n) = Int\left(\frac{\tau(n)}{2}\right) + (\tau(n)\ mod\ 2)$$

El segundo paréntesis valdrá cero en el caso par y uno en el impar.

Es el caso del número 3969:

N	Factores	TAU	NUMDIFCUAD
3969	[3,4][7,2]	15	8

Los factores son todos impares, los exponentes, 4 y 2, pares. TAU valdrá en este caso (1+4)(1+2)=15. Su mitad entera es 7, y añadimos 1 por su raíz cuadrada. Coincide entonces con el valor 8 que nos da NUMDIFCUAD.

Caso 2: N es par

En este caso aparece el factor 2, lo que obliga a que los dos factores que buscamos sean ambos pares y deban contener el 2 como factor. Esto no es posible si el factor 2 es único, con exponente 1, y esa es la causa de que 6, 10, 14 o 22 no presenten descomposiciones.

No admiten descomposiciones en diferencias de cuadrados los múltiplos de 2 que no lo sean de 4, es decir, los del tipo 4k+2

N es potencia de 2

Siguiendo un razonamiento similar al caso impar, deberemos encontrar la función TAU. Como tratamos con un solo exponente, sea p, el número de divisores será 1+p, pero al ser el caso par, el divisor 1 no nos interesa, y nos quedarían tan solo p divisores. Así, para p=5 dispondríamos de 2, 4, 8, 16 y 32. La potencia completa, en este caso 32, no nos valdría, porque tendría que formar par con el 1, que es impar, luego sólo nos quedan p-1 divisores disponibles. Esto vuelve a confirmar que el caso p=1 no produce pares de la misma paridad.

Los pares engendrados por el 2 serán pues, (p-1)/2 si p es impar y Int((p-1)/2)+1 si es par, por el par que se gana por su raíz cuadrada. Unificando:

$$ND(n) = Int\left(\frac{p-1}{2}\right) + ((p-1)\ mod\ 2)$$

N no es potencia de 2

Si el número es potencia de 2, sin factores impares, esta expresión vale, pero, en caso contrario, estas posibilidades del factor 2 se deberán multiplicar por las correspondientes al factor impar. La complicación surge del hecho de cada par puede producir productos idénticos, que se contarían dos veces, y hay que tener en cuenta los pares de factores repetidos en el caso de que p sea par. Por ello, la única forma de encajar todo es:

$$ND(n) = Int\left(\frac{p-1}{2}\right) * \tau(q) + \big((p-1)\ mod\ 2\big) * \left(Int\left(\frac{\tau(n)}{2}\right) + (\tau(n)\ mod\ 2)\right)$$

Multiplicamos el número de pares con factores desiguales de la potencia de 2 contenida en N por todos los factores de la parte impar de N, y después, en otro producto, los factores con repetición se multiplican sólo por los pares que se forman en la parte impar. Algo complicado, pero funciona.

Hemos plasmado los tres casos en una única función, a la que llamaremos NUMDIFCUAD2:

Public Function numdifcuad2(n)
Dim p, q, r, s, t, m

m = n: p = 0
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: p = p + 1: Wend ‘Extraemos la potencia de 2
If p = 1 Then numdifcuad2 = 0: Exit Function ‘Caso imposible
q = n / 2 ^ p ‘q es la parte impar
If q = 1 And p > 1 Then numdifcuad2 = Int((p - 1) / 2) + (p - 1) Mod 2
‘Es potencia de 2 pura
If p = 0 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): numdifcuad2 = Int(t / 2) + t Mod 2
‘Es un número impar
If p > 1 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): numdifcuad2 = t * Int((p - 1) / 2) + ((p - 1) Mod 2) * (Int(t / 2) + t Mod 2)
‘Tiene parte par y parte impar
End Function

La complejidad del cálculo nos ha aconsejado comprobar mediante tablas si las dos versiones de

NUMDIFCUAD coinciden. Lo hemos probado desde 1 hasta 100000, sin que aparecieran discrepancias. Como ejemplo, adjuntamos los valores de algunos números de seis cifras entre los que hay impares, pares y una potencia de 2 pura:

N de seis cifras	NUMDIFCUAD	NUMDIFCUAD2
199291	4	4
896064	20	20
163449	12	12
511488	32	32
524288	9	9

Otra interpretación

Como todo cuadrado es suma de números impares consecutivos, como por ejemplo 16=1+3+5+7, al restar dos cuadrados se eliminarán sumandos impares, quedando tan sólo aquellos que no sean comunes. Es, por ejemplo, el caso de 44=12^2-10^2=21+23 o el de 72=9^2-3^2=7+9+11+13+15+17

Así que el número de descomposiciones que estamos estudiando coincide con el de formas de expresar el número como suma de impares.

SUMAS DE CUADRADOS CON DIFERENCIAS SIMÉTRICAS

Preparando unos cálculos sobre fechas, me he encontrado con desarrollos dobles en suma de tres cuadrados, cuyas bases presentan diferencias simétricas en ambas sumas. El primer ejemplo fue el de 6/1/17, que escrita como 6117 se descompone así:

6117=(46-6)^2+46^2+(46+3)^2
6117=(44-3)^2+44^2+(44+6)^2

En las dos sumas las diferencias son las mismas, 3 y 6, pero situadas de forma simétrica.

Tres días más tarde, el 9/1/17, me encontré con que 9117 presentaba una propiedad similar:

9117=(56-6)^2+56^2+(56+3)^2
9117=(54-3)^2+54^2+(54+6)^2

Decidí entonces estudiar esta situación, que no parece darse a menudo. El que estos dos, 6117 y 9117 aparecieran tan seguidos pudo ser una casualidad. Después he visto que se encuentran más de los que creía.

Planteamiento del problema

En esta situación intervienen cuatro parámetros: las diferencias (en el ejemplo 3 y 6), a las que asignaremos las variables **a** y **b**, el número total (6117 o 9117 en nuestro ejemplo), al que llamaremos **N**, y el desplazamiento que existe entre los dos cuadrados centrales de la suma, que representaremos con la letra **m**. En ambos ejemplos el desplazamiento es de 2 (46-44 o 56-54). Con estos convenios, nuestro problema se puede plantear así:

$(x-a)^2+x^2+(x+b)^2 = (x+m-b)^2+(x+m)^2+(x+m+a)^2$

Se observa enseguida que aquí se pueden simplificar bastantes términos y, en efecto, la ecuación queda así:

$(4a-4b+6m)x = m(2b-2a-3m)$

Como, según hemos comprobado en los ejemplos, el valor de **x** no depende del de **m**, la única solución es que ambos paréntesis sean nulos, lo que nos lleva a que

$$m = \frac{2b-2a}{3}$$

Esta relación supone dos condiciones:

b-a **ha de ser múltiplo de 3**, es decir, **b=a+3k** (en los ejemplos, 3 y 6 la cumplen)

m **ha de ser par** (en los ejemplos m=2)

Si no lo ves claro con la variable x, aquí lo tienes con dos enteros p y q, p<q, a<b:
(p-a)^2+p^2+(p+b)^2 = (q-b)^2+q^2+(q+a)^2
3q^2-3p^2=-q(2a-2b)+p(2b-2a)
3(p+q)(q-p) = (p+q)(2b-2a)
3(q-p)=2(b-a)
Llegamos a la misma conclusión.
Para fijar mejor el problema suponemos que a<b y que las sumas no contienen sumandos nulos.

Relación de las sumas con N

Volvemos a una de las sumas equivalentes:

$(x-a)^2+x^2+(x+b)^2 = N$

Para valores dados de **a** y de **b**, será posible despejar x en la ecuación, y así relacionarla con N. Simultáneamente descubriremos qué condiciones ha de cumplir **N** para que **x** sea entero.

Simplificando y despejando x llegamos a

$$x = \frac{a - b \pm \sqrt{3N - 2a^2 - 2b^2 - 2ab}}{3}$$

a-b es múltiplo de 3, según vimos anteriormente, luego el radicando será equivalente a 9 veces un cuadrado. Pues ya tenemos la condición que ha de cumplir N:

$$\frac{3N - 2a^2 - 2b^2 - 2ab}{9} = p^2$$

Representamos por p^2 un cuadrado adecuado para que se verifique la igualdad. Si en cada caso particular sustituimos a y b por su valor, podremos saber si N puede presentar o no, una suma con diferencias simétricas.

Volvemos a nuestros ejemplos, en los que a=3, b=6 y m=2. Si sustituimos en la condición anterior nos resulta que

$$\frac{3N - 126}{9} = p^2$$

Esto también obliga a que N (en este caso) sea múltiplo de 3.

Hemos aplicado esta condición a los números comprendidos entre 5000 y 10000 y ahí han aparecido nuestros conocidos 6117 y 9117:

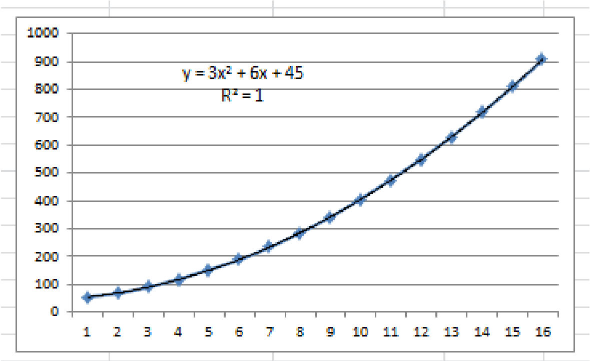
Para	
a=2	
b=6	
N	x
5085	40
5334	41
5589	42
5850	43
6117	**44**
6390	45
6669	46
6954	47
7245	48
7542	49
7845	50
8154	51
8469	52
8790	53
9117	**54**
9450	55
9789	56

De forma simultánea, hemos despejado x, con lo que comprobamos que al 6117 le corresponde el 44, como ya sabíamos, y al 9117 el 54.

No es de extrañar que las soluciones de x hayan resultado consecutivas. En realidad, para cada valor de x podemos encontrar N mediante un polinomio de segundo grado. En el ejemplo sería:

$N=(x-3)^2+x^2+(x+6)^2 = 3x^2+6x+45$

Así que para cada par de valores a y b, los valores de N presentan una relación cuadrática con x. Si tomo valores de N más pequeños, para que x comience en 1, y construyo un gráfico, se percibe claramente la relación cuadrática:



Puedes ir comprobando, en otros valores de la tabla, si se cumple la condición encontrada y si x tiene el valor esperado.

Valores de N con esta propiedad

En principio, no todos los números naturales tienen por qué presentar esta equivalencia de sumas. Por ejemplo, 4258 no la posee. ¿Cómo podíamos encontrar los números que admiten esta descomposición para valores adecuados de a, b y m?

La búsqueda de números con la propiedad de simetría se puede basar en recorrer, para cada uno, los valores posibles de **a** y **b**, y en lugar de usar **m**, apoyarnos en los criterios estudiados en párrafos anteriores.

Si consideramos, por ejemplo, que b>a, es claro que **b** no puede sobrepasar la raíz cuadrada de **N**, y **a**, menor que **b**, de la mitad de esa raíz, ya que ambos se suman.

Se podía estudiar una acotación más fuerte, pero esta no nos retrasa mucho. Para cada valor de **a** y **b** se estudia si se cumple la condición para **N**, y después un pequeño ajuste para que las bases de los cuadrados sean todas no negativas.

Hemos creado una función tal que a cada valor de **N** le hace corresponder la palabra “NO” si no presenta la simetría buscada, o una cadena con los valores de **a**, **b**, **x** y **m** en caso afirmativo.

Su código es el siguiente:

```
Public Function essumasim(n) As String
Dim a, b, r, m, p, q, d
Dim es As Boolean
Dim s$
es = False ‘variable que controla si se ha encontrado una solución
a = 1
r = Sqr(n)
s$ = ""
While a <= r / 2 And Not es ‘la variable a no sobrepasa la mitad de la raíz de N
b = a + 1
While b <= Sqr(r ^ 2 - a ^ 2) And Not es ‘acotación para b
q = (3 * n - 2 * a ^ 2 - 2 * b ^ 2 - 2 * a * b) / 9 ‘condición para que exista simetría
```

If escuad(q) Then

q = (a - b + Sqr(q * 9)) / 3 'valor de x

d = (b - a) * 2 / 3 'desplazamiento

If q + d - b >= 1 Then es = True: m = a: p = b 'evita un sumando negativo o cero

End If

b = b + 1

Wend

a = a + 1

Wend

If es Then essumasim = Str$(m) + ", " + Str$(p) + ", " + Str$(q) + ", " + Str$((p - m) * 2 / 3) Else essumasim = "NO" ‘salida de la función, o un NO o las variables deseadas

End Function

Si aplicamos esta función a los primeros números nos damos cuenta de que existen con simetría más de los esperados. Los primeros son los siguientes (hemos añadido los cuatro parámetros a su derecha).

	a	b	x	d
62	1	4	3	2
89	1	4	4	2
101	2	5	4	2
122	1	4	5	2
134	2	5	5	2
146	1	7	4	4
150	3	6	5	2
161	1	4	6	2
173	2	5	6	2
185	1	7	5	4
189	3	6	6	2
203	2	8	5	4
206	1	4	7	2
209	4	7	6	2
218	2	5	7	2
230	1	7	6	4

Los primeros valores con descomposición simétrica de este tipo son:
62, 89, 101, 122, 134, 146, 150, 161, 173, 185, 189, 203, 206, 209, 218, 230, 234, 248, 254, 257, 266, 269, 270, 278, 281, 285, 299, 305, 314, 317, 321, 326, 329, 338, 341, 342, 347, 356, 357, 362, 374, 377, 378, 386, 389, 398, 401, 404, 405, 414, 419, 422, 425, 426, 434, 437, 441, 446, 449, 458, 461, 467, 470, 474, 477, 485, 488, 489, 494, 497, …

Por ejemplo, el 62 presentará las diferencias 1 y 4, un valor central de 3 y un desplazamiento de 2. Lo comprobamos:

(3-1)^2+3^2+(3+4)^2 = 4+9+49 = 62
(5-4)^2+5^2+(5+1)^2 = 1+25+36 = 62

Obtenemos los dos desarrollos con diferencias simétricas, tal como esperábamos.

Los que no aparecen en la tabla, o bien no admiten descomposición en suma de tres cuadrados, como le ocurre al 40, bien las admiten sin simetría o si son simétricas las diferencias, una de ellas es nula. En el caso del 69 admite dos sumas, pero sus diferencias no son simétricas:

(2-1)^2+2^2+(2+6)^2 = 1+4+64 = 69

(4-2)^2+4^2+(4+3)^2 = 4+16+49 = 69

Otro número, el 114, presenta diferencias simétricas, pero una es nula. Por eso no se incluye en la lista:

114=(7-3)^2+7^2+(7+0)^2
114=(5-0)^2+5^2+(5+3)^2

Versión en PARI

Esta sucesión estaba inédita, y la hemos publicado en OEIS mediante este código en PARI:

```
is_sym_sum(n)=local(x,e=0,a,b,p);x=1;while(x^2<n\3&&e==0,a=1;while(x^2+(x+a)^2<n&&e==0,z=n-x^2-(x+a)^2; if(issquare(z),z=sqrtint(z);b=z-x-a;if(b>a,p=1;while(p^2<=n/3&&e==0,if(p^2+(p+b)^2+(p+a+b)^2==n,e=1);p+=1)));a+=1);x+=1);e
for(i=1,1000,if(is_sym_sum(i),print1(i,", ")))
```

Sigue a misma metodología organizada de otra forma.

La puedes consultar en la dirección
http://oeis.org/A282241

Nos alegra haber podido profundizar en este tema, pues no hemos encontrado un estudio similar.

DESCOMPOSICIONES DEL TIPO X^2+KY^2

Últimamente nos han surgido cuestiones sobre descomposiciones en suma de cuadrados. Recordamos dos:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2016/09/expresion-cuadratica-x2ky2-n.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/01/numero-de-descomposiciones-en.html

Siguiendo esta línea, hoy recorreremos aquellos números que se pueden descomponer en una suma del tipo x^2+ky^2, con k>1, x>0, y>0 **de varias formas distintas**. Expresado así, es un problema bastante general, que se presta a muchos casos y subcasos, por lo que sólo se desarrollarán algunos, con el fin de aprender a tratarlos y sacar alguna posible propiedad.
Hay un hecho que vale para todos ellos, y es que si N admite una descomposición de un tipo dado x^2+ky^2, con k>1, si lo multiplicamos por un cuadrado admitirá el mismo número de descomposiciones al menos, luego muchas soluciones que encontremos engendrarán otras al multiplicarlas por un cuadrado.

Caso k=2

Si deseamos encontrar todas las expresiones de un número de la forma x^2+2y^2, nuestra mejor herramienta es la que hemos presentado hace pocas semanas bajo el nombre de Cartesius, hoja de cálculo especializada en productos cartesianos condicionados. Puedes descargarla en versión para Excel y LibreOffice Calc, así como las instrucciones en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

En este caso bastará concretar: 2 sumandos, uno de ellos un cuadrado, el otro doble de un cuadrado, y que la suma de ambos sea igual al número propuesto. Por ejemplo, para saber cuántas descomposiciones de este tipo permite el número 969, daríamos a *Cartesius* estas instrucciones:

xtotal=2
xt=1..33
x1=suc(n^2)
x2=suc(2*n^2)
suma=969

La primera exige que sean dos sumandos. La segunda fija un rango de búsqueda de 1 al 33, para que no se nos escape ningún cuadrado inferior a 969, y las siguientes determinan un sumando n^2 y otro 2*n^2. Así se recorrerán todas las posibilidades, que resultan ser cuatro. Si copias esas instrucciones en Cartesius (zona de condiciones) y pulsas el botón **Iniciar** obtendrás estos cuatro sumandos:

X1	X2
1	968
169	800
841	128
961	8

Traducidos a nuestra cuestión, equivalen a las igualdades

969=1^2+2*22^2=13^2+2*20^2=29^2+2*8^2=31^2+2*2^2

No seguiremos por ahí. Nos interesa buscar números con este tipo de propiedad, y podemos dejar Cartesius solo para comprobar. Nos pasamos al VisualBasic de las hojas de cálculo.

Es fácil diseñar una función que recorra todas las posibilidades de suma del tipo x^2+ky^2 para un número dado. El que tenga forma de función nos permite construir tablas para distintos valores, cosa imposible con Cartesius. Proponemos esta:

Public Function numsumacuad(n, k) ‘Tiene dos parámetros, el número n y k

Dim x, p

p = 0 ‘Iniciamos el contador a cero
For x = 1 To Sqr(n - k) ‘Al estar x elevada al cuadrado, será inferior a una raíz cuadrada
If escuad((n - x ^ 2) / k) Then p = p + 1 ‘Si la diferencia dividida entre k es cuadrado, vale
Next x
numsumacuad = p ‘Contamos las veces
End Function

Esta función no se puede aplicar a 1, pero ya sabemos que no es suma de cuadrados no nulos.
Así podemos formar tablas como esta:

Número	Soluciones de N=x^2+ky^2
20	0
21	0
22	1
23	0
24	1
25	0
26	0
27	2
28	0
29	0
30	0

Vemos que entre 20 y 30 solo tienen solución 22, 24 y 27, y esta, doble. Todos los números que admiten al menos una de estas descomposiciones, se podrán representar como suma de tres cuadrados simétricos. Es sólo una curiosidad, pero atractiva.
Así, 24=2^2+4^2+2^2

Este número de soluciones, asignando un 0 al 1, está publicada en http://oeis.org/A216278 Destacamos en negrita el intervalo entre 20 y 30.

0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0**, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2…

Con la función ***numsumacuad*** podemos seleccionar aquellos números que admiten dos representaciones (al menos) distintas del tipo x^2+2y^2. Los primeros son estos:

27, 33, 51, 54, 57, 66, 81, 99, 102, 108, 114, 123, 129, 132, 153, 162, 171, 177, 187, 198, 201, 204, 209, 216, 219, 228, 243, 246, 249, 258, 264, 267, 291, 297, 306, 321, 323, 324, 339, 342, 354, 363, 369, 374, 387, 393, 396, 402, 408, 411, 417, 418, 432, 438, 451, 456, 459, 473, 486, 489, 492, 498, …

Todos los números de la sucesión son compuestos, pues Fermat, Euler y Gauss demostraron que los números primos sólo podían descomponerse como x^2+2y^2 de forma única, y no todos, porque deberían ser congruentes con 1 o 3 respecto al módulo 8.

Primo	Resto mod 8
3	3
11	3
17	1
19	3
41	1
43	3
59	3
67	3
73	1
83	3
89	1
97	1

En esta tabla figuran los primeros números primos que se pueden descomponer de la forma dada, y vemos que sus restos son 1 o 3 módulo 8. Un buen ejercicio es adivinar la descomposición en cuadrados mentalmente: 73=1^2+2*6^2, 89=9^2+2*2^2, …

En este tipo de búsquedas siempre recomendamos el lenguaje PARI como complemento o ampliación. En esta cuestión el código adecuado sería, por ejemplo:

for(n=3,500,p=0;for(x=1,sqrtint(n-2),if(issquare((n - x ^ 2) / 2),p+=1));if(p>1,print1(n,", ")))

Si cambiamos la condición p>1 por p==2 obtendremos los números que admiten exactamente dos descomposiciones del tipo que estamos estudiando:

27, 33, 51, 54, 57, 66, 81, 102, 108, 114, 123, 129, 132, 162, 177, 187, 201, 204, 209, 216, 219, 228, 246, 249, 258, 264, 267, 291, 321, 323, 324, 339, 354, 374, 393, 402, 408, 411, 417, 418, 432, 438, 451, 456, 473, 489, 492, 498, …

Vemos que faltan algunos, como el 99, que admiten más de una descomposición.

En todos estos números se dará la siguiente igualdad $N= a^2+2b^2=c^2+2d^2$ que equivale a (a+c)(a-c)=2(d+b)(d-b)

De esa identidad se deduce que a y c han de tener la misma paridad, para que coincida con el múltiplo de 2 del segundo miembro, pero entonces (a+c)(a-c) será múltiplo de 4, lo que obliga a que también d y b tengan la misma paridad. Lo puedes comprobar con los ejemplos.

Algunos de estos elementos son cuadrados

81, 324, 729, 1089, 1296, 2025, 2601, 2916, 3249, 3969, 4356, 5184, 6561, 8100, 9801, …

En ellos se cumple que n^2=x^2+2y^2, o bien (n^2-x^2)/2=y^2, es decir, que (n+x)(n-x)/2=y^2. Podemos interpretar que estos números generan triángulos de catetos enteros cuya área coincide con la de un cuadrado. Por ejemplo, tomamos 1089=33^2. Según nuestra hoja Cartesius admite cuatro descomposiciones del tipo deseado:

X4	X5
11	22
17	20
21	18
31	8

Si tomo la segunda, tendré: n=33, x=17, y=20, y se cumple 33^2=17^2+2*20^2, y aplicando los cálculos anteriores, se puede formar el triángulo de lados (33+17, 33-17), es decir 50 y 16, con área 50*16/2=400=20^2, que efectivamente, es un cuadrado.

Con el primero: (33+11,33-11) se convierte en los lados 44 y 22 de área 44*22/2=484=22^2.

Tipo x^2+3y^2

Este caso ofrece menor interés. Estos son los primeros números que admiten más de una descomposición de ese tipo:

Con más de un caso de sumas de cuadrados
28, 52, 76, 84, 91, 112, 124, 133, 148, 156, 172, 196, 208, 217, 228, 244, 247, 252, 259, 268, 273, 292, 301, 304, 316, 336, 343, 364, 372, 388, 399, 403, 412, 427, 436, 444, 448, 468, 469, …

Los puedes generar con este código PARI o con Cartesius o nuestra función en Visual Basic para Excel.

for(n=4,1000,p=0;for(x=1,sqrtint(n-3),if(issquare((n - x ^ 2) / 3),p+=1));if(p>1,write1("final.txt",n,", ")))

Por ejemplo, 469 se descompone como

469=13^2+3*10^2=19^2+3*6^2

Podemos seguir con otros números de casos. Por ejemplo, con tres o más descomposiciones están:

28, 52, 76, 84, 112, 124, 148, 156, 172, 196, 208, 228, 244, 252, 268, 292, 304, 316, 336, 364, 372, 388, 412, 436, 444, 448, 468, 496, …

Vemos que falta el 469, pero no el 468, que admite tres descomposiciones:

468=6^2+3*12^2=15^2+3*9^2=21^2+3*3^2

Puedes intentar descubrir casos llamativos. Un ejemplo: 2548 es el primero con nueve descomposiciones distintas. Insertamos el desarrollo con Cartesius. Las columnas X4 y X5 son los valores de x e y respectivamente:

X1	X2	X3	X4	X5
25	2523		5	29
196	2352		14	28
361	2187		19	27
961	1587		31	23
1225	1323		35	21
1681	867		41	17
2116	432		46	12
2401	147		49	7
2500	48		50	4

Tipo x^2+4y^2

Su interés radica en que produce sumas simétricas de cinco cuadrados. No lo estudiaremos. Tan sólo un ejemplo:

464=10^2+10^2+8^2+10^2+10^2

Tipo 2x^2+3^y2

También este caso presenta el interés de obtener una suma de cinco cuadrados que sea simétrica y con bases alternantes. También damos un ejemplo:

365 =3^2+13^2+3^2+13^2+3^2

La reiteración mata el interés. Es mejor parar aquí y dejar abiertos otros caminos de investigación.

CUADRADOS DEL TIPO N(N+K)

En enero de 2018 se publicaron en Twitter varios resultados sobre una propuesta de Republic of Math @republicofmath, uno de los cuales insertamos a continuación:

> **Republic of Math** @republicofmath · 8 ene.
> Is n = 508032? the unique positive integer for which n(n+2018) is a perfect square?
>
> Ref bit.ly/2COH7MF

A menudo acudo con frecuencia a la técnica de “dar vueltas” a una cuestión de la que tengamos noticia. En este caso concreto estudiaremos de forma algebraica y algorítmica la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Por ejemplo, si k=16, existen dos números, 2 y 9, que producen un cuadrado mediante dicha expresión. En efecto:

$2(2+16)=2*18=36=6^2$; $9(9+16)=9*25=225=15^2$

Para encontrar soluciones correspondientes a un valor de **k** acudiremos a búsqueda en hoja de cálculo y PARI para después abordar un estudio teórico. Es una metodología muy frecuente en mi blog: comenzar con una búsqueda sin apoyo teórico y después ir buscando regularidades o fundamentaciones algebraicas.

Estudio con hoja de cálculo

Es fácil programar una función que nos indique si un número **n** produce un cuadrado en la expresión **n(n+k)** para un **k** dado. La que insertamos a continuación nos servirá para valores de **k** pequeños. En otros casos los errores de truncamiento de los cálculos nos pueden llevar a conclusiones falsas. Por eso es interesante acudir a un lenguaje de más exactitud como PARI y dar una vuelta de Álgebra a esta cuestión.

La función más simple que podemos proponer es esta:

Function escuadprod(n, k) As Boolean
‘Depende de dos variables y devuelve VERDADERO o FALSO
Dim a
a = n * (n + k) ‘Construimos el producto pedido
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then escuadprod = True Else escuadprod = False
‘Si **a** equivale al cuadrado de la parte entera de su raíz cuadrada, vale
End Function

Con ella y un bucle de búsqueda se pueden encontrar las soluciones para un valor de **k** dado. En la imagen figuran las correspondientes a k=21, que son 4, 7, 27 y 100.

21	5000	1
4		21
7		21
27		21
100		21

Las comprobamos:

$4(4+21)=4*25=100=10^2$
$7(7+21)=7*28=196=14^2$
$27(27+21)=27*48=1296=36^2$
$100(100+21)=100*121=12100=110^2$

¿Se podrán encontrar más? Lo veremos en el estudio algebraico.

Para mayor velocidad y exactitud trasladamos vuestra función a PARI (lo puedes realizar fácilmente con otro lenguaje). Este sería el listado para k=21.

escp(n,k)=issquare(n*(n+k))
k=21;for(i=1,10000,if(escp(i,k),print(i)))

Hemos acotado la búsqueda en 10000, pero para valores de k superiores deberíamos ampliar la búsqueda. Ya trataremos esto más adelante.
El resultado es:

```
%8 = (n,k)->issquare(n*(n+k))
4
7
27
100
?
```

Coinciden las soluciones 4, 7, 27 y 100.

Estudio algebraico

Llamemos m^2 al cuadrado que debe producir el producto n(n+k).

En ese caso se cumplirá: $n(n+k)=m^2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$n^2 + kn - m^2 = 0$$

$$n = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4m^2}}{2}$$

El radicando ha de ser un cuadrado perfecto, llamémosle p^2, lo que nos lleva a que
$p^2 - 4m^2 = k^2$
$(p+2m)(p-2m)=k^2$

Si encontramos dos valores enteros para p y m, sustituyendo en la resolución de la ecuación:

$$n = \frac{p - k}{2}$$

Bastará entonces descomponer k^2 en dos factores, sean A y B, e igualar:

Resultará **p+2m=A, p-2m=B, p=(A+B)/2, m=(A-B)/4**

Deberemos buscar entonces A y B de forma que **su diferencia sea múltiplo de 4** y distinto de cero, para evitar la solución cero.

Veamos el caso de 21. Su cuadrado 441 admite estas descomposiciones en productos:

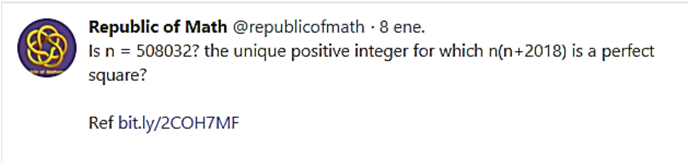
441*1=147*3=63*7=49*9=21*21

Los cuatro primeros se diferencian en un múltiplo de 4, y nos queda:
441*1: m=(441-1)/4=110; p=(441+1)/2=221; n=(p-k)/2=(221-21)/2=100
147*3: m=(147-3)/4=36; p=(147+3)/2=75; n=(75-21)/2=27
63*7: m=(63-7)/4=14; p=(63+7)/2=35; n=(35-21)/2=7
49*9: m=(49-9)/4=10; p=(49+9)/2=29; n=(29-21)/2=4

Obtenemos las soluciones sabidas 100, 27, 7 y 4. Hemos desechado la solución cero, que se obtendría de 21*21. Hemos deducido que el valor de p equivale a p=(A+B)/2, siendo A y B factores de k^2, luego p<=k^2/2, y, por tanto, el valor buscado n=(p-k)/2, tendrá como amplia cota k^2/4:

$$n \leq \frac{k^2}{4}$$

Podíamos ajustar más, pero no es necesario. Por ejemplo, para el caso k=2018, PARI nos da la solución (por cierto, única) de n=508032, ya publicada en Twitter

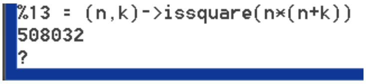


Esta solución cumple 508032<2018^2/4=1018081

Por tanto, en PARI deberíamos buscar hasta esa cantidad:

escp(n,k)=issquare(n*(n+k))
k=2018;for(i=1,1018081,if(escp(i,k),print(i)))

Obtendríamos la misma solución única:



¿Por qué es única?

Seguimos el proceso algebraico:
2018^2=4072324=4072324*1=2036162*2=1018081*4=
4036*1009=2018*2018

El único par válido es 2036162*2, luego p=(2036162+2)/2=1018082 y n=(1018082-2018)/2=508032

Es única la solución 508032

Terminamos con una consideración:

Si n convierte n(n+k) en un cuadrado, es decir, es solución para un k dado, el número *rn* será solución para *rk*.

Es una propiedad muy importante, que se justifica en estas simples igualdades:

Si $n(n+k)=m^2$, entonces $rn(rn+rk)=(rm)^2$

Número de soluciones para cuadrados del tipo n(n+k)

En el anterior apartado comenzamos a “dar vueltas” a la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Ya presentamos la función **escuadprod(n,k)** para averiguar si un número **n** forma cuadrado mediante **n(n+k)**. Después se tradujo a PARI y se desarrolló un procedimiento algebraico para encontrar las soluciones del problema planteado.

Comenzaremos por contar las soluciones que presenta cada valor de **k**, para pasar luego a algunos casos interesantes.

Función para contar soluciones

Mediante procedimientos similares a los desarrollados en los anteriores apartados, podemos crear la función ***numcuadprod(k)*** que cuente las soluciones para un valor concreto de **k**. El siguiente código para VBA de Excel resuelve la cuestión.

```
Function numcuadprod(k)
Dim a, i, r, c

c = 0 'Contador de soluciones
r = k ^ 2 / 4 'Cota de búsqueda
For i = 1 To r
a = i * (i + k)
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then c = c + 1 'Si se cumple, se incrementa el contador
Next i
numcuadprod = c
End Function
```

Si prefieres la exactitud del lenguaje PARI, puedes usar este código:

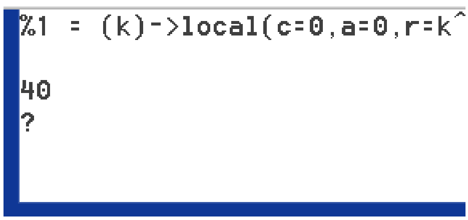
```
numcp(k)={local(c=0,
a=0,r=k^2/4,i=0);for(i=1,r,a=i*(i+k);if(issquare(a),c+=1
)); c}
print(numcp(960))
```

Lo hemos particularizado para k=960

Aquí tienes el resultado en Excel

Valor de k	960
Número soluciones	40

Y aquí en PARI



```
%1 = (k)->local(c=0,a=0,r=k^

40
?
```

Con la función ***escuadprod(n,k)*** que estudiamos anteriormente podemos buscar esas 40 soluciones. Son:

En Excel:

1	216	1000	4332
8	250	1156	5290
12	320	1352	5929
20	363	1470	6728
40	392	1849	9126
54	484	1944	11045
64	540	2420	13924
98	722	2738	18723
120	768	3136	28322
196	845	3375	57121

Y en PARI

```
%5 = (n,k)->issquare(n*(n+k))
1, 8, 12, 20, 40, 54, 64, 98, 120, 196, 216, 250, 320, 363, 392, 484, 540, 722,
768, 845, 1000, 1156, 1352, 1470, 1849, 1944, 2420, 2738, 3136, 3375, 4332, 5290
, 5929, 6728, 9126, 11045, 13924, 18723, 28322, 57121,
?
```

Casos particulares

Estudiaremos a continuación algunos casos particulares en los que no es complicado contar soluciones**.**

Múltiplos de 3

Todos tienen al menos una solución. Si k=3m, una solución para n es m, ya que $m(m+3m)=4m^2=(2m)^2$
Un razonamiento similar valdría para múltiplos de 8, ya que $m(m+8m)=(3m)^2$

Por tanto los múltiplos de un número anterior a un cuadrado presentarán la misma situación.

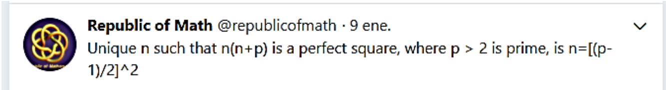
Números que no presentan soluciones
Los números 1, 2 y 4 no admiten soluciones, porque sus cuadrados no se pueden descomponer en dos factores A y B cuya diferencia sea múltiplo de 4.

Números primos mayores que 2
Si k es primo, $A=k^2$ y B=1. Todos los cuadrados de primos mayores que 2 son de la forma 4m+1, ya que $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$, $(2k+3)^2=4(k^2+3k+2)+1$, y por tanto A-

B será múltiplo de 4. En este caso tendremos que $p=(k^2+1)/2$ y $n=((k^2+1)/2-k)/2=(k^2-2k+1)/4=(k-1)^2/4$, o bien:

$$n=\left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Así lo comunica @republicofmath


Republic of Math @republicofmath · 9 ene.
Unique n such that n(n+p) is a perfect square, where p > 2 is prime, is n=[(p-1)/2]^2

Aquí añadimos que esta solución también es válida **para todos los impares**, aunque sólo tiene que ser única para los primos (recuérdese el 21).

En el caso de 21, n=(21-1)^2/4=400/4=100, pero existen otras.

Podemos listar las soluciones para los primeros primos y comprobar esa fórmula:

k	n
3	1
5	4
7	9
11	25
13	36
17	64
19	81
23	121
29	196

Potencias de 2 mayores que 4

Si $\mathbf{k=2^r}$, con $r>2$, el número de soluciones será **r-2**
En efecto, k^2 en ese caso se podría descomponer de la forma $A=2^a$, $B=2^b$, con la condición de que $a+b=2r$ $a>b$ y que la diferencia A-B sea múltiplo de 4, para lo que b ha de ser mayor que 1, ya que

$$A-B=2^a-2^b=(2^{a-b}-1)*2^b$$

En esa diferencia el paréntesis es impar, luego sólo será múltiplo de 4 si lo es 2^b, es decir, con $b>1$

Esto reduce los valores de b a **2, 3, 4,…r-1**, ya que el valor **r** produciría la igualdad A=B. Contamos casos, y, efectivamente, son **r-2**

Lo vemos para el 16:
S k=16, r=4, 2r=8, y los valores posibles de b, 2 y 3
Si b=2, B=4, A=64, p=(A+B)/2=34, n=(34-16)/2=9, y se cumple $9(9+16)=225=15^2$
Si b=3, B=8, A=32, p=(A+B)/2=20, n=(20-16)/2=2, y tenemos $2(2+16)=36=6^2$

Con la función ***numcuadprod(n)*** podemos comprobar estos resultados:

r	k	numcuadprod	r-2
3	8	1	1
4	16	2	2
5	32	3	3
6	64	4	4
7	128	5	5
8	256	6	6
9	512	7	7

Se observa la coincidencia de valores en los resultados de la función ***numcuadprod*** y la expresión **r-2**

Semiprimos pares mayores que 4

Estos números presentan una sola solución, ya que si k=2h, k^2=4h^2, con h primo impar y la única forma de descomponer k en dos factores adecuados es A=2h^2, B=2, con lo que su diferencia será 2*(h^2-1). El paréntesis será múltiplo de 4, ya que h^2 es de la forma 4m+1. Así que las soluciones se formarán así: p=(2h^2+2)/2=h^2+1 y de ahí, n=(p-k)/2=(h^2+1-2h)/2=
(h-1)^2/2=(k-2)^2/8
En resumen

$$n = \frac{(k-2)^2}{8}$$

Lo puedes comprobar con la tabla de los primeros semiprimos pares:

k	n
6	2
10	8
14	18
22	50
26	72
34	128
38	162
46	242
58	392
62	450
74	648
82	800
86	882
94	1058

Estos razonamientos confirman lo visto con anterioridad, cuando se afirmaba que 2018 (semiprimo par) sólo presentaba una solución, 508032.

Números de la forma $k=2^m*p$, con $m>1$ y p primo mayor que 2

En este caso $k^2=2^{2m}*p^2$

Al descomponer k^2 en factores, el primo **p** puede pertenecer a ambos, o bien p^2 pertenecerá a uno de ellos y al otro no.

Primer caso

Si el primo figura en ambos factores, sean $A=2^rp$ y $B=2^sp$, aparecerán tantos factores como indique 2^m, ya que p no añadirá ninguno más. Como vimos en el apartado de potencias de 2, se producirán **m-2** soluciones válidas.

Segundo caso

Si p^2 figura en un factor y en otro no, ambos factores han de ser múltiplos de 4, luego de todas las potencias de 2 que dividen a 2m, sean 2^1, 2^2, 2^3,… 2^{2m-2}, 2^{2m-1}, 2^{2m}, habrá que eliminar la primera, que no es múltiplo de 4, y las dos últimas, que impedirían que fuera múltiplo de 4 el otro factor, luego sólo nos quedan **2m-3** posibilidades.

Sumamos y resultan **3m-5** el número de soluciones que admite **$k=2^m*p$.**

Lo comprobamos con un ejemplo. Sea $k=80=2^4*5$. Según la fórmula, deben aparecer 2*4-5=7 soluciones. Lo desarrollamos:
$K^2=6400$
Descomponemos en productos válidos.

Primer caso

Debe entrar el 5 en ambos factores. Las posibilidades son: 320*20 y 160*40, en total 4-2 soluciones, que serían:
A=160 B=40, p=(160+40)/2=100, n=(100-80)/2=10. Se cumple: $10(10+80)=900=30^2$

A=320, B=20, p=(320+20)/2=170, n=(170-80)/2=45. Compruebo: $45(45+80)=75^2$

Segundo caso

El primo 5 sólo figura en un factor. Nos quedarían los productos válidos 1600*4, 800*8, 400*16, 200*32, 100*64, que darían lugar (omitimos los cálculos) a las soluciones 361, 162, 64, 18 y 1. Serían 5 soluciones, es decir 2*4-3, según la fórmula.

Resumimos ambos casos y resultan las siete soluciones (3*4-5) que podemos obtener con la función *escuadprod*:

Soluciones k=80	n(n+k)	Raíz cuadrada
1	81	9
10	900	30
18	1764	42
45	5625	75
64	9216	96
162	39204	198
361	159201	399

Números impares

En el caso de los impares el cálculo se simplifica. Sólo necesitamos conocer su descomposición factorial, en la que todos los números primos serán impares. Todos ellos serán del tipo 4k+1 o 4k+3, pero sus cuadrados, cuartas o sextas potencias serán todos del tipo 4k+1 y sus diferencias múltiplos de 4. Si en el emparejamiento un primo del tipo 4k+3 se toma una vez, el otro factor también lo contendrá, y se compensa el 3 al restar, resultando también un múltiplo de 4.

En este caso k^2 tendrá la forma $k^2=p^{2t}q^{2u}r^{2v}s^{2w}$…, con p, q, r, s primos y t, u, v y w sus exponentes primitivos. Se sabe que entonces su número de divisores será (1+2t)(1+2u)(1+2v) …Este producto es la función TAU, la que cuenta divisores.

Todos esos factores se deberán emparejar, ya que sus diferencias siempre serán múltiplos de 4. Un par tendrá dos factores iguales, y se deberá eliminar, con lo que nos quedan **(TAU(k^2)-1)/2** productos posibles, y soluciones para k.

Ejemplo

Si k=165=3*5*11, según la función numcuadprod, se deberán esperar 13 soluciones, número que coincide con la fórmula que acabamos de obtener: =(TAU(165^2)-1)/2=(3^3-1)/2=26/2=13. En efecto, al sacar los divisores de 165^2 podemos obtener trece pares válidos. Reproducimos los cálculos habituales para sacar todas las soluciones para k=165:

A	B	p	n
27225	1	13613	6724
9075	3	4539	2187
5445	5	2725	1280
3025	9	1517	676
2475	11	1243	539
1815	15	915	375
1089	25	557	196
825	33	429	132
605	45	325	80
495	55	275	55
363	75	219	27
275	99	187	11
225	121	173	4
165	165	No válido	

El último par se desecha por tener los factores idénticos, y nos quedan 13 soluciones en la última columna. Coinciden con las obtenidas mediante búsqueda ordenada con la función ***escuadprod*** ya vista anteriormente:

4
11
27
55
80
132
196
375
539
676
1280
2187
6724

Un ejemplo con k conteniendo potencias:
Sea $k=3^3*5^2*7=4725$. Su cuadrado tendrá de exponentes 6, 4 y 2. Calculamos
TAU=(1+6)(1+4)(1+2)=7*5*3=105

El número de soluciones será (TAU-1)/2=(105-1)/2=52, que coincide con el que nos devuelve *numcuadprod*:

k	numcuadprod(k)
4725	52

Caso general

Ya hemos acumulado experiencia para abordar el caso general, que resume en cierto modo lo descubierto hasta ahora. Mediante búsqueda empírica y razonamiento posterior, creemos que podemos acudir a este procedimiento:

(1) Encontramos **la valuación** del número **k** respecto a 2, es decir, el exponente máximo del 2 contenido en el número dado, llamémosle **m**. Esto quiere decir que el número k se descompone en parte par, 2^m, y parte impar. Entonces:

$k^2=2^{2m}*v$, siendo v la parte impar.

(2) Hallamos la función TAU de la parte impar v, y aplicamos la fórmula vista en párrafos anteriores **(TAU(k^2)-1)/2** , y al resultado le llamaremos **t**.

(3) En ese caso, el número de soluciones para nuestra condición de que sea cuadrado n(n+k) vendrá dada por **N=t*(2m-3)+m-2** si m>2. Si no, lo tratamos como impar.

El primer sumando proviene de combinar todas las soluciones de la parte impar (la TAU t) con todas las de 2^m (vimos que con un solo primo resultaban 2m-3) y el segundo de la partición que se desechó en la parte impar por tener dos factores iguales (k*k).

Esto hay que tomarlo como una explicación, no como demostración, que requeriría un conteo más sistemático de todos los casos. Lo vemos, por ejemplo, con $336=2^4*3*7$. En este caso m=4 y la parte impar es $441=3^2*7^2$, cuya TAU vale (1+2)(1+2)=9 y t=(9-1)/2=4.

Por tanto, según la expresión que hemos presentado, n=4*(2*4-3)+4-2=4*5+2=22

En efecto, la función ***numcuadprod*** nos devuelve 22:

n	336
numcuadprod(n)	22

Según el razonamiento de más arriba, el segundo sumando, 4-2=2 proviene de tomar en la parte impar de 21^2 el par 21*21. Y así es en este ejemplo, ya que se corresponderían a los productos

1344*84=21*64*21*4=336*336 y a
672*168=21*32*21*8=336*336

Los restantes 20 productos válidos se corresponderán con todas las combinaciones válidas de los productos de la parte par con los de la parte par. Por curiosidad, los copiamos aquí. Ninguno de ellos presenta el factor común 21 en ambos factores:

28224*4, 14112*8, 9408*12, 7056*16, 4704*24, 4032*28, 3528*32, 3136*36, 2352*48, 2016*56, 1764*64, 1568*72, 1344*84, 1176*96, 1008*112, 784*144, 672*168, 576*196, 504*224 y 448*252.

Las 22 soluciones para n respecto al valor de k=336 las podemos obtener, ordenadas de menor a mayor, con la función ***escuadprod***:

2
7
14
25
27
42
64
112
150
189
242
289
350
432
625
722
847
1014
1600
2187
3362
6889

Tomemos una al azar, como 847: $847*(847+336)=1002001=1001^2$. Resulta un cuadrado, luego es una solución válida.
Hemos construido la función ***numcuadprod2*** recogiendo el algoritmo propuesto. Con ella se puede verificar la coincidencia de los dos métodos que podemos utilizar, el de la búsqueda simple (*numcuadprod)* y el basado en las consideraciones desarrolladas en este apartado (*numcuadprod2*)
En esta tabla de datos tomados al azar se observa la equivalencia:

Número	numcuadprod	numcuadprod2
4	0	0
32	3	3
6	1	1
24	4	4
32	3	3
77	4	4
220	4	4
480	31	31
500	3	3

> **Republic of Math** @republicofmath · 7 ene.
> There are (at least) 4 positive integers n for which n(n+2019) is a perfect square: n = 673, 112225, 338688, 1018081

Casos publicados

Analizamos ahora los casos que se publicaron en Twitter en enero de 2018:

Según nuestro procedimiento, como es impar, buscamos la función TAU de su cuadrado:

2019=3*673, luego TAU(2019^2)=(1+2)(1+2)=9, y el número de soluciones será (9-1)/2=4

Estas cuatro soluciones provendrán de los productos válidos del cuadrado de 2019:

A	4076361	1358787	452929	6057
B	1	3	9	673
p	2038181	679395	226469	3365
n	1018081	338688	112225	673

Hemos seguido lo sugerido en párrafos anteriores:
- Buscar productos cuya diferencia sea múltiplo de 4
– Llamar A y B a los factores
– Encontrar su promedio p
– Aplicar la fórmula n=(p-k)/2.

Podemos observar la coincidencia entre nuestro cálculo y el publicado.

Republic of Math @republicofmath · 7 ene.
n(n+2020) is a perfect square for (at least) the following positive integers n: 1616, 9216, 50000, 254016

Traducir del inglés

Aquí 2020=2^2*5*101. Es el caso en el que el exponente de 2 es 2, luego el número de casos será 4, pues la parte impar sólo presenta dos factores y el cuadrado de 2 no incrementa ese número.

Los productos válidos de 2020^2 son:

A	1020100	204020	40804	10100
B	4	20	100	404
p	510052	102020	20452	5252
n	254016	50000	9216	1616

Republic of Math @republicofmath · 8 ene.
2310 = 2*3*5*7*11. There are at least 40 n s.t. n(n+2310) is a perfect square:
2,56,66,120,154,250,352,378,440,578,770,864,1120,1408,1690,1848,1922,2744,2970,3456,4418,5250,5632,7546,7776,9464,11000,12482,13690,17920,19074,25538,30618,43320,59488,72962,94136,132250,221184,665858

Para 2310=2*3*5*7*11 bastará calcular el número de casos de la parte impar de su cuadrado. Es fácil ver que TAU(2310^2)=3*3*3*3=81, luego el número de casos será (81-1)/2=40, tal como se afirma en la publicación que analizamos.

Reproducir los cuarenta casos es muy pesado. Deberíamos factorizar el cuadrado de 2310, 5336100 y buscarle todos los divisores:

5336100 2668050 1778700 1334025 … 10 9 7 6 5 4 3 2 1

Después formaríamos pares con ellos y nos quedaríamos con los que presentan una diferencia múltiplo de 4. No lo haremos con todos, sólo con los primeros:

A	2668050	889350	533610	381150
B	2	6	10	14
p	1334026	444678	266810	190582
n	665858	221184	132250	94136

Si siguiéramos el procedimiento con todos los pares de factores coincidiríamos con lo publicado de forma total.

Problema inverso

Hasta ahora hemos buscado el valor de **n** que consigue que **n(n+k)** sea un cuadrado. Si planteamos el problema inverso, si dado un **n** ver si existe un **k** que cumpla la misma condición, con lo visto en párrafos anteriores tenemos la respuesta, pues vimos **que n(n+3n) es un cuadrado, luego existe solución para todo n**.

También vimos más arriba que 8n, 15n, 24n, …son todas soluciones para k, luego existen infinitas. La más pequeña suele ser 3n, pero con muchas excepciones, como puedes ver en la siguiente tabla, en la que las hemos marcado en rojo:

n	k
1	3
2	6
3	9
4	**5**
5	15
6	18
7	21
8	**10**
9	**7**
10	30
11	33
12	**15**
13	39
14	42
15	45
16	**9**
17	51
18	**14**
19	57
24	**30**

Esos casos se producen en los números que contienen cuadrados. Analizamos la situación:

(a) Si n es libre de cuadrados, será producto de varios primos, todos elevados a exponente 1. Por tanto, el cuadrado resultante de n(n+k) ha de ser múltiplo de los cuadrados de esos primos, luego el paréntesis también lo será, lo que obliga a que k sea múltiplo de n. De ahí que la solución mínima sea 3n.

(b) Si n contiene un cuadrado mayor que 1, será, por ejemplo, $n=r^2*s$, lo que nos lleva a la situación de que $r^2*s*(r^2*s+k)$ sea un cuadrado. Esto se consigue dando un valor a k que convierta el paréntesis en otro cuadrado. Para ello se puede convertir r^2 en $(r+1)^2$. Sabemos que la diferencia entre esos dos cuadrados es 2r+1, luego el valor de k que nos conviene es (2r+1)*s, ya que r^2*s*(r^2*s+(2r+1)*s)= r^2*s*$(r+1)^2$*s= r^2*s^2*$(r+1)^2$, luego hemos conseguido el cuadrado. Lo vemos con algún ejemplo:

N=20=2^2*5. Hacemos k=(2*2+1)*5=25 y queda
20(20+25)=20*45=900=30^2
N=24=2^2*6. Si k=(2*2+1)*6=30, tenemos
24(24+30)=1296=36^2

No hemos analizado si existe en el caso de números que contienen cuadrados alguna solución menor que la presentada. Lo importante es que todos los valores de **n** admiten infinitas soluciones para **k**.

CUBOS

DIFERENCIAS DE CUBOS ENTEROS POSITIVOS

Algunos números enteros positivos son diferencia de dos cubos, también enteros y positivos. Por ejemplo, 3367 lo es de tres formas diferentes: $3367=34^3-33^3=16^3-9^3=15^3-2^3$. Otros números, como 8624, no coinciden con ninguna diferencia de cubos. Aquí aprenderemos a descubrir ejemplos y estudiar algunos casos especiales.

Cuando se trata con diferencias, el estudio previo que se debe emprender es el de encontrar una cota para los números que se restan. En este caso, además de ello, podremos añadir una condición que deban cumplir minuendo y sustraendo. Es un tema algebraico sencillo en este caso. Llamemos **a+k** a la base del cubo mayor y **a** a la del menor, siendo además **N** el valor de la diferencia entre ambos cubos. Tendremos entonces:

$$\mathbf{(a+k)^3- a^3 = 3a^2k+3ak^2+k^3 = k(3a^2+3ak+k^2) = N}$$

Esta igualdad nos indica que N ha de ser múltiplo de k. Esto nos da una cota para la diferencia entre bases, junto con la condición de que sea un divisor de N. Por otra parte, no es difícil acotar las bases de los cubos:

$$\mathbf{3a^2+3ak+k^2 = N/k}$$

$3a^2 < 3a(a+k) = N/k-k^2 < N/k$

De aquí deducimos que una cota de **a** es la raíz cuadrada de **N/(3k)**

$$a < \sqrt{\frac{N}{3k}}$$

Si recorremos los valores de los divisores de **N**, obtendremos valores posibles de **k**, y con esta cota podremos encontrar valores de **a** para comprobar si **$(a+k)^3- a^3 = N$**

Estas condiciones se usan en la siguiente función de VBasic, que nos devolverá las descomposiciones en diferencia de cubos que presente un número **N**:

Function difcubos$(n)
Dim k, a, t, m
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de soluciones
m = 0 ’Número de soluciones
For k = 1 To n / 2
If n / k = n \ k Then ‘**k** ha de ser divisor de **N**
t = Sqr(n / k / 3) ‘Cota para **a**
For a = 1 To t

If (a + k) ^ 3 - a ^ 3 = n Then m = m + 1: s = s + "a=" + Str$(a) + " k=" + Str$(a + k) ‘Si es una solución, se incorpora

Next a

End If

Next k

If s = "" Then difcubos = "NO" Else difcubos = ajusta(m) + " " + s ‘Si no hay solución devuelve un **NO**

End Function

Con esta función encontraremos los números enteros que son diferencia de cubos, con el dato del número de soluciones que presenten. Por ejemplo, en la siguiente tabla figuran los resultados desde 720 hasta 730:

Número N	Diferencias de cubos
720	NO
721	2 # a= 15 k= 16 # a= 2 k= 9
722	NO
723	NO
724	NO
725	NO
726	NO
727	NO
728	2 # a= 10 k= 12 # a= 1 k= 9
729	NO
730	NO

Observamos que sólo dos números cumplen la condición, y, en este caso, con dos soluciones cada uno. Las diferencias son divisores de N. En el caso de 721,

son 1 y 7, y, en el caso de 728, 2 y 8, divisores en ambos números.
Una idea nos viene al momento, y es que si N es primo, la única diferencia posible es 1:

Si un número primo es diferencia de dos cubos, ambos han de ser consecutivos.

Lo comprobamos con la función anterior añadiendo la condición de ser primo:

Primos cubanos	Cubos consecutivos
7	1 # a= 1 k= 2
19	1 # a= 2 k= 3
37	1 # a= 3 k= 4
61	1 # a= 4 k= 5
127	1 # a= 6 k= 7
271	1 # a= 9 k= 10
331	1 # a= 10 k= 11
397	1 # a= 11 k= 12
547	1 # a= 13 k= 14
631	1 # a= 14 k= 15
919	1 # a= 17 k= 18
1657	1 # a= 23 k= 24
1801	1 # a= 24 k= 25
1951	1 # a= 25 k= 26

Se trata de los "primos cubanos", que son objeto de estudio en otra entrada en mi blog

(ver
https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/03/primos-cubanos.html

Están publicados también en https://oeis.org/A002407

Los primeros números que son diferencia de cubos de una, dos o tres formas son estos:
7, 19, 26, 37, 56, 61, 63, 91, 98, 117, 124, 127, 152, 169, 189, 208, 215, 217, 218, 271, 279, 296, 316, 331, 335, 342, 386, 387, 397, 448, 469, 485, 488, 504, 511, 513, 547, 602, 604, …

Están publicados en https://oeis.org/A038593, y parece ser que serán muy raros los que presenten más de tres soluciones. Como en nuestra función el primer carácter representa el número de soluciones, no es difícil separar esta tabla según este dato.

Una sola solución:

Número	Una sola diferencia de cubos
7	1 # a= 1 k= 2
19	1 # a= 2 k= 3
26	1 # a= 1 k= 3
37	1 # a= 3 k= 4
56	1 # a= 2 k= 4
61	1 # a= 4 k= 5
63	1 # a= 1 k= 4
91	1 # a= 5 k= 6
98	1 # a= 3 k= 5
117	1 # a= 2 k= 5
124	1 # a= 1 k= 5
127	1 # a= 6 k= 7
152	1 # a= 4 k= 6
169	1 # a= 7 k= 8
189	1 # a= 3 k= 6
208	1 # a= 2 k= 6

https://oeis.org/A014439

Dos diferencias de cubos:

Número	Dos diferencias de cubos
721	2 # a= 15 k= 16 # a= 2 k= 9
728	2 # a= 10 k= 12 # a= 1 k= 9
999	2 # a= 9 k= 12 # a= 1 k= 10
5768	2 # a= 30 k= 32 # a= 4 k= 18
5824	2 # a= 20 k= 24 # a= 2 k= 18
5859	2 # a= 24 k= 27 # a= 10 k= 19
7992	2 # a= 18 k= 24 # a= 2 k= 20
8911	2 # a= 54 k= 55 # a= 17 k= 24
9919	2 # a= 57 k= 58 # a= 9 k= 22

https://oeis.org/A014440

Tres diferencias:

Números	Tres diferencias de cubos
3367	3 # a= 33 k= 34 # a= 9 k= 16 # a= 2 k= 15
26936	3 # a= 66 k= 68 # a= 18 k= 32 # a= 4 k= 30

Observamos que van disminuyendo los casos.
Ver https://oeis.org/A014441

Segunda versión de búsqueda

En la función propuesta hemos usado un bucle de búsqueda para **k** y otro para **a**. Este último se puede evitar despejando a en $\mathbf{3a^2+3ak+k^2-N/k}$. Así lo hemos efectuado en PARI, y se consigue más velocidad de proceso, pero para números con tres soluciones sigue siendo lento. Lo copiamos aquí por si alguien desea experimentar:

difcubos(n)={my(m=0,k,a,q);for(k=1,n/2,if(n%k==0,q=9*k^2-12*(k^2-n/k);if(issquare(q),a=(-3*k+sqrt(q))/6;if(a==truncate(a)&&a>0,m+=1))));m}
for(i=1,10^6,if(difcubos(i)==3,print(i)))

Se exige en él que **a** sea entera y positiva. Cambiando el 3 de la última línea se puede intentar buscar números con cuatro soluciones, si se dispone de un equipo potente.

Casos particulares en la diferencia

En nuestras publicaciones en Twitter o X nos aparecen casos en los que un cuadrado y un cubo están relacionados por una identidad. En este escrito comenzaremos por estudiar el caso en el que una diferencia de cubos es cuadrada. Para ello cambiaremos un poco nuestra función básica, en el sentido de exigir al principio que N sea un cuadrado. El resultado, ya conocido, es

Cuadrados	Raíz cuadrada	Diferencia de cubos
169	13	1 # a= 7 k= 8
784	28	1 # a= 6 k= 10
2401	49	1 # a= 7 k= 14
10816	104	1 # a= 28 k= 32
21609	147	1 # a= 7 k= 28
32761	181	1 # a= 104 k= 105
35721	189	1 # a= 6 k= 33
50176	224	1 # a= 24 k= 40
123201	351	1 # a= 63 k= 72
130321	361	1 # a= 38 k= 57
150544	388	1 # a= 110 k= 114
153664	392	1 # a= 28 k= 56

La segunda columna está publicada en https://oeis.org/A038597

Hay un caso interesante en la tabla, y es 14^3-7^3=7^4, y esto nos anima a buscar otras diferencias entre cubos que sean potencia de cualquier exponente. Para ello disponemos de la función en Excel ESPOTENCIA, que devuelve el exponente mínimo de una potencia, o cero si no es de ese tipo. Con ella encontramos diferencias que son cuartas potencias:

Potencia cuarta	Raíz	Diferencia de cubos
2401	7	4 # a= 7 k= 14
130321	19	4 # a= 38 k= 57
456976	26	4 # a= 26 k= 78

Con esta búsqueda hemos descubierto una propiedad interesante: si N es diferencia entre dos cubos, su cuarta potencia también lo es:

N	Dif. Cubos	N^4	Dif. Cubos
7	1 # a= 1 k= 2	2401	1 # a= 7 k= 14
19	1 # a= 2 k= 3	130321	1 # a= 38 k= 57
26	1 # a= 1 k= 3	456976	1 # a= 26 k= 78
37	1 # a= 3 k= 4	1874161	1 # a= 111 k= 148
56	1 # a= 2 k= 4	9834496	1 # a= 112 k= 224
61	1 # a= 4 k= 5	13845841	1 # a= 244 k= 305
63	1 # a= 1 k= 4	15752961	1 # a= 63 k= 252
91	1 # a= 5 k= 6	68574961	1 # a= 455 k= 546

La razón es sencilla: Si en una diferencia de cubos con resultado N multiplicamos ambos cubos por N^3, resultará otra diferencia de cubos con resultado N^4. Ocurrirá igual con N^7 o N^{10}.

Podemos observar que los datos de la cuarta columna coinciden con los de la segunda multiplicados por N.

Otros tipos de diferencias de cuadrados

Esta última parte del estudio la desarrollaremos con brevedad salvo que surja alguna propiedad interesante.

Diferencias que son números primos

Ya advertimos que, en este caso, las bases de los cubos han de ser consecutivas y los primos son los llamados “cubanos”:

Número primo	Diferencia de cubos consecutivos
7	1 # a= 1 b= 2
19	1 # a= 2 b= 3
37	1 # a= 3 b= 4
61	1 # a= 4 b= 5
127	1 # a= 6 b= 7
271	1 # a= 9 b= 10
331	1 # a= 10 b= 11
397	1 # a= 11 b= 12
547	1 # a= 13 b= 14
631	1 # a= 14 b= 15
919	1 # a= 17 b= 18
1657	1 # a= 23 b= 24
1801	1 # a= 24 b= 25
1951	1 # a= 25 b= 26
2269	1 # a= 27 b= 28

Diferencias de cubos triangulares

Los primeros son estos:

Triangular	Orden triangular	Diferencia de cubos
91	13	1 # a= 5 k= 6
4095	90	1 # a= 1 k= 16
5886	108	1 # a= 15 k= 21
7875	125	1 # a= 5 k= 20
8128	127	1 # a= 24 k= 28
8911	133	2 # a= 54 k= 55 # a= 17 k= 24
9045	134	1 # a= 6 k= 21
17955	189	1 # a= 12 k= 27
21736	208	1 # a= 6 k= 28
23653	217	1 # a= 30 k= 37
47278	307	1 # a= 15 k= 37

No descubrimos particularidades, luego pasamos a otro caso.

Diferencia de cubos igual a suma de cubos

Aprovechando una pequeña función disponible, SUMCUBOS, se puede exigir que la diferencia de cubos coincida con la suma de otros dos. Los primeros resultados son:

Número	Diferencia de cubos	Suma de cubos
91	1 # a= 5 b= 6	1: a= 3 b= 4
152	1 # a= 4 b= 6	1: a= 3 b= 5
189	1 # a= 3 b= 6	1: a= 4 b= 5
217	1 # a= 8 b= 9	1: a= 1 b= 6
513	1 # a= 6 b= 9	1: a= 1 b= 8
728	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9	1: a= 6 b= 8
1027	1 # a= 18 b= 19	1: a= 3 b= 10
1216	1 # a= 8 b= 12	1: a= 6 b= 10
1512	1 # a= 6 b= 12	1: a= 8 b= 10
1736	1 # a= 16 b= 18	1: a= 2 b= 12
2457	1 # a= 15 b= 18	1: a= 9 b= 12
3087	1 # a= 17 b= 20	1: a= 7 b= 14
4104	1 # a= 12 b= 18	2: a= 2 b= 16 a= 9 b= 15
4706	1 # a= 27 b= 29	1: a= 11 b= 15
4921	1 # a= 40 b= 41	1: a= 2 b= 17
4977	1 # a= 22 b= 25	1: a= 4 b= 17

Están publicados en https://oeis.org/A225908

Como se señala en esta página, estos datos dan lugar a identidades en las que un cubo es suma de otros tres, pues basta pasar de miembro el cubo que aparece restando:

6^3-4^3=3^3+5^3 da lugar a 6^3=3^3+4^3+5^3.

Esto explica que en la segunda columna aparezcan repetidos tres veces algunos cubos mayores de cada caso, como el 6, el 9 o el 12, ya que la suma da lugar a tres diferencias.

SUMAS DE CUBOS CON PITÁGORAS Y PELL

No es la primera vez que en mi blog se desarrollan ideas que han nacido a partir de las entradas de otros autores que seguimos habitualmente. En este caso partiremos de una serie de igualdades publicadas por Benjamin Vitale en el mes de de febrero.

http://benvitalenum3ers.wordpress.com/2013/02/21/sum-of-the-cubes-of-consecutive-odd-numbers-is-a-square/

En esa entrada y en otras anteriores y posteriores propone igualdades de estos tipos:

333^3 + 334^3 + 335^3 + 336^3 + 337^3 + 338^3 + 339^3 = 265559616 = 16296^2
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2
1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 = 1225 = 35^2

En todas ellas una suma de cubos equivale a un cuadrado. Unas comienzan en 1^3 y otras en números mayores, y una de ellas sólo se refiere a números impares. Como ya tocamos un tema parecido en nuestra entrada sobre “Cubos y gnomones” nos ha apetecido ampliar un poco el tema

(ver
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/10/cubos-y-gnomones-1.html y las tres siguientes)

Suma de cubos de los primeros números naturales

Es el caso más sencillo y que ya tratamos en nuestra entrada citada:

La suma de los cubos de los n primeros números naturales equivale al cuadrado del enésimo número triangular T_n

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots n)^2$$

Puedes demostrarlo por inducción. Si no sabes cómo, aquí te darán una buena idea:

http://diccio-mates.blogspot.com.es/2009/09/induccion-induccion-completa.html

Luego en estas circunstancias la propiedad de que una suma de cubos coincida con un cuadrado **se cumple siempre**

Suma general de cubos consecutivos

Si el comienzo de la suma no es la unidad, como en el ejemplo de Ben Vitale

333^3 + 334^3 + 335^3 + 336^3 + 337^3 + 338^3 + 339^3 = 265559616 = 16296^2

la fórmula anterior tiene una fácil adaptación:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \cdots + (n+k)^3 = \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

Por tanto, si la diferencia entre esos dos números triangulares es un cuadrado, habremos obtenido un criterio para buscar todos los casos posibles.

El segundo miembro de la igualdad no invita a que intentemos igualarlo a un cuadrado y desarrollarlo algebraicamente (ahí tienes un reto), por lo que intentaremos búsquedas:

Encontrar todas las sumas de cubos consecutivos cuyo resultado sea un cuadrado, equivale a confeccionar la lista de todos los pares de números triangulares que formen parte de una misma terna pitagórica.

La razón es que su diferencia de cuadrados deberá dar otro cuadrado. Por eso forman una terna pitagórica. Con la anterior fórmula podemos programar búsquedas que nos devuelvan los casos deseados. Lo haremos en primer lugar para un número fijo de sumandos y después pasaremos al caso general. Excluimos del estudio los casos que comienzan por cero, que confundirían en el número de sumandos.

Número de sumandos prefijado

Si el número de sumandos está prefijado podemos usar un código similar al siguiente (lo expresamos en el Basic de Excel, que también vale para OOBasic, y se traduce fácilmente):

K=6 número de sumandos menos una unidad. Aquí estaríamos buscando siete sumandos
For i = inicio To final Extremos de la búsqueda
a = i * (i - 1) / 2 Triangular anterior a la suma
b = (i+k) * (i+k + 1) / 2 Triangular al final de la suma
c = Sqr(b ^ 2 - a ^ 2) Tercer lado
If c = Int(c) Then msgbox(a) Si es pitagórica se muestra el comienzo de la suma
Next i

En PARI tampoco es difícil. En cada pasada se puede cambiar el valor de k, que debe coincidir **con el número de sumandos menos uno**, que aquí hemos fijado en 4, así como los extremos en 1 y 1000

{for(i=1,1000,k=4;a=i*(i-1)/2;b=(i+k)*(i+k+1)/2;if(issquare(b*b-a*a),print(i)))}

Con este código obtenemos los valores iniciales para las sumas de cubos consecutivos que dan como resultado un cuadrado. En el caso del ejemplo, está preparado para cinco sumandos.

Con la hoja de cálculo o con PARI se obtienen los mismos resultados propuestos por Ben Vitale. Así que no vamos a repetir información y pasaremos al caso general.

Número de sumandos libre

Deberemos sustituir la asignación de un valor a K por un bucle. Buscaremos valores N de números triangulares que hagan de hipotenusa y para cada uno de ellos, recorreremos los valores de K menores que N para que sean catetos. Nos detendremos en N-2, porque hay que recordar que el segundo triangular es el previo a la suma.

En el Basic de las hojas de cálculo el código, fácilmente trasladable a otros lenguajes, puede ser:

For i = 5 To 400 No necesitamos más ejemplos por ahora

a = i *(i+ 1) / 2 Creamos el triangular que hará de hipotenusa

For k = 1 To i – 2 Buscamos el cateto triangular

b = k * (k + 1) / 2

c = Sqr(a ^ 2 - b ^ 2) Calculamos el otro cateto

If c = Int(c) Then Si es cuadrado perfecto, hemos encontrado una solución

Msgbox(k + 1) Número de sumandos

Msgbox(i - k) Inicio de la suma

Msgbox(c) Base del cuadrado buscado

End If

Next k

Next i

Con un código similar, pero que crea una tabla, hemos confeccionado ésta:

Ahí aparecen los casos particulares con los que comenzamos la entrada. Por ejemplo, 23 de inicio, con 3 sumandos se ha de engendrar el cuadrado de 204.

23^3+24^3+25^3 =204^2

Compruébalo. Aquí hemos usado nuestra querida hoja de cálculo:

Inicio	Núm. Sumandos	Base cuadrado
9	17	323
14	12	312
23	3	204
25	5	315
14	21	588
28	8	504
25	15	720
33	33	2079
69	32	4472
96	5	2170
64	42	5187
81	28	4914
64	48	5880
25	98	7497
118	5	2940
120	17	5984
21	128	11024
81	69	10695
111	39	9360
144	13	6630
133	32	10296
144	21	8778
105	64	13104
153	18	8721
118	60	14160
78	105	16380
97	98	18333
144	77	22022
176	45	18810
144	82	23247
225	35	22330
217	63	31248
88	203	42021
216	98	43309
144	175	49665
232	87	43065
265	54	36729
49	291	57618
333	7	16296
176	195	66885
295	76	53200
144	246	75153

Base	Cubo
23	12167
24	13824
25	15625
Suma	41616
Raíz	204

En la tabla se nos ofrecen casos de hasta 291 sumandos, que no comprobaremos, pero probemos con otra fila: 25, 15 y 720, es decir, 15 sumandos a partir del 25 deberán engendrar el cuadrado de 720. Aquí lo tienes:

Base	Cubo
25	15625
26	17576
27	19683
28	21952
29	24389
30	27000
31	29791
32	32768
33	35937
34	39304
35	42875
36	46656
37	50653
38	54872
39	59319
Suma	518400
Raíz	720

Con esto hemos encontrado los primeros ejemplos del caso general. Podemos ordenar la tabla según el número de sumandos, o según el inicio, y así ver mejor la evolución de las soluciones.

Si prefieres probar con PARI, usa un código similar a este:

{for(i=1,10^3,for(k=1,i-2,a=i*(i+1)/2;b=k*(k+1)/2;if(issquare(a*a-b*b),write("final.txt",k+1," ",i-k))))}

Hipotenusas triangulares

Si cambiamos las salidas del código, podemos confeccionar una tabla con las ternas pitagóricas en las que una hipotenusa y un cateto son ambos triangulares: Esta es la sucesión de hipotenusas de este tipo:

10, 45, 136, 325, 435, 595, 630, 666, 780, 1225, 2080, 2145, 3321, 5050, 5565, 5886, 6216, 7381, 7503, 9316, 10440, 11026, 11175, 12246, 13530, 14196, 14365, 14535, 15753, 16653, 18915, 19306, 24310, 25425, 32896, 33670, 39060, …

Puedes usar PARI

{for(i=1,10^3,k=1;v=1;a=i*(i+1)/2;while(k<i&&v,b=k*(k+1)/2;if(issquare(a*a-b*b),v=0;write1("final.txt",a,", "));k+=1))}

Esta sucesión la hemos publicado en
http://oeis.org/A213188

De la misma forma, se pueden encontrar los catetos triangulares con hipotenusa también triangular

6, 36, 91, 120, 210, 253, 300, 378, 528, 630, 1176, 2016, 2346, 3003, 3240, 3828, 4560, 4656, 4950, 5460, 6105, 6903, 7140, 7260, 8778, 10296, 11628, 13530, 14028, 14196, 15400, 17766, 19110, 23220, 23436, 24310, 25200, 26796, 32640, 34980, 41616, …

http://oeis.org/A213189

El código PARI adecuado es

{for(i=1,10^3,k=i+1;v=1;a=i*(i+1)/2;while(k<i*i&&v,b=k*(k+1)/2;if(issquare(b*b-a*a),v=0;write1("final.txt",a,", "));k+=1))}

Y ahora la suma de cubos de impares nos lleva a Pell

En los párrafos anteriores, inspirados en propuestas de Benjamin Vitale

(http://benvitalenum3ers.wordpress.com/2013/02/21/sum-of-the-cubes-of-consecutive-odd-numbers-is-a-square/) desarrollamos cálculos de sumas de cubos consecutivos que equivalían a un cuadrado perfecto. ¿Y si sólo tomáramos impares?

Comenzamos con la unidad

¿A qué equivalen las sumas del tipo 1^3+3^3+5^3+7^3+…si han de coincidir con un cuadrado?

En la entrada aludida de Benjamín Vitale se propone la fórmula **S(n)= n^2 (2*n^2 – 1).** La demostración no es complicada. Nos basamos en lo demostrado para sumas de cubos consecutivos

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots n)^2$$

Si ahora suprimimos las sumas de cubos pares es fácil ver que (intenta justificarlo)

$$S(n)=\left(\frac{2n(2n-1)}{2}\right)^2-8\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

Simplificando llegamos a la expresión propuesta **S(n)= n^2 (2*n^2 – 1)**

Para que se cumpla lo pedido, de que la suma sea un cuadrado, el paréntesis ha de ser otro cuadrado

Esto nos lleva a plantear: **$2n^2$-1=m^2**

Pero esta es la **ecuación de Pell** con el segundo miembro igual a -1 y D=2

X^2-2Y^2=-1

La primera solución se ve que es X=1 Y=1 y nos daría la solución trivial del problema $1^3=1^2$

Para encontrar las demás puedes a acudir a nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html

En ella tienes las fórmulas de recurrencia para encontrar más soluciones, pero es más cómodo acudir a nuestra herramienta

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

A continuación te presentamos las primeras soluciones obtenidas con ella

X	Y	
1		
1	1	+1 ó -1
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1
1393	985	-1
3363	2378	1
8119	5741	-1
19601	13860	1
47321	33461	-1
114243	80782	1
275807	195025	-1
665857	470832	1
1607521	1136689	-1
3880899	2744210	1
9369319	6625109	-1

Nos quedamos con las correspondientes a -1: 1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, …

http://oeis.org/A001653 que se corresponderán con el número de sumandos de cubos de impares que nos producen un cuadrado, el cual podemos calcularlo con la fórmula presentada arriba. Por ejemplo

Para n=5, el cuadrado será 5^2*(2*5^2-1) = 25*49 = 35^2 = 1225

En efecto:

1^3+3^3+5^3+7^3+9^3 =

1+27+125+343+729 = 1225

Aquí tienes la comprobación para 29 sumandos:

Impar	Cubo		
1	1		
3	27		
5	125		
7	343		
9	729		
11	1331		
13	2197		
15	3375		
17	4913		
19	6859		
21	9261		
23	12167		
25	15625		
27	19683		
29	24389		
31	29791		
33	35937		
35	42875		
37	50653		
39	59319		
41	68921		
43	79507		
45	91125		
47	103823		
49	117649		
51	132651		
53	148877		
55	166375		
57	185193		
	1413721		
Raíz	1189	Igual a 29^2(2*29^2-1)	
		1413721	

Comenzando en otro cubo

Para obtener un resultado similar, pero comenzando la suma en cualquier número impar, no necesariamente el 1, necesitaremos restar las expresiones de dos sumas completas diferentes y exigir que sean un cuadrado perfecto:

S(m)-S(n)= m^2 (2*m^2 – 1) - n^2 (2*n^2 – 1) = k^2

O bien

2*(m^4-n^4)-(m^2-n^2) =k^2

Con un algoritmo similar al empleado en casos anteriores, podemos encontrar los valores de m y n que cumplen esa igualdad:

```
For m=2  To 1000
For n = 1 To m - 2
c = sqr(2 * (m^ 4 - n ^ 4) - (m ^ 2 - n^ 2))
If c=Int(c) Then
Msgbox(m)
Msgbox(n+1)
End If
Next n
Next m
```

Final suma	Inicio suma
8	3
37	13
59	46
110	47
143	53
165	25
176	111
203	94
225	145
248	179
256	145
256	201
280	151
288	13
325	110
349	252
424	25
536	131
589	12
608	533
721	241
797	509
800	605
841	117
841	146
985	141

Hay que observar que el algoritmo devuelve **n+1**, porque debemos recordar que **n** es el valor **anterior** a la suma. Así hemos obtenido estos valores para el inicio y el final de las sumas de cubos de impares que produzcan un cuadrado:

La primera nos lleva a 5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3 = 90^2, es decir, desde el tercer impar hasta el octavo.
La segunda va desde el término 13º hasta el 37º:
25^3+27^3+29^3+…+73^3=1925^3

Puedes construirte un modelo para comprobar otras soluciones con hoja de cálculo. Sólo necesitas una columna con números de orden, otra con los impares, y otra con sus cubos. Después seleccionas una parte adecuada de estos (por ejemplo, desde el 46º hasta el 59º, los sumas con la función SUMA y le hallas la raíz cuadrada para ver si es entera:

Orden	Impares	Cubos	Suma parcial
1	1	1	3705625
2	3	27	Raíz
3	5	125	1925
4	7	343	
5	9	729	
6	11	1331	
7	13	2197	
8	15	3375	
9	17	4913	
10	19	6859	
11	21	9261	
12	23	12167	
13	25	15625	

Si no tienes suficiente con estas búsquedas, intenta analizar algebraicamente la condición
2*(m^4-n^4)-(m^2-n^2) =k^2

Ya nos contarás.

EQUIVALENCIA ENTRE SUMAS DE CUBOS

Sabemos desde Fermat que un cubo no se puede descomponer en suma de otros dos cubos, pero sí es posible que una suma de cubos sea equivalente a otra distinta. El día 23/11/18, de forma indirecta, publiqué en Twitter (@connumeros) esta igualdad:

19^3+2^3=16^3+14^3+3^3

Como veremos más adelante, estas equivalencias son más frecuentes de lo que se podría esperar en una primera aproximación. Comenzaremos, pues, con este tipo, en el que una suma de dos cubos es equivalente a otra de tres.

Para ello diseñaremos una función, que más tarde modificaremos, que admita un número **n** y busque sumas equivalentes del tipo dado, en las que **n** sea la mayor base de cubo en la expresión. La salida de la función será en modo texto, para poder leer bien todas las soluciones.

Usaremos este algoritmo:

Public Function doblecubo$(n)
Dim p, q, r, k, a, b, u, v
Dim c$

If n < 2 Then doblecubo = "NO": Exit Function ‘El número debe ser mayor que 2
c$ = "": k = 0 ‘**c$** recoge las soluciones y **k** las cuenta
For p = 1 To n
a = n ^ 3 + p ^ 3 ‘Se forma la suma de dos añadiendo otro sumando
b = a ^ (1 / 3) ‘Tope de búsqueda
For q = 1 To b ‘Doble bucle de búsqueda
For r = 1 To q
u = a - q ^ 3 - r ^ 3

If u > 0 Then v = Round(u ^ (1 / 3)) Else v = 0
If v > 0 And a = q ^ 3 + r ^ 3 + v ^ 3 And v <= r And v <= q Then k = k + 1: c$ = c$ + Str$(n) + Str$(p) + "=" + Str$(q) + Str$(r) + Str$(v) + " "
‘Si se acepta el tercer cubo, se vuelca en **c$** y se incrementa el contador
Next r
Next q
Next p
If k = 0 Then doblecubo = "NO" Else doblecubo = c$
End Function

Con esta función formamos una tabla con los primeros números que admiten esta descomposición. La segunda columna representa los cinco cubos que intervienen.
Parece ser que sólo los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 y 13 no participan en equivalencias de este tipo:

7	7 1 = 6 4 4
8	8 7 = 9 5 1
9	9 7 = 10 4 2
11	11 7 = 9 9 6
14	14 2 = 12 8 8 14 10= 13 11 6 14 13= 17 3 1
15	15 3 = 12 11 7 15 5= 14 9 3
16	16 7 = 15 10 4 16 14= 18 10 2
17	17 7 = 13 12 11 17 11= 15 14 5
18	18 14 = 20 8 4 18 17= 20 14 1
19	19 2 = 16 14 3 19 5= 17 12 7
20	20 12 = 19 14 5

Por ejemplo, con base 16 obtenemos dos equivalencias: 16^3+7^3=15^3+10^3+4^3; 16^3+14^3=18^3+10^3+2^3 (Puedes escribir estas equivalencias en una celda de Excel (con signo + o = delante) y te devolverá VERDADERO)

Si sumamos los cubos del primer par, encontramos los valores comunes de las dos sumas, que están publicados en http://oeis.org/A085336

344, 855, 1072, 1674, 2752, 3402, 3500, 3744, 4439, 4941, 5256, 6244, 6840, 6867, 6984, 8576, 9288, 9604, 9728, 10261, 10656, 10745, 10773, 10989, 13357, 13392, 14167, 14364, 15093, …

Estudiando todos los números siguientes no parece que haya más excepciones. Incluso el número de soluciones aumenta con buen ritmo. Si modificamos la función para que devuelva el número de soluciones, observamos una tendencia al crecimiento con muchas oscilaciones.
Su coeficiente R^2 es muy bajo, debido a las oscilaciones y el crecimiento tiene una pendiente media de 0,277.

Problema de Ramanujan

En la anécdota famosa del taxi
(ver
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan)
aparece el número 1729 como el menor que se expresa de dos formas distintas como suma de dos cubos: 1729=1^3+12^3=10^3+9^3

Cambiaremos nuestra función ***sumacubos*** para que cubra este caso. No es difícil. Basta con suprimir un bucle FOR-NEXT y añadir alguna desigualdad:

```
Public Function doblecubo$(n)
Dim p, q, k, a, b, u, v
Dim c$

If n < 2 Then doblecubo = "NO": Exit Function
c$ = "": k = 0
For p = 1 To n
a = n ^ 3 + p ^ 3
b = a ^ (1 / 3)
For q = 1 To b
u = a - q ^ 3
If u > 0 Then v = Round(u ^ (1 / 3)) Else v = 0
If v > 0 And a = q ^ 3 + v ^ 3 And v <> p And v <> n
And v <= q Then k = k + 1: c$ = c$ + Str$(n) + Str$(p)
+ "=" + Str$(q) + Str$(v) + "  "
```

Next q
Next p
If k = 0 Then doblecubo = "NO" Else doblecubo = c$
End Function

El siguiente listado está basado en la base del primer cubo, por lo que algunos resultados están duplicados:

10	10 9 = 12 1	
12	12 1 = 10 9	
15	15 9 = 16 2	
16	16 2 = 15 9	
20	20 18 = 24 2	
24	24 2 = 20 18	24 19= 27 10
27	27 10 = 24 19	
30	30 18 = 32 4	30 27= 36 3

Vemos que la primera equivalencia, 10, 9 con 12, 1 es la de Ramanujan. Después le siguen

4104=15^3+9^3=16^3+2^3,
13832=20^3+18^3=24^3+2^3, …

La lista con los primeros valores la tienes en http://oeis.org/A001235

1729, 4104, 13832, 20683, 32832, 39312, 40033, 46683, 64232, 65728, 110656, 110808, 134379, 149389, 165464, 171288, 195841…

¿Puede un cubo ser equivalente a una suma de tres?

La respuesta es afirmativa. Basta adaptar la función ***doblecubo(n)*** no añadiendo un sumado nuevo en las primeras líneas. Por ejemplo:

6^3=5^3+4^3+3^3
9^3=8^3+6^3+1^3
12^3=10^3+8^3+6^3
18^3=15^3+12^3+9^3…

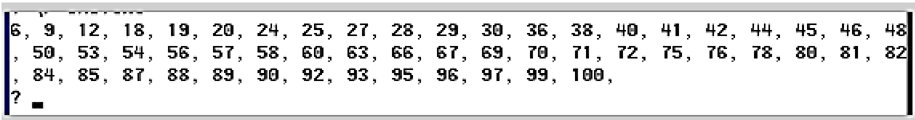
Tienes publicadas las bases del primer miembro de la igualdad en http://oeis.org/A023042

A023042 Numbers whose cube is the sum of three distinct nonnegative cubes.
6, 9, 12, 18, 19, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 102, 103, 105, 106, 108, 110, 111, 112, 113

Aunque en esa página figuran dos listados en PARI, por su semejanza con la función ***doblecubo***, se inserta el nuestro original y su resultado:

for(n=2,100,k=0;for(p=1,n,a=n^3;for(q=1,n,for(r=1,q, u=a-q^3-

r^3;if(u>>0,v=round(u^(1/3)),v=0);if(v>>0&&a==q^3+ r^3+v^3,k+=1))));if(k>>0,print1(n,", ")))



6, 9, 12, 18, 19, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100,

?

Un cubo suma de cuatro

Con nuestra herramienta Cartesius (http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)
podemos usar este planteamiento (en el listado se busca solución para el cubo de 7):

xtotal=4
xt=1..7
xt=suc(n^3)
suma=343
creciente

Se fija un total de cuatro cubos del 1 al 7 para que sumen el cubo de 7.

Así obtenemos la solución
7^3=6^3+5^3+1^3+1^3

Cambiando datos:
12^3=11^3+7^3+3^3+3^3
13^3=12^3+7^3+5^3+1^3

13^3=10^3+9^3+7^3+5^3…
Tienes publicadas las bases 7, 12, 13, … en
http://oeis.org/A274334

A274334 Numbers n such that n^3 is the sum of 4 positive cubes.
7, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, …

Soluciones con más sumandos

Podemos destacar

8^3=6^3+6^3+4^3+2^3+2^3
9^3=7^3+7^3+3^3+2^3+2^3
9^3=8^3+5^3+4^3+3^3+1^3
10^3=9^3+6^3+3^3+3^3+1^3
10^3=7^3+7^3+5^3+5^3+4^3
7^3=6^3+4^3+3^3+3^3+2^3+1^3

Y muchas más.

El estudio que hemos desarrollado explica, como ya sospechábamos, el hecho de que en nuestros cálculos diarios de Twitter aparezcan tantas combinaciones de cubos.

LOS CINCO CUBOS

En mis cálculos sobre fechas publicados en Twitter (@connumeros), a los que hacemos referencia frecuentemente en mi blog, acudo casi a diario a la descomposición de un número de fecha en suma de cinco cubos o menos. El elegir el cinco se debe a limitaciones de nuestro equipo y de cualquier hoja de cálculo, que necesitan gran tiempo de cómputo para más sumandos, y al mismo atractivo de la descomposición, que queda bastante legible con pocos sumandos, pero que se complica de seis en adelante. Es, pues, una elección práctica con vistas a una publicación divulgativa.

Por ejemplo, la fecha 8/2/19 da lugar al número 8219, que se puede expresar con tres cubos:

$8219=3^3+16^3+16^3$

Al día siguiente ya se necesitan cuatro:

$9219=9^3+13^3+13^3+16^3$ o bien $9219=3^3+10^3+16^3+16^3$

Sin embargo, el día 10/2/19 necesita cinco, y el día 11 no se puede descomponer así. El número 11219 necesita más de cinco cubos.

Teorema de Waring

Esta cuestión que planteamos aquí es un caso particular del Teorema de Waring. Puedes leer sobre este teorema en

https://en.wikipedia.org/wiki/Waring%27s_problem

y
http://mathworld.wolfram.com/WaringsProblem.html

Según Waring, y en el caso que nos ocupa, el número mínimo para que todos los números puedan ser engendrados por una suma de cubos es 9, pero él lo conjeturó nada más. En las páginas enlazadas puedes ver que este número de potencias se expresa como g(n), con lo que la afirmación anterior se puede expresar como g(3)=9. En 1909, Wieferich lo demostró. Aquí solo nos interesará el caso de cinco cubos o menos.

Los cinco cubos

Nos planteamos pues, con qué frecuencia van apareciendo números en la serie natural que no se puedan expresar como suma de no más de cinco cubos. Para ello estudiaremos los casos en los que el número de cubos es 1, 2, 3, 4 o 5, y los números buscados serán el complemento de la unión de estos. El proceder así es debido a que los casos positivos (que sí admiten suma de cinco cubos o menos) tienen interés por ellos mismos, y que ya han sido publicados.

Los iremos presentando según el número de sumandos.

En todo el estudio usaremos a función POTE5(N;Z), en la que Z es el exponente, aunque aquí solo usaremos el valor 3. Esta función devuelve “NO” si el número no admite suma de cinco cubos o menos, o bien, en caso afirmativo, una cadena de texto que comience presentando el número mínimo de sumandos, seguido de las diversas soluciones si el resultado es afirmativo.

Por ejemplo, para 10219 devuelve:

POTE5(10219;3)= EC 5 &&& & 1 , 12 , 13 , 13 , 16 & 3 , 10 , 10 , 16 , 16 & 9 , 10 , 13 , 13 , 16

Los dos primeros caracteres los ignoramos por ahora, ya que serán usados por otras funciones. El primer 5 indica que el número mínimo de cubos es 5 y, a continuación se incorporan las tres soluciones del problema:

$10219=1^3+12^3+13^3+13^3+16^3$
$10219=3^3+10^3+10^3+16^3+16^3$
$10219=9^3+10^3+13^3+13^3+16^3$

Si aplicamos la función a 11219 nos devolverá “NO”.

El algoritmo es algo complejo, porque se usan cinco bucles, y, para capturar bien las soluciones, no se han simplificado mucho. En el ANEXO del final del tema tienes la codificación en Visual Basic de Excel.

Vemos los casos particulares:

Un cubo

Es el problema trivial. Los números serán los cubos perfectos, 1, 8, 27, 64, … Los tienes publicados en http://oeis.org/A000578 y no hay más que decir.

Dos cubos

Si establecemos una búsqueda con nuestra función POTE5, obtendremos el siguiente listado:

2	BA 2 &&& & 1 , 1
9	BA 2 &&& & 1 , 2
16	BA 2 &&& & 2 , 2
28	BA 2 &&& & 1 , 3
35	BA 2 &&& & 2 , 3
54	BA 2 &&& & 3 , 3
65	BA 2 &&& & 1 , 4
72	BA 2 &&& & 2 , 4
91	BA 2 &&& & 3 , 4
126	BB 2 &&& & 1 , 5 & 2 , 3 , 3 , 4
128	BB 2 &&& & 1 , 1 , 1 , 5 & 4 , 4
133	BA 2 &&& & 2 , 5
152	BB 2 &&& & 2 , 2 , 2 , 4 , 4 & 3 , 5
189	BA 2 &&& & 4 , 5
217	BB 2 &&& & 1 , 3 , 4 , 5 & 1 , 6
224	BB 2 &&& & 2 , 3 , 4 , 5 & 2 , 6
243	BB 2 &&& & 3 , 3 , 4 , 5 & 3 , 6

Ignora los dos caracteres en mayúscula (El primero es el número de cubos, que aquí siempre será B, y el segundo el número de soluciones, que ves es A para una solución y B para dos)

Junto a cada solución se presentan las bases de la suma. Por ejemplo, 91=3^3+4^3. Observa que algunos también presentan soluciones más complejas con cuatro o cinco cubos.

Si recordáis la anécdota de la matrícula del taxi de Ramanujan

(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan), sabréis que el primer número que presenta dos soluciones es 1729.

POTE5(1729;3)=”BD 2 &&& & 1 , 3 , 3 , 7 , 11 & 1 , 6 , 8 , 10 & 1 , 12 & 9 , 10”

Nuestra función afirma que el mínimo de cubos es 2 y devuelve cuatro soluciones, de las que las dos últimas se corresponden con la afirmación de Ramanujan:

$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$

Los primeros números con esta propiedad están publicados en http://oeis.org/A003325 y vemos que coinciden con nuestra tabla.

A003325 Numbers that are the sum of 2 positive cubes.
2, 9, 16, 28, 35, 54, 65, 72, 91, 126, 128, 133, 152, 189, 217, 224, 243, 250, 280, 341, 344, 351, 370, 407, 432, 468, 513, 520, 539, 559, 576, 637, 686, 728, 730, 737, 756, 793, 854, 855, 945, 1001, 1008, 1024, 1027, 1064, 1072, 1125, 1216, 1241, 1332, 1339,

Se puede destacar en esta publicación el comentario de Zak Seidov, en el sentido de que si **n** pertenece a la sucesión, también pertenecerán los múltiplos de n del tipo **n*m**^{3} (m >= 2). Esto garantiza que la sucesión es infinita.

Tres cubos

Procedemos de la misma forma que en el caso de dos cubos:

3	CA 3 &&& & 1 , 1 , 1
10	CA 3 &&& & 1 , 1 , 2
17	CA 3 &&& & 1 , 2 , 2
24	CA 3 &&& & 2 , 2 , 2
29	CA 3 &&& & 1 , 1 , 3
36	CA 3 &&& & 1 , 2 , 3
43	CA 3 &&& & 2 , 2 , 3
55	CA 3 &&& & 1 , 3 , 3
62	CA 3 &&& & 2 , 3 , 3
66	CA 3 &&& & 1 , 1 , 4
73	CA 3 &&& & 1 , 2 , 4
80	CA 3 &&& & 2 , 2 , 4
81	CB 3 &&& & 1 , 2 , 2 , 4 & 3 , 3 , 3
92	CA 3 &&& & 1 , 3 , 4
99	CA 3 &&& & 2 , 3 , 4
118	CA 3 &&& & 3 , 3 , 4
127	CB 3 &&& & 1 , 1 , 5 & 1 , 2 , 3 , 3 , 4
129	CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 5 & 1 , 4 , 4
134	CB 3 &&& & 1 , 2 , 5 & 2 , 2 , 3 , 3 , 4
136	CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 5 & 2 , 4 , 4
141	CA 3 &&& & 2 , 2 , 5

Algunos números presentan dos soluciones, en las que solo una está formada por tres cubos. Hay que seguir hasta el 251, que sí presenta dos soluciones de ese tipo:

$251 = 1^3+5^3+5^3 = 2^3+3^3+6^3$

Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A003072

A003072 Numbers that are the sum of 3 positive cubes.
3, 10, 17, 24, 29, 36, 43, 55, 62, 66, 73, 80, 81, 92, 99, 118, 127, 129, 134, 136, 141, 153, 155, 160, 179, 190, 192, 197, 216, 218, 225, 232, 244, 251, 253, 258, 270, 277, 281, 288, 307, 314, 342, 344, 345, 349, 352, 359, 368, 371, 375, 378, 397, 405, 408, 415, 433, 434

También en esta se puede afirmar que todo elemento multiplicado por un cubo sigue perteneciendo, y que por tanto la sucesión es infinita.

Cuatro cubos

Abreviamos. Este es el listado obtenido mediante nuestra función POTE5:

4	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 1
11	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 2
18	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2
25	DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2
30	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 3
32	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 2
37	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 3
44	DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 3
51	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 3
56	DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 3
63	DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 3
67	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 4
70	DA 4 &&& & 2 , 2 , 3 , 3
74	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 4
82	DB 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 4 & 1 , 3 , 3 , 3
88	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 4
89	DB 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 4 & 2 , 3 , 3 , 3
93	DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 4
100	DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 4

Aquí también aparecen soluciones dobles en 82 y 89.

Están publicados en http://oeis.org/A003327

En este caso se ha conjeturado que todo número mayor que 7373170279850 pertenece a la sucesión. Puedes consultar
https://www.ams.org/journals/mcom/2000-69-229/S0025-5718-99-01116-3/

Cinco cubos

Llegamos al número de cubos que nos interesa. También es fácil encontrar los números que admiten una descomposición en cinco cubos:

5	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 1
12	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 2
19	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 2
26	EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 2
31	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 3
33	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 2
38	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 3
40	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 2
45	EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 3
52	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 3
57	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 3 , 3
59	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 3
68	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 4
71	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 3 , 3
75	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 4
78	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 3 , 3
83	EA 5 &&& & 1 , 1 , 3 , 3 , 3
90	EA 5 &&& & 1 , 2 , 3 , 3 , 3

Observamos que son frecuentes. El primero en presentar dos soluciones es 157, pues

$157 = 1^3+1^3+3^3+4^3+4^3 = 2^3+2^3+2^3+2^3+5^3$

Están publicados en http://oeis.org/A003328

Números que no admiten descomposición en suma de cubos

Estos son los números que más nos interesan, aquellos que no admiten ninguna forma de descomposición en suma de cubos desde 1 hasta 5. Alguno de ellos necesitará hasta 9 cubos, según el teorema de Waring.

Para encontrarlos basta imponer la condición de que POTE5(N;3)=”NO”.

Los primeros son estos:

6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 34, 39, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 58, 60, 61, 69, 76, 77, 79, 84, 85, 86, 87, 95, 98

También se han publicado. Los tienes en http://oeis.org/A069136

Se puede conjeturar que esta sucesión es finita.

Este listado presenta los menores de 100, y son 32. Es de esperar que en otro rango de 100 aparezcan menos. Por ejemplo, de 1000 a 1100 son

1013, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1039, 1049, 1050, 1058, 1068, 1076, 1084, 1085, 1095.
Son solo 15.

Desde 10000 a 10100 aparecen siete: 10003, 10004, 10013, 10039, 10049, 10066, 10094.

Así podríamos seguir. Se puede conjeturar que terminarán desapareciendo en rangos mayores.

Estadísticas con los rangos de fechas

Las fechas que uso en Twitter pertenecen al rango aproximado de (1100,320000). Con una hoja de cálculo y la complejidad de la función POTE5 es desaconsejable estudiar completo este intervalo. Por eso, usaremos distintas estrategias para estudiarlo.

A) Frecuencia de los números que no admiten ser expresados como suma de cubos del 1 al 5:

Recorreremos varios intervalos de longitud 10000 hasta ver que los resultados llegan a un cierto estancamiento. Al llegar a 50000 ya se ve que los porcentajes no llegan al 5%

Intervalo	Frecuencia del NO	Porcentaje
1-10000	1463	15%
10001-20000	620	6%
20001-30000	432	4%
30001-40000	274	3%
40001-50000	226	2%

Hay que dejar claro que estos casos sí pueden pertenecer a números que necesiten seis o más cubos. Estamos tratando de los que no admiten cinco cubos o menos. Se percibe con claridad la disminución de los porcentajes, por lo que podemos confiar en que gran número de fechas de cada año admitan “los cinco cubos”, o menos. Con esta herramienta que hemos creado se detectan con más facilidad, por lo que incrementarán estos desarrollos en nuestros cálculos diarios en Twitter (@connumeros).

B) Tabla de doble entrada con resultados para 2, 3, 4 y 5 cubos

Hemos dividido, de forma aproximada, los rangos de fechas en distintos intervalos. En cada uno de ellos se han estudiado 51 números consecutivos, para tener una idea de cómo se pueden distribuir en la totalidad, dato que está fuera del alcance de nuestra hoja de cálculo.

Se ha llegado a esta tabla de doble entrada:

	Número de cubos				
Intervalos	2	3	4	5	Total
0-40000	1	8	23	16	48
40000-80000	1	7	28	14	50
80000-120000	0	6	23	22	51
120000-160000	0	4	30	17	51
160000-200000	0	6	31	14	51
200000-240000	0	3	29	18	50
240000-280000	0	5	27	19	51
280000-320000	0	5	32	14	51
	2	44	223	134	

Los totales no valen siempre 51 porque faltan casos. Sólo hemos reflejado los de 2 a 5. La sorpresa en ellos, aunque no hay que darlo por cierto, es que parece haber más números con un mínimo de cuatro cubos que los que necesitan cinco. En los casos 2 y 3 es normal que presenten frecuencias bajas.

C) Recorrido aleatorio

Con la función RND (equivalente a ALEATORIO) hemos creado una columna de 200 números al azar dentro del rango de fechas. Los resultados confirman lo descubierto en el anterior procedimiento, y es que el caso más frecuente es el de cuatro cubos, seguido del de 3, siendo los otros casos mucho menos frecuentes. Como en las tablas anteriores, el 0 se interpreta como que el número necesita seis o más cubos. Estos han sido los resultados:

Número de cubos	Frecuencia	Porcentaje
0	3	2%
1	0	0%
2	1	1%
3	27	14%
4	91	46%
5	78	39%
	Total	200

Como conclusión, a partir de ahora no hay que extrañarse de la frecuencia con la que una fecha del año permita una suma de tres a cinco cubos.

ANEXO

Código de la función POTE5

Public Function pote5$(n, z)
Dim i, j, k, p, q

```
Dim a, b, c, d, e
Dim f, g, h, m, mini, nume
Dim s$

a = n ^ (1 / z) + 0.1
s$ = ""
mini = 5: nume = 0

For i = 1 To a 'primera
If n = i ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i)
If mini > 1 Then mini = 1
nume = nume + 1
End If
f = n - i ^ z
If f > 0 Then
b = f ^ (1 / z) + 0.1

For j = i To b 'segundo

If n = i ^ z + j ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j)
If mini > 2 Then mini = 2
nume = nume + 1
End If
g = n - i ^ z - j ^ z
If g > 0 Then 'tercero
c = g ^ (1 / z) + 0.1
```

```
For k = j To c 'tercero
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
If mini > 3 Then mini = 3
nume = nume + 1
End If
h = n - i ^ z - j ^ z - k ^ z
If h > 0 Then 'cuarto
d = h ^ (1 / z) + 0.1

For p = k To d 'cuarto
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z + p ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
+ " , " + Str$(p)
If mini > 4 Then mini = 4
nume = nume + 1
End If
m = n - i ^ z - j ^ z - k ^ z - p ^ z
If m > 0 Then 'quinto
e = m ^ (1 / z) + 0.1

For q = p To e 'quinto
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z + p ^ z + q ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
+ " , " + Str$(p) + " , " + Str$(q)
nume = nume + 1
End If
Next q 'quinto
End If 'quinto
```

```
Next p 'cuarto
End If 'cuarto

Next k 'tercero
End If 'tercero

Next j ' segundo
End If 'segundo

Next i 'primer cubo
If s$ = "" Then s$ = "NO" Else s$ = Chr$(64 + mini) +
Chr$(64 + nume) + " " + Str$(mini) + " &&& " + s$
pote5$ = s$

End Function
```

SUMA Y PRODUCTO DE CUBO Y OTRO TIPO

Muchas cuestiones en este documento surgen de los cálculos diarios que publico en Twitter (@Connumeros). El día 21/5/19 obtuve esta propiedad:

El número de fecha de hoy, 21519 se descompone en un producto de un cubo por un capicúa y también en una suma del mismo tipo:

21519=3^3×797
21519=12^3+19791

No sabía en ese momento si existirían muchos números que compartieran las dos expresiones N=p^3*q y N=r^3+s, y parece que sí, que son abundantes.

Para acotar la búsqueda, exigiremos que los cuatro números p, q, r y s sean enteros positivos. La exclusión del 0 evita casos triviales.

Al iniciar el estudio he pensado que el número que acompaña al cubo puede ser cuadrado o triangular, por ejemplo, en lugar de capicúa.

Suma y producto de cubo y capicúa

La primera condición, N=p^3*q, permite desechar aquellos números N que no sean múltiplos de un cubo. Esto se logra fácilmente con la descomposición factorial y el estudio de los exponentes de los factores primos. El inconveniente es que se alargaría mucho la explicación del procedimiento para crear nuestra función FACTORES y la rutina SACAPRIMOS. Por eso, y no es nuevo en nuestros documentos, emprenderemos la búsqueda con medios más sencillos. El peligro estribaría en la lentitud, pero no es inconveniente en este caso. Con Excel se consiguen listas con una rapidez aceptable.

Comenzamos, como es usual en estas búsquedas, con la creación de una función, a la que llamaré CUBOYOTRO, que nos indique si un número N cumple los dos requisitos N=p^3*q y N=r^3+s. Su estructura nos va a permitir adaptarla a todos los casos que estudiemos, pues bastará sustituir la función ESCAPICUA (para el caso inicial) por ESCUAD, ESTRIANGULAR u otra. En cada tipo explicaremos estas funciones auxiliares. Comenzamos con los capicúas. La función recomendada es la siguiente:

Public Function cuboyotro$(n, k) ‘Añadimos un parámetro k por si deseamos cambiar cubo por otra potencia
Dim x, a, y, b, c
Dim s$
s$ = "" ‘Usamos un string para presentar bien los cuatro números p, q, r y s
a = n ^ (1 / k) ‘En este primer caso k valdrá 3. La variable a es el tope de búsqueda
For x = 1 To a
c = n - x ^ k ‘Se resta del número la potencia (en el primer ejemplo, un cubo)
If escapicua(c) And c > 10 Then ‘Más adelante se cambiará ESCAPICUA
For y = 2 To a ‘En esta parte ya se ha cumplido la segunda condición N=r^3+s
If n Mod y ^ k = 0 Then ‘Para la primera condición p^3 ha de ser un divisor de n

b = n / y ^ k

If escapicua(b) and b>10 Then ‘Si el cociente es capicúa, se publica la solución

s$ = " C1 " + Str$(x) + " O1 " + Str$(c) + " C2 " + Str$(y) + " O2 " + Str$(b)

‘El string nos presenta los cubos C1 y C2 y sus compañeros O1 y O2.Puede haber más soluciones.

End If

End If

Next y

End If

Next x

If s$ = "" Then s$ = "NO" ‘Asignamos un “NO” al caso sin solución

cuboyotro = s$

End Function

Hay que advertir algún detalle sobre esta función.

La decisión de evaluar en primer lugar la segunda condición y después la primera no ha sido deliberada, y de hecho, poco eficiente, pues si se cambia el orden se incrementa la velocidad de respuesta de la función. Como resulta rápida así, no se ha corregido y lo dejamos como ejercicio.

Este esquema es la base para otras búsquedas. Ya se ha destacado que con un cambio de ESCAPICUA por otra función se podrían abordar otros casos. Igualmente,

aunque en lo que sigue haremos k=3 para buscar cubos, se deja abierta la posibilidad de aumentar el exponente.
La función ESCAPICUA se inserta en el Anexo del final de este capítulo. La costumbre es considerar capicúas los números de una cifra, pero aquí no nos interesa esta posibilidad, pues aparecen casos sin interés. Exigiremos que sean mayores que 10, como puedes comprobar en el listado de la función.

Los primeros números con esta propiedad son

528	C1 4 O1 464 C2 2 O2 66
704	C1 2 O1 696 C2 4 O2 11
888	C1 7 O1 545 C2 2 O2 111
1128	C1 8 O1 616 C2 2 O2 141
1188	C1 8 O1 676 C2 3 O2 44
1208	C1 8 O1 696 C2 2 O2 151
1375	C1 11 O1 44 C2 5 O2 11
1408	C1 11 O1 77 C2 4 O2 22
1616	C1 10 O1 616 C2 2 O2 202
1696	C1 10 O1 696 C2 2 O2 212
1856	C1 11 O1 525 C2 2 O2 232
2176	C1 4 O1 2112 C2 2 O2 272
2424	C1 12 O1 696 C2 2 O2 303
2727	C1 12 O1 999 C2 3 O2 101
2904	C1 13 O1 707 C2 2 O2 363
2984	C1 13 O1 787 C2 2 O2 373
3064	C1 8 O1 2552 C2 2 O2 383
3552	C1 14 O1 808 C2 2 O2 444
3632	C1 14 O1 888 C2 2 O2 454
3773	C1 11 O1 2442 C2 7 O2 11

Junto a cada uno se presentan los cubos C1 y C2 y el otro componente, en este caso capicúa, en O1 y O2.
Por ejemplo, 2176=4^3+2112=2^3*272, dos cubos y dos capicúas.

En PARI

Al tener que cumplir varias condiciones, el listado para PARI resulta algo extenso, pero es bastante rápido en su ejecución.

```
maxexpo(n) = s=1; f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1],
t=f[i,2]; if(t>>s, s=t)); s
palind(n)=n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))
condi1(n)= c=0; if(maxexpo(n)>=3,  a=n^(1/3);
for(x=2, a,
if(n%x^3==0,b=n/x^3;if(palind(b)&&b>=10,c=x))));c
condi2(n)= c=0; a=n^(1/3); for(x=2, a, b=n-
x^3;if(palind(b)&&b>=10,c=x));c
for(y=2,20000, if(condi1(y)&&condi2(y),print1(y,",
")))
```

Con él podemos reproducir y ampliar la lista de arriba: 528, 704, 888, 1128, 1208, 1375, 1408, 1616, 1696, 1856, 2176, 2424, 2727, 2904, 2984, 3064, 3552, 3632, 3773, 3952, 4280, 4347, 4440, 4520, 4752, 5488, 5568, 5736, 5994, 6296, 6336, 6464, 6784, 7352, 7752, 8181, 8384, 8888, 10071, 10944, 11000, 11264, 11319, 12224, 12798, 13635, 13875, 14168, 14641, 15928, 16128, 16362, 16375, 17172, 18048, 18656, 19008, 19536, 19629, 19899,…

Hay que recordar que todos ellos son múltiplos de un cubo con base no trivial y, por tanto, todos son compuestos. Entre ellos aparecen casos particulares interesantes. Por ejemplo:

Números del tipo p^3*11 o p^3*101. En estos dos casos y otros similares, el capicúa correspondiente al producto es un número primo, como ocurre en

704=4^3*11=2^3+696

Caso del 14641: Como equivale a 11^4, su desarrollo sería 11^3*11. Hay que esperar que pertenezcan a este listado potencias de primos, aunque sin buscarlos no se puede asegurar. Por ejemplo, 101^4 cumple la primera condición (producto), pero no es suma de cubo y capicúa. El siguiente es 40353607, que es potencia de primo (40353607=7^9) y se descompone en producto de cubo y capicúa (40353607=49^3*343) y en suma de cubo y capicúa (40353607=334^3+3093903). Hasta una cota de 8*10^7 ya no hay más casos.

El número 14641 es capicúa. Podríamos preguntarnos si existen más capicúas en la sucesión. En la primera tabla hemos visto algún capicúa. Los primeros son: 888, 3773, 6336, 8888, 14641, 80008, 88088, …

Por ejemplo, 3773 es capicúa, y equivale a 11^3+2442 y a 7^3*11.

Igualmente, el capicúa 6336 es igual a 11^3+5005 y a 4^3*99.

Finalmente, destacamos el número 74088, que es el cubo de 42, y también coincide con la suma de otro cubo y un capicúa, 35^3+31213, y también con un producto similar, 6^3*343. Esto es posible por ser 343 capicúa y cubo de 7.

Se podría buscar más casos particulares, pero es preferible pasar a otras estructuras, que dejaremos para el siguiente apartado.

ANEXO

Código de la función ESCAPICUA

```
Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$,nn$

nn$ =Str$(n)
auxi= Right(nn$, Len(nn$) - 1)
l = Len(auxi)
c=True
If l >1 Then
c = True
i = 1
```

```
k = Int(l / 2)
While i <= k And c
  If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c = False
  i = i + 1
  Wend
End If
escapicua = c
End Function
```

Seguimos con el tema:

Hemos estudiado hasta ahora los números que son suma y también producto de un cubo y un capicúa. En esta buscaremos casos similares con cuadrados y triangulares.

Caso cubo y cuadrado

Tal como anunciamos en el apartado anterior, si sustituimos ESCAPICUA en la función CUBOYOTRO por ESCUAD, que determina si un número es cuadrado perfecto, podríamos repetir el estudio para cuando los factores y sumandos fueran uno cubo y otro cuadrado. El listado de esta otra función puede ser el siguiente:

```
Public Function escuad(n) As Boolean
If n < 0 Then
escuad = False
```

Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End function

Efectuando la sustitución, resultan los números de la tabla, como los menores que cumplen las condiciones exigidas:

72	C1	2	O1	64	C2	2	O2	9
108	C1	3	O1	81	C2	3	O2	4
128	C1	4	O1	64	C2	2	O2	16
392	C1	7	O1	49	C2	2	O2	49
512	C1	7	O1	169	C2	2	O2	64
576	C1	8	O1	64	C2	4	O2	9
968	C1	7	O1	625	C2	2	O2	121
1323	C1	3	O1	1296	C2	3	O2	49
1372	C1	6	O1	1156	C2	7	O2	4
1568	C1	7	O1	1225	C2	2	O2	196
1944	C1	2	O1	1936	C2	6	O2	9
2000	C1	4	O1	1936	C2	5	O2	16
2304	C1	12	O1	576	C2	4	O2	36
2312	C1	2	O1	2304	C2	2	O2	289
2700	C1	11	O1	1369	C2	3	O2	100
2888	C1	14	O1	144	C2	2	O2	361
3200	C1	4	O1	3136	C2	2	O2	400
3267	C1	11	O1	1936	C2	3	O2	121

Ejemplo: 1323=3^3+36^2=3^3*7^2

Con PARI hay que cambiar un poco el algoritmo, por las peculiaridades de la función *issquare*:

condi1(n)= my(c=0); a=truncate(n^(1/3)); for(x=2, a, for(b=2,sqrt(n),if(n==x^3*b^2,c=1)));c
condi2(n)= my(c=0); a=truncate(n^(1/3)); for(x=1, a, b=n-x^3;if(issquare(b)&&b>0,c=x));c
for(y=1,20000, if(condi1(y)&&condi2(y),print1(y,", ")))

Así podemos ampliar el listado anterior:

72, 108, 128, 392, 512, 576, 968, 1323, 1372, 1568, 1944, 2000, 2304, 2312, 2700, 2888, 3200, 3267, 3456, 3528, 4000, 4608, 5400, 6272, 6400, 6561, 6912, 8192, 8748, 9000, 9800, 10125, 10952, 12168, 12348, 12544, 14283, 14400, 16200, 16928, 17496, 18000, 18252, 18496, 19773, …

La simultaneidad de un cubo y de un cuadrado en un producto hace sospechar que algunos términos sean potencias perfectas en esta sucesión. En efecto, los primeros casos son:

128=2^7, 512=2^9, 6561=3^8, 8192=2^13, …

En ellos el exponente se ha formado combinando el 3 del cubo con el 2 del cuadrado.

Caso cubo y triangular

En la función CUBOYOTRO podemos sustituir la función ESCUAD por la ESTRIANGULAR. Un número es triangular cuando al multiplicarlo por 8 y sumar 1 se convierte en cuadrado. Lo puedes ver con un sencillo desarrollo:

$8*T(n)+1 = 8*n*(n+1)/2+1 = 4n^2+4n+1 =(2n+1)^2$

Con esta propiedad se construye un criterio para saber si un número es triangular:

```
Function estriangular(n) As Boolean
Dim a
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function
```

Sustituimos en CUBOYOTRO la función ESCAPICUA (o ESCUAD) por esta otra y obtendremos los números que son producto de cubo y triangular y también una suma del mismo tipo. Los primeros son:

8	C1	2	CAP1	0	C2	2	CAP2	1
27	C1	3	CAP1	0	C2	3	CAP2	1
48	C1	3	CAP1	21	C2	2	CAP2	6
405	C1	3	CAP1	378	C2	3	CAP2	15
567	C1	8	CAP1	55	C2	3	CAP2	21
648	C1	8	CAP1	136	C2	6	CAP2	3
750	C1	9	CAP1	21	C2	5	CAP2	6
960	C1	9	CAP1	231	C2	4	CAP2	15
1029	C1	9	CAP1	300	C2	7	CAP2	3
1215	C1	8	CAP1	703	C2	3	CAP2	45
1344	C1	6	CAP1	1128	C2	4	CAP2	21
1680	C1	3	CAP1	1653	C2	2	CAP2	210
1848	C1	12	CAP1	120	C2	2	CAP2	231
2024	C1	2	CAP1	2016	C2	2	CAP2	253

Como en anteriores ocasiones, C1 y C2 son los dos cubos y CAP1, CAP2, en este caso, los triangulares (se ha deslizado la abreviatura de capicúa).

Por ejemplo, 1029=9^3+300=9^3+24*25/2, suma de cubo y triangular, y además, 1029=7^3*3=7^3*2*3/2.

Producto de cubo y triangular.

En estos ejemplos está incluido el 0 como triangular. En el siguiente listado, obtenido con PARI, no figuran:

48, 405, 567, 648, 750, 960, 1029, 1215, 1344, 1680, 1848, 2024, 2106, 2160, 2835, 2880, 3240, 3248, 3430, 3480, 3672, 4760, 5145, 5328, 5670, 7203, 8100, 8232, 10125, 12160, 12320, 12555, 13392, 15000, 15147, 15309, 15435, 15624, 16128, 16848, 17982, 18865, 19656, …

Con vistas a estudiar este lenguaje, se inserta el código usado:

```
condi1(n)= my(c=0); a=truncate(n^(1/3)); for(x=2, a, for(b=2,sqrt(2*n),if(n==x^3*b*(b+1)/2,c=1)));c
condi2(n)= my(c=0); a=truncate(n^(1/3)); for(x=1, a, b=n-x^3;if(issquare(8*b+1)&&b>0,c=x));c
for(y=1,20000, if(condi1(y)&&condi2(y),print1(y,", ")))
```

Cubos con primos

Para esta modalidad necesitamos la función ESPRIMO. La puedes consultar, por ejemplo, en la dirección

https://hojaynumeros.blogspot.com/2016/05/palprimos-primos-palindromicos.html

Al igual que se procedió en casos anteriores, sustituimos ESCAPICUA por ESPRIMO en la función CUBOYOTRO, con el resultado:

24	C1 1 PR1 23 C2 2 PR2 3
40	C1 3 PR1 13 C2 2 PR2 5
54	C1 1 PR1 53 C2 3 PR2 2
56	C1 3 PR1 29 C2 2 PR2 7
81	C1 4 PR1 17 C2 3 PR2 3
88	C1 3 PR1 61 C2 2 PR2 11
104	C1 1 PR1 103 C2 2 PR2 13
128	C1 5 PR1 3 C2 4 PR2 2
135	C1 4 PR1 71 C2 3 PR2 5
136	C1 5 PR1 11 C2 2 PR2 17
152	C1 1 PR1 151 C2 2 PR2 19
184	C1 5 PR1 59 C2 2 PR2 23
189	C1 2 PR1 181 C2 3 PR2 7
192	C1 5 PR1 67 C2 4 PR2 3
232	C1 5 PR1 107 C2 2 PR2 29
250	C1 3 PR1 223 C2 5 PR2 2
296	C1 3 PR1 269 C2 2 PR2 37
297	C1 4 PR1 233 C2 3 PR2 11

Si observamos las dos últimas filas, descubriremos muchos números primos como base del segundo cubo. En este caso, el número tendrá una descomposición en factores primos del tipo N=p^3*q, con lo que poseerá ocho divisores si p es distinto de q, porque TAU(N)=(3+1)(1+1)

Por ejemplo, 189=2^3+181=3^3*7, y sus ocho divisores son 189, 63, 27, 21, 9, 7, 3 y 1.

Si p=q, N=p^4, como es el caso de 81, y TAU(81)=1+4=5, siendo sus divisores 81, 27, 9, 3 y 1.
Terminamos aquí los casos. Podríamos ahora repetir el trabajo con cuartas o quintas potencias, pero se intuye

que no tendrían demasiado interés. Como propuesta, se incluyen los primeros de algunos casos:

Potencias cuartas con primos

Número Descomposición
32 C1 1 PR1 31 C2 2 PR2 2
48 C1 1 PR1 47 C2 2 PR2 3
80 C1 1 PR1 79 C2 2 PR2 5
112 C1 3 PR1 31 C2 2 PR2 7
208 C1 3 PR1 127 C2 2 PR2 13
243 C1 2 PR1 227 C2 3 PR2 3

Por ejemplo, 112=3^4+31=2^4*7

Potencias cuartas con cuadrados

Número Descomposición
400 C1 4 PR1 144 C2 2 PR2 25
2025 C1 6 PR1 729 C2 3 PR2 25
3600 C1 6 PR1 2304 C2 2 PR2 225
6400 C1 8 PR1 2304 C2 4 PR2 25
15625 C1 10 PR1 5625 C2 5 PR2 25

Así, 3600=6^4+48^2=2^4*15^2

Es fácil razonar que todos los números de este tipo son cuadrados.

Potencias cuartas con triangulares

16	C1	1	PR1	15	C2	2	PR2	1
96	C1	3	PR1	15	C2	2	PR2	6
2401	C1	4	PR1	2145	C2	7	PR2	1
3040	C1	5	PR1	2415	C2	2	PR2	190

No tiene interés seguir con más ejemplos. Aquí terminamos.

BASES DE CUBOS CON SUMA CERO

Hace unos años publiqué en un estudio sobre las sumas de cubos cuyas bases suman cero. Lo restringí a las sumas de tres cubos.

Releyendo la entrada he visto que le sobra mucho material y que algunos aspectos de la cuestión no están bien explicados. Regresamos a ella para completarla y quitarle cuestiones poco interesantes.

Comenzaba así:

Otro estudio más que se basa en mis cálculos en Twitter (@connumeros). El día 22/3/2020 publiqué:
22320 se puede representar mediante dos sumas de cubos cuyas bases suman 0:

22320=(-16)^3+(-15)^3+31^3, con 31+(-15)+(-16)=0
22320 =(-60)^3+(-2)^3+62^3 y 62+(-2)+(-60)=0

No son muchos relativamente los números que cumplen una propiedad similar. Comenzaremos con aquellos que presenten suma de cubos cuyas bases sumen cero al menos una vez. El primero es el 6, que se puede representar como 6=2^3+(-1)^3+(-1)^3, con 2+(-1)+(-1)=0

Función adecuada

Todo el planteamiento del problema se basa en que N sea entero positivo, pues el caso contrario es equivalente en su planteamiento. Para que la suma de bases sea cero y la de cubos positiva deberá existir un cubo positivo y dos negativos, pues en ese caso la base del positivo será la suma de las los negativos, es decir, que el esquema de la suma sería (p+q)^3-p^3-q^3. Cualquier otro planteamiento daría suma no nula o negativa.

Para la búsqueda que sigue es preferible llamar p a la base del cubo positivo y a las negativas -q y –(p-q). Cualquier otra nomenclatura también nos serviría. Así que trabajaremos con el esquema $N=p^3-q^3-(p-q)^3$, con p>q.

Si partimos de esa igualdad, desarrollando, $N=p^3-q^3-(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3)=3p^2q-3pq^2=3pq(p-q)$. Equivale a afirmar que N es el triple del producto de los valores absolutos de las bases de los cubos.

Esta expresión 3pq(p-q) nos servirá para construir una parada en la búsqueda, exigiendo que 3pq(p-q)<=N para cada valor de p y q y que en el caso de la igualdad haga finalizar la búsqueda. Es más rápido así. También nos indica que N ha de ser múltiplo de 6, ya que pq(p-q) es siempre par.

Versión para Excel

La siguiente función actúa sobre un número natural y devuelve una cadena de texto, que puede estar vacía o contener la primera solución que se encuentre. Este es su listado:

```
Function cubossum(n)
Dim i, j, a
Dim es
Dim s$

If n Mod 6 <> 0 Then cubossum = "": Exit Function
‘Da salida si no es múltiplo de 6
es = False ‘Parará el proceso si se encuentra solución
i = 1  ‘Contador para la variable p
s = ""  ‘Cadena de texto para el resultado
a = 0 ‘Contendrá la suma de cubos
```

While a <= n And Not es ‘Se para si se llega a ***n*** o se encuentra una suma

j = 1 ‘Contador de la variable ***q***

While j < i And Not es

a = 3 * i * j * (i - j) ‘Expresión buscada

If a = n Then es = True: s = s + Str$(j) + Str$(i) ‘Se encuentra solución

j = j + 1

Wend

i = i + 1

Wend

cubossum = s

End Function

Con esta función podemos organizar una búsqueda de aquellos números que presentan la descomposición buscada. Los primeros son:

6	1 2
18	1 3
36	1 4
48	2 4
60	1 5
90	2 5
126	1 7
144	2 6
162	3 6
168	1 8
210	2 7
216	1 9
252	3 7
270	1 10
288	2 8
330	1 11

Cada número encontrado viene acompañado del valor de q y el de p. Así, para 210, q=2 p=7, luego 210 = $7^3-2^3-(7-2)^3 = 7^3-2^3-5^3$ = 343-8-125 = 210

Un listado más completo es

6, 18, 36, 48, 60, 90, 126, 144, 162, 168, 210, 216, 252, 270, 288, 330, 360, 378, 384, 396, 468, 480, 486, 540, 546, 594, 630, 720, 750, 792, 816, 858, 918, 924, 972, 990, 1008, 1026, 1140, 1152, 1170, 1260, 1296, 1344, 1386, 1404, 1518, 1530, 1560, 1620, 1638, 1656, 1680, 1728, 1800, …

Hemos publicado esta sucesión en
https://oeis.org/A333821

Todo esto se puede traducir al lenguaje PARI:

```
ok(n) =
{my(i=1,a=0,m=0,j);if(n%6==0,while(a<=n&&m==0,j=
1;while(j<i&&m==0,a=3*i*j*(i-
j);if(a==n,m=1);j+=1);i+=1)); m}
{for(p=1,2000,if(ok(p),print1(p,", ")))}
```

Si lo pruebas en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html obtendrás la lista de los primeros números que cumplen esta descomposición:

6, 18, 36, 48, 60, 90, 126, 144, 162, 168, 210, 216, 252, 270, 288, 330, 360, 378, 384, 396, 468, 480, 486, 540, 546, 594, 630, 720, 750, 792, 816, 858, 918, 924, 972, 990, 1008, 1026, 1140, 1152, 1170, 1260, 1296, 1344, 1386, 1404, 1518, 1530, 1560, 1620, 1638, 1656, 1680, 1728, 1800, …

Algoritmo más rápido

En el anterior planteamiento no se aprovecha el hecho de que p, q y p-q son divisores de N/3 y por eso en los bucles de búsqueda se prueban demasiados valores inútiles. En la siguiente versión se consigue más velocidad, y se han añadido al resultado todas las posibilidades de forma más clara, así como el añadido al principio del número de soluciones, Este sería el listado de la nueva función:

```
Function cubossum2$(n)
Dim p, q, r, m
Dim s$

If n Mod 6 <> 0 Then cubossum2 = "NO": Exit Function
s = " sol: "
m = 0 ‘Nuevo: contador de soluciones
For p = 2 To n / 3

If n / p = n \ p Then ‘Sólo se admite p si es divisor
```

```
For q = 1 To p - 1
If n / q = n \ q Then ' También q ha de ser divisor
r = p – q 'Tercera base de cubos
'Prueba para identificar una solución y su incorporación
If n = 3 * p * q * r And r <= q Then m = m + 1: s = s + " # " + ajusta(p) + "^3+(-" + ajusta(q) + ")^3+(-" + Str$(r) + ")^3"
End If
Next q

End If
Next p
s = Str$(m) + s 'Se incorpora el contador de soluciones
cubossum2 = s
End Function
```

Así quedan las primeras soluciones, con más información que en la función anterior:

Número N	Soluciones	
6	1 sol: # 2^3+(-1)^3+(- 1)^3	
18	1 sol: # 3^3+(-2)^3+(- 1)^3	
36	1 sol: # 4^3+(-3)^3+(- 1)^3	
48	1 sol: # 4^3+(-2)^3+(- 2)^3	
60	1 sol: # 5^3+(-4)^3+(- 1)^3	
90	2 sol: # 5^3+(-3)^3+(- 2)^3 # 6^3+(-5)^3+(- 1)^3	
126	1 sol: # 7^3+(-6)^3+(- 1)^3	
144	1 sol: # 6^3+(-4)^3+(- 2)^3	
162	1 sol: # 6^3+(-3)^3+(- 3)^3	
168	1 sol: # 8^3+(-7)^3+(- 1)^3	
210	1 sol: # 7^3+(-5)^3+(- 2)^3	
216	1 sol: # 9^3+(-8)^3+(- 1)^3	
252	1 sol: # 7^3+(-4)^3+(- 3)^3	
270	1 sol: # 10^3+(-9)^3+(- 1)^3	
288	1 sol: # 8^3+(-6)^3+(- 2)^3	
330	1 sol: # 11^3+(-10)^3+(- 1)^3	
360	1 sol: # 8^3+(-5)^3+(- 3)^3	
378	1 sol: # 9^3+(-7)^3+(- 2)^3	
384	1 sol: # 8^3+(-4)^3+(- 4)^3	
396	1 sol: # 12^3+(-11)^3+(- 1)^3	
468	1 sol: # 13^3+(-12)^3+(- 1)^3	
480	1 sol: # 10^3+(-8)^3+(- 2)^3	
486	1 sol: # 9^3+(-6)^3+(- 3)^3	
540	1 sol: # 9^3+(-5)^3+(- 4)^3	
546	1 sol: # 14^3+(-13)^3+(- 1)^3	
594	1 sol: # 11^3+(-9)^3+(- 2)^3	
630	2 sol: # 10^3+(-7)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-14)^3+(- 1)^3	
720	3 sol: # 10^3+(-6)^3+(- 4)^3 # 12^3+(-10)^3+(- 2)^3 # 16^3+(-15)^3+(- 1)^3	

Ahora se perciben mejor las soluciones múltiples, que serán objeto del siguiente apartado.

Resultados múltiples

Algunos de estos números presentan varias descomposiciones. El primero es 90, que admite las dos sumas 90=5^3-3^3-2^3 y 90=6^3-5^3-1^3. Después le siguen estos:

Número N	Soluciones
90	2 sol: # 5^3+(-3)^3+(- 2)^3 # 6^3+(-5)^3+(- 1)^3
630	2 sol: # 10^3+(-7)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-14)^3+(- 1)^3
720	3 sol: # 10^3+(-6)^3+(- 4)^3 # 12^3+(-10)^3+(- 2)^3 # 16^3+(-15)^3+(- 1)^3
1170	2 sol: # 13^3+(-10)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-13)^3+(- 2)^3
1260	2 sol: # 12^3+(-7)^3+(- 5)^3 # 21^3+(-20)^3+(- 1)^3
1386	2 sol: # 14^3+(-11)^3+(- 3)^3 # 22^3+(-21)^3+(- 1)^3
2430	2 sol: # 15^3+(-9)^3+(- 6)^3 # 18^3+(-15)^3+(- 3)^3
2640	2 sol: # 16^3+(-11)^3+(- 5)^3 # 22^3+(-20)^3+(- 2)^3
3024	2 sol: # 16^3+(-9)^3+(- 7)^3 # 18^3+(-14)^3+(- 4)^3
3060	2 sol: # 17^3+(-12)^3+(- 5)^3 # 20^3+(-17)^3+(- 3)^3
3168	2 sol: # 24^3+(-22)^3+(- 2)^3 # 33^3+(-32)^3+(- 1)^3
3366	2 sol: # 17^3+(-11)^3+(- 6)^3 # 34^3+(-33)^3+(- 1)^3
3570	2 sol: # 17^3+(-10)^3+(- 7)^3 # 35^3+(-34)^3+(- 1)^3
4446	2 sol: # 19^3+(-13)^3+(- 6)^3 # 39^3+(-38)^3+(- 1)^3

Si adaptamos a PARI obtenemos un listado más extenso:

90, 630, 720, 1170, 1260, 1386, 2430, 2640, 3024, 3060, 3168, 3366, 3570, 4446, 5040, 5760, 5940, 6210, 6300, 6930, 8910, 9360, 10080, 11088, 11250, 12480, 12870, 12960, 14490, 14742, 16380, 17010, 18018, 18270, 18810, 19440, 19890, 21120, 22140, 22320, 23310, 24192, 24480, 24570, 25344, 25740, 26928, 27360, 27720, 28560, 29700, 30870, 31590, 31920, 34020, 35568, 36630, 37296, 37422, 39330, 40320, 41328, 42120, 42840, 43056, 44460, 45408, 46080, 47250, 47520, 49680, …

Se ha usado el código

```
ok(n) =
{my(p,q,r,m=0);if(n%6==0,for(p=2,n/2,if(n%p==0,for(
q=1,p-1,if(n%q==0,r=p-
q;if(n==3*p*q*r&&r<=q,m+=1)))))); m}
```

{for(p=1,30000,h=ok(p);if(h>1,print1(p,", ")))}

Destaca el 720 con tres descomposiciones:
720=10^3-6^3-4^3=12^3-10^3-2^3=16^3-15^3-1^3
El primero con 4 es 19440: 19440=30^3+(-18)^3+(-12)^3=36^3+(-30)^3+(-6)^3=48^3+(-45)^3+(-3)^3=81^3+(-80)^3+(-1)^3
Con cinco hemos obtenido el 55440, equivale a estas sumas:
55440=42^3+(-22)^3+(-20)^3=44^3+(-30)^3+(-14)^3=55^3+(-48)^3+(-7)^3=70^3+(-66)^3+(-4)^3=80^3+(-77)^3+(-3)^3
Lo dejamos aquí, porque nuestros instrumentos de cálculo se ralentizan con números grandes.

Sumas con cuatro cubos

Algunas consideraciones relativas a las sumas de tres cubos cuyas bases suman cero son válidas para el caso de las sumas de cuatro cubos. La más importante es la de que el número que equivale a la suma de cubos ha de ser múltiplo de 6.

Distinguiremos dos casos, según sean los signos de las bases de los cubos.

Dos positivos y dos negativos

Si el esquema de los cuatro cubos es el de dos positivos y dos negativos, se puede intentar un estudio algebraico no muy complicado. Llamamos k a la suma de las dos bases positivas, y a ellas, p y k-p. Igualmente, podemos llamar –r y r-k a las negativas. Quedaría, pues, el valor de N como

$N=p^3+(k-p)^3-r^3-(k-r)^3$
$N=p^3+k^3-p^3-3k^2p+3kp^2-r^3-k^3+r^3+3k^2r-3kr^2$
$N=-3k^2p+3kp^2+3k^2r-3kr^2=3k^2(r-p)+3k(p^2-r^2)=3k(k(r-p)+(p-r)(p+r))$
$N=3k(p-r)(p+r-k)$

Llegaríamos a una situación similar a la del caso de tres cubos, pero con un parámetro más. Por ejemplo:
30=6^3+4^3-5^3-5^3, y p=6, k=10, k-p=4, r=5 y k-r=5
30=3*10*(6-5)*(6+5-10)=30*1*1=30
30 también es igual a $4^3+1^3-3^3-2^3$, y queda
30=3*5*(4-2)(4+2-5)=3*5*2*1=30

Esto abre camino a una función similar a la usada para tres cubos, pero con tres bucles de búsqueda en lugar de dos. El número N también ha de ser múltiplo de 6, porque k(p-r)(p+r-k) siempre es par.

Podemos usar esta función:

```
Function cubossum4$(n)
Dim p, q, r, k
Dim s$

s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum4 = "NO": Exit Function
For k = 2 To n / 2
If n / k = n \ k Then
For p = 1 To k / 2 - 1
q = k - p
For r = 1 To k / 2
If n = 3 * k * (p - r) * (p + r - k) Then s = s + " # " + ajusta(p) + "^3+" + ajusta(q) + "^3-" + Str$(r) + "^3-" + Str$(k - r) + "^3"
Next r
Next p
End If
Next k
If s = "" Then s = "NO"
cubossum4 = s
End Function
```

No necesita comentarios, porque es similar a las anteriores.

Con ella conseguimos un listado de soluciones, todas ellas con dos cubos positivos y dos negativos:

Número N	Soluciones
12	# 1^3+3^3- 2^3- 2^3
18	# 2^3+4^3- 3^3- 3^3
24	# 3^3+5^3- 4^3- 4^3
30	# 1^3+4^3- 2^3- 3^3 # 4^3+6^3- 5^3- 5^3
36	# 5^3+7^3- 6^3- 6^3
42	# 2^3+5^3- 3^3- 4^3 # 6^3+8^3- 7^3- 7^3
48	# 7^3+9^3- 8^3- 8^3
54	# 1^3+5^3- 2^3- 4^3 # 3^3+6^3- 4^3- 5^3 # 8^3+10^3- 9^3- 9^3
60	# 9^3+11^3- 10^3- 10^3
66	# 4^3+7^3- 5^3- 6^3 # 10^3+12^3- 11^3- 11^3
72	# 1^3+5^3- 3^3- 3^3 # 2^3+6^3- 3^3- 5^3 # 11^3+13^3- 12^3- 12^3
78	# 5^3+8^3- 6^3- 7^3 # 12^3+14^3- 13^3- 13^3
84	# 1^3+6^3- 2^3- 5^3 # 13^3+15^3- 14^3- 14^3
90	# 3^3+7^3- 4^3- 6^3 # 6^3+9^3- 7^3- 8^3 # 14^3+16^3- 15^3- 15^3
96	# 2^3+6^3- 4^3- 4^3 # 15^3+17^3- 16^3- 16^3
102	# 7^3+10^3- 8^3- 9^3 # 16^3+18^3- 17^3- 17^3
108	# 2^3+7^3- 3^3- 6^3 # 4^3+8^3- 5^3- 7^3 # 17^3+19^3- 18^3- 18^3
114	# 8^3+11^3- 9^3- 10^3 # 18^3+20^3- 19^3- 19^3

Un cubo positivo y tres negativos

El otro caso de cuatro cubos presentaría este otro esquema

$N=(p+q+r)^3-p^3-q^3-r^3$

Esto obliga a que N sea par, pues así es para todos los juegos de paridad de p, q y r.

También es múltiplo de tres, ya que desarrollando esa diferencia llegamos a

$N=3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2$

En este caso no es seguro que algún parámetro sea divisor de N, por lo que la búsqueda recorrerá más números. Sí ocurrirá que x, y, z serán menores que N/3. Podemos usar esta función:

```
Function cubossum3(n)
Dim i, j, k
Dim s$
s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum3 = "NO": Exit Function
For i = 1 To n / 3
For j = 1 To i
For k = 1 To j
If (i + j + k) ^ 3 - i ^ 3 - j ^ 3 - k ^ 3 = n Then
s = s + "## " + Str$(i + j + k) + "^3-" + Str$(i) + "^3-" + Str$(j) + "^3-" + Str$(k) + "^3"
End If
Next k
Next j
Next i
If s = "" Then cubossum3 = "NO" Else cubossum3 = s
End Function
```

También en este caso dispondremos de bastantes resultados:

Número N	Soluciones
24	## 3^3- 1^3- 1^3- 1^3
54	## 4^3- 2^3- 1^3- 1^3
96	## 5^3- 3^3- 1^3- 1^3
108	## 5^3- 2^3- 2^3- 1^3
150	## 6^3- 4^3- 1^3- 1^3
180	## 6^3- 3^3- 2^3- 1^3
192	## 6^3- 2^3- 2^3- 2^3
216	## 7^3- 5^3- 1^3- 1^3
270	## 7^3- 4^3- 2^3- 1^3
288	## 7^3- 3^3- 3^3- 1^3
294	## 8^3- 6^3- 1^3- 1^3
300	## 7^3- 3^3- 2^3- 2^3
378	## 8^3- 5^3- 2^3- 1^3
384	## 9^3- 7^3- 1^3- 1^3
420	## 8^3- 4^3- 3^3- 1^3
432	## 8^3- 4^3- 2^3- 2^3
450	## 8^3- 3^3- 3^3- 2^3
486	## 10^3- 8^3- 1^3- 1^3
504	## 9^3- 6^3- 2^3- 1^3
576	## 9^3- 5^3- 3^3- 1^3
588	## 9^3- 5^3- 2^3- 2^3
600	## 9^3- 4^3- 4^3- 1^3## 11^3- 9^3- 1^3- 1^3
630	## 9^3- 4^3- 3^3- 2^3
648	## 9^3- 3^3- 3^3- 3^3## 10^3- 7^3- 2^3- 1^3
726	## 12^3- 10^3- 1^3- 1^3

Hemos avanzado en la tabla hasta descubrir soluciones múltiples.

Caso general

Si no nos apetece el estudio algebraico, podemos usar tan solo que las bases sean, en valor absoluto, menores que N/3

Buscaremos tres cubos de base entera cuya suma se aproxime a N. A las tres bases de esa suma le añadiremos otra que con ellas forme suma cero. Si los cuatro cubos suman N, habremos resuelto la búsqueda. Parece lento, pero no es tanto como se podría esperar.

```
Function cubossum0(n)
Dim i, j, k, h
Dim s$

s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum0 = "NO": Exit Function
'Usamos tres bucles para las tres primeras bases i, j y k
For i = -n / 3 To n / 3
For j = i To n / 3
For k = j To n / 3
h = -i - j - k 'h será la cuarta base para suma nula
If i ^ 3 + j ^ 3 + k ^ 3 + h ^ 3 = n And h >= k Then 'Se cumple la condición
s = s + "# " + Str$(i) + ", " + Str$(j) + ", " + Str$(k) + ", " + Str$(h)
End If
Next k
Next j
Next i
If s = "" Then cubossum0 = "NO" Else cubossum0 = s
End Function
```

Con esta función obtenemos todas las soluciones al problema, las más frecuentes, del tipo de dos cubos positivos y dos negativos, el resto, como el 108, con un solo cubo positivo e, incluso, casos de tres cubos, cuando uno de ellos resulte nulo. Estos son los primeros resultados:

Número N	Soluciones
6	# -1, -1, 0, 2
12	# -2, -2, 1, 3
18	# -3, -3, 2, 4# -2, -1, 0, 3
24	# -4, -4, 3, 5# -1, -1, -1, 3
30	# -5, -5, 4, 6# -3, -2, 1, 4
36	# -6, -6, 5, 7# -3, -1, 0, 4
42	# -7, -7, 6, 8# -4, -3, 2, 5
48	# -8, -8, 7, 9# -2, -2, 0, 4
54	# -9, -9, 8, 10# -5, -4, 3, 6# -4, -2, 1, 5# -2, -1, -1, 4
60	# -10, -10, 9, 11# -4, -1, 0, 5
66	# -11, -11, 10, 12# -6, -5, 4, 7
72	# -12, -12, 11, 13# -5, -3, 2, 6# -3, -3, 1, 5
78	# -13, -13, 12, 14# -7, -6, 5, 8
84	# -14, -14, 13, 15# -5, -2, 1, 6
90	# -15, -15, 14, 16# -8, -7, 6, 9# -6, -4, 3, 7# -5, -1, 0, 6# -3, -2, 0, 5
96	# -16, -16, 15, 17# -4, -4, 2, 6# -3, -1, -1, 5
102	# -17, -17, 16, 18# -9, -8, 7, 10
108	# -18, -18, 17, 19# -7, -5, 4, 8# -6, -3, 2, 7# -2, -2, -1, 5
114	# -19, -19, 18, 20# -10, -9, 8, 11
120	# -20, -20, 19, 21# -6, -2, 1, 7# -5, -5, 3, 7
126	# -21, -21, 20, 22# -11, -10, 9, 12# -8, -6, 5, 9# -6, -1, 0, 7# -4, -3, 1, 6
132	# -22, -22, 21, 23# -7, -4, 3, 8

Con esto finalizamos las búsquedas

EL PROBLEMA DEL ALBAÑIL

Este problema consiste en encontrar qué números N poseen un cuadrado N^2 que sea suma de cubos consecutivos. Se consideran cubos mayores que 1, pues todos los números triangulares poseen cuadrados que son suma de los primeros cubos, según la conocida fórmula $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots n^3=(n(n+1)/2)^2$, y se desea eliminar un exceso de casos triviales.

Se exige también que el número de cubos sea al menos de tres. Según la página https://oeis.org/A238099, un ejemplo es el de

312^2 = 97344 = 14^3 + 15^3 + ... + 25^3.

El nombre y las condiciones del problema (por ejemplo, que se use el cuadrado del número) vienen de un ejercicio propuesto en un libro de Dudeney:

H. E. Dudeney, Amusements in Mathematics, Nelson, London, 1917, Problem 135.

Lo podemos consultar en
https://archive.org/details/amusementsinmath00dude/page/24/mode/1up?view=theater

Su enunciado es un tanto artificioso, pero sirvió de base para estudiar con más profundidad las sumas de cubos consecutivos. El problema, como vemos, está resuelto, pero aquí estudiaremos los algoritmos que lo pueden resolver.

En ella estudiábamos las sumas de cubos consecutivos, pero las derivábamos a otras cuestiones, como las ternas pitagóricas. Nos dedicaremos al problema del albañil, pero podremos referirnos a algún resultado contenido en esa entrada de hace años.

Desde hace un tiempo prefiero las funciones que devuelven un texto. Son más explicativas y no dificultan búsquedas posteriores si se saben construir. En este caso del problema del albañil adaptaremos específicamente alguna otra función similar. La que presentamos da las soluciones de sumas de cuadrados sólo cuando se excluye el 1 y se exigen al menos tres sumandos. Su código para Excel y Libreoffice Calc es el siguiente:

Function albanil$(n)
Dim i, j, a, n1
Dim s$
Dim novale As Boolean

s = "" ‘Contenedor de la solución
n1 = n ^ 2 ‘Trabajamos con el cuadrado
i = Int(n1 ^ (1 / 3)) ’Máximo cubo contenido en n^2
novale = True ‘Suponemos que no hay solución
While i > 1 And novale ‘Desciende el mayor cubo hasta 2^3
a = i ^ 3 ‘Primera suma de cubos
j = i’Cubo inicial de la suma
While j > 1 And a <= n1 And novale
‘Se llega a la solución de tres cubos o más

If a = n1 And i - j > 2 Then s = s + "Desde" + Str$(j) + " hasta " + Str$(i): novale = False ‘novale ya no es cierto

j = j – 1’Desciende el primer cubo

a = a + j ^ 3’Se incrementa la suma

Wend

i = i – 1’Desciende el último cubo

Wend

If novale Then s = "NO"

albanil = s

End Function

Con esta función y un buscador podemos reproducir la lista publicada de soluciones:

Número N	Su cuadrado	Bases de cubos
312	97344	Desde 14 hasta 25
315	99225	Desde 25 hasta 29
323	104329	Desde 9 hasta 25
504	254016	Desde 28 hasta 35
588	345744	Desde 14 hasta 34
720	518400	Desde 25 hasta 39
2079	4322241	Desde 33 hasta 65
2170	4708900	Desde 96 hasta 100
2940	8643600	Desde 118 hasta 122
4472	19998784	Desde 69 hasta 100
4914	24147396	Desde 81 hasta 108
5187	26904969	Desde 64 hasta 105
5880	34574400	Desde 64 hasta 111
5984	35808256	Desde 120 hasta 136
6630	43956900	Desde 144 hasta 156
7497	56205009	Desde 25 hasta 122
8721	76055841	Desde 153 hasta 170
8778	77053284	Desde 144 hasta 164
9360	87609600	Desde 111 hasta 149
10296	106007616	Desde 133 hasta 164
10695	114383025	Desde 81 hasta 149
11024	121528576	Desde 21 hasta 148

Estos resultados coinciden con los publicados en https://oeis.org/A238099, luego nuestro primer objetivo está cumplido.

Usamos números triangulares

Recordamos la siguiente equivalencia:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots n)^2$$

Según ella, una suma de cubos que no comience con 1 será equivalente a una diferencia de los cuadrados de dos números triangulares.

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+k)^3 = \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

Esto nos permite utilizar la diferencia entre los cuadrados de dos números triangulares para identificar las sumas de cubos. Así obtendríamos una variante alternativa a la vista en anteriores párrafos.

Para encontrar los dos números triangulares basta descomponer N en productos de suma por diferencia de dos números, ya que eso equivale a una diferencia de cuadrados. Una vez obtenidos se les exige que sean triangulares y que sus órdenes se diferencien en más de 3 unidades.

Descomponemos N en productos de la misma paridad, N=pq y después definimos a=(p+q)/2 y b=(p-q)/2, con lo que tendríamos los posibles triangulares. Es una técnica que hemos usado a menudo.

```
Function estriangular(n) As Boolean
Dim a

a = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
If a * (a + 1) = 2 * n Then estriangular = True Else
estriangular = False
End Function

Public Function ordentriang(n)
Dim k
If estriangular(n) Then k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
Else k = 0
ordentriang = k
End Function
```

El código de esta función es:

```
Function albanil2$(n)
Dim i, j, p, q, a, b, n1
Dim s$
Dim novale As Boolean
```

s = "" ‘Contenedor de la solución

n1 = n ^ 2 ’Trabajamos con el cuadrado

i = 1 ‘Primer divisor

novale = True

While i <= n And novale

If n1 / i = n1 \ i Then ‘Es divisor

j = n1 / i ‘Divisor complementario

If (j - i) Mod 2 = 0 Then ‘Tienen la misma paridad los factores

p = (i + j) / 2: q = (j - i) / 2 ‘Vamos construyendo la diferencia de cuadrados

If estriangular(p) And estriangular(q) Then

a = ordentriang(p): b = ordentriang(q) ‘Son ambos triangulares

If a - b > 3 And b > 1 Then s = s + "Desde" + Str$(b + 1) + " hasta " + Str$(a): novale = False

End If

End If

End If

i = i + 1

Wend

If novale Then s = "NO"

albanil2 = s

End Function

En la entrada a la que regresamos hoy se termina considerando que los dos triangulares de la diferencia de cuadrados y el número N estudiado forman una terna pitagórica, pero este tema es preferible leerlo en la entrada original.

Con esto cumplimos nuestro objetivo, que era sólo algorítmico.

DIFERENCIA DE DOS CUBOS IGUAL A UNA SUMA

Caso general

En los cálculos que publico diariamente uso dos funciones para averiguar si un número es suma de cubos o bien diferencia. No se me había ocurrido simultanear ambas propiedades y lo hago ahora.

¿Qué números enteros positivos son suma de dos cubos y simultáneamente diferencia de otros dos, siendo en ambos casos cubos enteros positivos?

Un ejemplo es el 152, que por una parte equivale a 3^3+5^3=27+125, y por otra a 6^3-4^3=216-64.

Con las publicaciones precedentes tenemos acceso a dos funciones que encuentran estas descomposiciones: SUMCUBOS y DIFCUBOS. Las copio a continuación:

```
Function sumcubos(n)
Dim k, a, m, b
Dim s$

s = "" 'Contenedor de resultados
m = 0 'Contador de soluciones
a = n ^ (1 / 3) 'Máximo cubo posible
For k = 1 To a
b = n - k ^ 3 'Segundo posible cubo
If escubo(b) And k <= b ^ (1 / 3) Then m = m + 1: s = s
+ " a=" + Str$(k) + " b=" + Str$(Int(b ^ (1 / 3) + 0.0001))
'Hay nueva solución
Next k 'Si no hay solución devuelve "NO"
End Function
```

Usa nuestra función ESCUBO:

```
Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo =
False
End Function
```

La segunda función es algo más complicada, porque la diferencia presenta otro condicionante, y es que la diferencia de cubos ha de ser divisor de N.

```
Function difcubos$(n)

Dim k, a, t, m, p
Dim s$
s = "" ‘Contenedor de soluciones
m = 0 ‘Contador de soluciones
For k = 1 To n / 2 ‘La diferencia de bases es divisor de N
If n / k = n \ k Then ‘Criterio de divisibilidad
t = Sqr(n / k / 3) ‘Máximo cubo con esa diferencia
For a = 1 To t
If (a + k) ^ 3 - a ^ 3 = n Then m = m + 1: s = s + " # a=" + Str$(a) + " b=" + Str$(a + k) ‘Existe solución
Next a
End If
Next k
If s = "" Then difcubos = "NO" Else difcubos = ajusta(m) + " " + s
End Function
```

El que esta segunda función use también el “NO” para cuando no existe solución nos permite simultanear las dos condiciones:

SUMCUBOS(N)<>”NO” AND DIFCUBOS(N)<>”NO”

Usamos esta condición en un buscador y nos devolverá la lista de números enteros positivos que son simultáneamente suma y diferencia de dos cubos (también enteros positivos)

Número N	Suma de cubos	Diferencia de cubos
91	1: a= 3 b= 4	1 # a= 5 b= 6
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
189	1: a= 4 b= 5	1 # a= 3 b= 6
217	1: a= 1 b= 6	1 # a= 8 b= 9
513	1: a= 1 b= 8	1 # a= 6 b= 9
728	1: a= 6 b= 8	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9
1027	1: a= 3 b= 10	1 # a= 18 b= 19
1216	1: a= 6 b= 10	1 # a= 8 b= 12
1512	1: a= 8 b= 10	1 # a= 6 b= 12
1736	1: a= 2 b= 12	1 # a= 16 b= 18
2457	1: a= 9 b= 12	1 # a= 15 b= 18
3087	1: a= 7 b= 14	1 # a= 17 b= 20
4104	2: a= 2 b= 16 a= 9	1 # a= 12 b= 18
4706	1: a= 11 b= 15	1 # a= 27 b= 29
4921	1: a= 2 b= 17	1 # a= 40 b= 41
4977	1: a= 4 b= 17	1 # a= 22 b= 25

Están publicados en https://oeis.org/A225908, y es subsecuencia de https://oeis.org/A051347 En esas páginas se llama la atención sobre que estas propiedades permiten descomponer algunos cubos en suma de otros tres. Ya he comentado esta propiedad anteriormente en otras entradas. Por ejemplo, 18^3=16^3+12^3+2^3. Esta igualdad se extrae de los resultados del número 4104.

Si se usa la función TRESCUBOS (no se explica aquí porque usa otras funciones que alargarían esta entrada) con uno de los cubos mayores, se reproducirán algunos resultados. Por ejemplo, con 18^3, si lo descomponemos en suma de tres cubos, daría lugar a

18^3=15^3+6^3+9^3=16^3+6^3+2^3

Si pasamos restando algún sumando, obtendríamos algunos casos de los estudiados. Por ejemplo:
18^3-15^3=9^3+6^3

A continuación estudiaremos algunos casos y propiedades particulares.

Casos particulares de los cubos sumandos

Cubos consecutivos

Los dos cubos que se suman pueden ser consecutivos. Añadiendo algún parámetro a nuestra función se pueden encontrar esos casos particulares. No abundan. Estos son los inferiores a 10^5:

Número N	Suma de cubos consecutivos	Diferencia de cubos
91	1: a= 3 b= 4	1 # a= 5 b= 6
189	1: a= 4 b= 5	1 # a= 3 b= 6
12691	1: a= 18 b= 19	1 # a= 21 b= 28
68705	1: a= 32 b= 33	1 # a= 6 b= 41
97309	1: a= 36 b= 37	1 # a= 3 b= 46

En ellos se ha de cumplir que $N=(a+1)^3+a^3=2a^3+3a^2+3a+1$, luego **a** será un divisor de N-1.

Por ejemplo. 68705-1 se descompone como $2^5*19*113$, y, efectivamente, $32=2^5$ es un divisor suyo, y es la base del cubo menor de la suma.

Cubos de N y N+2

Con el mismo procedimiento obtenemos los primeros casos en los que las bases de los cubos que se suman se diferencian en dos unidades.

Número N	Suma de cubos de N y N+2	Diferencia de cubos
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
728	1: a= 6 b= 8	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9
1512	1: a= 8 b= 10	1 # a= 6 b= 12
16120	1: a= 19 b= 21	1 # a= 18 b= 28

Es sencillo demostrar que aquí la base del cubo menor ha de ser divisor de N-8, como ocurre con 16120, en el que (16120-8)/19=848

Cubos de base prima

Para finalizar, se adjuntan los tres primeros resultados para el caso en el que las bases de los cubos que se suman sean números primos. Se acumulan las exigencias y es normal que resulten pocos resultados.

Número N	Suma de cubos de base prima	Diferencia de cubos
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
4921	1: a= 2 b= 17	1 # a= 40 b= 41
5256	1: a= 7 b= 17	1 # a= 14 b= 20

Versión en PARI

Para quienes deseen practicar con este lenguaje, se inserta a continuación un código que devuelve las soluciones entre1 y 5000. Es interesante estudiar el uso de vectores para devolver las soluciones:

```
sumadoscubos(n)=my(i=1,m,v=[0,0]);while(i<=n^(1/3),m=n-i^3;if(ispower(m,3)&&m<=i^3,v=[i,m^(1/3)]);i+=1);v

difcubos(n)=my(k,t,a,v=[0,0]);for(k=1,n,if(n%k==0,t=sqrt(n/k/3);for(a=1,t,if((a+k)^3-a^3==n,v=[a+k,a]))));v

for(m=1,5000,u=difcubos(m);t=sumadoscubos(m);if(u<>[0,0]&&t<>[0,0],print(m," Suma ",t," Diferencia ",u)))
```

Resultado:

```
(18:58) gp > \r C:\Users\arold\Documents\P
%48 = (n)->my(i=1,m,v=[0,0]);while(i<=n^(1
%49 = (n)->my(k,t,a,v=[0,0]);for(k=1,n,if(
91 Suma [4, 3] Diferencia [6, 5]
152 Suma [5, 3] Diferencia [6, 4]
189 Suma [5, 4] Diferencia [6, 3]
217 Suma [6, 1] Diferencia [9, 8]
513 Suma [8, 1] Diferencia [9, 6]
728 Suma [8, 6] Diferencia [9, 1]
1027 Suma [10, 3] Diferencia [19, 18]
1216 Suma [10, 6] Diferencia [12, 8]
1512 Suma [10, 8] Diferencia [12, 6]
1736 Suma [12, 2] Diferencia [18, 16]
2457 Suma [12, 9] Diferencia [18, 15]
3087 Suma [14, 7] Diferencia [20, 17]
4104 Suma [16, 2] Diferencia [18, 12]
4706 Suma [15, 11] Diferencia [29, 27]
4921 Suma [17, 2] Diferencia [41, 40]
4977 Suma [17, 4] Diferencia [25, 22]
(18:59) gp > |
```

ACERCAMIENTO ENTRE POTENCIAS

Se sabe que sólo existen dos potencias que se diferencien en una unidad, que son $8=2^3$ y $9=3^2$. Sí pueden existir otros casos con diferencias mayores entre cuadrado y cubo. Vemos los primeros ejemplos:

Dif=2: $5^2+2=3^3$
Dif:=3: $2^2-3=1^3$
Dif=4: $2^2+4=2^3$; $11^2+4=5^3$
Dif=5 y 6: No hay ejemplos elementales
Dif=7: $1^2+7=2^3$; $181^2+7=32^3$
Dif=8: $3^2-8=1^3$; $4^2-8=2^3$; $312^2-8=46^3$
Dif=9: $6^2-9=3^3$; $15^2-9=6^3$; $253^2-9=40^3$
Dif=10: No hay ejemplos elementales.

Todos son casos particulares de la ecuación $x^2=y^3+k$, que necesita conocimientos profundas de Teoría de Números para su resolución. Por eso, aquí se usarán técnicas de búsqueda de soluciones en casos particulares.

Diferencias entre cuadrados y cubos

Podemos usar una función que mida el acercamiento a un cubo. Así, si se construye una lista de cuadrados, se podrán elegir aquellos que se diferencien de un cubo en un número dado. Así se han encontrado los ejemplos del párrafo anterior.

La función adecuada puede ser esta, que está diseñada para cualquier valor del exponente. Actúa sobre un número (que puede ser otra potencia), una diferencia dada y el exponente de la potencia. Al número le sumamos y restamos la diferencia dada, y con otra función, *espotentipo*, se averigua si es potencia perfecta o no.

Public function difepot(n,dife,ex1) as boolean
'para un número n ver si dista dife unidades de una potencia dada
'Variables: **n** es el número, **dife**, la diferencia dada y **ex1** el exponente de la potencia.

dim a,b
dim es as boolean

es=false 'Declaramos que la función es falsa
a=n+dife 'Buscamos la potencia "por arriba"
If espotentipo(a,ex1) then 'Más abajo se explica esta función
es=true 'Si es potencia, la diferencia es válida.
else
b=n-dife 'Buscamos la potencia "por abajo y procedemos del mismo modo"

if b>0 then
If espotentipo(b,ex1) then es=true
end if
end if
difepot=es
end function

La función *espotentipo* busca si un número es potencia con un exponente dado. Actúa sobre el número y el exponente y devuelve VERDADERO o FALSO. Su código es el siguiente:

Public Function espotentipo(n, k) As Boolean
Dim m, i
Dim e As Boolean

m = Log(n) / k
m = Int(Exp(m)) 'Mediante logaritmos, encuentra un posible valor para la base de la potencia
e = False
For i = m - 1 To m + 1 'Por si existen errores de redondeo, prueba con m, m+1 y m-1
If i ^ k = n Then e = True 'Si con uno de ellos se reconstruye la potencia, es válido
Next i
espotentipo = e
End Function

Con estas dos funciones, bastará crear una lista de cuadrados y ver si alguno de ellos se diferencia de un cubo (mayor o menor que él) en una cantidad dada. Por ejemplo, si construimos la lista de los veinte primeros cuadrados, veremos que al llegar al 14, su cuadrado se diferencia en 20 unidades del cubo de 6: $14^2+20=6^3$.

Potencia más cercana

Podemos encontrar, para un número cualquiera, la potencia de cierto exponente que esté más cercana, y evaluar su diferencia. Para ello podemos usar esta otra función:

Public function difepot2(n,ex1)
'busca la potencia ex1 más cercana y devuelve la diferencia
dim p,q
p=int(n^(1/ex1))
dife=abs(n-p^ex1)
q=abs(n-(p+1)^ex1) ‘Busca la potencia si es menor o mayor. Ambas valen.
if q<dife then dife=q ‘Se queda con la diferencia menor.
difepot2=dife
end function

En esta tabla puedes observar las diferencias con el cubo más cercano. Se descubre que esos cubos son el

8 o el 27. Hasta el 17, el cubo más cercano es el 8, y a partir del 18, el 27.

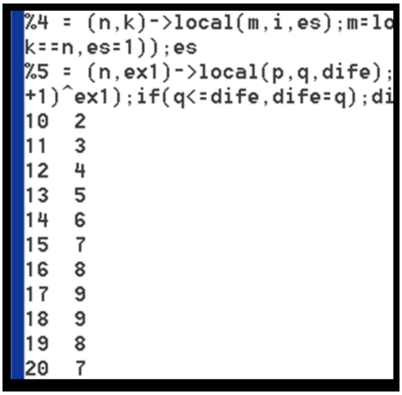
10	2
11	3
12	4
13	5
14	6
15	7
16	8
17	9
18	9
19	8
20	7
21	6
22	5
23	4
24	3
25	2

Versión en PARI

Estas funciones de Excel no tienen mucha potencia de cálculo. Por eso, en algún momento usaremos sus versiones en PARI, cuyo código es el siguiente:

```
espotentipo(n,k)=local(m,i,es);m=log(n)/k;m=truncate(exp(m));es=0;for(i=m-1,m+1,if(i^k==n,es=1));es
difepot(n,ex1)=local(p,q,dife);p=truncate(n^(1/ex1));dife=abs(n-p^ex1);q=abs(n-(p+1)^ex1);if(q<=dife,dife=q);dife
```

Con el uso de ambas, hemos reproducido la tabla anterior entre el 10 y el 20:



```
%4 = (n,k)->local(m,i,es);m=lo
k==n,es=1));es
%5 = (n,ex1)->local(p,q,dife);
+1)^ex1);if(q<=dife,dife=q);di
10  2
11  3
12  4
13  5
14  6
15  7
16  8
17  9
18  9
19  8
20  7
```

Como ejemplo del uso de esta función, se inserta a continuación la tabla de diferencias entre cuadrado y cubo menores que 10 (y mayores que 0) para potencias interiores a 1000000:

n	n^2	m	m^3	Dife
2	4	1	1	3
4	16	2	8	8
5	25	3	27	2
6	36	3	27	9
11	121	5	125	4
15	225	6	216	9
181	32761	32	32768	7
253	64009	40	64000	9
312	97344	46	97336	8

Otras potencias

Diferencias mínimas entre cubo y cuarta potencia, dife<30:

n	n^3	m	m^4	Dife
2	8	1	1	7
3	27	2	16	11
4	64	3	81	17
37	50653	15	50625	28

Entre cuartas y quintas potencias, dife<50:

n	n^4	m	m^5	Dife
2	16	1	1	15
3	81	2	32	49
4	256	3	243	13

Así podemos seguir con otros casos. Terminamos con cubos y séptimas potencias:

n	n^3	m	m^7	Dife
2	8	1	1	7
3	27	1	1	26
5	125	2	128	3
13	2197	3	2187	10

Para terminar, agrupamos en una misma tabla diferencias menores que 10 en algunos casos. Hemos eliminado en la segunda potencia los valores 1 y 2, ya conocidos y triviales:

n	exp1	n^exp1	exp2	m	m^exp2	Dife
2	5	32	2	6	36	4
2	5	32	3	3	27	5
2	7	128	2	11	121	7
2	7	128	3	5	125	3
3	3	27	2	5	25	2
5	2	25	3	3	27	2
5	3	125	2	11	121	4
6	2	36	3	3	27	9
6	3	216	2	15	225	9
8	5	32768	2	181	32761	7
11	2	121	3	5	125	4
15	2	225	3	6	216	9
32	3	32768	2	181	32761	7
40	3	64000	2	253	64009	9
46	3	97336	2	312	97344	8
181	2	32761	3	32	32768	7
181	2	32761	5	8	32768	7
253	2	64009	3	40	64000	9
312	2	97344	3	46	97336	8

DIFERENCIA DE POTENCIAS

En nuestras publicaciones hemos tratado frecuentemente las diferencias de cuadrados y, recientemente, las de cubos. Parecía conveniente intentar una generalización a pares de potencias de cualquier exponente.

Para ello nos basaremos en la conocida fórmula

$$b^k - a^k = (b-a)(b^{k-1} + a^1 b^{k-2} + a^2 b^{k-3} + \cdots + a^{k-1})$$

Para nuestro estudio es preferible expresar la diferencia de potencias como $(a+h)^k - a^k$

$$(a+h)^k - a^k = \binom{k}{1} a^{k-1} h + \binom{k}{2} a^{k-2} h^2 + \cdots + h^k$$

Observamos que se puede extraer factor común la diferencia h:

$$(a+h)^k - a^k = h\left(\binom{k}{1} a^{k-1} + \binom{k}{2} a^{k-2} h + \cdots + h^{k-1}\right)$$

Expresión de un número N como diferencia de potencias

Si igualamos la anterior expresión a N, llegaremos a una conclusión interesante:

Si un número entero positivo N es expresable como diferencia de potencias, $(a+h)^k$ - a^k, la diferencia h entre las bases ha de ser divisor de N

Esto nos da una base segura para las búsquedas, pero es que, además, con esa fórmula, tal como efectuamos para los cubos

(ver mi entrada
http://hojaynumeros.blogspot.com/2024/09/diferencias-de-cubos-enteros-positivos.html),
obtenemos una cota para el valor de **a**:

Sería **$ka^{k-1}h$** menor que la diferencia de potencias, o lo que es igual, que **N**. Así que tendríamos:

$$ka^{k-1}h < N \text{ , } luego\ a < \sqrt[k-1]{\frac{N}{kh}}$$

Con esta cota y el carácter de divisor de **h** ya podemos intentar determinar si un número **N** es expresable o no como diferencia de potencias de exponente dado.

Ya se vio en la entrada enlazada que en el caso de los cubos la acotación era

$$a < \sqrt{\frac{N}{3k}}$$

Una idea sencilla es que si un número es diferencia de dos potencias de exponente **k**, si lo multiplicamos por otro número $\mathbf{b^k}$ obtendremos otro número con la misma propiedad. De aquí deducimos que este tipo de números forma una sucesión infinita para cualquier valor de k, ya que el primero siempre existe.

Función de búsqueda

Con esta base teórica podemos construir una sencilla función de búsqueda:

Function espotencia_igual(n, k)’Parámetros número y exponente

Dim a, h, tope

Dim s$

s = "" ’Contenedor de soluciones

For h = 1 To n / 2 ‘Posibles valores de h

If n / h = n \ h Then ‘Es divisor

tope = Int((n / k / h) ^ (1 / (k - 1))) ‘Tope calculado para h

For a = 1 To tope ‘Si es diferencia de potencias, se publica

If (a + h) ^ k - a ^ k = n Then s = s + "# " + Str$(a) + ", " + Str$(a + h)

Next a

End If

Next h

If s = "" Then s = "NO"

espotencia_igual = s

End Function

Por ejemplo, para k=4 obtenemos todos los números expresables como b^4-a^4 (y por tanto, también como m^2-n^2) y con divisor diferencia de cuadrados. Igualmente, por el Teorema de Fermat, no existirá entre ellos ninguna cuarta potencia:

Número N	Valores de a y a+h
15	# 1, 2
65	# 2, 3
80	# 1, 3
175	# 3, 4
240	# 2, 4
255	# 1, 4
369	# 4, 5
544	# 3, 5
609	# 2, 5
624	# 1, 5
671	# 5, 6
1040	# 4, 6
1105	# 6, 7
1215	# 3, 6
1280	# 2, 6
1295	# 1, 6
1695	# 7, 8
1776	# 5, 7
2145	# 4, 7

Están publicados en https://oeis.org/A147857

En esta sucesión y en las que seguirán sólo podrán aparecer números primos si h=1, según las fórmulas de los primeros párrafos de esta entrada. En este caso de k=4 no aparecerán, porque b^4-a^4 es múltiplo de b^2-a^2, que no valdrá 1 para b>a. Ocurrirá lo mismo en todos los casos en los que el exponente sea número compuesto.

Según un comentario de OEIS, no figuran cuadrados en esta sucesión. Hemos visto alguna demostración similar y resulta larga y complicada.

Para k=5 obtenemos:

Número N	Valores de a y a+h
31	# 1, 2
211	# 2, 3
242	# 1, 3
781	# 3, 4
992	# 2, 4
1023	# 1, 4
2101	# 4, 5
2882	# 3, 5
3093	# 2, 5
3124	# 1, 5
4651	# 5, 6
6752	# 4, 6
7533	# 3, 6
7744	# 2, 6
7775	# 1, 6
9031	# 6, 7

Al ser el exponente primo impar, sí pueden figurar primos en esta sucesión, para h=1. Los primeros son estos:

Número N	Valores de a y a+h
31	# 1, 2
211	# 2, 3
4651	# 5, 6

Tal como se comentó ya, el valor de h ha de ser 1, o bien a y b consecutivos.

Están publicados en https://oeis.org/A121616 , y ahí se sugiere el nombre de primos “pentan”, por analogía con los primos “cubanos”, ya estudiados en otra ocasión.

También figuran cuadrados, como 7744=88^2=6^5-2^5.

Así podríamos seguir con otros valores de exponentes.

Versión en PARI

Sabemos que las hojas de cálculo no pueden manejar bien los números grandes. Para ello son mejores otras herramientas, como el lenguaje PARI. Hemos creado una rutina que devuelve las formas, si existen, de expresar un número como diferencia de potencias en varios casos de exponentes. En el ejemplo lo hemos aplicado al número 7744 y exponentes en un rango de 3 a 20, pero todo eso se puede cambiar.

n=7744;for(k=3,20,for(h=1,n/2,if(n%h==0,tope=(n/h/k)^(1/(k-1));for(a=1,tope,if((a+h)^k-a^k==n,print("# n=",n," k=",k," a=",a," b=",a+h))))))

Nos devuelve algo ya conocido:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
(18:54) gp > \r pote_igual.txt
# n=7744 k=5 a=2 b=6
```

Nos indica que 7744 se expresa con exponente 5 como diferencia 6^5-2^5.

Si no nos importa dejar a nuestro equipo varios minutos calculando, podemos investigar todo un rango de números, con esta otra versión:

for(n=1000,2000,for(k=4,20,for(h=1,n/2,if(n%h==0,tope=(n/h/k)^(1/(k-1));for(a=1,tope,if((a+h)^k-a^k==n,print("# n=",n," k=",k," a=",a," b=",a+h)))))))

Aquí le hemos añadido al código un bucle entre 1000 y 2000, con este resultado:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
(18:54) gp > \r pote_igual.txt
# n=7744 k=5 a=2 b=6
(18:55) gp > \r pote_igual.txt
# n=1023 k=5 a=1 b=4
# n=1023 k=10 a=1 b=2
# n=1040 k=4 a=4 b=6
# n=1105 k=4 a=6 b=7
# n=1215 k=4 a=3 b=6
# n=1280 k=4 a=2 b=6
# n=1295 k=4 a=1 b=6
# n=1695 k=4 a=7 b=8
# n=1776 k=4 a=5 b=7
```

Destaca el número 1023, y es fácil adivinar la razón.

POTENCIAS CON BASES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En el año 2017 publiqué en http://oeis.org/A292313 la sucesión de números equivalentes a una suma de tres cuadrados en progresión aritmética. Ahora he querido cambiar la cuestión, exigiendo a las bases que estén en progresión, pero no el resultado. Para un exponente general m, lo que buscaremos será aquellos números N que presenten la equivalencia con números enteros positivos:

$$N = (a-k)^m + a^m + (a+k)^m$$

En ella k representa la diferencia de la progresión y suponemos que es mayor que 0. Escrita así la igualdad podemos beneficiarnos de la simetría en los cálculos, como veremos más adelante.

Un ejemplo con cuadrados es $24318 = 87^2+90^2+93^2 = (90-3)^2+90^2+(90+3)^2$. Comenzamos por ellos.

Suma de cuadrados en progresión aritmética

Encontrar los números que se puedan representar como suma de tres cuadrados con bases enteras positivas en progresión aritmética equivale a buscar aquellos que admitan la representación

$N=(a-k)^2 + a^2 + (a+k)^2$

Esto parece fácil, pues basta crear una tabla de doble entrada para valores de a y k, siendo k<a.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	14								
3	29	35							
4	50	56	66						
5	77	83	93	107					
6	110	116	126	140	158				
7	149	155	165	179	197	219			
8	194	200	210	224	242	264	290		
9	245	251	261	275	293	315	341	371	
10	302	308	318	332	350	372	398	428	462
11	365	371	381	395	413	435	461	491	525
12	434	440	450	464	482	504	530	560	594
13	509	515	525	539	557	579	605	635	669
14	590	596	606	620	638	660	686	716	750
15	677	683	693	707	725	747	773	803	837
16	770	776	786	800	818	840	866	896	930
17	869	875	885	899	917	939	965	995	1029
18	974	980	990	1004	1022	1044	1070	1100	1134
19	1085	1091	1101	1115	1133	1155	1181	1211	1245

El inconveniente radica en que están desordenados y que no se percibe a simple vista si existen duplicados (de hecho, 371 está repetido). Por eso, los valores 14, 29, 35, 50, 56, 66, … los encontraremos también con otras técnicas.

Como es mi costumbre, se caracterizo estos números mediante una función. Para ello hay que considerar la expresión simplificada de la que los define:

$$N = (a - k)^2 + a^2 + (a + k)^2 = 3a^2 + 2k^2$$

En el problema propuesto, conocemos N, y el valor de a lo podemos ir cambiando entre 2 y la raíz cuadrada de N/3, que es una cota fácil de razonar. El valor de k depende de ellos, lo que nos evita un doble bucle de búsqueda, ya que es la raíz cuadrada de $(N-3a^2)/2$. En la función que se usará nos preguntaremos si esa expresión es cuadrada, y en caso afirmativo, de ella obtendremos k y después N. Un ejemplo de función sería el siguiente:

```
Public Function basesenprog$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = "" ‘Se usa un string para recoger las soluciones
k = Sqr(n / 3) ‘Cota para los valores de a
For a = 2 To k
b = (n - 3 * a ^ 2) / 2 ‘Se estudia el posible cuadrado de la diferencia de la p.a.
```

If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = 0 **‘Si es cuadrado, se halla la diferencia d, y si no d=0**
If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + str$(p) + " " + str$(a) + " " + str$(q) + "&"
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO" **‘Si no hay solución, devuelve “NO”**
basesenprog = s$
End Function

Con esta función y un bucle de búsqueda, obtenemos la lista ordenada de los números que obtuvimos con la tabla de doble entrada:

14	1 2 3&
29	2 3 4&
35	1 3 5&
50	3 4 5&
56	2 4 6&
66	1 4 7&
77	4 5 6&
83	3 5 7&
93	2 5 8&
107	1 5 9&
110	5 6 7&
116	4 6 8&
126	3 6 9&
140	2 6 10&
149	6 7 8&
155	5 7 9&
158	1 6 11&
165	4 7 10&
179	3 7 11&
194	7 8 9&

Cada uno viene acompañado de las tres bases en progresión aritmética. Por ejemplo,

$140=2^2+6^2+10^2=4+36+100$, con $6-2=10-6=4$.

Con esta función también se detecta si un número presenta más de una solución. El primer número con esta propiedad es $371=1^2+9^2+17^2$ y también $371=9^2+11^2+13^2$.

Modificando la salida de la función, se pueden descubrir más números que admitan dos o más soluciones. Los primeros son estos:

N	Soluciones
371	2
525	2
707	2
875	2
917	2
1067	2
1155	2
1218	2
1325	2
1421	2
1484	2
1550	2

El primero que presenta tres soluciones es $2387=3^2+23^2+43^2=9^2+25^2+41^2=17^2+27^2+37^2$.

Las diferencias son 20, 16 y 10 respectivamente.

Si deseas las soluciones de los párrafos anteriores en forma de lista, puedes acudir al lenguaje PARI.

for(n=3,600,k=sqrt(n/3);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,b=(n-3*a^2)/2;if(b==truncate(b)&&issquare(b),d=sqrt(b);if(d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", ")));a+=1))

Obtendrás así el listado:

14, 29, 35, 50, 56, 66, 77, 83, 93, 107, 110, 116, 126, 140, 149, 155, 158, 165, 179, 194, 197, 200, 210, 219, 224, 242, 245, 251, 261, 264, 275, 290, 293, 302, 308, 315, 318, 332, 341, 350, 365, 371, 372, 381, 395, 398, 413, 428, 434, 435, 440, 450, 461, 462, 464, 482, 491, 504, 509, 515, 525, 530, 539, 557, 560, 563, 579, 590, 594, 596, …

Otra variante se inspira en la tabla de doble entrada y después elimina duplicados:

w=List();for(n=3,600,k=sqrt(n/3);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^2+a^2+(a+c)^2;if(v==n,listput(w,n)))));print(vecsort(Vec(w),,8))

```
[14, 29, 35, 50, 56, 66, 77, 83, 93, 107, 110, 116, 126, 140, 149, 155, 158, 165
, 179, 194, 197, 200, 210, 219, 224, 242, 245, 251, 261, 264, 275, 290, 293, 302
, 308, 315, 318, 332, 341, 350, 365, 371, 372, 381, 395, 398, 413, 428, 434, 435
, 440, 450, 461, 462, 464, 482, 491, 504, 509, 515, 525, 530, 539, 557, 560, 563
, 579, 590, 594, 596]
?
```

Esta sucesión permanecía inédita y la hemos publicado en http://oeis.org/A306212

Suma de cubos en progresión aritmética

Acudiremos en este caso a las mismas técnicas que usamos con los cuadrados, pero de forma más breve. Buscamos números que presenten la equivalencia

$$N=(a-k)^3+a^3+(a+k)^3$$

En primer lugar, acudimos a una tabla de doble entrada para a y k:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	36								
3	99	153							
4	216	288	408						
5	405	495	645	855					
6	684	792	972	1224	1548				
7	1071	1197	1407	1701	2079	2541			
8	1584	1728	1968	2304	2736	3264	3888		
9	2241	2403	2673	3051	3537	4131	4833	5643	
10	3060	3240	3540	3960	4500	5160	5940	6840	7860
11	4059	4257	4587	5049	5643	6369	7227	8217	9339
12	5256	5472	5832	6336	6984	7776	8712	9792	11016
13	6669	6903	7293	7839	8541	9399	10413	11583	12909
14	8316	8568	8988	9576	10332	11256	12348	13608	15036
15	10215	10485	10935	11565	12375	13365	14535	15885	17415
16	12384	12672	13152	13824	14688	15744	16992	18432	20064
17	14841	15147	15657	16371	17289	18411	19737	21267	23001
18	17604	17928	18468	19224	20196	21384	22788	24408	26244
19	20691	21033	21603	22401	23427	24681	26163	27873	29811

Como se presenta el mismo inconveniente de los cuadrados, de presentación sin ordenar y sin depuración de repetidos, usaremos mejor el método de la función.

Para ello simplificaremos $(a-k)^3 + a^3 + (a+k)^3 = 3a^3 + 6ak^2 = N$

Despejando k observamos que $(N-3a^3)/6a$ ha de ser cuadrado. Así que probaremos valores de a entre 2 y la raíz cúbica de N/3, tomando nota de cuando esa expresión sea cuadrada. Puede ser así:

```
Public Function basesenprog3$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = ""
k = (n / 3) ^ (1 / 3) ‘Tope para la búsqueda
For a = 2 To k
b = (n - 3 * a ^ 3) / (6 * a) ‘Expresión que ha de ser cuadrada
If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = 0
If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + str$(p) + " " + str$(a) + " " + atr$(q) + "&"
‘Existe una solución
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO"
basesenprog3 = s$
End Function
```

Filtrando los primeros números naturales mediante esta función, obtenemos el listado:

36, 99, 153, 216, 288, 405, 408, 495, 645, 684, 792, 855, 972, 1071, 1197, 1224, 1407, 1548, 1584, 1701, 1728, 1968, 2079, 2241, 2304, 2403, 2541, 2673, 2736, 3051, 3060, 3240, 3264, 3537, 3540, 3888, 3960, 4059, 4131, 4257, 4500, 4587, 4833, 5049, 5160, 5256, 5472, 5643, 5832, 5940, 6336, 6369, 6669, 6840, 6903, 6984, 7227, 7293, 7776, 7839, 7860, 8217, 8316, 8541, 8568, 8712, 8988, 9339, 9399, 9576, 9792, …

Hemos publicado esta sucesión en
http://oeis.org/A306213

El primer número que presenta dos soluciones es el 5643, ya que

$5643=(9-8)^3 + 9^3 + (9+8)^3 = (11-5)^3 + 11^3 + (11+5)^3$

Esta versión en PARI se basa en una tabla de doble entrada, eliminando repetidos:

w=List();for(n=3,10000,k=(n/3)^(1/3);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^3+a^3+(a+c)^3;if(v==n,listput(w,n)))));print(vecsort(Vec(w),,8))

Esta otra se basa en nuestra función Excel:

for(n=3,10000,k=(n/3)^(1/3);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,b=(n-3*a^3)/(6*a);if(b==truncate(b)&&issquare(b),d=sqrt(b),d=0);if(d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", "));a+=1))

Entre estas soluciones aparecen cuadrados destacables, como

$6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ y $48^2 = 4^3 + 8^3 + 12^3$

Otra relación atractiva es $6^6 = (24\text{-}6)^3 + 24^3 + (24+6)^3$ o $15^4 = (25\text{-}5)^3 + 25^3 + (25+5)^3$

Podemos encontrar también muchos cubos. El primero es 6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3

Potencias cuartas

Actuamos de igual forma, iniciando una tabla de doble entrada y después una función. La tabla es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	98								
3	353	707							
4	962	1568	2658						
5	2177	3107	4737	7187	10625				
6	4322	5648	7938	11312	15938	22032			
7	7793	9587	12657	17123	23153	30963	40817		
8	13058	15392	19362	25088	32738	42528	54722	69632	
9	20657	23603	28593	35747	45233	57267	72113	90083	111537
10	31202	34832	40962	49712	61250	75792	93602	114992	140322
11	45377	49763	57153	67667	81473	98787	119873	145043	174657
12	63938	69152	77922	90368	106658	127008	151682	180992	215298
13	87713	93827	104097	118643	137633	161283	189857	223667	263073
14	117602	124688	136578	153392	175298	202512	235298	273968	318882
15	154577	162707	176337	195587	220625	251667	288977	332867	383697
16	199682	208928	224418	246272	274658	309792	351938	401408	458562
17	254033	264467	281937	306563	338513	378003	425297	480707	544593
18	318818	330512	350082	377648	413378	457488	510242	571952	642978
19	395297	408323	430113	460787	500513	549507	608033	676403	754977

De ella se descubren los primeros elementos: 98, 353, 707, 962, 1568…

Para construir la función necesitamos algo de Álgebra. Despejamos k, tal como procedimos en los casos anteriores:

$(a\text{-}k)^4 + a^4 + (a+k)^4 = 3a^4 + 12a^2k^2 + 2k^4 = N$

De esta igualdad se deduce indirectamente que $N>3a^4$ y que, por tanto, $(N/3)^{1/4}$ es cota para a.

(Este resultado es general: Si $(a-k)^n + a^n + (a+k)^n = N$, la cota es $(N/3)^{1/n}$. Se puede ver derivando la expresión para demostrar que es creciente respecto a k).

Seguimos:

$2k^4 + 12a^2k^2 - (N-3a^4) = 0$

Es una ecuación bicuadrada con solución positiva para k^2:

$$k^2 = \frac{-6a^2 + \sqrt{36a^4 + 2N - 6a^4}}{2} = \frac{\sqrt{30a^4 + 2N}}{2} - 3a^2$$

Esto nos da una condición que debe cumplir esa expresión final, y es que sea cuadrado de un entero. Por eso, esta sería la función adecuada para descubrir los números que admiten estas sumas de potencias cuartas:

```
Public Function basesenprog4$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = ""
k = Sqr(Sqr(n / 3)) 'Cota superior N^(1/4)
For a = 2 To k
```

b = Sqr(2 * n + 30 * a ^ 4) / 2 - 3 * a ^ 2 ‘Valor de k^2
If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = *0* ‘La variable d representa a k si existe solución
If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + ajusta(p) + " " + ajusta(a) + " " + ajusta(q) + "&" ‘Formación de la solución en modo texto
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO"
basesenprog4 = s$
End Function

Con esta función se puede establecer la búsqueda, resultando, para las primeras soluciones:

98	1 2 3&
353	2 3 4&
707	1 3 5&
962	3 4 5&
1568	2 4 6&
2177	4 5 6&
2658	1 4 7&
3107	3 5 7&
4322	5 6 7&
4737	2 5 8&
5648	4 6 8&
7187	1 5 9&
7793	6 7 8&
7938	3 6 9&
9587	5 7 9&

11312	2 6 10&
12657	4 7 10&
13058	7 8 9&
15392	6 8 10&
15938	1 6 11&
17123	3 7 11&
19362	5 8 11&
20657	8 9 10&
23153	2 7 12&
23603	7 9 11&
25088	4 8 12&
28593	6 9 12&
30963	1 7 13&

La segunda columna presenta las tres bases en progresión aritmética.

Si ordenamos resulta el listado ordenado y sin repeticiones:

98, 353, 707, 962, 1568, 2177, 2658, 3107, 4322, 4737, 5648, 7187, 7793, 7938, 9587, 11312, 12657, 13058, 15392, 15938, 17123, 19362, 20657, 23153, 23603, 25088, 28593, 30963, 31202, 32738, 34832, 35747, 40962, 42528, 45233, 45377, 49712, 49763, 54722, 57153, 57267, 61250, 63938, 67667, 69152, 72113, 75792, 77922, 81473, 87713, 90083, 90368, 93602, 93827, 98787

Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A306214

Como en los casos anteriores,disponemos de dos versiones en PARI:

w=List();for(n=3,100000,k=(n/3)^(1/4);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^4+a^4+(a+c)^4;if(v==n,listput(w,n)))));print1(vecsort(Vec(w),,8))

y

for(n=3,100000,k=(n/3)^(1/4);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,d=sqrt(sqrt(2*n+30*a^4)/2-3*a^2);if(d==truncate(d)&&d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", "));a+=1))

Como curiosidad podemos destacar:

$392^3 = (56-28)^4 + 56^4 + (56+28)^4$

Te invitamos a resolver el problema para potencias superiores. Ya tienes encauzados los cálculos y algoritmos.

DIFERENCIA DE POTENCIAS CON LA MISMA BASE ES UN CUADRADO

Existen muchos números con la propiedad de que dos potencias sucesivas de los mismos se diferencian en un cuadrado. Por ejemplo, 26^{11}- 26^{10}=59406880^2, o 5^5-5^4=50^2. Parece un problema complicado, pero no lo es, como veremos.

La propiedad que buscamos se puede expresar como $N^{k+1}=N^k+m^2$, o bien

$$\mathbf{N^k(N-1)=m^2}$$

Para que se cumpla esto es necesario que la potencia tenga exponente par y que N-1 sea cuadrado, por ser N y N-1 primos entre sí, lo que no permite construir un cuadrado entre ambos. Es la única forma de que la diferencia de potencias sea cuadrada, y en ellas, la menor ha de ser par y la mayor impar. Es muy sencillo razonar que la condición también es suficiente. Por tanto:

El conjunto de números que cumplen la condición pedida coincide con los que son del tipo n^2+1

Están publicados en https://oeis.org/A002522

Los hemos estudiado en dos entradas de mi blog:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/10/regresos-5-un-cuadrado-y-una-unidad-1.html y la siguiente, así como en otra más antigua.

En la siguiente tabla figuran las primeras soluciones al problema. La primera columna es la lista de las bases (números tipo n^2+1) y en la segunda las soluciones de diferencias de potencias. En primer lugar figura la potencia mayor (k+1) y después la base del cuadrado que es diferencia entre las potencias. Como era de esperar, se obtienen infinitas soluciones (todas las potencias impares de exponente k+1)

Número N	Soluciones
2	# 3 2 # 5 4 # 7 8 # 9 16 # 11 32
5	# 3 10 # 5 50 # 7 250 # 9 1250 # 11 6250
10	# 3 30 # 5 300 # 7 3000 # 9 30000 # 11 300000
17	# 3 68 # 5 1156 # 7 19652 # 9 334084 # 11 5679428
26	# 3 130 # 5 3380 # 7 87880 # 9 2284880 # 11 59406880
37	# 3 222 # 5 8214 # 7 303918 # 9 11244966 # 11 416063742
50	# 3 350 # 5 17500 # 7 875000 # 9 43750000 # 11 2187500000
65	# 3 520 # 5 33800 # 7 2197000 # 9 142805000
82	# 3 738 # 5 60516 # 7 4962312 # 9 406909584

Por ejemplo, $82^7-82^6=4962312^2$

Esta lista se puede construir con nuestro Buscador de Naturales

(https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) aprovechando que N^2(N-

1) ha de ser cuadrado, como caso particular de la identidad previa:

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	1	0
2	2	4
3	5	50
4	10	300
5	17	1156
6	26	3380
7	37	8214
8	50	17500
9	65	33800
10	82	60516
11	101	102010
12	122	163724

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	144

Con estas propiedades:

ES CUADRADO(N^2*(N-1))
EVALUAR RAIZ(N^5-N^4)

Se observa que en la segunda columna figuran las raíces de la diferencia de potencias, y todas son enteras.

Según la entrada nuestra sobre este tema, estos números no pueden tener factores primos p que no admitan -1 como resto cuadrático módulo p. Son estos: 3, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 103, 107, 109, 113, 127 ,…

Esta exigencia no actúa sobre el cuadrado diferencia, ya que este puede poseer factores primos de N-1, según la primera identidad de esta entrada. Por ejemplo, el primer cuadrado de la tabla, 222, es múltiplo de 3, y 520 lo es de 13.

En realidad, m^2 puede poseer los factores primos de N y también de N-1. Por ejemplo, para N=82, el cuadrado correspondiente, 738, se descompone como $2*3^2*41$.

Entre ellos, 2 y 41 son divisores de 82 y 3^2 lo es de 82-1=3^4

Caso particular

Un caso interesante es el de las potencias cubo y cuadrado, pues resulta del mismo la descomposición de un cubo en dos cuadrados.
Por ejemplo, para N=65, se cumplirá
$65^3=65^2+520^2$

Más particular

En el caso de que un término de la lista sea del tipo $4n^2+1$, obtendríamos más cuadrados. Por ejemplo,
37^3=12^2+35^2+222^2
Obtendríamos una descomposición de un cubo en tres cuadrados.

ALTERNATIVA A FAULHABER

En muchas ocasiones puede interesar sumar las primeras potencias de los números naturales. Están publicados todos los casos populares, como sumas de cuadrados o de cubos, y existe una fórmula, atribuida a Faulhaber, que nos da el resultado para cualquier exponente. En el siguiente recorte de Wikipedia puedes estudiarla.

En Matemáticas, la **fórmula de Faulhaber**, en honor de Johann Faulhaber, expresa la suma de las potencias de los primeros *n* números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

como un polinomio en *n* de grado $(p+1)$ cuyos coeficientes se construyen a partir de los números de Bernoulli: B_j.

La fórmula es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \qquad \left(\text{con } B_1 = +\frac{1}{2} \text{ en vez de } -\frac{1}{2}\right)$$

Faulhaber no conoció nunca esta fórmula general; lo que sí conoció fueron al menos los primeros 17 casos y el hecho de que, si el exponente es impar, entonces la suma es una función polinomial de la suma en el caso especial en el que el exponente sea 1. También hizo algunas generalizaciones (véase Knuth).

https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber

El problema que tiene esta fórmula para un uso elemental es que requiere conocer los números de Bernouilli.

El procedimiento que explicaremos a continuación es una alternativa para encontrar el valor de la suma de una sucesión de potencias o expresiones polinómicas con Excel o Calc. Se debe tomar como un simple entretenimiento, aunque en algunas situaciones puede resultar útil.

Un ejemplo: Cuadrados de oblongos:

Explicamos el procedimiento con un ejemplo, como sería encontrar una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros oblongos, es decir de la expresión $n^2(n+1)^2$.

A) Creamos la sucesión:

Con las hojas de cálculo es muy fácil encontrar las primeras sumas de cualquier sucesión. En este caso hemos ido creando columnas para N(N+1), que son los oblongos, sus cuadrados $N^2(N+1)^2$ y sus sumas sucesivas.

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS
1	2	4	4
2	6	36	40
3	12	144	184
4	20	400	584
5	30	900	1484
6	42	1764	3248
7	56	3136	6384
8	72	5184	11568
9	90	8100	19668
10	110	12100	31768
11	132	17424	49192
12	156	24336	73528
13	182	33124	106652

Con esto ya sabemos que la sucesión 4, 40, 184, 584, 1484, 3248, 6384,…es la que requiere una fórmula similar a las de Faulhaber. Para continuar debemos basarnos en dos conjeturas:

1) La fórmula buscada creemos que será de tipo polinómico.

2) Intuiremos de alguna forma qué grado puede tener ese polinomio. Esta segunda no es tan importante, pero nos ayudará en el siguiente paso.

B) Aplicamos la interpolación de Newton:

La búsqueda de una fórmula polinómica que resuma un conjunto de valores es una interpolación. Disponemos de una hoja de cálculo que encuentra esa fórmula para los valores 1, 2, 3, 4,…mediante la interpolación de Newton:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton
(Ver
https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica_de_Newton)

Este método se adapta bien a la estructura de Excel y Calc. En nuestra hoja basta escribir los primeros términos y observar las diferencias que se producen. Conviene usar todos los que entren en el esquema (máximo 7). Si se conoce el grado del polinomio, se pueden usar menos. Esta sería la situación para el caso de cuadrados de oblongos:

	Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
	Valores función	4	40	184	584	1484	3248	6384
	Dif1		36	144	400	900	1764	3136
	Dif2			108	256	500	864	1372
	Dif3				148	244	364	508
	Dif4					96	120	144
	Dif5						24	24
	Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)		0	24	96	148	108	36	4
		720	120	24	6	2	1	1

Observamos que la diferencia sexta ya es 0, con lo que el grado del polinomio será cinco, como se ve en los coeficientes de abajo, que son seis.

Estos coeficientes actúan sobre los polinomios 1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3),…y esa es la mayor dificultad de esta interpolación, porque el resultado en este caso sería
4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)
(Ya se han simplificado los coeficientes)

C) Desarrollamos el polinomio interpolador:

Este resultado podría ser descorazonador, pero para su simplificación contamos con los programas CAS ((Computer Algebra System) Se puede usar la Calculadora Wiris, gratuita y extendida en la enseñanza.
https://calcme.com/a

Copiamos nuestra monstruosa fórmula en ella y pulsamos sobre el signo =

$$4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5) =$$

$$\frac{1}{5}\cdot x^5+x^4+\frac{5}{3}\cdot x^3+x^2+\frac{2}{15}\cdot x$$ Calc

Ya hemos conseguido el objetivo: la suma de los cuadrados de los oblongos sigue la fórmula $x^5/5+x^4+5/3x^3+x^2+2/15x$

Sustituimos el polinomio en la tabla para comprobar

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS	Polinomio
1	2	4	4	4
2	6	36	40	40
3	12	144	184	184
4	20	400	584	584
5	30	900	1484	1484
6	42	1764	3248	3248
7	56	3136	6384	6384
8	72	5184	11568	11568
9	90	8100	19668	19668
10	110	12100	31768	31768
11	132	17424	49192	49192
12	156	24336	73528	73528
13	182	33124	106652	106652

Luego la fórmula queda:

$$S(n)=\frac{n^5}{5}+n^4+\frac{5n^3}{3}+n^2+\frac{2n}{15}$$

La podemos factorizar con Wiris:

$$\frac{1}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(n + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right) \cdot \left(n - \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right)$$ Calc

Estas son las etapas del proceso. Nos basamos en Excel y Calc, en nuestra hoja de interpolación y en un CAS. En la mayoría de los casos obtendremos el polinomio adecuado. Puede que el grado requerido sea mayor, con lo que habría que ampliar el esquema de cálculo, pero ese trabajo es algo complejo.

Repetimos el trabajo con oblongos, Lo dejamos con redacción escueta:

Sumas de oblongos

N	N(N+1)	SUMAS
1	2	2
2	6	8
3	12	20
4	20	40
5	30	70
6	42	112
7	56	168
8	72	240
9	90	330
10	110	440
11	132	572
12	156	728
13	182	910

Debemos buscar una fórmula para 2, 8, 20, 40, 70, 112, …

Interpolamos

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	
Dif1		6	12	20	30	42	
Dif2			6	8	10	12	
Dif3				2	2	2	
Dif4					0	0	
Dif5						0	
Dif6							
ntes (en		0	0	2	6	6	2
fracción)	720	120	24	6	2	1	1

Observamos que son nulas las diferencias a partir de la cuarta, luego obtendremos un polinomio de tercer grado. Sería este

2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+1/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)

Con wiris

$$\frac{1}{3}\cdot x^3+x^2+\frac{2}{3}\cdot x$$ Calc

Factorizando con la misma calculadora:

$$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{2\cdot x}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$ Calc

Luego es el doble del combinatorio C(x+2,3), como puede verse en http://oeis.org/A007290

En este caso nos hemos limitado a comprobar, porque esta suma ya está resuelta.

Como un ejemplo del uso de esta fórmula puedes distraerte con mi entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/suma-de-numeros-oblongos-consecutivos.html

Suma de potencias cuartas

Por último, reproduciremos una de las fórmulas más conocidas de Faulhaber, la que suma potencias cuartas.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

(Fuente: Wikipedia)

Seguimos los pasos sugeridos.

Construimos la sucesión:

N	N^4	SUMAS
1	1	1
2	16	17
3	81	98
4	256	354
5	625	979
6	1296	2275
7	2401	4676
8	4096	8772
9	6561	15333
10	10000	25333
11	14641	39974
12	20736	60710
13	28561	89271

Como sabemos que el grado de la fórmula de Faulhaber es 5, interpolaremos con al menos seis elementos.

Interpolación

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	17	98	354	979	2275	4676
Dif1		16	81	256	625	1296	2401
Dif2			65	175	369	671	1105
Dif3				110	194	302	434
Dif4					84	108	132
Dif5						24	24
Dif6							0
ientes (en	0	24	84	110	65	16	1
e fracción)	720	120	24	6	2	1	1

A partir de los coeficientes de abajo construimos el polinomio:

1+16*(x-1)+65/2*(x-1)*(x-2)+55/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+7/2*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)

Simplificamos con Wiris

$$\frac{1}{5}\cdot x^5+\frac{1}{2}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{30}\cdot x$$ Calc

Si reducimos todo a denominador 30, coincidirá con la fórmula de Faulhaber correspondiente.

TRÍOS DE CUADRADOS Y CUBOS

Releyendo el libro “Las Matemáticas de OZ” de Clifford A. Pickover he encontrado este acertijo: “Encontrar tres números diferentes cuya suma de cubos sea un cuadrado y la de sus cuadrados sea un cubo”. He visto que es una buena razón para practicar algoritmos.

Los tres números iguales

Sin la exigencia de que sean diferentes obtendríamos rápidamente el trío (3, 3, 3), pues $3^2+3^2+3^2=27=9^3$ y $3^3+3^3+3^3=81=9^2$.

También es válido (192,192,192): $192^2+192^2+192^2=48^3$ y $192^3+192^3+192^3=4608^2$

En este caso de que los tres sean iguales se resuelve fácilmente por descomposición en factores primos, pues ambas sumas se reducen a $3n^3=p^2$, $3n^2=q^3$. Debemos buscar un número tal que si e_3 es el exponente de 3 en el mismo, se cumpla que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 y que $1+2e_3$ lo sea de 3. Claramente es válido en el 3, lo que daría la primera solución. También se cumple en todos aquellos números en los que el exponente de 3 es 1, como $192=3*2^6$. En el resto de casos, el que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 nos obliga a que e_3 sea impar, y el que

$1+2e_3$ sea múltiplo de 3 a que e_3 tenga la forma 3k+1 (es fácil razonarlo). Así que los exponentes válidos para el 3 serán 1, 7,13,19,…tipo 6k+1.

En el resto de factores primos del número no se ven afectados sus exponentes por el factor 3, luego deberán ser tales que al multiplicarlos por 3, para formar los cubos, el resultado sea par, luego serán múltiplos de 2. Igualmente, al multiplicarlos por 2, el resultado ha de ser un cubo, luego sus exponentes serán múltiplos de 3. Los únicos exponentes que cumplen esto son los múltiplos de 6, luego ya lo tenemos resuelto:

Si los tres números son iguales, el exponente de 3 ha de ser del tipo 6k+1 y los del resto de factores primos, del tipo 6k.

Hemos realizado un búsqueda con Excel, y las primeras soluciones son

N	FACTORES
3	[3,1]
192	[2,6][3,1]
2187	[3,7]
12288	[2,12][3,1]
46875	[3,1][5,6]
139968	[2,6][3,7]
352947	[3,1][7,6]
786432	[2,18][3,1]
1594323	[3,13]

Se observa que los exponentes (segundo número de cada corchete) cumplen lo establecido.

Esto nos permite encontrar más soluciones y comprobar que existen infinitas.

Los tres números diferentes

En este caso nos vemos obligados a usar algún algoritmo. No es difícil, pero sí lento. Para cada N recorremos todos los pares de números menores que N, diferentes de N y entre sí. Les aplicamos la condición de Pickover e imprimimos si es válida. Desgraciadamente, es un proceso lento, pero se consiguen resultados.
Usamos una función dependiente de N:

Function tresnumeros$(n) ’ Es tipo texto para un conjunto
Dim i, j
Dim s$

s = ""
For i = 2 To n – 1 ‘Primer número, que no llega a n
For j = 1 To i – 1’ Segundo número, inferior al primero
‘Aplicamos el criterio
If escuad(i ^ 3 + j ^ 3 + n ^ 3) And escubo(i ^ 2 + j ^ 2 + n ^ 2) Then s = s + " # " + Str$(n) + " " + Str$(i) + " " + Str$(j) ‘Solución
Next j

```
Next i
tresnumeros = s
End Function
```

Si no es solución, devuelve la cadena vacía “” y si lo es, un texto con los tres números.

Al ser un algoritmo con dos bucles, se tarda mucho en encontrar soluciones. Las primeras son:

252 234 198
464 304 256

A partir de la siguiente, la hoja de cálculo deja de ser fiable para números enteros.

Podemos probar una versión para PARI:

```
is(n)={my(i=1,j=1,m=0,v=[0,0,0]);for(i=1,n-1,m=0;for(j=1,i-1,if(ispower(i^2+j^2+n^2,3)&&issquare(i^3+j^3+n^3),m=1;v[1]=n;v[2]=i;v[3]=j;print(v))));m}
for(i=1,10000,if(is(i),print(i)))
```

Es más complicada de seguir, pero nos da alguna solución más en un tiempo de proceso razonable:

252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030

4046, 2600, 1122
4394, 4056, 1690

Comprobamos la última solución:

$4394^2+4056^2+1690^2=338^3$
$4394^3+4056^3+1690^3= 395460^2$

Sin restricción de ser diferentes

En ese caso, las variables i, j del algoritmo las dejaremos recorrer todo el rango entre 1 y N. Así se obtendrán todas las soluciones posibles, en la siguiente tabla, hasta un tope de 5000:

3, 3, 3
192, 192, 192
252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030
2187, 2187, 2187
4046, 2600, 1122

He probado a comparar otras potencias con un exponente mayor, pero resultan cálculos muy lentos y sin resultado interesante. Sin embargo, al introducir la potencia de exponente 1, las soluciones se han multiplicado. Por ejemplo, este listado corresponde al caso de que los cubos y también la suma con exponente 1 sumen ambas un cuadrado:

6, 2, 1
14, 9, 2
15, 13, 8
16, 14, 6
19, 9, 8
20, 10, 6
20, 17, 12
24, 8, 4
27, 19, 3
28, 22, 14
29, 15, 5
29, 19, 16
35, 25, 4
36, 17, 11

Y siguen muchos más con frecuencia similar. Un ejemplo:

$$27+19+3=49=7^2$$
$$27^3+19^3+3^3=163^2$$

Con ligeros retoques en los códigos se pueden abordar otros casos similares, pero contando con un equipo que no sea muy lento en los cálculos.

Releyendo el libro "Las Matemáticas de OZ" de Clifford A. Pickover he encontrado este acertijo: "Encontrar tres números diferentes cuya suma de cubos sea un cuadrado y la de sus cuadrados sea un cubo”. He visto que es una buena razón para practicar algoritmos.

Los tres números iguales

Sin la exigencia de que sean diferentes obtendríamos rápidamente el trío (3, 3, 3), pues $3^2+3^2+3^2=27=9^3$ y $3^3+3^3+3^3=81=9^2$.

También es válido (192,192,192): $192^2+192^2+192^2=48^3$ y $192^3+192^3+192^3=4608^2$

En este caso de que los tres sean iguales se resuelve fácilmente por descomposición en factores primos, pues ambas sumas se reducen a $3n^3=p^2$, $3n^2=q^3$. Debemos buscar un número tal que si e_3 es el exponente de 3 en el mismo, se cumpla que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 y que $1+2e_3$ lo sea de 3. Claramente es válido en el 3, lo que daría la primera solución. También se cumple en todos aquellos números en los que el exponente de 3 es 1, como $192=3*2^6$. En el resto de casos, el que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 nos obliga a que e_3 sea impar, y el que $1+2e_3$ sea múltiplo de 3 a que e_3 tenga la forma 3k+1 (es fácil razonarlo). Así que los exponentes válidos para el 3 serán 1, 7,13,19,…tipo 6k+1.

En el resto de factores primos del número no se ven afectados sus exponentes por el factor 3, luego deberán ser tales que al multiplicarlos por 3, para formar los cubos, el resultado sea par, luego serán múltiplos de 2.

Igualmente, al multiplicarlos por 2, el resultado ha de ser un cubo, luego sus exponentes serán múltiplos de 3. Los únicos exponentes que cumplen esto son los múltiplos de 6, luego ya lo tenemos resuelto:

Si los tres números son iguales, el exponente de 3 ha de ser del tipo 6k+1 y los del resto de factores primos, del tipo 6k.

Hemos realizado un búsqueda con Excel, y las primeras soluciones son

N	FACTORES
3	[3,1]
192	[2,6][3,1]
2187	[3,7]
12288	[2,12][3,1]
46875	[3,1][5,6]
139968	[2,6][3,7]
352947	[3,1][7,6]
786432	[2,18][3,1]
1594323	[3,13]

Se observa que los exponentes (segundo número de cada corchete) cumplen lo establecido.

Esto nos permite encontrar más soluciones y comprobar que existen infinitas.

Los tres números diferentes

En este caso nos vemos obligados a usar algún algoritmo. No es difícil, pero sí lento. Para cada N recorremos todos los pares de números menores que N, diferentes de N y entre sí. Les aplicamos la condición de

Pickover e imprimimos si es válida. Desgraciadamente, es un proceso lento, pero se consiguen resultados.

Usamos una función dependiente de N:

```
Function tresnumeros$(n) ' Es tipo texto para un conjunto
Dim i, j
Dim s$

s = ""
For i = 2 To n – 1 'Primer número, que no llega a n
For j = 1 To i – 1' Segundo número, inferior al primero
'Aplicamos el criterio
If escuad(i ^ 3 + j ^ 3 + n ^ 3) And escubo(i ^ 2 + j ^ 2 + n ^ 2) Then s = s + " # " + Str$(n) + " " + Str$(i) + " " + Str$(j) 'Solución
Next j
Next i
tresnumeros = s
End Function
```

Si no es solución, devuelve la cadena vacía “” y si lo es, un texto con los tres números.

Al ser un algoritmo con dos bucles, se tarda mucho en encontrar soluciones. Las primeras son:

252 234 198
464 304 256

A partir de la siguiente, la hoja de cálculo deja de ser fiable para números enteros.

Podemos probar una versión para PARI:

is(n)={my(i=1,j=1,m=0,v=[0,0,0]);for(i=1,n-1,m=0;for(j=1,i-1,if(ispower(i^2+j^2+n^2,3)&&issquare(i^3+j^3+n^3),m=1;v[1]=n;v[2]=i;v[3]=j;print(v))));m}
for(i=1,10000,if(is(i),print(i)))

Es más complicada de seguir, pero nos da alguna solución más en un tiempo de proceso razonable:

252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030
4046, 2600, 1122
4394, 4056, 1690

Comprobamos la última solución:

$4394^2+4056^2+1690^2=338^3$
$4394^3+4056^3+1690^3= 395460^2$

Sin restricción de ser diferentes

En ese caso, las variables i, j del algoritmo las dejaremos recorrer todo el rango entre 1 y N. Así se obtendrán todas las soluciones posibles, en la siguiente tabla, hasta un tope de 5000:

3, 3, 3
192, 192, 192
252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030
2187, 2187, 2187
4046, 2600, 1122

He probado a comparar otras potencias con un exponente mayor, pero resultan cálculos muy lentos y sin resultado interesante. Sin embargo, al introducir la potencia de exponente 1, las soluciones se han multiplicado. Por ejemplo, este listado corresponde al caso de que los cubos y también la suma con exponente 1 sumen ambas un cuadrado:

6, 2, 1
14, 9, 2
15, 13, 8
16, 14, 6
19, 9, 8
20, 10, 6
20, 17, 12
24, 8, 4
27, 19, 3
28, 22, 14
29, 15, 5

29, 19, 16
35, 25, 4
36, 17, 11

Y siguen muchos más con frecuencia similar. Un ejemplo:

$27+19+3=49=7^2$
$27^3+19^3+3^3=163^2$

Con ligeros retoques en los códigos se pueden abordar otros casos similares, pero contando con un equipo que no sea muy lento en los cálculos.

POTENCIAS EQUIDISTANTES DE CUADRADOS

En uno de mis cálculos habituales me encontré hace unas semanas con esta igualdad doble:

16124=307^2-5^7
16124=5^7-249^2

Lo interesante de ella es que significa que 5^7 equidista de dos cuadrados, 249^2 y 307^2. Por eso, la función que usaremos más adelante la hemos llamado ENTREDOS, porque investigaremos qué potencias son promedio de dos cuadrados, o, lo que es equivalente, equidistantes de ellos.

Búsqueda ordenada

Para una potencia dada, deberemos recorrer todos los cuadrados inferiores a ella, sumar a la potencia la diferencia entre los dos números, y averiguar si resulta un cuadrado. Por ejemplo, 3125=5^5. Le extraemos la raíz cuadrada entera, y resulta 55. A partir de ese número k, vamos descendiendo valores, elevándolos al cuadrado. Para cada cuadrado k^2, encontramos la diferencia $D=3125-k^2$. Esa diferencia la sumamos a 3125, y deberá resultar un cuadrado entero.

El esquema podría ser el siguiente:

Base a	$2*3125-a^2$	Base b
55	3225	56,7890835
54	3334	57,7408001
53	3441	58,6600375
52	3546	59,5482997
51	3649	60,4069532
50	3750	61,2372436
49	3849	62,0403095
48	3946	62,8171951
47	4041	63,5688603
46	4134	64,2961896
45	**4225**	**65**
44	4314	65,6810475

Vamos descendiendo valores hasta que la suma sea cuadrada. En la imagen observamos que unas soluciones son 45 y 65. En efecto:

$3125-45^2=1100$ y $65^2-3125=1100$, luego 5^5 equidista de 45^2 y 65^2.

Este proceso es fácilmente automatizable. Lo hemos efectuado en esta función:

```
Function entredos$(n)
Dim i, r, a, b
Dim s$

s = "" ‘La solución se expresa como texto
If espotencia(n) > 1 Then ‘Es potencia no trivial
r = Int(Sqr(n)) ‘Primer valor a ensayar
i = r - 1
While i > 0 And s = "" ‘Descendemos valores de cuadrados
b = n - i ^ 2 ‘Diferencia entre potencia y cuadrado
a = n + b ‘A la potencia le sumamos la diferencia
If escuad(a) Then b = Sqr(a): s = s + "  " + Str$(i) + " , " + Str$(b)
‘Hemos encontrado una solución
i = i - 1
Wend
End If
entredos = s ‘Si no hay solución, la respuesta está vacía
```

End Function

La función ESPOTENCIA la he publicado en https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/04/numeros-consecutivos-con-una-suma-del.html

Estas son las primeras soluciones con potencias no triviales:

Potencia	Exponente	Cuadrados
25	2	1 , 49
100	2	4 , 196
125	3	81 , 169
169	2	49 , 289
225	2	9 , 441
289	2	49 , 529
400	2	16 , 784
625	4	289 , 961
676	2	196 , 1156
841	2	1 , 1681
900	2	36 , 1764
1000	3	400 , 1600
1156	2	196 , 2116
1225	2	49 , 2401
1369	2	529 , 2209

Es fácil comprobar cualquiera de ellos, por ejemplo, 125=5^3, potencia no trivial, y se cumple que $125=(9^2+13^2)/2$.

Para poder manejar con comodidad potencias y exponentes grandes, hemos preparado la versión en PARI.

```
entredos(n)={my(r=truncate(sqrt(n)),i=r-1,a,b,v=0,w=0);if(ispower(n),while(i>0&&v==0&&w==0,b=n-i^2;a=n+b;if(issquare(a),v=i;w=truncate(sqrt(a)));i=i-1));concat(v,w)}
for(i=1,1400,if(entredos(i)<>[0,0],print(i,", ",ispower(i),", ",entredos(i))))
```

En ella se busca hasta 1400 para que coincida el resultado con la tabla anterior:

```
25, 2, [1, 7]
100, 2, [2, 14]
125, 3, [9, 13]
169, 2, [7, 17]
225, 2, [3, 21]
289, 2, [7, 23]
400, 2, [4, 28]
625, 4, [17, 31]
676, 2, [14, 34]
841, 2, [1, 41]
900, 2, [6, 42]
1000, 3, [20, 40]
1156, 2, [14, 46]
1225, 2, [7, 49]
1369, 2, [23, 47]
```

Estudio teórico

Las potencias de la tabla no aparecen por casualidad, sino que han de tener una estructura muy determinada. Es especialmente interesante su estudio porque en un principio hemos ignorado las soluciones múltiples para el par de cuadrados, y veremos que se pueden tener previstas si se conoce la descomposición factorial de esas potencias.

Para entender mejor qué suponen estas búsquedas, basta enfocar al doble de esas potencias, porque así el problema es muy tratable. En efecto, si p^k es el promedio entre dos cuadrados, a^2 y b^2, significa que $2p^k$ ha de poderse descomponer en suma de dos cuadrados, y ese problema está resuelto desde Fermat y Gauss. Nos basaremos para nuestro estudio en la fórmula propuesta por Gauss para contar las descomposiciones posibles de un número en dos cuadrados.

Conviene leer mi entrada de blog
https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/10/en-cuantas-sumas-de-cuadrados-2-de-5.html

En ella se comenta la fórmula de Gauss para averiguar en cuántas sumas de cuadrados se puede descomponer un número. Copiamos un párrafo de esa entrada:

“Estas propiedades se resumen en un criterio que no vamos a desarrollar aquí, y es que sólo se pueden descomponer en cuadrados los números en los que los factores primos del tipo 4n+3 figuren en su descomposición con exponente par. Gauss fue más allá en esa sección 182, pues dio una fórmula para contar el número de formas diferentes en las que se descompone un número en suma de dos cuadrados con base no negativa:

$$N=ES[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\delta+1)/2]$$

donde ES significa “mínimo entero igual o superior” y los factores que le siguen se corresponden con los exponentes de los factores del tipo 4n+1 aumentados en una unidad. La fórmula, como advierte Gauss, sólo es válida si los factores del tipo 4n+3 forman un cuadrado perfecto”.

En este caso, el factor 2 de $2p^k$ no influye, por lo que el criterio se puede aplicar **a la potencia** que equidista de dos cuadrados. En efecto, si descomponemos factorialmente esas potencias, obtenemos:

Potencia	Exponente
25	[5,2]
100	[2,2][5,2]
125	[5,3]
169	[13,2]
225	[3,2][5,2]
289	[17,2]
400	[2,4][5,2]
625	[5,4]
676	[2,2][13,2]
841	[29,2]
900	**[2,2][3,2][5,2]**
1000	[2,3][5,3]
1156	[2,2][17,2]
1225	[5,2][7,2]
1369	[37,2]

Todas las soluciones poseen factores primos que son, o bien del tipo 4k+1, o el 2, o el tipo 4k+3 elevado a una potencia par, como ocurre en el 900, que hemos destacado en rojo.

Esto nos da un criterio fiable para saber si una potencia no trivial puede equidistar de dos cuadrados.

Vemos un ejemplo:

1368900=170^2, y sus factores primos son 13^2*5^2*3^4*2^2. De ellos, el 3, que es del tipo 4k+3, está elevado a exponente par, los otros, 13 y 5 son del tipo 4k+1, y, finalmente, el 2 no influye. Por eso se sabía con antelación que sería equidistante de dos cuadrados, en este caso son 715716=846^2 y 2022084=1422^2, con la identidad
1368900=(846^2+1422^2)/2.

Soluciones múltiples

Hay que considerar la posibilidad de que una potencia equidiste de más de un par de cuadrados. De hecho, veremos que se dan soluciones múltiples con total seguridad. Para estudiarlas, hemos modificado algo la función ENTREDOS para que nos devuelva, en primer lugar, el número de soluciones. De esa forma, la búsqueda de potencias equidistantes se puede efectuar fijando el número de pares de cuadrados esperados.

Hemos organizado una búsqueda para tres pares de soluciones como ejemplo:

3125	3 ## # 2025 , 4225 # 625 , 5625 # 9 , 6241	[5,5]
15625	3 ## # 7225 , 24025 # 5329 , 25921 # 625 , 30625	[5,6]
62500	3 ## # 28900 , 96100 # 21316 , 103684 # 2500 , 122500	[2,2][5,6]
100000	3 ## # 92416 , 107584 # 40000 , 160000 # 6400 , 193600	[2,5][5,5]

Es fácil observar que se cumple la fórmula de Gauss, de emplear la mitad por exceso de los exponentes de los primos tipo 4k+1. En los cuatro ejemplos figura (ha sido algo casual) el factor 5 elevado a 5 o a 6, y no existen factores tipo 4k+3. Tomando la parte entera por exceso de tanto el exponente 5 como del 6 resulta 3, que es el número de pares de cuadrados que hemos conseguido. Con este criterio seremos capaces de saber el número de pares de cuadrados resultantes sin tener que comprobarlo. Vemos unos ejemplos:

3084588=2^2*3^3*13^4: No debe presentar soluciones, por contener el 3 elevado a potencia impar. En efecto, la función ENTREDOS devuelve un cero:

3084588
0 ##

78125=5^7, luego debe presentar cuatro soluciones, ya que 4 es la mitad por exceso de 7:

78125
4 ## # 62001 , 94249 # 50625 , 105625 # 15625 , 140625 # 225 , 156025

Con hoja de cálculo se pueden producir errores de redondeo para números mayores, por lo que es más fiable el razonamiento que la comprobación.

Potencias sucesivas

Finalizamos con una curiosidad, y es que, dada una potencia equidistante de dos cuadrados, todas sus potencias presentarán soluciones, que se podrán ir incrementando al aumentar los exponentes de los factores tipo 4k+1. En la imagen podemos estudiar un ejemplo representativo, que recorre las potencias de 13:

Potencias de 13	
169	1 ## # 49 , 289
2197	2 ## # 1369 , 3025 # 169 , 4225
28561	2 ## # 8281 , 48841 # 1 , 57121
371293	3 ## # 231361 , 511225 # 225625 , 516961 # 28561 , 714025
4826809	3 ## # 1456849 , 8196769 # 1399489 , 8254129 # 169 , 9653449
62748517	4 ## # 39100009 , 86397025 # 38130625 , 87366409 # 4826809 , 120670225 # 4431025 , 121066009
815730721	4 ## # 802079041 , 829382401 # 246207481 , 1385253961 # 236513641 , 1394947801 # 28561 , 1631432881

El número de soluciones se va repitiendo, por depender de la mitad por exceso, que coincide en dos exponentes consecutivos.

En el desarrollo de mis cálculos sobre el año 2025 llegué a esta identidad:

$2025^2=36^4+18^5+9^6$

Al releerla se me ocurrió averiguar qué números admiten una descomposición en tres potencias enteras no negativas (admitiendo el 1 y el 0) y cuáles no. Por ejemplo, 72 se puede descomponer de seis formas:

$72=2^5+2^5+2^3=6^2+3^3+3^2=6^2+2^5+2^2=6^2+6^2+0^1=2^6+2^2+2^2=2^6+2^3+0^1$

Es evidente que el cero figura para poder considerar también las sumas de dos potencias, como $72=2^6+2^3$, o de una para los números que sean potencias perfectas.
Otros números, como 7 y 23 no admiten esta descomposición. En unas primeras búsquedas se puede sospechar que estos números son más escasos. Lo iremos viendo.

Búsqueda de soluciones

Esta búsqueda no supone ninguna complicación. Se resuelve con dos bucles, uno para la primera potencia y otro para la segunda, porque la tercera se encuentra restando.

Hemos usado una función para Excel, pero usa una función propia, ESPOTENCIA

 (ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/04/numeros-consecutivos-con-una-suma-del.html).

También sustituye la función STR$ por la función AJUSTA, que funciona mejor. No obstante se incluirá su código aquí, porque a continuación se traducirá a PARI, con lo que todos los lectores podrán experimentar con ella.

Function trespotencias$(n)
Dim i, j, k, p1, p2, p3, m
Dim s$

s = "" ’Contenedor de la solución
m = 0 ’Contador de soluciones
For i = 0 To n ‘Bucle para la primera potencia
p1 = espotencia(i) ‘Devuelve el exponente
If p1 > 0 Then
For j = 0 To i ‘Bucle para la segunda potencia
p2 = espotencia(j)
If p2 > 0 Then
k = n - i – j ‘Tercera potencia
p3 = espotencia(k)
If k <= j And p3 > 0 And k >= 0 Then

‘Los tres sumandos son potencias. Lo que sigue construye la solución

m = m + 1

s = s + " ## " + ajusta(Int(i ^ (1 / p1) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p1) + "+"

s = s + ajusta(Int(j ^ (1 / p2) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p2) + "+"

s = s + ajusta(Int(k ^ (1 / p3) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p3)

End If

End If

Next j

End If

Next i

If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " : " + s

trespotencias = s

End Function

Con esta función podemos descomponer los primeros números:

Número N	Soluciones
1	1 : ## 1^1+0^1+0^1
2	1 : ## 1^1+1^1+0^1
3	1 : ## 1^1+1^1+1^1
4	1 : ## 2^2+0^1+0^1
5	1 : ## 2^2+1^1+0^1
6	1 : ## 2^2+1^1+1^1
7	NO
8	2 : ## 2^2+2^2+0^1 ## 2^3+0^1+0^1
9	3 : ## 2^2+2^2+1^1 ## 2^3+1^1+0^1 ## 3^2+0^1+0^1
10	2 : ## 2^3+1^1+1^1 ## 3^2+1^1+0^1

Observamos que el 7 no admite esta descomposición. Yal como el autor esperaba, al llegar a números mayores se incrementa el número de soluciones:

Número N	Soluciones
80	5 : ## 2^5+2^5+2^4 ## 6^2+6^2+2^3 ## 7^2+3^3+2^2 ## 2^6+2^3+2^3 ## 2^6+2^4+0^1
81	7 : ## 3^3+3^3+3^3 ## 6^2+6^2+3^2 ## 7^2+2^4+2^4 ## 7^2+2^5+0^1 ## 2^6+3^2+2^3 ## 2^6+2^4+1^1 ## 3^4+0^1+0^1
82	5 : ## 2^5+5^2+5^2 ## 7^2+5^2+2^3 ## 7^2+2^5+1^1 ## 2^6+3^2+3^2 ## 3^4+1^1+0^1
83	2 : ## 7^2+5^2+3^2 ## 3^4+1^1+1^1
84	4 : ## 2^5+3^3+5^2 ## 6^2+2^5+2^4 ## 7^2+3^3+2^3 ## 2^6+2^4+2^2
85	4 : ## 7^2+3^3+3^2 ## 7^2+2^5+2^2 ## 7^2+6^2+0^1 ## 3^4+2^2+0^1
86	4 : ## 2^5+3^3+3^3 ## 6^2+5^2+5^2 ## 7^2+6^2+1^1 ## 3^4+2^2+1^1
87	NO
88	3 : ## 6^2+3^3+5^2 ## 6^2+6^2+2^4 ## 2^6+2^4+2^3
89	7 : ## 2^5+2^5+5^2 ## 7^2+2^5+2^3 ## 7^2+6^2+2^2 ## 2^6+2^4+3^2 ## 2^6+5^2+0^1 ## 3^4+2^2+2^2 ## 3^4+2^3+0^1

Volvemos a encontrar un número que no presenta soluciones, el 87. De hecho, experimentalmente van desapareciendo estos números sin solución. Estos son los primeros:

Número N	
7	NO
15	NO
23	NO
87	NO
111	NO
119	NO
167	NO
335	NO

Están publicados en https://oeis.org/A113505 y al llegar al número 26375 se puede conjeturar que es posible que no aparezcan más. Suele ocurrir en casos similares.

A113505

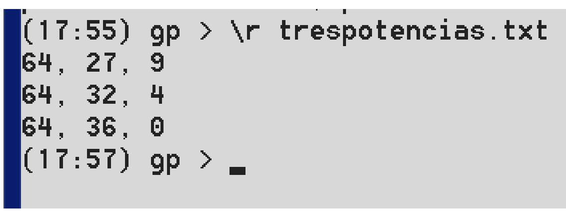
Numbers not the sum of at most three perfect powers (A001597).

7, 15, 23, 87, 111, 119, 167, 335, 1391, 1455, 1607, 1679, 1991, 25887, 26375
a(16), if it exists, is larger than 10^8. - Giovanni Resta, May 07 2017

Para los lectores que deseen experimentar, se incluye nuestra versión en PARI.

```
u=100;for(i=0,u,if(ispower(i)||i<2,for(j=0,i,if((ispower(j)||j<2)&&(ispower(u-i-j)||u-i-j<2)&&j>u-i-j&&u-i-j>=0,print(i,", ",j,", ",u-i-j)))))
```

La variable **u** se rellena con el número a descomponer, en el ejemplo, 100


```
(17:55) gp > \r trespotencias.txt
64, 27, 9
64, 32, 4
64, 36, 0
(17:57) gp >
```

Observamos que admite tres sumas con sumandos que son potencias.

La siguiente imagen recoge parte del resultado para el año 2025:

```
(18:03) gp > \r trespotencias.txt
784, 729, 512
841, 784, 400
841, 841, 343
900, 900, 225
1000, 625, 400
1000, 900, 125
1000, 961, 64
1000, 1000, 25
1024, 1000, 1
1089, 900, 36
1225, 784, 16
1296, 729, 0
1369, 400, 256
1369, 512, 144
1600, 256, 169
1600, 361, 64
1600, 400, 25
1681, 216, 128
1681, 343, 1
```

La abundancia de resultados reafirma la sospecha de que los elementos sin solución serán limitados.

Estudio con nuestra herramienta Cartesius

Esta hoja de Excel, “Cartesius”, permite combinar muchas posibilidades, y resulta adecuada para esta cuestión. Se puede programar con estas condiciones:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
xtotal=3	
xt=0..2025	
xt=filtro(potencia)	
suma=2025	
creciente	

Se interpretan como que buscamos tríos de potencias con suma 2025. Se consigue el resultado siguiente, compuesto por 28 resultados:

X1	X2	X3
0	0	2025
0	729	1296
1	343	1681
1	1000	1024
8	81	1936
8	289	1728
16	784	1225
25	64	1936
25	400	1600
25	1000	1000
32	144	1849
36	225	1764
36	900	1089
64	361	1600
64	961	1000
81	216	1728
125	900	1000
128	169	1728
128	216	1681
144	512	1369
169	256	1600
225	900	900
256	400	1369
343	841	841
400	400	1225
400	625	1000
400	784	841
512	729	784

Tal como se sugirió al principio, esta búsqueda no es complicada, y produce un incremento tan grande de resultados que es razonable la conjetura de que a partir de cierto número, todos los enteros presentarán esta descomposición.

SUMAS DE POTENCIAS CONSECUTIVAS

Existen fórmulas para sumar las primeras potencias de números naturales. Son populares las de la suma de potencias con los primeros exponentes. En esta captura de Excel figuran algunas:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

Aquí deseamos usar potencias consecutivas, pero que no comiencen necesariamente por la unidad. Si se usa la fórmula correspondiente, el problema se resuelve restando. Por ejemplo, una suma de potencias entre $\mathbf{a^k}$ y $\mathbf{b^k}$ se encontraría restando la fórmula correspondiente a **b** y la de **a-1**, para que se incluya también **a**. No será ese el camino que se tome aquí, porque deseamos encontrar la suma con un algoritmo que sirva para todos los exponentes. No obstante, dejamos abierta la posibilidad de comprobar algún cálculo.

Nuestro objetivo es más ambicioso, y es encontrar una suma de potencias que sea equivalente a otra potencia dada, como en los ejemplos que siguen:

$47^3=22^2+23^2+24^2+\ldots+67^2+68^2$
$6^3=3^3+4^3+5^3$
$20^3=11^3+12^3+13^3+14^3$

Deberemos fijar dos parámetros, el exponente de la potencia resultado de la suma, sea, por ejemplo **k**, y el de los sumandos, que es igual para todos, y llamaremos **h**. De esa forma también abarcamos la posibilidad de que el resultado no sea una potencia, salvo la trivial de exponente unidad:

$294 =7^2+8^2+9^2+10^2$ (k=1)

A la inversa, deberemos poder descomponer una potencia en suma de números naturales consecutivos, como potencias triviales:

$12^5=82943+82944+82945$ (h=1)

En la siguiente función usamos tres variables distintas, e integramos los resultados en modo texto:

n: base del total de la suma
k: exponente de n
h: exponente de los sumandos

m: total de sumandos en cada solución. Esta es útil para búsquedas.

Function sumapoteconsec$(n, k, h)
Dim p, s, i, j,m
Dim t$

t = "" ‘Texto vacío para incluir soluciones
p = n ^ k ‘Resultado deseado para la suma
For i = 1 To (n – 2)^(k/h) ‘Tope de búsqueda de sumandos
s = i ^ h ’Primer sumando potencia
j = i
While s <= p
If s = p And j > i Then m=j-i+1:t = t + " #" + ajusta(m)+”: “+Str$(i) + " a " + Str$(j)’Solución con número de sumandos, inicio y final
j = j + 1
s = s + j ^ h ‘Se acumula la suma
Wend
Next i
If t = "" Then t = "NO"
sumapoteconsec = t
End Function

Vemos algunos ejemplos obtenidos con esta función:

SUMAPOTECONSEC(30;1;1)= #5: 4 a 8 #4: 6 a 9 #3: 9 a 11

Significa que el número 30 (elevado a la unidad) es suma de números consecutivos de tres formas diferentes:
#5: 4 a 8 : 30=4+5+6+7+8
#4: 6 a 9 : 30=6+7+8+9
#3: 9 a 11 : 30=9+10+11

SUMAPOTECONSEC(990;1;2)= #5: 12 a 16

El número 990 es igual a la suma de cinco cuadrados:
$990=12^2+13^2+14^2+15^2+16^2$

Comprobamos el primer ejemplo de este texto:
SUMAPOTECONSEC(47;3;2)= #47: 22 a 68

Equivale a lo que ya sabíamos:
47^3=22^2+23^2+24^2+…+67^2+68^2
El cubo de 47 es suma de 47 cuadrados consecutivos.

Podríamos comprobarlo en una hoja de cálculo como indicamos en los primeros párrafos, restando la fórmula de la suma de cuadrados en 68 y en 21:

(2*68^3+3*68^2+68)/6-
(2*21^3+3*21^2+21)/6=103823=47^3

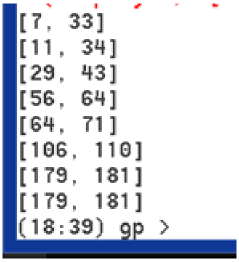
Versión en PARI

Para quienes deseen llegar a números grandes, se ofrece aquí una alternativa en PARI:

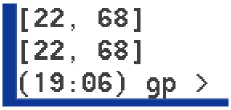
```
smpc(n,k,h)={my(v=[0,0],p=n^k,s,i,j);for(i=1,(n-2)^(k/h),s=i^h;j=i;while(s<=p,if(s==p&&j>i,v=[i,j];print(v));j+=1;s=s+j^h));v}
print(smpc(540,1,1))
```

Imprime las soluciones parciales y repetida la final. Se podría corregir este detalle, pero al algoritmo va rápido y no merece la pena suprimirlo.

Solución para smpc(540,1,1)



Solución para smpc(47,3,2), que fue nuestro primer ejemplo:



Confirma que el cubo de 47 es la suma de los cuadrados que van del 22^2 a 68^2.

Un ejemplo para confirmar:

smpc(29008,1,5)

¿Por qué ese número?

Vemos la solución:

```
[1, 7]
[1, 7]
(19:18) gp >
```

Resulta que es la suma de las primeras siete potencias quintas. Es así porque el número 29008 lo hemos obtenido aplicando la fórmula presentada al principio de la entrada:

S=(2*7^6+6*7^5+5*7^4-7^2)/12=29008.

Cubos que son suma de cubos

Acudimos a PARI, que es más rápido, para comprobar que 1155 posee esa propiedad:

k=1155;print(smpc(k,3,3))

Nos da que 1155^3 es igual a la suma de todos los cubos comprendidos entre 291^3 y 339^3

```
[291, 339]
[291, 339]
(18:43) gp >
```

(Consultar https://oeis.org/A097811)

Este resultado no se podría haber descubierto razonablemente con cálculo manual. Lo hemos comprobado con hoja de cálculo.

Cuadrados que son suma de cubos

Al efectuar una búsqueda de todos los casos, aparecen, entre otros, los números triangulares, por la conocida fórmula

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots n)^2$$

Si buscamos los ejemplos de esta propiedad, encontraremos todos los números triangulares ordenados por su orden.

En la siguiente imagen descubrimos que aparecen otros, como el 204, que no son triangulares. Son aquellos en los que la suma de cubos no comienza en 1^3:

Número N	¿Es triangular?	Orden del triangular
3	VERDADERO	2
6	VERDADERO	3
10	VERDADERO	4
15	VERDADERO	5
21	VERDADERO	6
28	VERDADERO	7
36	VERDADERO	8
45	VERDADERO	9
55	VERDADERO	10
66	VERDADERO	11
78	VERDADERO	12
91	VERDADERO	13
105	VERDADERO	14
120	VERDADERO	15
136	VERDADERO	16
153	VERDADERO	17
171	VERDADERO	18
190	VERDADERO	19
204	FALSO	0
210	VERDADERO	20
231	VERDADERO	21
253	VERDADERO	22
276	VERDADERO	23

Podemos crear un listado con los números cuyo cuadrado es suma de cubos pero que no son triangulares:

Número N	¿Es triangular?	Suma de cubos
204	FALSO	#3: 23 a 25
312	FALSO	#12: 14 a 25
315	FALSO	#5: 25 a 29
323	FALSO	#17: 9 a 25
504	FALSO	#8: 28 a 35
588	FALSO	#21: 14 a 34
720	FALSO	#15: 25 a 39
2079	FALSO	#33: 33 a 65
2170	FALSO	#5: 96 a 100
2940	FALSO	#5: 118 a 122

Como era de esperar, ninguna suma de cubos comienza con 1^3

Cubos que son suma de cuadrados

Este ejemplo es bastante conocido, pero con nuestras funciones podemos encontrar otros.

47^3=22^2+23^2+…+68^2

Este sería un buen ejemplo:

13156^3=2277044900416 es la suma de todos los cuadrados comprendidos entre 17354^2 y 22930^2

```
[17354, 22930]
[17354, 22930]
(19:24) gp >
```

Podemos usar la fórmula para sumar cuadrados, como comprobación:

22930*22931*(22930*2+1)/6-
17353*17354*(17353*2+1)/6

```
? a=22930*22931*(22930*2+1)/6-17353*17354*(17353*2+1)/6
print(a)
%11 = 2277044900416
2277044900416
```

Otras igualdades

Podemos usar lo aprendido para encontrar más igualdades en las que una potencia sea igual a la suma de varias otras potencias consecutivas. Esta es una muestra de lo encontrado con los primeros números como bases.

6^3=3^3+4^3+5^3
6^4=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3
13^4=119^2+120^2
20^3=11^3+12^3+13^3+14^3

JUGAMOS CON CIFRAS Y POTENCIAS

En una entrada antigua de mi blog se invitaba a buscar igualdades similares a la siguiente:

$88^2+33^2=8833$

En aquella ocasión se dio más protagonismo a seguidores del blog, pero los tiempos han cambiado y ahora es preferible ampliar el tema algorítmicamente, ya que existen menos interacciones en el mismo que entonces.

Por otra parte, puede ser una buena ocasión para ampliar las búsquedas de este tipo de casualidades. En la entrada antigua sugeríamos la existencia de otra solución de cuatro cifras, pero pedíamos buscarla con más. También, por otra parte, a partir del año 2025 nos interesan las igualdades del tipo $(20+25)^2=2025$. Unificaremos ambas cuestiones.

Usaremos una función que admita como parámetros el número a buscar, los exponentes a los que se elevan los trozos y el tipo de descomposición, si es *a^k+b^k* o bien *(a+b)^k*.

Función de búsqueda

En el listado que sigue usamos la función AJUSTA en lugar de STR$ para eliminar el espacio en blanco que Excel puede añadir a las cadenas.

A la primera versión de la función la denominaremos CIFRAS_POTE2, para indicar que el número se descompone en dos trozos. Ya se verá en qué direcciones se puede generalizar.

Function cifras_pote2(n, tope, tipo)
'El tope es el maximo exponente - El tipo es si se toma a^k+b^k+...o bien (a+b+c...)^k
Dim i, k, a, b, t
Dim s$, v$

s = ""

v = ajusta(n) ‘Convertimos **n** en texto
t = Len(v$) ‘Número de cifras
For i = 1 To t – 1 ‘Punto de corte
a = Val(Left(v, i)) ‘Los dos trozos
b = Val(Right(v, t - i))
For k = 2 To tope ‘Distintos exponentes
If tipo = 1 Then ‘Tipo 1: a^2+b^2
If potencia(a, k) + potencia(b, k) = n Then s = s + "## " + ajusta(a) + "^" + ajusta(k) + "+" + ajusta(b) + "^" + ajusta(k)
Else ‘Tipo 2: (a+b)^2
If potencia(a + b, k) = n Then s = s + "## (" + ajusta(a) + "+" + ajusta(b) + ")^" + ajusta(k)
End If
Next k
Next i
cifras_pote2 = s
End Function

Si usamos esta función con tope 2 y tipo 1 obtendremos la solución conocida y otra más de cuatro cifras:

Número	Potencias de trozos
1233	## 12^2+33^2
8833	## 88^2+33^2

Si usamos el tipo 2, obtenemos otras expresiones, una de ellas la popular del 2025:

Número	Potencias de sumas de trozos
2025	## (20+25)^2
3025	## (30+25)^2
9801	## (98+1)^2

Con tres cifras se obtienen

Número	Potencias de trozos
100	## 10^2+0^2
101	## 10^2+1^2

Con el segundo tipo sólo existe (10+0)^2=100

Con cinco cifras sólo se encuentran ejemplos triviales en el tipo 1:

Número	Potencias de trozos
10000	## 100^2+0^2
10001	## 100^2+1^2
10100	## 10^2+100^2

En el tipo 2 sí aparece este ejemplo: 88209=(88+209)^2

Por completar, hay que destacar que el único ejemplo de dos cifras es del tipo 2: (8+1)^2=81

Con cubos, además de las trivialidades, es interesante el ejemplo 407=4^3+0^3+7^3

No parece que el tema dé más de sí. Teniendo la herramienta, con un poco de paciencia se pueden explorar otros números de cifras y exponentes.

Descomposición en todas las cifras

Es interesante también la búsqueda de las igualdades entre un número y potencias de todas sus cifras, como la ya conocida 407=4^3+0^3+7^3.

Para encontrar estos casos cambiaremos un poco la estructura de la función. Ahora basta con que devuelva el valor del número, pues la descomposición será siempre la misma. Se propone esta función:

Function cifras_pote(n, exponente, tipo)
‘El tipo es idéntico al de la versión anterior
Dim i, a, b, t, c
Dim s$, v$

s = "" ‘Soluciones
v = ajusta(n) ‘El número como texto
t = Len(v$)
b = 0
For i = 1 To t
a = Val(Mid$(v, i, 1)) ‘Se recorren las cifras
‘Solución según el tipo (suma de potencias o potencia de la suma)
If tipo = 1 Then b = b + potencia(a, exponente) Else b = b + a
Next i

c = 0

If tipo = 1 And b = n Or tipo = 2 And potencia(b, exponente) = n Then c = n

cifras_pote = c ‘Devuelve el número o cero si no hay solución

End Function

Con esta función se descubren más ejemplos interesantes. Vemos algunos:

Número	Potencia de suma de cifras
512	(5+1+2)^3
4913	(4+9+1+3)^3
5832	(5+8+3+2)^3

Número	Suma de potencias de cifras
1634	1^4+6^4+3^4+4^4
8208	8^4+2^4+0^4+8^4
9474	9^4+4^4+7^4+4^4

Y he seguido jugando con el tema:

54748=5^5+4^5+7^5+4^5+8^5

92727=9^5+2^5+7^5+2^5+7^5

93084=9^5+3^5+0^5+8^5+4^5

17576=(1+7+5+7+6)^3

19683=(1+9+6+8+3)^3