Números y hoja de cálculo XVII

Cantidad	Monedas y billetes
37	20 10 5 2
56	50 5 1
82	50 20 10 2
107	50 50 5 2
176	50 50 50 20 5 1
228	50 50 50 50 20 5 2 1

Curso 2024-25

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Con el paso de los años, se nos agotan los temas teóricos de la Teoría de Números en su nivel medio y elemental. Por ello, en los últimos cursos predominan las curiosidades, búsquedas y números especiales. Este hecho quita variedad a los temas, pero permite continuar las publicaciones después de diecisiete años.

En ese intervalo de tiempo se ha incrementado el uso de funciones tipo string, o texto, porque con ellas se pueden devolver varias soluciones simultáneamente, y en PARI se han ido introduciendo funciones que devuelven un vector de datos. Estas dos novedades dan a las búsquedas de curiosidades más versatilidad.

En este curso se ha creado menos material, por las razones expuestas más arriba, y porque va apareciendo un efecto de cansancio, unido a que los blogs están perdiendo popularidad frente a otras estructuras de contenidos más breves y visuales.

CONTENIDO

CURIOSIDADES

DIFERENCIAS DE CUBOS ENTEROS POSITIVOS

Algunos números enteros positivos son diferencia de dos cubos, también enteros y positivos. Por ejemplo, 3367 lo es de tres formas diferentes: $3367=34^3-33^3=16^3-9^3=15^3-2^3$. Otros números, como 8624, no coinciden con ninguna diferencia de cubos. Aquí aprenderemos a descubrir ejemplos y estudiar algunos casos especiales.

Cuando se trata con diferencias, el estudio previo que se debe emprender es el de encontrar una cota para los números que se restan. En este caso, además de ello, podremos añadir una condición que deban cumplir minuendo y sustraendo. Es un tema algebraico sencillo en este caso. Llamemos **a+k** a la base del cubo mayor y **a** a la del menor, siendo además **N** el valor de la diferencia entre ambos cubos. Tendremos entonces:

$$\mathbf{(a+k)^3- a^3 = 3a^2k+3ak^2+k^3 = k(3a^2+3ak+k^2) = N}$$

Esta igualdad nos indica que N ha de ser múltiplo de k. Esto nos da una cota para la diferencia entre bases, junto con la condición de que sea un divisor de N. Por otra parte, no es difícil acotar las bases de los cubos:

$3a^2+3ak+k^2 = N/k$

$3a^2 < 3a(a+k) = N/k-k^2 < N/k$

De aquí deducimos que una cota de **a** es la raíz cuadrada de **N/(3k)**

$$a < \sqrt{\frac{N}{3k}}$$

Si recorremos los valores de los divisores de **N**, obtendremos valores posibles de **k**, y con esta cota podremos encontrar valores de **a** para comprobar si **$(a+k)^3- a^3 = N$**

Estas condiciones se usan en la siguiente función de VBasic, que nos devolverá las descomposiciones en diferencia de cubos que presente un número **N**:

Function difcubos$(n)
Dim k, a, t, m
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de soluciones
m = 0 ’Número de soluciones
For k = 1 To n / 2
If n / k = n \ k Then ‘**k** ha de ser divisor de **N**
t = Sqr(n / k / 3) ‘Cota para **a**
For a = 1 To t

If (a + k) ^ 3 - a ^ 3 = n Then m = m + 1: s = s + "a=" + Str$(a) + " k=" + Str$(a + k) ‘Si es una solución, se incorpora

Next a

End If

Next k

If s = "" Then difcubos = "NO" Else difcubos = ajusta(m) + " " + s ‘Si no hay solución devuelve un **NO**

End Function

Con esta función encontraremos los números enteros que son diferencia de cubos, con el dato del número de soluciones que presenten. Por ejemplo, en la siguiente tabla figuran los resultados desde 720 hasta 730:

Número N	Diferencias de cubos
720	NO
721	2 # a= 15 k= 16 # a= 2 k= 9
722	NO
723	NO
724	NO
725	NO
726	NO
727	NO
728	2 # a= 10 k= 12 # a= 1 k= 9
729	NO
730	NO

Observamos que sólo dos números cumplen la condición, y, en este caso, con dos soluciones cada uno. Las diferencias son divisores de N. En el caso de 721, son 1 y 7, y, en el caso de 728, 2 y 8, divisores en ambos números.

Una idea nos viene al momento, y es que si N es primo, la única diferencia posible es 1:

Si un número primo es diferencia de dos cubos, ambos han de ser consecutivos.

Lo comprobamos con la función anterior añadiendo la condición de ser primo:

Primos cubanos	Cubos consecutivos
7	1 # a= 1 k= 2
19	1 # a= 2 k= 3
37	1 # a= 3 k= 4
61	1 # a= 4 k= 5
127	1 # a= 6 k= 7
271	1 # a= 9 k= 10
331	1 # a= 10 k= 11
397	1 # a= 11 k= 12
547	1 # a= 13 k= 14
631	1 # a= 14 k= 15
919	1 # a= 17 k= 18
1657	1 # a= 23 k= 24
1801	1 # a= 24 k= 25
1951	1 # a= 25 k= 26

Se trata de los “primos cubanos”, que son objeto de estudio en una entrada en nuestro blog (ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/03/primos-cubanos.html

Están publicados también en https://oeis.org/A002407

Los primeros números que son diferencia de cubos de una, dos o tres formas son estos:

7, 19, 26, 37, 56, 61, 63, 91, 98, 117, 124, 127, 152, 169, 189, 208, 215, 217, 218, 271, 279, 296, 316, 331, 335, 342, 386, 387, 397, 448, 469, 485, 488, 504, 511, 513, 547, 602, 604, …

Están publicados en https://oeis.org/A038593, y parece ser que serán muy raros los que presenten más de tres soluciones. Como en nuestra función el primer carácter representa el número de soluciones, no es difícil separar esta tabla según este dato.

Una sola solución:

Número	Una sola diferencia de cubos
7	1 # a= 1 k= 2
19	1 # a= 2 k= 3
26	1 # a= 1 k= 3
37	1 # a= 3 k= 4
56	1 # a= 2 k= 4
61	1 # a= 4 k= 5
63	1 # a= 1 k= 4
91	1 # a= 5 k= 6
98	1 # a= 3 k= 5
117	1 # a= 2 k= 5
124	1 # a= 1 k= 5
127	1 # a= 6 k= 7
152	1 # a= 4 k= 6
169	1 # a= 7 k= 8
189	1 # a= 3 k= 6
208	1 # a= 2 k= 6

https://oeis.org/A014439

Dos diferencias de cubos:

Número	Dos diferencias de cubos
721	2 # a= 15 k= 16 # a= 2 k= 9
728	2 # a= 10 k= 12 # a= 1 k= 9
999	2 # a= 9 k= 12 # a= 1 k= 10
5768	2 # a= 30 k= 32 # a= 4 k= 18
5824	2 # a= 20 k= 24 # a= 2 k= 18
5859	2 # a= 24 k= 27 # a= 10 k= 19
7992	2 # a= 18 k= 24 # a= 2 k= 20
8911	2 # a= 54 k= 55 # a= 17 k= 24
9919	2 # a= 57 k= 58 # a= 9 k= 22

https://oeis.org/A014440

Tres diferencias:

Números	Tres diferencias de cubos
3367	3 # a= 33 k= 34 # a= 9 k= 16 # a= 2 k= 15
26936	3 # a= 66 k= 68 # a= 18 k= 32 # a= 4 k= 30

Observamos que van disminuyendo los casos.
Ver https://oeis.org/A014441

Segunda versión de búsqueda

En la función propuesta hemos usado un bucle de búsqueda para **k** y otro para **a**. Este último se puede evitar despejando a en **$3a^2+3ak+k^2$-N/k**. Así lo hemos efectuado en PARI, y se consigue más velocidad de proceso, pero para números con tres soluciones sigue siendo lento. Lo copiamos aquí por si alguien desea experimentar:

```
difcubos(n)={my(m=0,k,a,q);for(k=1,n/2,if(n%k==0,q
=9*k^2-12*(k^2-n/k);if(issquare(q),a=(-
3*k+sqrt(q))/6;if(a==truncate(a)&&a>0,m+=1))));m}
for(i=1,10^6,if(difcubos(i)==3,print(i)))
```

Se exige en él que **a** sea entera y positiva. Cambiando el 3 de la última línea se puede intentar buscar números con cuatro soluciones, si se dispone de un equipo potente.

Casos particulares en la diferencia

En nuestras publicaciones nos aparecen casos en los que un cuadrado y un cubo están relacionados por una identidad. En este escrito comenzaremos por estudiar el caso en el que una diferencia de cubos es cuadrada. Para ello cambiaremos un poco nuestra función básica, en el sentido de exigir al principio que N sea un cuadrado. El resultado, ya conocido, es

Cuadrados	Raíz cuadrada	Diferencia de cubos
169	13	1 # a= 7 k= 8
784	28	1 # a= 6 k= 10
2401	49	1 # a= 7 k= 14
10816	104	1 # a= 28 k= 32
21609	147	1 # a= 7 k= 28
32761	181	1 # a= 104 k= 105
35721	189	1 # a= 6 k= 33
50176	224	1 # a= 24 k= 40
123201	351	1 # a= 63 k= 72
130321	361	1 # a= 38 k= 57
150544	388	1 # a= 110 k= 114
153664	392	1 # a= 28 k= 56

La segunda columna está publicada en https://oeis.org/A038597

Hay un caso interesante en la tabla, y es 14^3-7^3=7^4, y esto nos anima a buscar otras diferencias entre cubos que sean potencia de cualquier exponente. Para ello disponemos de la función en Excel ESPOTENCIA, que devuelve el exponente mínimo de una potencia, o cero si no es de ese tipo. Con ella encontramos diferencias que son cuartas potencias:

Potencia cuarta	Raíz	Diferencia de cubos
2401	7	4 # a= 7 k= 14
130321	19	4 # a= 38 k= 57
456976	26	4 # a= 26 k= 78

Con esta búsqueda hemos descubierto una propiedad interesante: si N es diferencia entre dos cubos, su cuarta potencia también lo es:

N	Dif. Cubos	N^4	Dif. Cubos
7	1 # a= 1 k= 2	2401	1 # a= 7 k= 14
19	1 # a= 2 k= 3	130321	1 # a= 38 k= 57
26	1 # a= 1 k= 3	456976	1 # a= 26 k= 78
37	1 # a= 3 k= 4	1874161	1 # a= 111 k= 148
56	1 # a= 2 k= 4	9834496	1 # a= 112 k= 224
61	1 # a= 4 k= 5	13845841	1 # a= 244 k= 305
63	1 # a= 1 k= 4	15752961	1 # a= 63 k= 252
91	1 # a= 5 k= 6	68574961	1 # a= 455 k= 546

La razón es sencilla: Si en una diferencia de cubos con resultado N multiplicamos ambos cubos por N^3, resultará otra diferencia de cubos con resultado N^4. Ocurrirá igual con N^7 o N^{10}.

Podemos observar que los datos de la cuarta columna coinciden con los de la segunda multiplicados por N.

Otros tipos de diferencias de cuadrados

Esta última parte del estudio la desarrollaremos con brevedad salvo que surja alguna propiedad interesante.

Diferencias que son números primos

Ya advertimos que, en este caso, las bases de los cubos han de ser consecutivas y los primos son los llamados "cubanos":

Número primo	Diferencia de cubos consecutivos
7	1 # a= 1 b= 2
19	1 # a= 2 b= 3
37	1 # a= 3 b= 4
61	1 # a= 4 b= 5
127	1 # a= 6 b= 7
271	1 # a= 9 b= 10
331	1 # a= 10 b= 11
397	1 # a= 11 b= 12
547	1 # a= 13 b= 14
631	1 # a= 14 b= 15
919	1 # a= 17 b= 18
1657	1 # a= 23 b= 24
1801	1 # a= 24 b= 25
1951	1 # a= 25 b= 26
2269	1 # a= 27 b= 28

Diferencias de cubos triangulares

Los primeros son estos:

Triangular	Orden triangular	Diferencia de cubos
91	13	1 # a= 5 k= 6
4095	90	1 # a= 1 k= 16
5886	108	1 # a= 15 k= 21
7875	125	1 # a= 5 k= 20
8128	127	1 # a= 24 k= 28
8911	133	2 # a= 54 k= 55 # a= 17 k= 24
9045	134	1 # a= 6 k= 21
17955	189	1 # a= 12 k= 27
21736	208	1 # a= 6 k= 28
23653	217	1 # a= 30 k= 37
47278	307	1 # a= 15 k= 37

No descubrimos particularidades, luego pasamos a otro caso.

Diferencia de cubos igual a suma de cubos

Aprovechando una pequeña función disponible, SUMCUBOS, se puede exigir que la diferencia de cubos coincida con la suma de otros dos. Los primeros resultados son:

Número	Diferencia de cubos	Suma de cubos
91	1 # a= 5 b= 6	1: a= 3 b= 4
152	1 # a= 4 b= 6	1: a= 3 b= 5
189	1 # a= 3 b= 6	1: a= 4 b= 5
217	1 # a= 8 b= 9	1: a= 1 b= 6
513	1 # a= 6 b= 9	1: a= 1 b= 8
728	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9	1: a= 6 b= 8
1027	1 # a= 18 b= 19	1: a= 3 b= 10
1216	1 # a= 8 b= 12	1: a= 6 b= 10
1512	1 # a= 6 b= 12	1: a= 8 b= 10
1736	1 # a= 16 b= 18	1: a= 2 b= 12
2457	1 # a= 15 b= 18	1: a= 9 b= 12
3087	1 # a= 17 b= 20	1: a= 7 b= 14
4104	1 # a= 12 b= 18	2: a= 2 b= 16 a= 9 b= 15
4706	1 # a= 27 b= 29	1: a= 11 b= 15
4921	1 # a= 40 b= 41	1: a= 2 b= 17
4977	1 # a= 22 b= 25	1: a= 4 b= 17

Están publicados en https://oeis.org/A225908

Como se señala en esta página, estos datos dan lugar a identidades en las que un cubo es suma de otros tres, pues basta pasar de miembro el cubo que aparece restando:

6^3-4^3=3^3+5^3 da lugar a 6^3=3^3+4^3+5^3.

Esto explica que en la segunda columna aparezcan repetidos tres veces algunos cubos mayores de cada caso, como el 6, el 9 o el 12, ya que la suma da lugar a tres diferencias.

DIVISOR PROPIO MAYOR QUE LA RAÍZ CUADRADA

Explorando por OEIS, encontré un tipo de números en https://oeis.org/A332269 y me ha apetecido desarrollar el tema mediante nuestras funciones en hoja de cálculo.

La idea es que en muchos números naturales N, un solo divisor propio de N es mayor que su raíz cuadrada, siendo todos los demás menores. Al ser propio, se descarta N, por lo que ese divisor ha de cumplir **Sqr(N)<d<N**, siendo **Sqr** la función raíz. Su valor máximo posible será **N/2**.

Por ejemplo, el número 27 posee como divisores propios 1, 3 y 9, siendo 9 el único divisor propio de 27 que es mayor que la raíz cuadrada de 27=5,19. Con este ejemplo ya tenemos un resultado, y es que **los cubos de los números primos** presentan esta propiedad.

Su búsqueda con Vbasic de Excel y Calc es bastante sencilla. Se puede desarrollar con esta función:

Function undivisor(n)
Dim k, m, d As Long
Dim r
r = Sqr(n) ’Cálculo de la raíz cuadrada
m = 0 ‘Contador de divisores
k = Int(n / 2) ‘Máximo divisor propio posible

While k > r ‘Contamos divisores mayores que la raíz
If n / k = n \ k Then d = k: m = m + 1
k = k - 1
Wend
‘Si el contador marca m=1 es de ese tipo
If m = 1 Then undivisor = d Else undivisor = 0
End Function

Devuelve un cero si no presenta la propiedad, y el mayor divisor si se cumple. Los primeros números con ella son:

6, 8, 10, 14, 15, 16, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 81, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 106, 111, 115, 118, 119, 122, 123, 125, 129, 133, 134, 141, 142, 143, 145, 146, 155, 158, 159, 161, 166, 177, 178, 183, 185, 187, 194

Están publicados en https://oeis.org/A332269

En esta tabla observamos el cumplimiento de la condición:

N	Mayor divisor	RAÍZ DE N
6	3	2,44948974
8	4	2,82842712
10	5	3,16227766
14	7	3,74165739
15	5	3,87298335
16	8	4
21	7	4,58257569
22	11	4,69041576
26	13	5,09901951
27	9	5,19615242
33	11	5,74456265
34	17	5,83095189
35	7	5,91607978
38	19	6,164414
39	13	6,244998
46	23	6,78232998

En la página enlazada figuran algunos tipos de números con la propiedad pedida:

Semiprimos libres de cuadrados: Si **N=pq**, con **p** y **q** primos y **p<q**, es lógico que **q** sea el divisor único pedido. En el listado figuran muchos, como el 14=2*7, y 7 es mayor que la raíz cuadrada de 14.

Cubos y cuartas potencias de primos: En ambos casos se cumple, y el divisor es p^2 en el primer caso y p^3 en el segundo. Así, en 16 el mayor divisor, 8, es el único mayor que la raíz cuadrada de 16, que es 4.

Simplificación

En la referida página de OEIS se incluye un comentario que nos permite simplificar la búsqueda, y es que si **Sqr(N)<d<N**, y **d** es único, también lo será **N/d**, que será divisor, pero que ahora se cumplirá **N/d<Sqr(N)**, lo que nos permite buscar el divisor único entre **2** y **Sqr(N)**.
El desarrollo de la función sería similar al presentado:

```
Function undivisor2(n)
Dim k, m, d As Long
Dim r

r = Sqr(n)
m = 0
k = 2 'Ahora se comienza en el 2, hasta la raíz cuadrada
While k < r 'El resto se desarrolla igual
If n / k = n \ k Then d = k: m = m + 1
k = k + 1
Wend
If m = 1 Then undivisor2 = d Else undivisor2 = 0
End Function
```

Como era de esperar, resultan los mismos números:

Número	Menor divisor
6	2
8	2
10	2
14	2
15	3
16	2
21	3
22	2
26	2
27	3
33	3
34	2
35	5
38	2
39	3
46	2
51	3
55	5

Profundización

El número de divisores propios mayores que la raíz cuadrada coincide con el de los divisores menores, como vimos más arriba, ya que si D divide a N, también lo divide N/D. Esto nos permite cambiar la condición impuesta por la de que x*y=N tenga una sola solución si x es distinto de y y ambos mayores que la unidad. En ese caso, si x es menor que la raíz cuadrada de N, la otra variable y presentará un valor mayor que ella, con lo que se cumple la condición.

Si analizamos el valor de TAU(N) (número de divisores de N) observaremos que el número de pares x, y es igual a TAU(N)/2 si N es libre de cuadrados, y si (N,1) es un par, sólo deberá existir otro par (D,N/D), por lo que si TAU(N) vale cuatro, como ocurre en los semiprimos libres de cuadrados p*q, con divisores (1, p, q, pq) y en los cubos de primos (1, p, p^2, p^3), algo que ya se afirmó más arriba.

Si TAU(N) es mayor que 4, sólo se encuentran como ejemplos válidos las potencias cuartas de los números primos.

Ejemplos consecutivos

En la tabla figuran términos consecutivos. En la página de OEIS enlazada figuran varios tipos de números que forman pares de consecutivos. Es una curiosidad digna de leerse.

DIFERENCIA DE POTENCIAS ES UN CUADRADO

Existen muchos números con la propiedad de que dos potencias sucesivas de los mismos se diferencian en un cuadrado. Por ejemplo, $26^{11}- 26^{10}=59406880^2$, o $5^5-5^4=50^2$. Parece un problema complicado, pero no lo es, como veremos.

La propiedad que buscamos se puede expresar como $N^{k+1}=N^k+m^2$, o bien

$N^k(N-1)=m^2$

Para que se cumpla esto es necesario que la potencia tenga exponente par y que N-1 sea cuadrado, por ser N y N-1 primos entre sí, lo que no permite construir un cuadrado entre ambos. Es la única forma de que la diferencia de potencias sea cuadrada, y en ellas, la menor ha de ser par y la mayor impar. Es muy sencillo razonar que la condición también es suficiente. Por tanto:

El conjunto de números que cumplen la condición pedida coincide con los que son del tipo n^2+1

Están publicados en https://oeis.org/A002522

Los hemos estudiado en dos entradas de nuestro blog: https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/10/regresos-5-un-cuadrado-y-una-unidad-1.html y la siguiente, así como en otra más antigua.

En la siguiente tabla figuran las primeras soluciones al problema. La primera columna es la lista de las bases (números tipo n^2+1) y en la segunda las soluciones de diferencias de potencias. En primer lugar figura la potencia mayor (k+1) y después la base del cuadrado que es diferencia entre las potencias. Como era de esperar, se obtienen infinitas soluciones (todas las potencias impares de exponente k+1)

Número N	Soluciones
2	# 3 2 # 5 4 # 7 8 # 9 16 # 11 32
5	# 3 10 # 5 50 # 7 250 # 9 1250 # 11 6250
10	# 3 30 # 5 300 # 7 3000 # 9 30000 # 11 300000
17	# 3 68 # 5 1156 # 7 19652 # 9 334084 # 11 5679428
26	# 3 130 # 5 3380 # 7 87880 # 9 2284880 # 11 59406880
37	# 3 222 # 5 8214 # 7 303918 # 9 11244966 # 11 416063742
50	# 3 350 # 5 17500 # 7 875000 # 9 43750000 # 11 2187500000
65	# 3 520 # 5 33800 # 7 2197000 # 9 142805000
82	# 3 738 # 5 60516 # 7 4962312 # 9 406909584

Por ejemplo, $82^7-82^6=4962312^2$

Esta lista se puede construir con nuestro Buscador de Naturales

(https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) aprovechando que $N^2(N-1)$ ha de ser cuadrado, como caso particular de la identidad previa:

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	1	0
2	2	4
3	5	50
4	10	300
5	17	1156
6	26	3380
7	37	8214
8	50	17500
9	65	33800
10	82	60516
11	101	102010
12	122	163724

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	144

Con estas propiedades:

ES CUADRADO(N^2*(N-1))
EVALUAR RAIZ(N^5-N^4)

Se observa que en la segunda columna figuran las raíces de la diferencia de potencias, y todas son enteras.

Según la entrada nuestra sobre este tema, estos números no pueden tener factores primos p que no admitan -1 como resto cuadrático módulo p. Son estos: 3, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 103, 107, 109, 113, 127,…

Esta exigencia no actúa sobre el cuadrado diferencia, ya que este puede poseer factores primos de N-1, según la primera identidad de este estudio. Por ejemplo, el primer cuadrado de la tabla, 222, es múltiplo de 3, y 520 lo es de 13.

En realidad, m^2 puede poseer los factores primos de N y también de N-1. Por ejemplo, para N=82, el cuadrado correspondiente, 738, se descompone como $2*3^2*41$. Entre ellos, 2 y 41 son divisores de 82 y 3^2 lo es de $82-1=3^4$

Caso particular

Un caso interesante es el de las potencias cubo y cuadrado, pues resulta del mismo la descomposición de un cubo en dos cuadrados.
Por ejemplo, para N=65, se cumplirá
$65^3=65^2+520^2$

Más particular

En el caso de que un término de la lista sea del tipo $4n^2+1$, obtendríamos más cuadrados. Por ejemplo,
37^3=12^2+35^2+222^2

Obtendríamos una descomposición de un cubo en tres cuadrados.

BASES, ÍNDICES Y RESULTADOS SIMÉTRICOS

Es ya muy popular la propiedad del “primo de Sheldon”, de la serie televisiva “Big Bang Theory”, y es que 73 es un número primo, y si invertimos sus cifras, 37 también es primo. A esto se le une que 73 es el primo número 21 y 37 es el número 12. Es decir, dos números de un tipo son simétricos y sus índices, bases u órdenes también lo son.

Hemos usado la propiedad de ser primo, pero en los cuadrados abundan ejemplos similares. Así, 12 y 21 son simétricos y sus cuadrados, 144 y 441, también. Un ejemplo más difícil de encontrar es el de números triangulares: El triangular de orden 24662 es 304119453 y el de orden simétrico 26642 es su simétrico 354911403. No se encuentra un ejemplo más pequeño, salvo con números capicúas.

En estas búsquedas, a fin de evitar trivialidades, descartaremos los números capicúas o palindrómicos. En los cálculos a efectuar será muy útil la función CIFRAINVER, explicada en la entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/04/relaciones-entre-numeros-con-cifras.html.

Las búsquedas que se efectúen aquí serán complementos de algunas contenidas en esa entrada.

Búsqueda con números primos

El ejemplo del 37 y el 73 se puede extender a otros primos. Bastará con exigir que sean simétricos y que sus números de orden también lo sean. Necesitaremos la función PRIME(N), que no está implementada en hojas de cálculo. Se puede sustituir por nuestra PRIMNUM(N), que devuelve el primo número N:

```
Public Function primnum(n)
Dim p, c, i
c = 0: i = 2
While c < n
If esprimo(i) Then c = c + 1: p = i
i = i + 1
Wend
primnum = p
End Function
```

Usa nuestra función ESPRIMO, muy usada en este blog.

Con ellas basta buscar que
m=cifrainver(n) and
primnum(m)=cifrainver(primnum(n))

El resultado será que 73 y 37 son los únicos resultados a nivel elemental. Si se añade la propiedad de que 7*3=21, se ha demostrado que no existen más ejemplos.

Búsqueda con cuadrados

Aquí la condición para Excel y Calc sería
m=cifrainver(n) and m^2=cifrainver(n^2)
El resultado, bastante conocido es

n	n^2	m	m^2
12	144	21	441
13	169	31	961
21	441	12	144
31	961	13	169
102	10404	201	40401
103	10609	301	90601
112	12544	211	44521
113	12769	311	96721
122	14884	221	48841
201	40401	102	10404
211	44521	112	12544
221	48841	122	14884
301	90601	103	10609
311	96721	113	12769

La columna de cuadrados está publicada en https://oeis.org/A064021

Para quienes quieran reproducir la búsqueda sin usar funciones especiales, se adjunta a continuación un código en PARI:

```
ok(m,n)=n==eval(concat(Vecrev(Str(m))))&&n^2==eval(concat(Vecrev(Str(m^2))))&&n%10<>0&&m%10<>0
for(i=2,300,for(j=2,i-1,if(ok(i,j),print(i,",   ",i^2,",   ",j,",   ",j^2))))
```

Está preparado para buscar hasta 300, dato que se puede cambiar sin problemas. Su resultado sería similar al anterior:

```
21, 441, 12, 144
31, 961, 13, 169
201, 40401, 102, 10404
211, 44521, 112, 12544
221, 48841, 122, 14884
```

Números triangulares

Ya se anunció al principio que estos ejemplos son escasos. Bastará cambiar en las funciones la expresión **m^2** por **m*(m+1)/2** y al igual con **n**.

Efectuada la búsqueda, el único par encontrado, inferior a 10^5 es el referido:

n	n(n+1)/2	m	m(m+1)/2
24662	304119453	26642	354911403
26642	354911403	24662	304119453

Al mismo resultado se llega con PARI:

```
%1 = (m,n)->n==eval(concat(Vecrev(Str(m)))
*(m+1)/2))))&&n%10<>0&&m%10<>0
26642, 354911403, 24662, 304119453
```

En OEIS, https://oeis.org/A279084, están publicados los resultados sin desechar los capicúas.

Otros tipos

Con números oblongos, tipo N(N+1), no se han encontrado ejemplos a nivel elemental, y tampoco para pentagonales.

Para cubos, existen ejemplos, pero en algunos de ellos el número de cifras es alto, y hay que acudir a PARI:

```
%1 = (m,n)->n==eval(concat(Vecrev(Str(m))))&
&&n%10<>0&&m%10<>0
1101, 1334633301, 1011, 1033364331
11001, 1331363033001, 10011, 1003303631331
```

Están publicados en https://oeis.org/A035124

Por último, al probar con cuadrados de primos, se obtienen bastantes resultados entre los primeros números:

Primo 1	Cuadrado	Primo 2	Cuadrado
13	169	31	961
31	961	13	169
113	12769	311	96721
311	96721	113	12769
1021	1042441	1201	1442401
1031	1062961	1301	1692601
1103	1216609	3011	9066121
1201	1442401	1021	1042441
1301	1692601	1031	1062961
3011	9066121	1103	1216609
11003	121066009	30011	900660121
30011	900660121	11003	121066009

No parece que estén publicados. El autor no lo hará.

BASES, ÍNDICES Y RESULTADOS ANAGRAMÁTICOS

En el apartado anterior se buscaron números con cifras simétricas, en los que bases, índices u órdenes también fueran simétricos, como los cubos 1334633301=1101^3 y 1033364331=1011^3, que son simétricos y también sus bases.

Ahora ampliaremos las condiciones y, en lugar de exigir simetría, buscaremos números anagramáticos (con las mismas cifras). Un ejemplo sería el par de cuadrados 130^2=16900 y 310^2=96100. No son simétricos en sus cifras, pero sí poseen las mismas.

Si en la anterior búsqueda se usaba la función propia de este blog CIFRAINVER, en esta nueva será útil CIFRAS_IDENTICAS, que determina si dos números poseen las mismas cifras con frecuencias idénticas, de forma que los repetidos en uno también lo estén en el otro. Se puede estudiar su codificación en la entrada de nuestro blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/consecutivos-con-las-mismas-cifras.html.

En el caso de las cifras simétricas, cada número sólo se podía corresponder con su simétrico, pero en este caso pueden existir múltiples soluciones anagramáticas, por lo que deberemos introducir un contador de soluciones.

Usaremos la función ANA_ANA para investigar este caso:

Function ana_ana$(n)
Dim i, m
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de soluciones
m = 0 ’Contador

For i = 1 To n – 1 ‘Aquí usamos la función para cubos
If cifras_identicas(n, i) And cifras_identicas(n ^ 3, i ^ 3) Then m = m + 1: s = s + " # " + Str$(i) ‘Si son anagramáticos, se publica
Next i
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " # " + s
ana_ana = s
End Function

Esta función, tal como está, busca el caso de cubos anagramáticos. Un sencillo cambio en la línea que contiene la función CIFRAS_IDENTICAS la habilita para otros casos. El resultado es:

N	Soluciones	N^3	Otro cubo
110	1 # # 101	1331000	1030301
201	1 # # 102	8120601	1061208
1010	1 # # 1001	1030301000	1003003001
1020	1 # # 1002	1061208000	1006012008
1030	1 # # 1003	1092727000	1009027027
1040	1 # # 1004	1124864000	1012048064
1100	2 # # 1001 # 1010	1331000000	1030301000
1101	1 # # 1011	1334633301	1033364331

Observamos que el número 1100 presenta dos soluciones. Es posible que esta sucesión no esté publicada.

Caso de cuadrados

Si cambiamos los cubos por cuadrados en la función ANA_ANA obtenemos

N	Anagramáticos con cuadrados
21	1 # # 12
31	1 # # 13
110	1 # # 101
120	1 # # 102
130	1 # # 103
201	2 # # 102 # 120
210	3 # # 102 # 120 # 201
211	1 # # 112
220	1 # # 202
221	1 # # 122
301	2 # # 103 # 130
302	1 # # 203
310	3 # # 103 # 130 # 301
311	1 # # 113
410	1 # # 401
463	1 # # 364
504	1 # # 405
604	1 # # 406
605	1 # # 506
704	1 # # 407

Como ocurre con otros tipos, aquí pueden aparecer varias soluciones, como en 210 y 310. Es que la condición de igualdad de cifras es menos restrictiva que la de simetría.

Números primos

En el caso de los números primos bastará incluir en la función ANA_ANA la función PRIMNUM(N) o PRIME(N). Resultan bastantes ejemplos por rango, siendo el primero el par (37, 73) de Sheldon, que ya estudiamos en un apartado anterior. Lo que ocurre ahora es que, al ser la condición menos exigente, se obtienen más resultados. En hoja de cálculo el proceso se hace lento, pero en PARI la velocidad de proceso es aceptable.

La siguiente tabla se ha confeccionado con los resultados de PARI. Se han ordenado de esta forma: Índice 1, Primo 1, Índice 2, Primo 2.

I1, P1, I2, P2
21, 73, 12, 37
163, 967, 136, 769
423, 2927, 342, 2297
474, 3361, 447, 3163
821, 6311, 218, 1361
823, 6323, 382, 2633
921, 7211, 912, 7121
1053, 8423, 1035, 8243
1642, 13901, 1426, 11903
1765, 15107, 1756, 15017

En el lenguaje PARI es muy sencillo detectar números anagramáticos.

Basta exigir ***vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))***, de fácil comprensión: *“Si ordenamos las cifras de ambos números nos resulta el mismo vector”.*

Con este código se obtienen resultados fácilmente en la web de PARI

ok(m,n)=vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))&&vecsort(digits(prime(n)))==vecsort(digits(prime(m)))&&n%10<>0&&m%10<>0
for(i=2,2000,for(j=2,i-1,if(ok(i,j),print(i,", ",prime(i),", ",j,", ",prime(j)))))

```
? ok(m,n)=vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))&&vecsort(digits(prime(n)))==vecsort(digits(prime(m)))&
&n%10<>0&&m%10<>0
for(i=2,2000,for(j=2,i-1,if(ok(i,j),print(i,", ",prime(i),", ",j,", ",prime(j)))))
%1 = (m,n)->vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))&&vecsort(digits(prime(n)))==vecsort(digits(prime
(m)))&&n%10<>0&&m%10<>0
21, 73, 12, 37
163, 967, 136, 769
423, 2927, 342, 2297
474, 3361, 447, 3163
821, 6311, 218, 1361
823, 6323, 382, 2633
921, 7211, 912, 7121
1053, 8423, 1035, 8243
1642, 13901, 1426, 11903
1765, 15107, 1756, 15017
```

Números triangulares

En el caso de soluciones simétricas no era fácil encontrar un ejemplo con números triangulares. Veamos si sólo buscamos anagramáticos. Usaremos la fórmula de los triangulares, N(N+1)/2.

Tal como era de esperar, aparecen muchas más soluciones. Estas son las primeras:

Orden 1	Orden 2	Triangular 1	Triangular 2
290	209	42195	21945
582	528	169653	139656
797	779	318003	303810
927	792	430128	314028
1110	1101	616605	606651
1121	1112	628881	618828
1298	1289	843051	831405
1524	1425	1162050	1016025
1846	1684	1704781	1418770
1966	1669	1933561	1393615

Con estos ejemplos ya estamos preparados para emprender otras búsquedas, como oblongos, de Fibonacci, potencias enteras y otros más que se nos ocurran.

FORMAS DE ACCEDER A UN PAR DE PRIMOS GEMELOS

Uno de los conceptos más populares en Teoría de números es el de primos gemelos. Generalmente se consideran de ese tipo dos números primos impares que se diferencian en dos unidades, como (5, 7) o (17, 19). La forma más sencilla de llegar a ellos, a partir del (5, 7), es buscar pares del tipo (6n-1, 6n+1), porque son los únicos en los que ambos elementos pueden ser primos, salvo (3, 5). Aquí buscaremos otras rutas en las que podemos encontrar esos pares de primos de forma más o menos casual.

Búsqueda directa con 6n-1 y 6n+1

Si deseamos encontrar primos gemelos en un rango dado, bastará recorrer los múltiplos de 6 y averiguar si sus números vecinos son ambos primos. Es algo muy sencillo, y si se incluye aquí es por comenzar con lo más directo. Con esta rutina en VBasic de Excel podemos encontrar los pares de primos gemelos incluidos en cualquier rango y en la primera hoja, si escribimos los extremos de ese rango en las celdas J1 y J2 respectivamente:

```
Sub gemelos()
Dim n, fila, a, b
Dim r$

a = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 10).Value ‘Se lee el rango
b = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 10).Value
fila = 3 ‘Fila de inicio
n = a - a Mod 6+6 ‘Se busca un múltiplo de 6
Do While n <= b ‘Se avanza entre los múltiplos de 6
If esprimo(n - 1) And esprimo(n + 1) Then ‘Los números vecinos son primos
r = Str$(n - 1) + ", " + Str$(n + 1) ‘Se imprime una solución
fila = fila + 1 ‘Siguiente fila
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 10).Value = r
End If
```

n = n + 6 ‘Siguiente múltiplo de 6
Loop
End Sub

En la siguiente imagen podemos observar los pares de primos gemelos entre 3000000 y 3001000. El proceso es muy rápido, aunque el rango abarca mil números.

	3000000
Gemelos	3001000
	3000131, 3000133
	3000299, 3000301
	3000377, 3000379
	3000539, 3000541
	3000929, 3000931

Con esto se da por terminado este tipo de búsqueda directa. Vemos otros caminos más enrevesados.

A través de un múltiplo de un primo

Existen muchas sucesiones en OEIS (Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros) en las que unos números primos, multiplicados por un múltiplo de 6 dan lugar a un par de primos gemelos. Es una búsqueda que relaciona tres números primos y algo más compleja que la anterior.

Por ejemplo, vemos los primeros pares engendrados por el número primo 13 y los múltiplos de 48*13:

	0	
Gemelos	100000	
	1871	1873
	3119	3121
	7487	7489
	21839	21841
	33071	33073
	49919	49921
	61151	61153
	63647	63649
	65519	65521
	86111	86113
	88607	88609
	94847	94849

Una variante sería usar una expresión sobre un número primo, como por ejemplo, todos los pares de números primos gemelos formados a partir de la expresión p^3-p, donde p es un número primo. Cambiando un poco la rutina se consiguen:

	0
Gemelos	30000000
	Primo 2 : 5, 7
	Primo 11 : 1319, 1321
	Primo 31 : 29759, 29761
	Primo 41 : 68879, 68881
	Primo 239 : 13651679, 13651681

Los valores de esos primos, 2, 11, 31, …están publicados en https://oeis.org/A158295

Podríamos inventar muchas variantes de este tipo, pero no aportarían mucho.

Mediante una concatenación

Aquí pasamos a otras curiosidades. Por ejemplo, comenzamos con un caso que ya está publicado, que consiste en concatenar 2n con 2n-1 y también 2n con 2n+1, y averiguar si ambas concatenaciones constituyen un par de primos gemelos. Como el proceso es rápido, no nos preocuparemos de que el número intermedio sea múltiplo de 6.

La siguiente sencilla función usa la concatenación de Excel, que consiste simplemente en el uso del signo "+" entre cadenas de texto:

Function concat_gem$(n)
Dim a, b
Dim s$

s = ""
'Las siguientes líneas concatenan las expresiones numéricas en modo texto, para después volver a modo numérico con la función VAL. Esas líneas se cambiarán cuando se desee otra concatenación.

a = Val(Str$(2 * n) + Str$(2 * n - 1))
b = Val(Str$(2 * n) + Str$(2 * n + 1))

If esprimo(a) And esprimo(b) Then s = Str$(a) + ", " + Str$(b) Else s = "NO" ‘ Si ambas concatenaciones producen primos gemelos, se comunica mediante la variable **s**.

concat_gem = s

End Function

Con esta función reproducimos la lista publicada en https://oeis.org/A102478

Número N	Primos gemelos
21	4241, 4243
39	7877, 7879
51	102101, 102103
54	108107, 108109
90	180179, 180181
96	192191, 192193
135	270269, 270271
150	300299, 300301
156	312311, 312313
165	330329, 330331
171	342341, 342343
195	390389, 390391
210	420419, 420421
261	522521, 522523

No abarcaríamos aquí las posibilidades de concatenaciones curiosas sobre este tema. La siguiente tabla recoge algunos primos gemelos de cinco cifras provenientes de concatenar un número consigo mismo:

Número N	Primos gemelos
22620	2262022621, 2262022619
22650	2265022651, 2265022649
22932	2293222933, 2293222931
23082	2308223083, 2308223081

Con ello los gemelos se forman con el número, su siguiente y su anterior.

Si usamos el lenguaje PARI podemos intentar este código para el mismo caso, fácilmente adaptable a otros:

***concat_gem(n)=my(a,b,v=[0,0]);a=eval(concat(Str(n)
,Str(n-
1)));b=eval(concat(Str(n),Str(n+1)));if(isprime(a)&&is
prime(b),v=[a,b];print1(v));v
for(i=1,1000,if(concat_gem(i)<>[0,0],print(" ",i)))***

Esta versión nos daría los primeros casos

:

```
[4241, 4243] 42
[7877, 7879] 78
[102101, 102103] 102
[108107, 108109] 108
[180179, 180181] 180
[192191, 192193] 192
[270269, 270271] 270
[300299, 300301] 300
[312311, 312313] 312
[330329, 330331] 330
[342341, 342343] 342
[390389, 390391] 390
[420419, 420421] 420
[522521, 522523] 522
[540539, 540541] 540
[612611, 612613] 612
[660659, 660661] 660
[822821, 822823] 822
[840839, 840841] 840
[882881, 882883] 882
```

Por la forma de programarlo, el valor de N aparece al final.Podemos seguir jugando. En los siguientes hemos concatenado N con su simétrico en cifras:

Número N	Primos gemelos
2493	24933943, 24933941
2568	25688653, 25688651
2577	25777753, 25777751
2598	25988953, 25988951
2649	26499463, 26499461

Con estos ejemplos se adivina que quedan muchas posibilidades por explorar en la concatenación, pero serían necesarias otras funciones sobre cifras.

Intercalando funciones

Podemos buscar una forma de encontrar primos gemelos a partir de N, pero intercalando funciones. Por ejemplo, buscando SIGMA(N)±1:

Número N	SIGMA(N)	SIGMA(N)-1	SIGMA(N)+1
3	4	3	5
5	6	5	7
6	12	11	13
10	18	17	19
11	12	11	13
17	18	17	19
20	42	41	43
24	60	59	61
26	42	41	43
29	30	29	31
30	72	71	73

Observamos que son abundantes los casos encontrados. Tienes más en https://oeis.org/A072282

Un caso curioso es aquel en el que N es primo, pues entonces SIGMA(N)=N+1, con lo que un posible primo gemelo es el mismo N, como podemos observar en la tabla con 5, 11, 17 y 29. Todos ellos tienen en común que SIGMA es múltiplo de 6.

Si exigimos que N no sea primo, nos quedan

Número N	SIGMA(N)	SIGMA(N)-1	SIGMA(N)+1
6	12	11	13
10	18	17	19
20	42	41	43
24	60	59	61
26	42	41	43
30	72	71	73
38	60	59	61
46	72	71	73
51	72	71	73
55	72	71	73
85	108	107	109
88	180	179	181

Estos resultados figuran en https://oeis.org/A068017. Es fácil razonar que son aquellos casos en los que SIGMA(N) es múltiplo de 6. Como un valor de SIGMA puede ser compartido por varios números, es lógico que el par (71, 73) aparezca repetido.

Objetivos dobles

Podríamos pretender encontrar un par de primos gemelos, pero que una expresión creada a partir de ellos también constituyera otro par de primos gemelos. Un ejemplo sería que n+1 y n-1 formaran par y también fueran gemelos n^2+5 y n^2+7, por ejemplo (buscamos en lo posible centrarnos en múltiplos de 6):

Número N	N-1	N+1	N^2+5	N^2+7
6	5	7	41	43
12	11	13	149	151
2592	2591	2593	6718469	6718471
4128	4127	4129	17040389	17040391
10428	10427	10429	108743189	108743191
11832	11831	11833	139996229	139996231
15888	15887	15889	252428549	252428551

Con estos ejemplos nos podemos dar una idea de búsquedas diferentes que se pueden emprender en talleres de Matemáticas.

REPITUNOS Y PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Existen números, como el 31, que equivalen simultáneamente a dos o más sumas distintas de las primeras potencias de un número natural. En este caso son:

31=1+2+4+8+16
31=1+5+25

Estas igualdades se pueden interpretar como que 31 tiene como expresión un “repituno” en las bases 2 y 5: 31(10 = 11111(2 = 111(5

Ya he usado estos números en entradas antiguas de mi blog, pero hoy buscaremos los que, como el 31, presentan esta propiedad en dos o más bases distintas.

Equivalencia de sumas de primeras potencias

Este tema se puede tratar de forma algebraica, pero parece preferible la algorítmica, porque además de descubrir qué números son de este tipo se pueden contar las sumas a las que equivalen. Usaré esta función:

Function essumapot$(n) ‘Función string
Dim tope, i, k, m, r
Dim s$

tope = Int((Sqr(4 * n - 3) - 1) / 2) ‘Este tope se basa en el caso a=2
r = 0 ‘Número de soluciones
For i = 2 To tope ‘Posibles bases de potencias
k = 1 ‘Primer exponente a probar
m = 1 + I ‘Primera suma de potencias
Do Until m > n
k = k + 1 ‘Siguiente exponente
m = m + potencia(i, k) ‘Siguiente suma

If m = n Then s = s + " # " + ajusta(i) + ", " + ajusta(k): r = r + 1 ‘Hay una solución
Loop
Next i
If s <> "" Then s = ajusta(r) + " ## " + s ‘Se construye la solución
essumapot = s
End Function

Con esta función se determina qué números son “repitunos” en alguna base y de cuántas formas. Los primeros detectados son estos:

Número	Bases y último exponente
7	1 ## # 2, 2
13	1 ## # 3, 2
15	1 ## # 2, 3
21	1 ## # 4, 2
31	2 ## # 2, 4 # 5, 2
40	1 ## # 3, 3
43	1 ## # 6, 2
57	1 ## # 7, 2
63	1 ## # 2, 5
73	1 ## # 8, 2
85	1 ## # 4, 3
91	1 ## # 9, 2

Se observa que el 31 es suma de potencias de 2 hasta la cuarta y del 5 hasta el cuadrado, como ya sabíamos. La inclusión del número de soluciones al principio nos facilitará las búsquedas.

Están publicados en https://oeis.org/A053696

Todos son “números brasileños”, como puedes comprobar en la entrada de mi blog dedicada a esos primos.

https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=brasile%C3%B1os

Lo que nos interesa aquí es la existencia de soluciones múltiples, como en el caso del 31. Bastará buscar las soluciones en las que el primer carácter tenga un valor superior a 1.

Tal como se podía sospechar por anteriores trabajos sobre temas afines, sólo se encuentran dos soluciones, 31 y 8191, ambos primos de Mersenne (31=2^5-1 y 8191=2^13-1. No existen más entre los números menores de 2^44.

Número	Bases y último exponente
31	2 ## # 2, 4 # 5, 2
8191	2 ## # 2, 12 # 90, 2

Puedes ampliar el tema en https://oeis.org/A119598

Progresiones geométricas múltiples

Estos dos números, 31 y 8191 pueden sea base para encontrar los primeros elementos de progresiones geométricas con el mismo término inicial. Basta elegir un múltiplo de cualquiera de ellos dos.

Por ejemplo, elegimos 31 por 13, es decir, 403. Tomamos 13 como término inicial de una progresión geométrica, y desarrollamos 31 de dos formas distintas, como ya sabemos:

403=13*31=13*(1+2+4+8+16)=13+26+52+104+208
403=13*31=13*(1+5+25)=13+65+325

Hemos expresado el 403 como suma de dos progresiones geométricas. Podemos efectuar idénticas operaciones con múltiplos de 8191. Por tanto:

Existen infinitos números naturales que se pueden expresar como dos sumas distintas de progresiones geométricas con el mismo término inicial.

Coincidencia de dos progresiones en general

Si eliminamos la condición de igualdad del término inicial en las progresiones geométricas, el problema sería totalmente distinto, con muchos más parámetros a considerar. En mis cálculos diarios encuentro muchos casos de varias progresiones geométricas que coinciden en su suma. Si quieres experimentar, esta función detecta estas progresiones para razones entre 2 y 9

Function pg$(n) 'Es suma de una o más progresiones geométricas
Dim i, j, a, s
Dim ss$

ss = "" ‘Contenedor de soluciones
For i = 2 To 9 ‘Razón de la progresión
j = 1
s = 1 ‘Inicios
While j < 10 And s <= n
s = s + i ^ j ‘Se suma la progresión
a = n / s ‘Posible inicio de la progresión
If a = Int(a) And j > 1 Then ss = ss + "##" + Str$(j + 1) + " sumandos " + Str$(i) + " razón " + Str$(a) + " Inicio"
j = j + 1 ‘Número de sumandos
Wend
Next i
pg = ss
End Function

Con él se pueden detectar sumas múltiples para cualquier número, si es que existen. Por ejemplo, el número 1001 es suma de tres progresiones geométricas distintas:

1001## 3 sumandos 2 razón 143 Inicio## 3 sumandos 3 razón 77 Inicio## 3 sumandos 9 razón 11 Inicio

En efecto:

1001=143+143*2+143*4

1001=77+77*3+77*9

1001=11+11*9+11*81

Es claro que cambia el término inicial en cada suma.

ALGORITMOS Y BÚSQUEDAS

ALGORITMOS CODICIOSOS PARA SUMAS

Este tipo de algoritmo recibe muchos nombres distintos: voraz, goloso, devorador, codicioso, greedy,…Se basa en la estrategia de elegir en cada paso la solución óptima del problema, esperando que, al reiterar esta estrategia, se construya una solución óptima global. Para conseguirlo, no da marcha atrás en las decisiones si no se llega a un óptimo. Esto lo hace más rápido, pero más inseguro, porque no hay garantía de consecución de objetivos.

Ha de ser posible la elección óptima en cada paso, como en el caso de descomposición en suma de factoriales, que siempre se puede conocer el mayor factorial menor o igual que el número dado.

Aquí estudiaremos varios ejemplos de descomposición de un número entero positivo en sumandos de un cierto tipo. Un ejemplo claro es el de encontrar una suma de factoriales cuyo resultado sea un número dado. Este algoritmo lo llevamos usando años en nuestras publicaciones, porque es rápido, aunque en ocasiones produce soluciones con un número alto de sumandos.

Lo vemos con un ejemplo elegido al azar, el número 1329, al que queremos convertir en una suma de factoriales lo menos extensa posible.

Es claro que si no deseamos muchos sumandos, vayamos eligiendo los factoriales mayores posibles para construir la suma. Podríamos efectuarlo así:

1329-720=609
609-120=489
489-120=369
369-120=249
249-120=129
129-120=9
9-6=3
3-2=1
1-1=0

Con ello, hemos descompuesto 1329 en suma de factoriales:

1329=720+120+120+120+120+120+6+2+1

Basta analizar la solución para darnos cuenta de que no podemos esperar demasiado de este algoritmo, pero al contar con el 1 entre los factoriales, siempre dará solución.

Un caso similar es el de descomponer una fracción en fracciones egipcias (del tipo 1/p). Bastará ir buscando en el numerador el mayor divisor posible del denominador (suponemos fracción irreducible). Por ejemplo, la fracción 17/24 se puede descomponer de esta forma, eligiendo en el numerador sucesivamente los mayores divisores de 24:

17/24=(12+4+1)/24=1/2+1/6+1/24

Los dos ejemplos los hemos desarrollado de forma manual, pero es claro que se podrá automatizar fácilmente.

Para planificar los algoritmos, distinguiremos dos variantes:

La primera requerirá que los sumandos pertenezcan a un mismo tipo, como los factoriales de más arriba, o, por ejemplo el problema de descomponer un número en sumandos triangulares.

La segunda, muy parecida a la primera, deberá elegir los sumandos dentro de una lista, como en el problema de las monedas, en el que una cantidad hay que traducirla a un conjunto de monedas con distintos valores.

En realidad, el ejemplo de los factoriales se puede considerar de este segundo tipo, por su escasez.

Sumandos del mismo tipo

Si el sumando óptimo lo debemos elegir dentro de un tipo, como primos, cuadrados o pentagonales, podremos usar un sencillo algoritmo que el autor usa con frecuencia. Tendría esta estructura, en la que, para un número **n** y un tipo dado, devuelve la suma más adecuada que un algoritmo codicioso puede dar

Function codicioso$(n)
Dim c$
Dim i, r, s,suma
Dim vale As Boolean

suma = 0 'Irá sumando progresivamente
i = n ‘Recorrerá los posibles sumandos
r = n ‘Posible sumando válido
c = "" ’Recogerá soluciones
While i > 0 ‘Recorremos de mayor a menor, para optimizar
vale = False ‘Aún no hay solución
if CONDICION then vale=true ‘La CONDICIÓN dependerá del tipo de sumandos
If vale Then
c$ = c$ + Str$(i) + " "
suma=suma+i
‘Si existe solución, se resta y se incorpora a la suma
r = r - i: i = r

Else
'Si no existe solución, se sigue buscando el óptimo, descendiendo
i = i – 1
end if
Wend
If suma=n then codicioso = c else codicioso="NO"
End Function

Por ejemplo, si la condición es la de ser primo, usaríamos la función ESPRIMO, fácilmente localizable en nuestro blog. En la tabla siguiente se recogen las sumas en números primos, si es que son posibles, para los primeros números de tres cifras:

No primos	Suma de primos
100	97 3
105	103 2
106	103 3
111	109 2
112	109 3
115	113 2
116	113 3
118	113 5
120	113 7
122	113 7 2
123	113 7 3
124	113 11
126	113 13
129	127 2
130	127 3
133	131 2
134	131 3
136	131 5

Este ejemplo es muy interesante, porque ilustra las limitaciones de los algoritmos codiciosos. En primer lugar, sólo figuran los números en los que, al finalizar el algoritmo, la suma coincide con ellos, sin dejar ningún residuo no primo. Por ejemplo, el 15 daría como resultado 7+7, y sobraría 1, porque no es primo. En segundo lugar, al no explorar todas las posibilidades, ignora las sumas de Golbach para números pares, porque se detiene antes de llegar a los dos primos que predice la conjetura. Por ejemplo, el número 104, que no figura en la tabla, presenta varias descomposiciones en sumas de dos primos, y el algoritmo codicioso las ignora:

X1	X2
3	101
7	97
31	73
37	67
43	61

No obstante, en sumados de algunos tipos, el algoritmo funciona relativamente bien. Por ejemplo, cuando el 1 pertenece a ese tipo, como ocurriría en los cuadrados, triangulares, palindrómicos o de Fibonacci, la descomposición siempre será exitosa, aunque, quizás, algo larga. También suele funcionar bien con primos y cuadrados de primos, y con oblongos si el número es par. El siguiente ejemplo contiene resultados de cuadrados de primos entre 375 y 400:

Número	Sumandos cuadrados de primos
378	361 9 4 4
379	361 9 9
383	361 9 9 4
386	361 25
390	361 25 4
394	361 25 4 4
395	361 25 9
399	361 25 9 4

En este caso están condicionados por el cuadrado de 19, 361. En general suelen aparecer los ejemplos con una cierta rapidez.

Un ejemplo clásico, y que publicamos a veces, es el de la representación de Zeckendorf, en la que todo número es suma de elementos de la sucesión de Fibonacci (ver, por ejemplo, nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/09/representacion-de-zeckendorf.html).

En ella el algoritmo indicado es el codicioso. Hemos aplicado la función que presentamos más arriba a un conjunto de números consecutivos, y observamos que todos están representados así:

Número	Sumandos números de Fibonacci
25520	17711 6765 987 55 2
25521	17711 6765 987 55 3
25522	17711 6765 987 55 3 1
25523	17711 6765 987 55 5
25524	17711 6765 987 55 5 1
25525	17711 6765 987 55 5 2
25526	17711 6765 987 55 8
25527	17711 6765 987 55 8 1
25528	17711 6765 987 55 8 2
25529	17711 6765 987 55 8 3
25530	17711 6765 987 55 8 3 1

Puedes decubrir aspectos muy interesantes sobre esta descomposición en

https://en.wikipedia.org/wiki/Zeckendorf%27s_theorem

Sumandos dentro de una lista

Este otro tipo de descomposición en sumandos que se adapta bien a los algoritmos codiciosos, es el de expresar un número como suma de números ya fijados en una lista. De este tipo es el problema de las monedas, en el que hay que encontrar la forma de pagar una cantidad si se dispone de un número suficiente de monedas de varias clases.

En este blog hemos tratado este tema y otros similares, como el de los números McNugget y la representación de un número respecto a una lista:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html

https://hojaynumeros.blogspot.com/2012/11/descomposicion-de-un-numero-segun-una.html

Por ejemplo, si nos piden representar el número 80 mediante los números de la lista 2, 4, 14, 32, procederíamos como en los problemas anteriores, restando de 80 el número mayor posible cada vez, y usando repeticiones:

48=80-32; 16=38-32; 16=14+2

Luego 80=32+32+14+2

No hemos necesitado el sumando 4.

El procedimiento usado para sumandos del mismo tipo es válido aquí, pero deberemos iniciar el algoritmo declarando los elementos de la lista según un vector.
Algo similar usa las herramientas que ofrecemos en hojamat.es:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#reprenum

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#mcnugget

Aquí seguiremos usando una función como en el primer caso, pero declarando los sumandos. Los introduciremos como componentes de un vector. Por ejemplo, en el siguiente listado se pretende encontrar qué monedas y billetes de euro podemos usar en una compra ordinaria, sin céntimos, y con un tope del billete de 50€:

Function codicioso3$(n)
Dim c$
Dim i, j, r, s, suma, tope
Dim v(20) ‘Usamos un vector de 20 componentes

v(1) = 1: v(2) = 2: v(3) = 5: v(4) = 10: v(5) = 20: v(6) = 50
tope = 6 ‘Determinamos seis monedas y billetes

‘El resto del listado es muy similar al del anterior tipo
suma = 0 'Irá sumando progresivamente
i = n 'Recorrerá los posibles sumandos
r = n 'Posible sumando válido
c = "" 'Recogerá soluciones
j = tope
While i > 0 And j > 0 'Recorremos de mayor a menor, para optimizar
If i >= v(j) Then
c$ = c$ + Str$(v(j)) + " "’Aquí sumamos componentes del vector
suma = suma + v(j)

i = i - v(j)
Else
'Si no existe solución, se sigue buscando el óptimo, descendiendo
j = j - 1
End If
Wend
If suma = n Then codicioso3 = c Else codicioso3 = "NO"
End Function

Como ejemplo, insertamos una tabla con algunas cantidades en euros y su descomposición en monedas y billetes:

Cantidad	Monedas y billetes
37	20 10 5 2
56	50 5 1
82	50 20 10 2
107	50 50 5 2
176	50 50 50 20 5 1
228	50 50 50 50 20 5 2 1

Hay que volver a advertir que estas soluciones no han de ser ni únicas ni óptimas.

SUMAS DE POTENCIAS CONSECUTIVAS

Existen fórmulas para sumar las primeras potencias de números naturales. Son populares las de la suma de potencias con los primeros exponentes. En esta captura de Excel figuran algunas:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

Aquí deseamos usar potencias consecutivas, pero que no comiencen necesariamente por la unidad. Si se usa la fórmula correspondiente, el problema se resuelve restando. Por ejemplo, una suma de potencias entre $\mathbf{a^k}$ y $\mathbf{b^k}$ se encontraría restando la fórmula correspondiente a **b** y la de **a-1**, para que se incluya también **a**. No será ese el camino que se tome aquí, porque deseamos encontrar la suma con un algoritmo que sirva para todos los exponentes. No obstante, dejamos abierta la posibilidad de comprobar algún cálculo.

Nuestro objetivo es más ambicioso, y es encontrar una suma de potencias consecutivas que sea equivalente a otra potencia dada, como en los ejemplos que siguen:

47^3=22^2+23^2+24^2+…+67^2+68^2
6^3=3^3+4^3+5^3
20^3=11^3+12^3+13^3+14^3

Deberemos fijar dos parámetros, el exponente de la potencia resultado de la suma, sea, por ejemplo **k**, y el de los sumandos, que es igual para todos, y llamaremos **h**. De esa forma también abarcamos la posibilidad de que el resultado no sea una potencia, salvo la trivial de exponente unidad:

294 =7^2+8^2+9^2+10^2 (k=1)

A la inversa, deberemos poder descomponer una potencia en suma de números naturales consecutivos, como potencias triviales:

12^5=82943+82944+82945 (h=1)

En la siguiente función usamos tres variables distintas, e integramos los resultados en modo texto:
n: base del total de la suma
k: exponente de n
h: exponente de los sumandos
m: total de sumandos en cada solución. Esta es útil para búsquedas.

Function sumapoteconsec$(n, k, h)
Dim p, s, i, j,m
Dim t$

t = "" 'Texto vacío para incluir soluciones
p = n ^ k 'Resultado deseado para la suma
For i = 1 To (n – 2)^(k/h) 'Tope de búsqueda de sumandos
s = i ^ h 'Primer sumando potencia
j = i
While s <= p
If s = p And j > i Then m=j-i+1:t = t + " #" + ajusta(m)+": "+Str$(i) + " a " + Str$(j)'Solución con número de sumandos, inicio y final
j = j + 1
s = s + j ^ h 'Se acumula la suma
Wend
Next i
If t = "" Then t = "NO"
sumapoteconsec = t
End Function

Vemos algunos ejemplos obtenidos con esta función:

SUMAPOTECONSEC(30;1;1)= #5: 4 a 8 #4: 6 a 9 #3: 9 a 11

Significa que el número 30 (elevado a la unidad) es suma de números consecutivos de tres formas diferentes:

#5: 4 a 8 : 30=4+5+6+7+8
#4: 6 a 9 : 30=6+7+8+9
#3: 9 a 11 : 30=9+10+11

SUMAPOTECONSEC(990;1;2)= #5: 12 a 16

El número 990 es igual a la suma de cinco cuadrados:
$990=12^2+13^2+14^2+15^2+16^2$

Comprobamos el primer ejemplo de este texto:
SUMAPOTECONSEC(47;3;2)= #47: 22 a 68

Equivale a lo que ya sabíamos:
47^3=22^2+23^2+24^2+…+67^2+68^2
El cubo de 47 es suma de 47 cuadrados consecutivos.

Podríamos comprobarlo en una hoja de cálculo como indicamos en los primeros párrafos, restando la fórmula de la suma de cuadrados en 68 y en 21:

(2*68^3+3*68^2+68)/6-
(2*21^3+3*21^2+21)/6=103823=47^3

Versión en PARI

Para quienes deseen llegar a números grandes, se ofrece aquí una alternativa en PARI:

```
smpc(n,k,h)={my(v=[0,0],p=n^k,s,i,j);for(i=1,(n-2)^(k/h),s=i^h;j=i;while(s<=p,if(s==p&&j>i,v=[i,j];print(v));j+=1;s=s+j^h));v}
print(smpc(540,1,1))
```

Imprime las soluciones parciales y aparece repetida la final. Se podría corregir este detalle, pero al algoritmo va rápido y no merece la pena suprimirlo.

Solución para smpc(540,1,1)

```
[7, 33]
[11, 34]
[29, 43]
[56, 64]
[64, 71]
[106, 110]
[179, 181]
[179, 181]
(18:39) gp >
```

Solución para smpc(47,3,2), que fue nuestro primer ejemplo:

```
[22, 68]
[22, 68]
(19:06) gp >
```

Confirma que el cubo de 47 es la suma de los cuadrados que van del 22^2 a 68^2.

Un ejemplo para confirmar:

smpc(29008,1,5)

¿Por qué ese número?

Vemos la solución:

```
[1, 7]
[1, 7]
(19:18) gp >
```

Resulta que es la suma de las primeras siete potencias quintas. Es así porque el número 29008 lo hemos obtenido aplicando la fórmula presentada al principio: S=(2*7^6+6*7^5+5*7^4-7^2)/12=29008.

Ejemplos concretos

Cubos que son suma de cubos
Acudimos a PARI, que es más rápido, para comprobar que 1155 posee esa propiedad:

k=1155;print(smpc(k,3,3))

Nos da que 1155^3 es igual a la suma de todos los cubos comprendidos entre 291^3 y 339^3

```
[291, 339]
[291, 339]
(18:43) gp >
```

(Consultar https://oeis.org/A097811)

Este resultado no se podría haber descubierto razonablemente con cálculo manual. Lo hemos comprobado con hoja de cálculo.

Cuadrados que son suma de cubos

Al efectuar una búsqueda de todos los casos, aparecen, entre otros, los números triangulares, por la conocida fórmula

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2$$

Si buscamos los ejemplos de esta propiedad, encontraremos todos los números triangulares ordenados por su orden. En la siguiente imagen descubrimos que aparecen otros, como el 204, que no son triangulares. Son aquellos en los que la suma de cubos no comienza en 1^3:

Número N	¿Es triangular?	Orden del triangular
3	VERDADERO	2
6	VERDADERO	3
10	VERDADERO	4
15	VERDADERO	5
21	VERDADERO	6
28	VERDADERO	7
36	VERDADERO	8
45	VERDADERO	9
55	VERDADERO	10
66	VERDADERO	11
78	VERDADERO	12
91	VERDADERO	13
105	VERDADERO	14
120	VERDADERO	15
136	VERDADERO	16
153	VERDADERO	17
171	VERDADERO	18
190	VERDADERO	19
204	FALSO	0
210	VERDADERO	20
231	VERDADERO	21
253	VERDADERO	22
276	VERDADERO	23

Podemos crear un listado con los números cuyo cuadrado es suma de cubos pero que no son triangulares:

Número N	¿Es triangular?	Suma de cubos
204	FALSO	#3: 23 a 25
312	FALSO	#12: 14 a 25
315	FALSO	#5: 25 a 29
323	FALSO	#17: 9 a 25
504	FALSO	#8: 28 a 35
588	FALSO	#21: 14 a 34
720	FALSO	#15: 25 a 39
2079	FALSO	#33: 33 a 65
2170	FALSO	#5: 96 a 100
2940	FALSO	#5: 118 a 122

Como era de esperar, ninguna suma de cubos comienza con 1^3

Cubos que son suma de cuadrados

Este ejemplo es bastante conocido, pero con nuestras funciones podemos encontrar otros.

47^3=22^2+23^2+…+68^2

13156^3=2277044900416 es la suma de todos los cuadrados comprendidos entre 17354^2 y 22930^2

```
[17354, 22930]
[17354, 22930]
(19:24) gp >
```

Podemos usar la fórmula para sumar cuadrados, como comprobación:

22930*22931*(22930*2+1)/6-
17353*17354*(17353*2+1)/6

```
? a=22930*22931*(22930*2+1)/6-17353*17354*(17353*2+1)/6
print(a)
%11 = 2277044900416
2277044900416
```

Otras igualdades

Podemos usar lo aprendido para encontrar más igualdades en las que una potencia sea igual a la suma de varias otras potencias consecutivas. Esta es una muestra de lo encontrado con los primeros números como bases.

6^3=3^3+4^3+5^3
6^4=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3
13^4=119^2+120^2
20^3=11^3+12^3+13^3+14^3

TRES POTENCIAS ENTERAS NO NEGATIVAS

En el desarrollo de mis cálculos sobre el año 2025 llegué a esta identidad:
$2025^2=36^4+18^5+9^6$

Al releerla se me ocurrió averiguar qué números admiten una descomposición en tres potencias enteras no negativas (admitiendo el 1 y el 0) y cuáles no. Por ejemplo, 72 se puede descomponer de seis formas:
$72=2^5+2^5+2^3=6^2+3^3+3^2=6^2+2^5+2^2=6^2+6^2+0^1=2^6+2^2+2^2=2^6+2^3+0^1$

Es evidente que el cero figura para poder considerar también las sumas de dos potencias, como $72=2^6+2^3$, o de una para los números que sean potencias perfectas.
Otros números, como 7 y 23 no admiten esta descomposición. En unas primeras búsquedas se puede

sospechar que estos números son más escasos. Lo iremos viendo.

Búsqueda de soluciones

Esta búsqueda no supone ninguna complicación. Se resuelve con dos bucles, uno para la primera potencia y otro para la segunda, porque la tercera se encuentra restando.

Hemos usado una función para Excel, siguiendo el espíritu de este blog, pero usa una función propia, ESPOTENCIA

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/04/numeros-consecutivos-con-una-suma-del.html).

También sustituye la función STR$ por la función AJUSTA, que funciona mejor. No obstante se incluirá su código aquí, porque a continuación se traducirá a PARI, con lo que todos los lectores podrán experimentar con ella.

Function trespotencias$(n)
Dim i, j, k, p1, p2, p3, m
Dim s$

s = "" 'Contenedor de la solución

m = 0 ’Contador de soluciones
For i = 0 To n ‘Bucle para la primera potencia
p1 = espotencia(i) ‘Devuelve el exponente
If p1 > 0 Then
For j = 0 To i ‘Bucle para la segunda potencia
p2 = espotencia(j)
If p2 > 0 Then
k = n - i – j ‘Tercera potencia
p3 = espotencia(k)
If k <= j And p3 > 0 And k >= 0 Then
‘Los tres sumandos son potencias. Lo que sigue construye la solución
m = m + 1
s = s + " ## " + ajusta(Int(i ^ (1 / p1) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p1) + "+"
s = s + ajusta(Int(j ^ (1 / p2) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p2) + "+"
s = s + ajusta(Int(k ^ (1 / p3) + 0.000001)) + "^" + ajusta(p3)
End If
End If
Next j
End If
Next i
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " : " + s
trespotencias = s
End Function

Con esta función podemos descomponer los primeros números:

Número N	Soluciones
1	1 : ## 1^1+0^1+0^1
2	1 : ## 1^1+1^1+0^1
3	1 : ## 1^1+1^1+1^1
4	1 : ## 2^2+0^1+0^1
5	1 : ## 2^2+1^1+0^1
6	1 : ## 2^2+1^1+1^1
7	NO
8	2 : ## 2^2+2^2+0^1 ## 2^3+0^1+0^1
9	3 : ## 2^2+2^2+1^1 ## 2^3+1^1+0^1 ## 3^2+0^1+0^1
10	2 : ## 2^3+1^1+1^1 ## 3^2+1^1+0^1

Observamos que el 7 no admite esta descomposición. Yal como el autor esperaba, al llegar a números mayores se incrementa el número de soluciones:

Número N	Soluciones
80	5 : ## 2^5+2^5+2^4 ## 6^2+6^2+2^3 ## 7^2+3^3+2^2 ## 2^6+2^3+2^3 ## 2^6+2^4+0^1
81	7 : ## 3^3+3^3+3^3 ## 6^2+6^2+3^2 ## 7^2+2^4+2^4 ## 7^2+2^5+0^1 ## 2^6+3^2+2^3 ## 2^6+2^4+1^1 ## 3^4+0^1+0^1
82	5 : ## 2^5+5^2+5^2 ## 7^2+5^2+2^3 ## 7^2+2^5+1^1 ## 2^6+3^2+3^2 ## 3^4+1^1+0^1
83	2 : ## 7^2+5^2+3^2 ## 3^4+1^1+1^1
84	4 : ## 2^5+3^3+5^2 ## 6^2+2^5+2^4 ## 7^2+3^3+2^3 ## 2^6+2^4+2^2
85	4 : ## 7^2+3^3+3^2 ## 7^2+2^5+2^2 ## 7^2+6^2+0^1 ## 3^4+2^2+0^1
86	4 : ## 2^5+3^3+3^3 ## 6^2+5^2+5^2 ## 7^2+6^2+1^1 ## 3^4+2^2+1^1
87	NO
88	3 : ## 6^2+3^3+5^2 ## 6^2+6^2+2^4 ## 2^6+2^4+2^3
89	7 : ## 2^5+2^5+5^2 ## 7^2+2^5+2^3 ## 7^2+6^2+2^2 ## 2^6+2^4+3^2 ## 2^6+5^2+0^1 ## 3^4+2^2+2^2 ## 3^4+2^3+0^1

Volvemos a encontrar un número que no presenta soluciones, el 87. De hecho, experimentalmente van desapareciendo estos números sin solución. Estos son los primeros:

Número N	
7	NO
15	NO
23	NO
87	NO
111	NO
119	NO
167	NO
335	NO

Están publicados en https://oeis.org/A113505 y al llegar al número 26375 se puede conjeturar que es posible que no aparezcan más. Suele ocurrir en casos similares.

A113505
Numbers not the sum of at most three perfect powers (A001597).
7, 15, 23, 87, 111, 119, 167, 335, 1391, 1455, 1607, 1679, 1991, 25887, 26375
a(16), if it exists, is larger than 10^8. - Giovanni Resta, May 07 2017

Para los lectores que deseen experimentar, se incluye nuestra versión en PARI.

```
u=100;for(i=0,u,if(ispower(i)||i<2,for(j=0,i,if((ispower(j)||j<2)&&(ispower(u-i-j)||u-i-j<2)&&j>u-i-j&&u-i-j>=0,print(i,", ",j,", ",u-i-j)))))
```

La variable **u** se rellena con el número a descomponer, en el ejemplo, 100

```
(17:55) gp > \r trespotencias.txt
64, 27, 9
64, 32, 4
64, 36, 0
(17:57) gp >
```

Observamos que admite tres sumas con sumandos que son potencias.

La siguiente imagen recoge parte del resultado para el año 2025:

```
(18:03) gp > \r trespotencias.txt
784, 729, 512
841, 784, 400
841, 841, 343
900, 900, 225
1000, 625, 400
1000, 900, 125
1000, 961, 64
1000, 1000, 25
1024, 1000, 1
1089, 900, 36
1225, 784, 16
1296, 729, 0
1369, 400, 256
1369, 512, 144
1600, 256, 169
1600, 361, 64
1600, 400, 25
1681, 216, 128
1681, 343, 1
```

La abundancia de resultados reafirma la sospecha de que los elementos sin solución serán limitados.

Estudio con nuestra herramienta Cartesius

Esta hoja de Excel, “Cartesius”, permite combinar muchas posibilidades, y resulta adecuada para esta cuestión. Se puede programar con estas condiciones:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ **(no dejes filas en blanco)**
xtotal=3
xt=0..2025
xt=filtro(potencia)
suma=2025
creciente

Se interpretan como que buscamos tríos de potencias con suma 2025. Se consigue el resultado siguiente, compuesto por 28 resultados:

X1	X2	X3
0	0	2025
0	729	1296
1	343	1681
1	1000	1024
8	81	1936
8	289	1728
16	784	1225
25	64	1936
25	400	1600
25	1000	1000
32	144	1849
36	225	1764
36	900	1089
64	361	1600
64	961	1000
81	216	1728
125	900	1000
128	169	1728
128	216	1681
144	512	1369
169	256	1600
225	900	900
256	400	1369
343	841	841
400	400	1225
400	625	1000
400	784	841
512	729	784

Tal como se sugirió al principio, esta búsqueda no es complicada, y produce un incremento tan grande de resultados que es razonable la conjetura de que a partir de cierto número, todos los enteros presentarán esta descomposición.

PALÍNDROMOS TRIPLES

El día 26 de marzo de 2021 publiqué esta igualdad de tipo palindrómico:

26321=16*5*61+16561+16*5*61
La triple repetición simétrica de las cifras 16561 es muy atractiva, e invita a descubrir casos similares. En principio se pueden considerar dos variantes de la cuestión. La primera seguiría el modelo del ejemplo, con un número impar de cifras y un capicúa central. Como ocurre en 125=1*2*1+121+1*2*1. La segunda consistiría en un esquema que prescinda de ese elemento central en cada sumando, como es el caso de 261=9*9+99+9*9.

La construcción de una lista con los primeros números que se siguen un esquema de este tipo no es difícil. La lista de los primeros del tipo

AB*C*BA+ABCBA+AB*C*BA es la siguiente:

Número N	Soluciones
13229	## 12*2*21+12221+12*2*21
13833	## 12*3*21+12321+12*3*21
14437	## 12*4*21+12421+12*4*21
14843	## 13*2*31+13231+13*2*31
15041	## 12*5*21+12521+12*5*21
15645	## 12*6*21+12621+12*6*21
15749	## 13*3*31+13331+13*3*31
16249	## 12*7*21+12721+12*7*21
16537	## 14*2*41+14241+14*2*41
16655	## 13*4*31+13431+13*4*31
16853	## 12*8*21+12821+12*8*21
17457	## 12*9*21+12921+12*9*21
17561	## 13*5*31+13531+13*5*31
17785	## 14*3*41+14341+14*3*41
18311	## 15*2*51+15251+15*2*51
18467	## 13*6*31+13631+13*6*31
19033	## 14*4*41+14441+14*4*41
19373	## 13*7*31+13731+13*7*31
19941	## 15*3*51+15351+15*3*51

Con paciencia y una calculadora se puede ir construyendo. Lo interesante es descubrir soluciones para otro rango distinto, en el que el orden natural no ayude mucho. La siguiente tabla, a partir del número 50000, demuestra que los resultados no son ya tan previsibles:

Número N	Soluciones
50293	## 35*4*53+35453+35*4*53
50488	## 42*4*24+42424+42*4*24
50836	## 29*4*92+29492+29*4*92
50899	## 38*2*83+38283+38*2*83
50998	## 41*8*14+41814+41*8*14
51000	## 27*6*72+27672+27*6*72
51113	## 19*9*91+19991+19*9*91
51205	## 50*2*5+5025+50*2*5
51542	## 28*5*82+28582+28*5*82
51805	## 50*3*5+5035+50*3*5
52106	## 43*3*34+43334+43*3*34
52187	## 34*6*43+34643+34*6*43
52246	## 41*9*14+41914+41*9*14
52405	## 50*4*5+5045+50*4*5
52604	## 42*5*24+42524+42*5*24
52654	## 26*8*62+26862+26*8*62

Observamos que el algoritmo no mantiene el cero a la izquierda en 52405, porque Excel lo suprime por defecto. Es preferible corregirlo manualmente a tenerlo previsto en la programación. Es el precio por usar hojas de cálculo.

Función "PALINTRI"

Para construir un algoritmo adaptado a nuestra búsqueda, parece conveniente fijar como datos de entrada un número **N**, que es el que se quiere representar así, y dos parámetros, **ka** y **kb**, que representarían el número de cifras de cada elemento del esquema. Si uno de ellos es nulo, produciría variantes, como las dos que se han presentado en el párrafo anterior. Si kb=0 se entenderá que no hay elemento central.

La fijación del número de cifras parece aconsejable, porque aparecen más ejemplos de los previstos. Por ejemplo, con cinco cifras, dos cifras para los elementos laterales y una para el central, aparecen 416 ejemplos, desde 13229=12*2*21+12221+12*2*21 hasta 99974=64*6*46+64646+64*6*46. Incluso existen dos números que presentan dos soluciones:

46006=41*4*14+41414+41*4*14=26*6*62+26662+26*6*62

97925=58*4*85+58485+58*4*85=39*8*93+39893+39*8*93

La organización de la búsqueda se basará en la variable **a1**, que representará a la parte lateral, con su simétrico **a2**, y su número de cifras **ka**. Así, en el ejemplo anterior a1=58, a2=85 y ka=2. Exigiremos que a1 sea distinto de a2 si tienen al menos dos cifras, para evitar trivialidades.

Procederemos de la misma forma con la parte central, llamando **b** a su valor, con la condición de que sea capicúa, y **kb** a su número de cifras. En el ejemplo b=4 y kb=1.

Con estas variables, y en sistema de numeración decimal, el valor de N quedaría:

N=2*a1*a2*b+a2+b*10^ka+a1*10^(ka+kb)

En el ejemplo:
97925=2*58*85*4+85+4*100+58*1000
En esta expresión nos basaremos para construir el algoritmo.
Para evitar búsquedas inútiles deberemos contar con que ***2ka+kb*** es una buena cota inferior para las cifras de N.
Si b=1 y kb=0 porque no se usa término central, la expresión se simplifica mucho:
N=(2*a1+1)*a2+a1*10^ka

Como ejemplo, 3804=23*32+2332+23*32 y se cumple: 3804=(2*23+1)*32+23*100=1504+2300=3804

Si integramos las dos expresiones en una misma función, su código será algo más largo de lo habitual, pero merece la pena.

Versión en Excel

Las ideas anteriores están plasmadas en la siguiente función. Se han integrado las dos versiones del problema. La división se basa en si kb es mayor que cero o no:

Function palintri$(n, ka, kb)’Parámetros N y número de cifras
Dim kn, a1, a2, b, m, c, b1, aa1
Dim s$, t$

s = ""’Contenedor de resultados
c = 0 ’Contador de resultados
If kb > 0 Then ‘Caso con elemento central
If kb = 1 Then b1 = 1 Else b1 = 10 ^ (kb - 1) + 1 ‘Origen de búsquedas
For b = b1 To 10 ^ kb – 1 ‘Cifras centrales
If escapicua(b) Or kb = 1 Then ‘La variable b ha de ser capicúa
If ka = 1 Then aa1 = 1 Else aa1 = 10 ^ (kb - 1) + 1’ Origen de a

```
For a1 = aa1 To 10 ^ ka – 1 ‘Búsqueda de a
a2 = cifrainver(a1) ‘Simétrico de a
If a1 <> a2 Or ka = 1 Then ‘Condición algebraica
m = 2 * a1 * a2 * b + a2 + b * 10 ^ ka + a1 * 10 ^ (ka + kb)
If m = n Then ‘Hay solución
c = c + 1 ‘Se comunica solución
t = ajusta(a1) + "*" + ajusta(b) + "*" + ajusta(a2)
s = s + " ## " + t + "+" + ajusta(a1) + ajusta(b) + ajusta(a2) + "+" + t
End If
End If
Next a1
End If
Next b
Else ‘ Segunda variante, sin elemento central
If ka = 1 Then aa1 = 1 Else aa1 = 10 ^ (ka - 1) + 1
For a1 = aa1 To 10 ^ ka – 1 ‘Proceso similar
a2 = cifrainver(a1)
If a1 <> a2 Or ka = 1 Then
m = (2 * a1 + 1) * a2 + a1* 10 ^ ka
If m = n Then
c = c + 1
t = ajusta(a1) + "*" + ajusta(a2)
s = s + " ## " + t + "+" + ajusta(a1) + ajusta(a2) + "+" + t
End If
End If
Next a1
```

End If
If s <> "" Then s = ajusta(c) + " : " + s Else s = "NO"
palintri = s
End Function

En un buscador jugaremos con los parámetros para conseguir los resultados adecuados. Por ejemplo, estos son los primeros números de 4 cifras del tipo A*A'+AA'+A*A'

Número N	Soluciones
1725	1 : ## 12*21+1221+12*21
2082	1 : ## 20*2+202+20*2
2137	1 : ## 13*31+1331+13*31
2589	1 : ## 14*41+1441+14*41
2616	1 : ## 21*12+2112+21*12
3081	1 : ## 15*51+1551+15*51
3183	1 : ## 30*3+303+30*3
3613	1 : ## 16*61+1661+16*61
3804	1 : ## 23*32+2332+23*32
3919	1 : ## 31*13+3113+31*13
4185	1 : ## 17*71+1771+17*71
4324	1 : ## 40*4+404+40*4
4458	1 : ## 24*42+2442+24*42
4695	1 : ## 32*23+3223+32*23
4797	1 : ## 18*81+1881+18*81

Persiste el problema del 0 inicial que suprime Excel, pero se entiende bien.

De igual forma, se detectan los números del tipo A*BB*A'+ABBA'+A*BB*A':

3388	1 : ## 2*77*2+2772+2*77*2
3586	1 : ## 2*88*2+2882+2*88*2
3619	1 : ## 3*22*3+3223+3*22*3
3784	1 : ## 2*99*2+2992+2*99*2
3927	1 : ## 3*33*3+3333+3*33*3
4235	1 : ## 3*44*3+3443+3*44*3
4466	1 : ## 4*11*4+4114+4*11*4
4543	1 : ## 3*55*3+3553+3*55*3
4851	1 : ## 3*66*3+3663+3*66*3
4928	1 : ## 4*22*4+4224+4*22*4
5159	1 : ## 3*77*3+3773+3*77*3
5390	1 : ## 4*33*4+4334+4*33*4
5467	1 : ## 3*88*3+3883+3*88*3

VERSION PARI (para la primera variante)

Si deseamos más rango de soluciones puede ser útil la versión en PARI. La hemos diseñado para que devuelva sólo **a1** y **b**, porque el resto se completa fácilmente. Su código es

```
ori(k)=my(m=1);if(k>1,m=10^(k-1)+1);m
simetrico(n)=eval(concat(Vecrev(Str(n))))
palind(n)=n==simetrico(n)
palintri1(n,ka,kb)=my(a1,a2,v=[ka,kb],b,m,es=0);f
or(b=ori(kb),10^kb-
1,if(palind(b)||kb==1,for(a1=ori(ka),10^ka-
1,a2=simetrico(a1);if(a1<>a2||ka==1,m=2*a1*a2*b
+a2+b*10^ka+a1*10^(ka+kb);if(m==n,v[1]=a1;v[2]
=b;es=1;print(n," es ",v[1],", ",v[2]))))));es)
for(i=10000,20000,if(palintri1(i,2,1),print(i)))
```

Basta cambiar la última línea según nuestras preferencias. Tal como está, repetiría la búsqueda efectuada con Excel. Este es un fragmento:

```
%4 = (n,ka,kb)->my(a1,a2
a),10^ka-1,a2=simetrico(
[2]=b;es=1;print(n," es
12625 es 12, 1
13229 es 12, 2
13833 es 12, 3
13937 es 13, 1
14437 es 12, 4
14843 es 13, 2
15041 es 12, 5
15289 es 14, 1
15645 es 12, 6
15749 es 13, 3
16249 es 12, 7
16537 es 14, 2
```

Por ejemplo, 16537=14*2*41+14241+14*2*41

VERSION PARI (para la segunda variante)

```
ori(k)=my(m=1);if(k>1,m=10^(k-1)+1);m
simetrico(n)=eval(concat(Vecrev(Str(n))))
palind(n)=n==simetrico(n)
palintri2(n,ka)=my(a1,a2,v=[ka,ka],m,es=0);for(a1
=ori(ka),10^ka-
1,a2=simetrico(a1);if(a1<>a2||ka==1,m=(2*a1+1)*a
2+a1*10^ka;if(m==n,v[1]=a1;v[2]=a2;es=1;print(n,
" es ",v[1],", ",v[2]))));es
for(i=1000,9999,if(palintri2(i,2),print1("")))
```

```
%4 = (n,ka)->my(a1,a2,v=[ka
if(m==n,v[1]=a1;v[2]=a2;es
1725 es 12, 21
2082 es 20, 2
2137 es 13, 31
2589 es 14, 41
2616 es 21, 12
3081 es 15, 51
3183 es 30, 3
3613 es 16, 61
3804 es 23, 32
3919 es 31, 13
4185 es 17, 71
4324 es 40, 4
4458 es 24, 42
4695 es 32, 23
4797 es 18, 81
5152 es 25, 52
```

Coinciden los resultados con los de Excel. Por ejemplo, 3613=16*61+1661+16*61

Con más cifras

Finalizamos con ejemplos que presentan más cifras en su desarrollo. Todos ellos se podrían encontrar realizando bucles para sus componentes, pero aquí se prefieren funciones para poder elegir el rango de búsqueda de N, y no los de sus componentes.

Seis cifras del tipo AB*CC*BA+ABCCBA+AB*CC*BA:

```
153241 es 12, 55
153769 es 14, 11
159885 es 12, 66
159929 es 13, 33
166529 es 12, 77
167497 es 14, 22
167981 es 15, 11
169895 es 13, 44
173173 es 12, 88
179817 es 12, 99
179861 es 13, 55
181225 es 14, 33
182633 es 16, 11
185911 es 15, 22
189827 es 13, 66
```

Comprobamos uno:

173173=12*88*21+128821+12*88*21

Es curioso que el resultado sea una concatenación de 173 consigo mismo.

Con cinco cifras y tres centrales

Este es un rango de soluciones obtenidas con Excel:

27994	1 : ## 2*444*2+24442+2*444*2
28174	1 : ## 2*454*2+24542+2*454*2
28354	1 : ## 2*464*2+24642+2*464*2
28534	1 : ## 2*474*2+24742+2*474*2
28714	1 : ## 2*484*2+24842+2*484*2
28894	1 : ## 2*494*2+24942+2*494*2
29092	1 : ## 2*505*2+25052+2*505*2
29272	1 : ## 2*515*2+25152+2*515*2
29452	1 : ## 2*525*2+25252+2*525*2
29632	1 : ## 2*535*2+25352+2*535*2
29812	1 : ## 2*545*2+25452+2*545*2
29992	1 : ## 2*555*2+25552+2*555*2

Así podríamos seguir.

DIFERENCIA DE DOS CUBOS IGUAL A UNA SUMA

Caso general

En los cálculos que publico diariamente uso dos funciones para averiguar si un número es suma de cubos o bien diferencia. No se me había ocurrido simultanear ambas propiedades y lo hago ahora.

¿Qué números enteros positivos son suma de dos cubos y simultáneamente diferencia de otros dos, siendo en ambos casos cubos enteros positivos?

Un ejemplo es el 152, que por una parte equivale a 3^3+5^3=27+125, y por otra a 6^3-4^3=216-64.

Con las publicaciones precedentes tenemos acceso a dos funciones que encuentran estas descomposiciones: SUMCUBOS y DIFCUBOS. Las copio a continuación:

Function sumcubos(n)
Dim k, a, m, b
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de resultados
m = 0 ‘Contador de soluciones

a = n ^ (1 / 3) *'Máximo cubo posible*
For k = 1 To a
b = n - k ^ 3 'Segundo posible cubo
If escubo(b) And k <= b ^ (1 / 3) Then m = m + 1: s = s + " a=" + Str$(k) + " b=" + Str$(Int(b ^ (1 / 3) + 0.0001)) *'Hay nueva solución*
Next k 'Si no hay solución devuelve "NO"
End Function

Usa nuestra función ESCUBO:

Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo = False
End Function

La segunda función es algo más complicada, porque la diferencia presenta otro condicionante, y es que la diferencia de cubos ha de ser divisor de N.

Function difcubos$(n)

Dim k, a, t, m, p
Dim s$

s = "" 'Contenedor de soluciones
m = 0 'Contador de soluciones

For k = 1 To n / 2 ‘La diferencia de bases es divisor de N
If n / k = n \ k Then ‘Criterio de divisibilidad
t = Sqr(n / k / 3) ‘Máximo cubo con esa diferencia
For a = 1 To t
If (a + k) ^ 3 - a ^ 3 = n Then m = m + 1: s = s + " # a=" + Str$(a) + " b=" + Str$(a + k) ‘Existe solución
Next a
End If
Next k
If s = "" Then difcubos = "NO" Else difcubos = ajusta(m) + " " + s
End Function

El que esta segunda función use también el “NO” para cuando no existe solución nos permite simultanear las dos condiciones:

SUMCUBOS(N)<>”NO” AND DIFCUBOS(N)<>”NO”

Usamos esta condición en un buscador y nos devolverá la lista de números enteros positivos que son simultáneamente suma y diferencia de dos cubos (también enteros positivos)

Número N	Suma de cubos	Diferencia de cubos
91	1: a= 3 b= 4	1 # a= 5 b= 6
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
189	1: a= 4 b= 5	1 # a= 3 b= 6
217	1: a= 1 b= 6	1 # a= 8 b= 9
513	1: a= 1 b= 8	1 # a= 6 b= 9
728	1: a= 6 b= 8	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9
1027	1: a= 3 b= 10	1 # a= 18 b= 19
1216	1: a= 6 b= 10	1 # a= 8 b= 12
1512	1: a= 8 b= 10	1 # a= 6 b= 12
1736	1: a= 2 b= 12	1 # a= 16 b= 18
2457	1: a= 9 b= 12	1 # a= 15 b= 18
3087	1: a= 7 b= 14	1 # a= 17 b= 20
4104	2: a= 2 b= 16 a= 9	1 # a= 12 b= 18
4706	1: a= 11 b= 15	1 # a= 27 b= 29
4921	1: a= 2 b= 17	1 # a= 40 b= 41
4977	1: a= 4 b= 17	1 # a= 22 b= 25

Están publicados en https://oeis.org/A225908, y es subsecuencia de https://oeis.org/A051347 En esas páginas se llama la atención sobre que estas propiedades permiten descomponer algunos cubos en suma de otros tres. Ya he comentado esta propiedad anteriormente en otras ocasiones. Por ejemplo, 18^3=16^3+12^3+2^3. Esta igualdad se extrae de los resultados del número 4104.

Si se usa la función TRESCUBOS (no se explica aquí porque usa otras funciones que alargarían este estudio) con uno de los cubos mayores, se reproducirán algunos resultados. Por ejemplo, con 18^3, si lo descomponemos en suma de tres cubos, daría lugar a

18^3=15^3+6^3+9^3=16^3+6^3+2^3

Si pasamos restando algún sumando, obtendríamos algunos casos de los estudiados. Por ejemplo:
18^3-15^3=9^3+6^3

A continuación estudiaremos algunos casos y propiedades particulares.

Casos particulares de los cubos sumandos

Cubos consecutivos

Los dos cubos que se suman pueden ser consecutivos. Añadiendo algún parámetro a nuestra función se pueden encontrar esos casos particulares. No abundan. Estos son los inferiores a 10^5:

Número N	Suma de cubos consecutivos	Diferencia de cubos
91	1: a= 3 b= 4	1 # a= 5 b= 6
189	1: a= 4 b= 5	1 # a= 3 b= 6
12691	1: a= 18 b= 19	1 # a= 21 b= 28
68705	1: a= 32 b= 33	1 # a= 6 b= 41
97309	1: a= 36 b= 37	1 # a= 3 b= 46

En ellos se ha de cumplir que
$N=(a+1)^3+a^3=2a^3+3a^2+3a+1$, luego **a** será un divisor de N-1.

Por ejemplo. 68705-1 se descompone como 2^5*19*113, y, efectivamente, $32=2^5$ es un divisor suyo, y es la base del cubo menor de la suma.

Cubos de N y N+2

Con el mismo procedimiento obtenemos los primeros casos en los que las bases de los cubos que se suman se diferencian en dos unidades.

Número N	Suma de cubos de N y N+2	Diferencia de cubos
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
728	1: a= 6 b= 8	2 # a= 10 b= 12 # a= 1 b= 9
1512	1: a= 8 b= 10	1 # a= 6 b= 12
16120	1: a= 19 b= 21	1 # a= 18 b= 28

Es sencillo demostrar que aquí la base del cubo menor ha de ser divisor de N-8, como ocurre con 16120, en el que (16120-8)/19=848

Cubos de base prima

Para finalizar, se adjuntan los tres primeros resultados para el caso en el que las bases de los cubos que se suman sean números primos. Se acumulan las exigencias y es normal que resulten pocos resultados.

Número N	Suma de cubos de base prima	Diferencia de cubos
152	1: a= 3 b= 5	1 # a= 4 b= 6
4921	1: a= 2 b= 17	1 # a= 40 b= 41
5256	1: a= 7 b= 17	1 # a= 14 b= 20

Versión en PARI

Para quienes deseen practicar con este lenguaje, se inserta a continuación un código que devuelve las soluciones entre1 y 5000. Es interesante estudiar el uso de vectores para devolver las soluciones:

```
sumadoscubos(n)=my(i=1,m,v=[0,0]);while(i<=n^(1/3),m=n-i^3;if(ispower(m,3)&&m<=i^3,v=[i,m^(1/3)]);i+=1);v

difcubos(n)=my(k,t,a,v=[0,0]);for(k=1,n,if(n%k==0,t=sqrt(n/k/3);for(a=1,t,if((a+k)^3-a^3==n,v=[a+k,a]))));v

for(m=1,5000,u=difcubos(m);t=sumadoscubos(m);if(u<>[0,0]&&t<>[0,0],print(m," Suma ",t," Diferencia ",u)))
```

Resultado:

```
(18:58) gp > \r C:\Users\arold\Documents\P
%48 = (n)->my(i=1,m,v=[0,0]);while(i<=n^(1
%49 = (n)->my(k,t,a,v=[0,0]);for(k=1,n,if(
91 Suma [4, 3] Diferencia [6, 5]
152 Suma [5, 3] Diferencia [6, 4]
189 Suma [5, 4] Diferencia [6, 3]
217 Suma [6, 1] Diferencia [9, 8]
513 Suma [8, 1] Diferencia [9, 6]
728 Suma [8, 6] Diferencia [9, 1]
1027 Suma [10, 3] Diferencia [19, 18]
1216 Suma [10, 6] Diferencia [12, 8]
1512 Suma [10, 8] Diferencia [12, 6]
1736 Suma [12, 2] Diferencia [18, 16]
2457 Suma [12, 9] Diferencia [18, 15]
3087 Suma [14, 7] Diferencia [20, 17]
4104 Suma [16, 2] Diferencia [18, 12]
4706 Suma [15, 11] Diferencia [29, 27]
4921 Suma [17, 2] Diferencia [41, 40]
4977 Suma [17, 4] Diferencia [25, 22]
(18:59) gp > |
```

CONCEPTOS CURIOSOS

NÚMEROS BOGOTÁ

Estos números fueron llamados así por Tomás Uribe y Juan Pablo Fernández, por su similitud con los números colombianos o autonúmeros. Es un homenaje a Bernardo Recamán, matemático colombiano
(Ver mi entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/03/autonumeros-1.html)

Su definición es simple: se trata de números N que equivalen a uno de sus divisores multiplicado por el producto de sus cifras (su raíz digital). Un ejemplo es el número 520, que se puede expresar como 52*5*2, o bien 8991 = 333*(3*3*3).

Para encontrarlos podemos recorrer todos los divisores del número y verificar que el cociente entre ambos coincide con el producto de cifras de ese divisor.
Ya hemos usado la función PRODUCIFRAS, pero reproducimos aquí su versión en VBASIC:

```
Public Function producifras(n)
Dim h, i, s, m
if n<10 then producifras=n:exit function
h = n  'la variable h recoge el valor de n
s = 1 ,'El producto comienza con un 1 en la variable s
While h > 0  'Mientras queden cifras…
i = Int(h / 10) 'Se queda con todas las cifras menos la última
m = h - i * 10 'La variable m recoge la última cifra
h = i 'La variable h tiene una cifra menos
s = s * m 'La última cifra se incorpora al producto
Wend
producifras = s
End Function
```

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/permutacion-de-cifras-al-sumar-su.html)

Si contamos con esta función u otra similar, es fácil construir un criterio para saber si un número es Bogotá o no. Últimamente hemos optado por funciones en modo texto, porque en sus valores podemos incluir el número de soluciones y la expresión de cada una mediante el producto pedido (en este caso). En su listado se usan funciones que han aparecido en algún momento en mis publicaciones:

```
Function esbogota$(n)
Dim k, m, j, c
Dim noes As Boolean
Dim s$, t$

If n = 1 Then esbogota = "1*1": Exit Function' Caso especial
k = 2 'Primer divisor
noes = True 'Suponemos que no existe solución
s = "" 'Contenedor de la solución
c = 0 'Contador de soluciones
While k <= n  And noes 'Recorremos divisores incluido n
If n / k = n \ k Then 'Es divisor
If n = k * producifras(k) Then 'Es número Bogotá
t = ""
c = c + 1 'Una solución más, y se construye a continuación
For j = numcifras(k) To 1 Step -1: t = t + "*" + ajusta(cifra(k, j)): Next j
s = s + " # " + Str$(k) + t
End If
End If
K=k+1 'Siguiente divisor
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(c) + " : " + s
esbogota = s
End Function
```

Para estar escrita en VBasic, no es lenta. Esta tabla es un ejemplo de su utilidad:

N entre 100000 y 102000	Desarrollo en factores Bogotá
100071	1 : # 11119*1*1*1*1*9
100197	1 : # 11133*1*1*1*3*3
100200	1 : # 835*8*3*5
100625	1 : # 575*5*7*5
100719	1 : # 11191*1*1*1*9*1
100954	1 : # 7211*7*2*1*1
101112	1 : # 4213*4*2*1*3
101304	1 : # 469*4*6*9
101544	1 : # 4231*4*2*3*1
101625	1 : # 1355*1*3*5*5
101640	1 : # 2541*2*5*4*1
101752	1 : # 1817*1*8*1*7
101817	1 : # 11313*1*1*3*1*3
101844	1 : # 943*9*4*3
101979	1 : # 11331*1*1*3*3*1

Aquí todos presentan una sola solución, pero entre las soluciones menores ya aparecen con dos o tres soluciones:

Estos son los primeros ejemplos con dos soluciones:

N con 2 soluciones	Desarrollo
192	2 : # 24*2*4 # 32*3*2
648	2 : # 36*3*6 # 81*8*1
819	2 : # 91*9*1 # 117*1*1*7
1197	2 : # 133*1*3*3 # 171*1*7*1
1536	2 : # 48*4*8 # 64*6*4

El listado de los primeros números de Bogotá de cualquier número de soluciones es:

1, 4, 9, 11, 16, 24, 25, 36, 39, 42, 49, 56, 64, 75, 81, 88, 93, 96, 111, 119, 138, 144, 164, 171, 192, 224, 242, 250, 255, 297, 312, 336, 339, 366,…

Están publicados en https://oeis.org/A336826

En esta página se proponen algunas cuestiones, y aquí plantearemos alguna otra.

Se advierte que los números "repidígitos" son todos de Bogotá, como es fácil razonar: 1111=1111*1*1*1*1. Entre ellos figuran algunos primos, que son los únicos posibles (ver https://oeis.org/A004022).

Ningún número múltiplo de 10 será de este tipo, porque la cifra 0 final anulará el producto de las cifras.

Se puede usar el hecho de que el producto de las cifras ha de ser 7-liso, ya que los números del 2 al 9 sólo poseen como factores primos 2, 3, 5 y 7. No hemos encontrado ventajas en usar este hecho (ver https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_liso)

Números de Bogotá consecutivos

Al usar cifras, la existencia de estos pares será algo casual. Como poseemos la función *esbogota(),* bastará exigir que tanto N como N+1 sean de este tipo. Con un buscador apropiado se pueden encontrar:

N	Producto	N+1	Producto
24	1 : # 12*1*2	25	1 : # 5*5
2510	1 : # 251*2*5*1	2511	1 : # 93*9*3
5210	1 : # 521*5*2*1	5211	1 : # 193*1*9*3
8991	1 : # 333*3*3*3	8992	1 : # 1124*1*1*2*4

Puedes consultar https://oeis.org/A336864

También podemos buscar el par (N, N+2):

N	Producto	N+2	Producto
9	1 : # 3*3	11	1 : # 11*1*1
520	1 : # 52*5*2	522	1 : # 29*2*9
1134	1 : # 63*6*3	1136	1 : # 142*1*4*2
1776	1 : # 222*2*2*2	1778	1 : # 127*1*2*7
1926	1 : # 321*3*2*1	1928	1 : # 241*2*4*1
2320	1 : # 58*5*8	2322	1 : # 129*1*2*9
8197	1 : # 1171*1*1*7*1	8199	1 : # 911*9*1*1

Estos números no están publicados en OEIS.
Ya puestos, podemos buscar pares (N,2N):

N	Producto	2*N	Producto
96	1 : # 16*1*6	192	: # 24*2*4 # 32*3*2
224	1 : # 112*1*1*2	448	1 : # 28*2*8
456	1 : # 114*1*1*4	912	1 : # 38*3*8
1656	1 : # 92*9*2	3312	1 : # 138*1*3*8
2592	1 : # 216*2*1*6	5184	1 : # 96*9*6
3312	1 : # 138*1*3*8	6624	1 : # 414*4*1*4
3726	1 : # 69*6*9	7452	1 : # 621*6*2*1
3936	1 : # 164*1*6*4	7872	1 : # 1312*1*3*1*2
4496	1 : # 281*2*8*1	8992	1 : # 1124*1*1*2*4
4977	# 79*7*9 # 711*7	9954	1 : # 237*2*3*7
5184	1 : # 96*9*6	10368	1 : # 432*4*3*2
6792	1 : # 1132*1*1*3*2	13584	1 : # 283*2*8*3
7296	1 : # 228*2*2*8	14592	1 : # 1216*1*2*1*6
7392	1 : # 176*1*7*6	14784	1 : # 1232*1*2*3*2
7872	1 : # 1312*1*3*1*2	15744	1 : # 328*3*2*8
8208	1 : # 342*3*4*2	16416	1 : # 912*9*1*2
9024	1 : # 282*2*8*2	18048	1 : # 1128*1*1*2*8

Invitamos a los lectores a buscar más casos, que estarán inéditos muchos de ellos.

Números de Bogotá especiales

En los primeros números de este tipo figuran cuadrados, como 36 o 49. ¿Cuáles serán los siguientes? Para encontrarlos usaremos nuestra función ESCUAD junto a ESBOGOTA:

N	Producto	RAIZ(N)
1	1*1	1
4	1 : # 2*2	2
9	1 : # 3*3	3
16	1 : # 4*4	4
25	1 : # 5*5	5
36	1 : # 6*6	6
49	1 : # 7*7	7
64	1 : # 8*8	8
81	1 : # 9*9	9
144	1 : # 18*1*8	12
900	1 : # 45*4*5	30
1764	1 : # 49*4*9	42
2025	1 : # 135*1*3*5	45
2304	1 : # 144*1*4*4	48
5184	1 : # 96*9*6	72
7056	# 98*9*8 # 441*4'	84

Esta sucesión también está inédita.

De igual forma se pueden buscar:

Triangulares

N	Producto	Orden triangular
1	1*1	1
36	1 : # 6*6	8
171	1 : # 19*1*9	18
378	1 : # 27*2*7	27
4950	1 : # 165*1*6*5	99

Oblongos N(N+1)

N	Producto	Orden oblongo
42	1 : # 21*2*1	6
56	1 : # 14*1*4	7
992	1 : # 124*1*2*4	31
3080	1 : # 154*1*5*4	55
3192	1 : # 76*7*6	56
6320	1 : # 158*1*5*8	79

Potencias de exponente mayor que 2

N	Producto	Exponente
16	1 : # 4*4	4
64	1 : # 8*8	6
81	1 : # 9*9	4
2048	1 : # 128*1*2*8	11
5832	1 : # 243*2*4*3	3
7776	1 : # 324*3*2*4	5

Otras variantes

Con lo explicado, es fácil encontrar variantes de estos ejemplos. Si se busca en OEIS “Bogotá numbers”, se encuentran definiciones parecidas y algunas relaciones con los números de Recamán.

PRIMOS BRASILEÑOS

En esta apartado nos plantearemos qué números primos se pueden formar con la suma de las primeras potencias de un número, es decir, cuándo una suma del tipo $1+n+n^2+n^3+n^4+n^5+\ldots$será un número primo. No consideraremos el caso en el que un primo **p** sea igual a **1+n**, ya que esto lo cumplen todos los primos.

Esta cuestión equivale a la búsqueda de números primos que sean "repitunos" en una base de numeración dada. Por ejemplo, 31(10=111(5, ya que las tres cifras 1 provienen de la igualdad $31=1+5+5^2$.

Función caracterizadora

Últimamente estamos usando funciones para Excel y Calc que devuelven una cadena de texto con los resultados. Es un formato que nos da mucha información y que es susceptible de cambios sencillos para la búsqueda de otros objetivos.

En este caso usamos la siguiente función:

Function primo_sumpot$(n)
Dim p, k, m, q
Dim s$

If Not esprimo(n) Then primo_sumpot = "NO": Exit Function
k = 2 ‘Base de las potencias
p = 1’Suma de potencias
m = 0’ Exponente
s = ""’Contenedor del resultado
q = 0’ Contador de soluciones
While k < n
p = 1 + k: m = 1’Primera suma de potencias
While p <= n
m = m + 1’ Siguiente suma de potencias
p = p + k ^ m

If p >= n Then
If p = n Then q = q + 1: s = s + " # " + Str$(k) + ", " + Str$(m) ‘Solución
End If
Wend
k = k + 1: p = 1 + k: m = 1 ‘Siguiente base de potencias
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(q) + "## " + s
primo_sumpot = s
End Function

Si buscamos con ella los primeros primos que cumplen lo exigido, obtenemos:

N primo	Sumas de potencias
7	1## # 2, 2
13	1## # 3, 2
31	2## # 2, 4 # 5, 2
43	1## # 6, 2
73	1## # 8, 2
127	1## # 2, 6
157	1## # 12, 2
211	1## # 14, 2
241	1## # 15, 2
307	1## # 17, 2
421	1## # 20, 2
463	1## # 21, 2
601	1## # 24, 2
757	1## # 27, 2

Observamos que la mayoría de las soluciones son del tipo $1+k+k^2$, como, por ejemplo, el 73, que equivale a $1+8+8^2$.

El 31 presenta dos soluciones:
$31=1+2+2^2+2^3+2^4=1+5+5^2$, lo que lo convierte en "repituno" en dos bases de numeración:

31(10 = 11111(2 = 111(5

Según una conocida fórmula, estos números también se caracterizan porque para un valor adecuado de m se cumple

$$N = \frac{k^m - 1}{k - 1}$$

En efecto, $31=(2^5-1)/(2-1)=(32-1)/1=31$
También $31=(5^3-1)/(5-1)=124/4=31$

Para que el resultado sea primo, **m** ha de ser primo, pues en caso contrario el cociente presentaría más de un factor. Es un razonamiento similar al usado en los primos de Mersenne.

Estos primos están publicados en
https://oeis.org/A085104

Con el afán de nombrar ciertas clases de números, a estos se les conoce como “brasileños”, porque se dieron a conocer en una olimpiada matemática celebrada en Brasil (ver https://oeis.org/A125134/a125134.pdf)

Números brasileños

Si eliminamos la condición de que N sea primo, nos resultan los números brasileños. En nuestra función suprimimos la condición de que sea primo y los obtendremos:

N	Sumas de potencias
7	1## # 2, 2
13	1## # 3, 2
15	1## # 2, 3
21	1## # 4, 2
31	2## # 2, 4 # 5, 2
40	1## # 3, 3
43	1## # 6, 2
57	1## # 7, 2
63	1## # 2, 5
73	1## # 8, 2
85	1## # 4, 3
91	1## # 9, 2
111	1## # 10, 2
121	1## # 3, 4
127	1## # 2, 6
133	1## # 11, 2
156	1## # 5, 3
157	1## # 12, 2
183	1## # 13, 2
211	1## # 14, 2
241	1## # 15, 2
255	1## # 2, 7

Están publicados en https://oeis.org/A053696

No son objeto de estudio aquí, pero es aconsejable la lectura de https://oeis.org/A125134/a125134.pdf

Valores de K

La siguiente lista contiene los primeros valores de K que pueden producir un primo con la expresión que estamos estudiando, con un exponente final fijado de antemano, mayor que 2 y con tope 100:

Valor de k	Primo 1+k+k^2+k^3+...
1	Exponente: 2 Primo: 3
2	Exponente: 2 Primo: 7
3	Exponente: 2 Primo: 13
5	Exponente: 2 Primo: 31
6	Exponente: 2 Primo: 43
7	Exponente: 4 Primo: 2801
8	Exponente: 2 Primo: 73
12	Exponente: 2 Primo: 157
13	Exponente: 4 Primo: 30941
14	Exponente: 2 Primo: 211
15	Exponente: 2 Primo: 241
17	Exponente: 2 Primo: 307
20	Exponente: 2 Primo: 421
21	Exponente: 2 Primo: 463
22	Exponente: 4 Primo: 245411
23	Exponente: 4 Primo: 292561
24	Exponente: 2 Primo: 601
26	Exponente: 6 Primo: 321272407
27	Exponente: 2 Primo: 757
28	Exponente: 4 Primo: 637421

Observamos que hay bases primas entre estos primeros pasos:

Base prima	Exponente y primo resultante
2	Exponente: 2 Primo: 7
3	Exponente: 2 Primo: 13
5	Exponente: 2 Primo: 31
7	Exponente: 4 Primo: 2801
13	Exponente: 4 Primo: 30941
17	Exponente: 2 Primo: 307
23	Exponente: 4 Primo: 292561
29	Exponente: 4 Primo: 732541
31	Exponente: 6 Primo: 917087137
41	Exponente: 2 Primo: 1723
43	Exponente: 4 Primo: 3500201
59	Exponente: 2 Primo: 3541
61	Exponente: 6 Primo: 52379047267
71	Exponente: 2 Primo: 5113
73	Exponente: 4 Primo: 28792661
79	Exponente: 4 Primo: 39449441
83	Exponente: 4 Primo: 48037081
89	Exponente: 2 Primo: 8011

Los primos resultantes, ordenados, están publicados en https://oeis.org/A023195

3, 7, 13, 31, 127, 307, 1093, 1723, 2801, 3541, 5113, 8011, 8191, 10303, 17293, 19531, 28057, 30103, 30941,…

DERIVADA ARITMÉTICA

Este original concepto fue presentado por el matemático español José Mingot Shelly en 1911 con el título "Una cuestión de la teoría de los números", trabajo presentado en el Tercer Congreso Nacional para el Progreso de las Ciencias, Granada. Es interesante su biografía, condicionada totalmente por la Guerra Civil española.

Como su nombre indica, esta derivada se basa en una operación similar a la de la derivada de un producto, y aplicada a números naturales. Podemos concretarla de esta forma:

D(0)=D(1)=0 (para completar la definición)
D(p)=1 si p es primo
D(ab)=aD(b)+bD(a) a>1, b>1 (Regla del producto)

Por ejemplo, D(10)=D(2*5)=2D(5)+5D(2)=2*1+5*1=7
Como la definición formal es similar a la de la derivada de una función, podemos extenderla a más factores, a potencias y a todos los números en general.

Así, en un número esfénico N=p*q*r, se tendrá

D(N)=p*q+q*r+r*p

Por ejemplo, D(30)=D(2*3*5)=2*3+3*5+5*2=31

Se generaliza fácilmente a las potencias de primos:

$D(p^k)=k*p^{k-1}$
$D(8)=D(2^3)=3*2^2=12$
$D(16)=D(2^4)=4*2^3=32$

Veremos que nos conviene expresar la potencia de otra forma:

$D(N)=D(p^k)=N*k/p$

Caso general

Cualquier número se descompone en productos de potencias de primos. Con lo visto hasta ahora, se puede construir una forma de calcular la derivada aritmética en el caso general. Deberemos ir derivando cada potencia para multiplicarla por el resto de potencias de primos. Según el apartado anterior, cada potencia quedará multiplicada por su exponente y dividida entre su base. Extendemos a todas las potencias y queda:

$$D(N) = D\left(\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{e_i}\right) = N\sum_{i=1}^{k}\frac{e_i}{p_i}$$

Lo vemos mejor con un ejemplo:

D(360)=D(2^3*3^2*5)=360(3/2+2/3+1/5)=852

Estos resultados se pueden comprobar en https://oeis.org/A003415

Es fácil traducir todo esto a una función. En su primera parte es copia de nuestra rutina *sacaprimos*. Su salida es el conjunto de primos p() y el conjunto de exponentes ex(). A partir de ellos se construye la derivada.

```
Function derivada(n)
Dim f, a, e, nume, d, s
Dim p(20), ex(20)

'Extrae primos y sus exponentes
a = n
f = 2
While f * f <= a
e = 0
While a / f = Int(a / f)
e = e + 1
a = a / f
Wend
```

```
If e > 0 Then
nume = nume + 1
p(nume) = f
ex(nume) = e
End If
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
If a > 1 Then
nume = nume + 1
p(nume) = a
ex(nume) = 1
End If
'Fin de la extracción de primos

s = 0 'Factor que multiplica a n
For f = 1 To nume
s = s + n*ex(f) / p(f) 'Se suman los cocientes n*e/p
Next f
derivada = s
End Function
```

Hemos dimensionado los primos a 20 distintos, pues la gran mayoría de los números que tratamos tienen menos primos en su descomposición factorial. La misma idea usa la programación en PARI en la página enlazada. Aquí se puede comprobar la diferente potencia entre PARI y VBASIC:

```
(PARI) A003415(n) = {local(fac); if(n<1, 0, fac=factor(n); sum(i=1, matsize(fac)[1], n*fac[i, 2]/fac[i, 1]))} /* Michael B. Porter, Nov 25 2009 */
```

Dejamos su análisis como ejercicio lúdico.

Con cualquiera de estas dos herramientas podemos construir una tabla de derivadas aritméticas:

N	D(N)
1	0
2	1
3	1
4	4
5	1
6	5
7	1
8	12
9	6
10	7
11	1
12	16
13	1
14	9
15	8
16	32
17	1
18	21

Observamos que todos los números primos tienen derivada 1 por definición, y las potencias de primos siguen la suya propia, como $D(8)=D(2^3)=3*2^2=12$

Naturaleza de la derivada aritmética

Siguiendo una costumbre en este blog, destacaremos algunas derivadas aritméticas según su tipo como números, primos, cuadrados, triangulares,…Publicamos a continuación una muestra:

Derivadas primas

Si añadimos a la búsqueda la condición de que la derivada sea prima, obtenemos este listado:

Número	Derivada prima	N es libre de cuadrados
6	5	[2,1][3,1]
10	7	[2,1][5,1]
22	13	[2,1][11,1]
30	31	[2,1][3,1][5,1]
34	19	[2,1][17,1]
42	41	[2,1][3,1][7,1]
58	31	[2,1][29,1]
66	61	[2,1][3,1][11,1]
70	59	[2,1][5,1][7,1]
78	71	[2,1][3,1][13,1]
82	43	[2,1][41,1]
105	71	[3,1][5,1][7,1]
114	101	[2,1][3,1][19,1]
118	61	[2,1][59,1]
130	101	[2,1][5,1][13,1]
142	73	[2,1][71,1]
154	113	[2,1][7,1][11,1]
165	103	[3,1][5,1][11,1]
174	151	[2,1][3,1][29,1]
182	131	[2,1][7,1][13,1]
202	103	[2,1][101,1]
214	109	[2,1][107,1]

En la primera columna figuran los valores de N, y en la segunda las derivadas primas. Si siguiéramos buscando, observaríamos que muchos valores, como 191, se repiten bastante. Hemos añadido una columna más para comprobar que N es libre de cuadrados. En la página https://oeis.org/A157037 figuran los valores de N, y en ella se razona el porqué de que N no contenga divisores cuadrados.

Derivadas cuadradas

Deberemos en este caso excluir los casos en los que N es primo, pues nos llenarían las tablas con el valor cuadrado 1. Así que buscaremos derivadas cuadradas sólo para valores compuestos de N. El resultado es:

Número	Derivada cuadrada
4	4
12	16
14	9
39	16
46	25
54	81
55	16
94	49
138	121
155	36
158	81
183	64
203	36
256	1024
291	100
295	64
297	324
299	36
320	1024
323	36
334	169
426	361
432	1296

También están publicadas, en concreto en https://oeis.org/A256706

Por ejemplo, D(291)=D(3*97)=1*97+3*1=100=10^2

Derivadas triangulares

Si exigimos que la derivada sea un número triangular, se encuentran muchos ejemplos. Estos son los primeros:

Número	Derivada triangular	Orden triangular
9	6	3
18	21	6
21	10	4
25	10	4
26	15	5
38	21	6
50	45	9
75	55	10
86	45	9
102	91	13
106	55	10
115	28	7
116	120	15
147	91	13
155	36	8
178	91	13
187	28	7
203	36	8
206	105	14
230	171	18
299	36	8

Esta sucesión parece estar inédita. El autor del blog no la va a publicar, y autoriza aquí su publicación por parte de otra persona.

Derivada que es potencia no trivial

Entre los valores de las derivadas aritméticas figuran, además de los cuadrados, otras potencias con exponentes mayores. Estos son los primeros valores:

Número	Derivada potencia	Exponente
4	4	2
12	16	4
14	9	2
15	8	3
16	32	5
27	27	3
28	32	5
39	16	4
46	25	2
54	81	4
55	16	4
87	32	5
94	49	2
108	216	3
124	128	7
138	121	2
155	36	2
158	81	4
183	64	6
189	216	3
203	36	2
212	216	3

Por ejemplo, $D(108)=D(2^2*3^3)=108(2/2+3/3)=216=6^3$

También está inédita, aparentemente.

Derivada de N igual a N

En la tabla anterior figura que la derivada de 27 es también 27. Buscaremos a continuación si existen más casos similares:

Número	Derivada	Factores
4	4	[2,2]
27	27	[3,3]
3125	3125	[5,5]
823543	823543	[7,7]

Basta observar la tabla para comprobar cuándo ocurre esto, y qué demostración sencilla es posible. Lo dejamos abierto a nuestros lectores.

Derivada múltiplo del número

Hemos observado derivadas que son iguales o el doble que el número dado. También existen casos en los que es un múltiplo mayor. Estos son los primeros casos:

Número N	Derivada D	Cociente D/N
4	4	1
16	32	2
27	27	1
64	192	3
108	216	2
256	1024	4
432	1296	3
729	1458	2
1024	5120	5
1728	6912	4
2916	8748	3
3125	3125	1
4096	24576	6
6912	34560	5

Según lo explicado hasta ahora, esto ocurre cuando la suma de los cocientes entre los exponentes de los factores primos y ellos mismos es un número entero. Nos fijamos, por ejemplo en el número $6912=2^8*3^3$, en el que esa suma es 8/2+3/3=5, y esa es la causa de que su derivada sea un múltiplo con cociente 5.

Esto traslada la cuestión a saber qué números cumplen la propiedad. Es fácil ver que no sólo la suma de esos cocientes ha de ser entera, sino que han de serlo cada uno por separado, pues al ser primos los denominadores no se podrán agrupar en sumas enteras esos cocientes si ellos no lo son.

NÚMEROS REFACTORIZABLES

Estudiando el número 2025 se descubre que tiene 15 divisores, y que este número 15 es divisor de 2025. Por eso, cumple la definición de **número refactorizable o "tau"**, porque si llamamos función TAU al número de divisores de N, en estos números se cumple que N/TAU(N) es un entero. En el caso de 2025 se cumple que 2025/15=135.

Un número se llama refactorizable o tau si es múltiplo del número de sus divisores.

Para descubrir si un número es de este tipo, habrá que calcular TAU y efectuar el cociente N/TAU(N) para analizar si es entero.

El cálculo de TAU es bastante simple:

TAU(N)=(1+a_1)(1+a_2)…(1+a_k), donde a_1, a_2, …a_k son los exponentes de los factores primos de N.

Si no se desea descomponer el número en factores primos se puede usar la función que publicamos en https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=tau%28

Con esta condición y un buscador se obtienen los primeros números refactorizables:

Número N	TAU(N)	Cociente entero
1	1	1
2	2	1
8	4	2
9	3	3
12	6	2
18	6	3
24	8	3
36	9	4
40	8	5
56	8	7
60	12	5
72	12	6
80	10	8
84	12	7
88	8	11
96	12	8

Están publicados en https://oeis.org/A033950

De entrada nos damos cuenta de que el único número primo de este tipo es el 2, porque todos los demás son impares, y no pueden ser múltiplos del número de sus divisores, que es 2.

Algo parecido ocurre con las potencias de primos, en las que el cuadrado posee tres divisores, luego el único cuadrado de primo refactorizable es $9=3^2$. Del mismo modo se puede razonar que 8 es el único cubo de primo que cumple la definición. Podemos ampliar la condición a números del tipo p^{p-1}, como 625.

Un número impar refactorizable no puede tener un número par de divisores. En la fórmula **$TAU(N)=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$** todos los factores deberán ser impares, y, por tanto, todos los a_i pares, por lo que N deberá ser un cuadrado:

Sólo los números impares que son cuadrados pueden ser refactorizables.

En la lista de refactorizables no hay números libres de cuadrados salvo 1 y 2. La razón es sencilla: si N no contiene cuadrados, todos sus factores primos estarán elevados a la unidad, luego su número de divisores será $TAU(N)=2*2*2*2*2\ldots=2^n$ y esto obliga a que N contenga al cuadrado de 2, salvo 1 y 2

Todos los números refactorizables, salvo 1 y 2, contienen un cuadrado entre sus divisores.

Refactorizables consecutivos

Existen números consecutivos que son ambos refactorizables. Con nuestros buscadores se llega fácilmente a los primeros pares:

Número N	TAU(N)	Número N+1	TAU(N+1)
1	1	2	2
8	4	9	3
1520	20	1521	9
50624	28	50625	25
62000	40	62001	9

En https://oeis.org/A114617 puedes consultar una lista más amplia.

Se ha demostrado que no existen ternas de consecutivos entre los números de este tipo entre los que poseen pocas cifras. Las condiciones con tan exigentes que se ha dejado su no existencia como conjetura, ya que no se han encontrado ternas entre 1 y 10^{53}.

Conjuntos de cuatro o más consecutivos no pueden existir, porque habría entre ellos dos números impares, que deberían ser cuadrados y presentar una diferencia menor que 5, y eso no es posible.

Podemos plantearnos diferencia 2:

Número N	TAU(N)	Número N+2	TAU(N+2)
448	14	450	18
880	20	882	18
1248	24	1250	10
2176	16	2178	18
9520	40	9522	18
24640	56	24642	18
33280	40	33282	18
39760	40	39762	18
50560	32	50562	18
71440	40	71442	42

Esta sucesión está inédita.

Otras variantes de la cuestión

Podemos investigar los cocientes N/TAU(N) en sus casos particulares.

Entre los primeros números refactorizables tenemos:

Sólo el 1 y el 2 presentan cociente 1.
Sólo el 8 y el 12 son el doble de su número de divisores.
Los números 9, 18 y 24 son el triple de su función TAU.

Otros casos:

Podemos formar una tabla con los siguientes posibles cocientes:

Cociente Encontrados

4	36
5	40, 60
6	72
7	56, 84
8	80, 96
9	108
10	180
11	88, 132
12	240

A la vista de estos resultados queda clara una propiedad:

Todos los números del tipo 12p, con p primo impar, son refactorizables, y el cociente N/TAU(N) es exactamente p.

Es fácil demostrarlo. Al ser TAU una función multiplicativa tendremos

TAU(12p)=TAU(12)TAU(p)=6*2=12, porque 12 y p son primos entre sí, luego el cociente pedido será p.

(Ver mi publicación Funciones multiplicativas https://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf)

¿De qué tipo es el cociente N/TAU(N)?

Cuadrado

Hemos buscado cocientes cuadrados y descubriendo que son frecuentes:

Número N	TAU(N)	Cociente
1	1	1
2	2	1
36	9	4
108	12	9
128	8	16
225	9	25
288	18	16
441	9	49
450	18	25
600	24	25
864	24	36
882	18	49

Están publicados en https://oeis.org/A145450

Triangular

Es similar a la anterior sucesión, pero no está publicada:

Número N	TAU(N)	Cociente
1	1	1
2	2	1
9	3	3
18	6	3
24	8	3
72	12	6
180	18	10
360	24	15
504	24	21
560	20	28
672	24	28
864	24	36

Primos

Ya se demostró que todos los enteros de tipo 12p con p primo impar, tienen como cociente p, pero pueden que existan más ejemplos. Los hemos buscado y resulta que los del tipo 8p con p primo e impar también son refactorizables, ya que, al ser 8 y p primos entre sí, TAU(8p)=TAU(8)*TAU(p)=4*2=8, luego el cociente es p.

Además de estos casos existen otros números refactorizables con cociente primo, pero sólo hemos encontrado el 9 y el 18, con cociente 3.

NÚMEROS DE LÖSCH

Estos números son aquellos que se pueden representar como N=$\mathbf{x^2+xy+y^2}$, con **x** e **y** números enteros. Como X e Y pueden tener distinto signo, una definición alternativa es la de pueden escribirse como N=$\mathbf{x^2-xy+y^2}$.

Aparecen como las normas de los números enteros de Eisenstein, pero no seguiremos por ahí porque es un tema de números complejos. Estos números son cerrados para la operación de multiplicar, por lo que si **m** y **n** pertenecen a este tipo, también lo serán **mn**, $\mathbf{m^k}$ y $\mathbf{n^k}$. Al poder ser **x** o **y** iguales a cero, estos números presentarán algunos subtipos. Por ejemplo, entre ellos estarán el cero y todos los cuadrados enteros, si elegimos y=0 o y=-x. Esto demuestra que existen infinitos números de este tipo.

Todos son positivos o nulos, porque N se puede escribir de esta otra forma (Zak Seidov, Jan 20 2009), que es evidentemente positiva o nula:

$N=(y+x/2)^2+3*(x/2)^2=y^2+xy+x^2/4+3x^2/4=x^2+xy+y^2$

Podemos buscarlos con una función muy sencilla:

```
Function tipolosch(n)
Dim x, y, a As Integer
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de valores de X e Y
a = Sqr(n)’Cota para X e Y
For x = -a To a ‘Bucle para X
For y = -a To a ‘Bucle para Y
If x ^ 2 + x * y + y ^ 2 = n Then ‘Condición a cumplir
s = s + " # X=" + Str$(x) + " Y=" + Str$(y) ‘Nueva solución
End If
Next y
Next x
If s = "" Then s = "NO"
tipolosch = s
End Function
```

Con esta función detectamos en un buscador los números que permiten valores enteros para X e Y, y que, por tanto son Lösch. Al intentarlo vemos, por una parte que son frecuentes y, por otra, que las soluciones aparecen en conjuntos equivalentes (salvo los signos) que complican un poco la visión del resultado:

Número N	Valores de X e Y
21	# X=-5 Y= 1 # X=-5 Y= 4 # X=-4 Y=-1 # X=-4 Y= 5 # X=-1 Y=-4
25	# X=-5 Y= 0 # X=-5 Y= 5 # X= 0 Y=-5 # X= 0 Y= 5 # X= 5 Y=-5
27	# X=-3 Y=-3 # X= 3 Y= 3
28	# X=-4 Y=-2 # X=-2 Y=-4 # X= 2 Y= 4 # X= 4 Y= 2
31	# X=-6 Y= 1 # X=-6 Y= 5 # X=-5 Y=-1 # X=-5 Y= 6 # X=-1 Y=-5

Observamos que las soluciones no caben en la imagen a veces, pero que son parecidas. Esta función es buena para descubrir muchas posibilidades para pocos números. Si sólo nos interesa saber si un número es de Lösch o no, es preferible esta otra, que detiene el proceso cuando se detecta una solución:

Function tipolosch2(n)
Dim x, y, a As Integer
Dim s$
Dim noes As Boolean

s = ""
a = Sqr(n)
x = -a
noes = True ‘Introducimos esta variable de detención
While x <= a And noes’Sustituimos FOR-NEST por WHILE-WEND

```
y = -a
While y <= a And noes
If x ^ 2 + x * y + y ^ 2 = n Then
noes = False 'Solución y parada
s = s + " # X=" + Str$(x) + " Y=" + Str$(y)
End If
y = y + 1
Wend
x = x + 1
Wend
If s = "" Then s = "NO"
tipolosch2 = s
End Function
```

De esta forma queda una tabla con menos información y más clara. Estos son los primeros números de este tipo:

Número N	Primeros valores de X e Y
1	# X=-1 Y= 0
3	# X=-2 Y= 1
4	# X=-2 Y= 0
7	# X=-3 Y= 1
9	# X=-3 Y= 0
12	# X=-2 Y=-2
13	# X=-4 Y= 1
16	# X=-4 Y= 0
19	# X=-3 Y=-2
21	# X=-5 Y= 1
25	# X=-5 Y= 0
27	# X=-3 Y=-3
28	# X=-4 Y=-2
31	# X=-6 Y= 1
36	# X=-6 Y= 0
37	# X=-4 Y=-3
39	# X=-5 Y=-2
43	# X=-7 Y= 1
48	# X=-4 Y=-4
49	# X=-7 Y= 0

Estos valores están publicados en https://oeis.org/A003136

Se razona fácilmente que entre ellos el 75% serán impares y el 25% pares, porque esta posibilidad necesita que ambos, x e y sean pares.

Casos particulares

Si X=Y, la expresión de estos números es sumamente sencilla, pues equivale a $3K^2$ y, en efecto, pertenecen a este tipo, 3, 12, 27, 48,…como se puede comprobar en las tablas que hemos insertado. Por la propiedad multiplicativa, también pertenecerán a este tipo los de la forma $3^h k^2$, como el 36

Otro caso interesante se produce cuando Y=1, ya que el número quedaría como $X^2+X+1=(X+1)^2-X$ y crearía la subsucesión 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73,…En https://oeis.org/A353887 están publicados los que son libres de cuadrados, y se afirma que la sucesión es infinita.

Si tomamos Y=-1 nos resultan números poligonales, que no estudiaremos por la extensión de sus propiedades, aunque sea un tema importante en este blog. Puedes consultar https://oeis.org/A002061

NÚMEROS TRIANGULARES IMPARES

En una entrada de mi blog se han estudiado los triangulares de orden par, en contraposición a los de impar, que resultan ser también hexagonales

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/09/triangulares-de-lado-par.html)

Era una entrada interesante, pero ahora nuestro interés no está en el orden (o lado), sino en la paridad del mismo triangular. En concreto estudiaremos los de carácter impar, que presentan curiosidades atractivas. Los primeros triangulares impares son 1, 3, 15, 21, 45, 55, … Están publicados en https://oeis.org/A014493. Aquí estudiaremos también otros aspectos de estos números que no están contemplados en esa sucesión.

Caracterización de estos números

Para descubrir si un número cualquiera es triangular impar bastará unir ambas exigencias. Un número N se caracteriza fácilmente como triangular con la condición de que 8N+1 sea cuadrado, y el ser impar con N MOD 2 = 1 (existen otras condiciones equivalentes).

Así en PARI podremos usar la función

es(n)=issquare(8*n+1)&&n%2==1

Con nuestras funciones para Excel, podría quedar

ES(N)=Y(ESCUAD(8*N+1);RESIDUO(M;2)=1)

Existen muchas variantes.

Nuestro Buscador de Naturales los encuentra fácilmente (https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador)

Han bastado las condiciones TRIANGULAR y NO PAR.

Distribución

Un número triangular N(N+1)/2 es impar cuando su factor N o el N+1 son pares del tipo 4k+2 o 4k-2, es decir, que son múltiplos de 2 pero no de 4, mientras el otro factor consecutivo será impar. Así, al dividir entre 2 el producto N(N+1) el resultado será impar, porque el producto poseerá el factor 2 sólo una vez, y se simplificará. Así ocurre con el 15, que proviene de 5*6/2, y como el 6 no es múltiplo de 4, se simplificará entre 2 quedando un impar: 5*3=15

Por conveniencia de comenzar en el 1, elegiremos 4k-2 como factor par, por lo que los triangulares impares se formarán con uno de estos dos productos:

(4k-2)(4k-1)/2=(2k-1)(4k-1)
(4k-2)(4k-3)/2=(2k-1)(4k-3)

Esto, en la práctica, produce un emparejamiento de dos triangulares impares, como son 1 con 3, 15 con 21 o 45 con 55. El orden del primer elemento será del tipo 4k-2 o 4k-3 (o bien, si se prefiere, 4m+1 o 4m+2)

Los triangulares impares se presentan en grupos de dos consecutivos, y comparten un mismo factor (el (4k-2)/2=2k-1). El orden del primero será 4k-3 y el del segundo 4k-2

Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en el par de triangulares consecutivos 91 y 105, que comparten el factor 7: 91=7*13 y 105=7*15. El 7 proviene de 2k-1, siendo k el número de orden del par de triangulares, que en este caso sería 4, luego 7=2*4-1. El orden general del 91 será 4*4-3=13 y el del segundo, 105, 4*4-2=14

Si sumamos los dos elementos del par nos resulta un cuadrado, como ocurre en todos los triangulares, pero aquí le damos otra justificación:

$(2k-1)(4k-1)+(2k-1)(4k-3)=(2k-1)(8k-4)=2^2(2k-1)^2=(4k-2)^2$
Así, tenemos que $1+3=4=2^2$, $15+21=36=6^2$, $45+55=100=10^2$, $91+105=196=14^2$

Estudio algebraico

Seguimos llamando **k** al número de orden del par, y usaremos la variable **n** para el número de orden propio del triangular estudiado y **N** al orden general del triangular. De esta forma quedará esta identidad, que resume lo expuesto anteriormente:

$$\mathbf{T(n)=(2k-1)(4k-2+(-1)^n)}$$

Si **k** es el orden del par, **n** es el orden **dentro de los triangulares impares** y **N** el orden general como triangulares

En el primer elemento del par n=2k-1 y N=4k-3 y k=(n+1)/2
En el segundo elemento n=2k y N=4k-2 y k=n/2

Por ejemplo:

En el 45 k=3, n=2*3-1=5, N=4*3-3=9
En el 55 k=3, n=2*3=6, N=4*3-2=10
En el 91 k=4, n=2*4-1=7 y N=4*4-3=13
En el 105 k=4, n=2*4=8 y N=4*4-2=14

Partiendo de la igualdad **$T(n)=(2k-1)(4k-2+(-1)^n)$** tendremos:

Si N es impar k=(n+1)/2
T(n)=(2*(n+1)/2 -1)(4(n+1)/2-3)=n(2n+2-3)=**n*(2n-1)**
Estos triangulares **serán también hexagonales**, pues la fórmula de estos es l(2l-1)

(ver mi publicación
https://www.hojamat.es/publicaciones/poligonales.pdf)

Si es par, k=n/2
SI N es par: T(n)=(n-1)(2n-2+1)=**(n-1)*(2n-1)**

Las dos expresiones de pueden unificar:
$T(n)=(2n-1)(2n-1-(-1)^n)/2$

Esta expresión interna al conjunto de los triangulares impares nos permite sumar los primeros, por ejemplo. La he usado con mi función SUMAFUN para demostrar que el número 10425 es la suma de los 25 primeros:

10425=sumafun(1;25;"(2*x-1)*(2*x-1-(-1)^x)/2")

Triangulares pares

No estaría este estudio completo si no se confrontaran los triangulares impares con los pares. Con todo lo estudiado hasta ahora, es fácil de comprender que triangulares pares habrá de dos tipos, alrededor de un múltiplo de 4, condición para que no se simplifique el factor 2. Así que existirán dos tipos de triangulares pares:

T(k)=4k(4k+1)/2=2k(4k+1) El orden de este triangular será N=4k
T(k)=4k(4k-1)/2=2k(4k-1) Su orden será 4k-1 o tipo 4k+3

Así ya tenemos completos los triangulares, pues los de orden tipo 4k+1 y 4k+2 serán impares, y los de 4k y 4k+3, pares. Según lo visto anteriormente, la mitad de cada grupo corresponderá también a números hexagonales.

REGRESOS

REGRESOS 12 - EL PROBLEMA DEL ALBAÑIL

Este problema consiste en encontrar qué números N poseen un cuadrado N^2 que sea suma de cubos consecutivos. Se consideran cubos mayores que 1, pues todos los números triangulares poseen cuadrados que son suma de los primeros cubos, según la conocida fórmula $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots n^3=(n(n+1)/2)^2$, y se desea eliminar un exceso de casos triviales.

Se exige también que el número de cubos sea al menos de tres. Según la página https://oeis.org/A238099, un ejemplo es el de

312^2 = 97344 = 14^3 + 15^3 + ... + 25^3.

El nombre y las condiciones del problema (por ejemplo, que se use el cuadrado del número) vienen de un ejercicio propuesto en un libro de Dudeney:

H. E. Dudeney, Amusements in Mathematics, Nelson, London, 1917, Problem 135.

Lo podemos consultar en

https://archive.org/details/amusementsinmath00dude/page/24/mode/1up?view=theater

Su enunciado es un tanto artificioso, pero sirvió de base para estudiar con más profundidad las sumas de cubos consecutivos. El problema, como vemos, está resuelto, pero aquí estudiaremos los algoritmos que lo pueden resolver.

Hemos catalogado este estudio como regreso, porque complementa otra nuestra de 2013,

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/04/las-sumas-de-cubos-nos-llevan-los.html

En ella estudiábamos las sumas de cubos consecutivos, pero las derivábamos a otras cuestiones, como las ternas pitagóricas. Nos dedicaremos al problema del albañil, pero podremos referirnos a algún resultado contenido en esa entrada de hace años.

Desde hace un tiempo se prefieren en este blog las funciones que devuelven un texto. Son más explicativas y no dificultan búsquedas posteriores si se saben construir. En este caso del problema del albañil adaptaremos específicamente alguna otra función similar. La que presentamos da las soluciones de sumas de cuadrados sólo cuando se excluye el 1 y se exigen al menos tres sumandos. Su código para Excel y Libreoffice Calc es el siguiente:

Function albanil$(n)
Dim i, j, a, n1
Dim s$
Dim novale As Boolean
s = "" ‘Contenedor de la solución
n1 = n ^ 2 ‘Trabajamos con el cuadrado
i = Int(n1 ^ (1 / 3)) ’Máximo cubo contenido en n^2
novale = True ‘Suponemos que no hay solución
While i > 1 And novale ‘Desciende el mayor cubo hasta 2^3
a = i ^ 3 ‘Primera suma de cubos
j = i’Cubo inicial de la suma
While j > 1 And a <= n1 And novale
‘Se llega a la solución de tres cubos o más
If a = n1 And i - j > 2 Then s = s + "Desde" + Str$(j) + " hasta " + Str$(i): novale = False ‘novale ya no es cierto
j = j – 1’Desciende el primer cubo
a = a + j ^ 3’Se incrementa la suma
Wend
i = i – 1’Desciende el último cubo
Wend
If novale Then s = "NO"
albanil = s
End Function

Con esta función y un buscador podemos reproducir la lista publicada de soluciones:

Número N	Su cuadrado	Bases de cubos
312	97344	Desde 14 hasta 25
315	99225	Desde 25 hasta 29
323	104329	Desde 9 hasta 25
504	254016	Desde 28 hasta 35
588	345744	Desde 14 hasta 34
720	518400	Desde 25 hasta 39
2079	4322241	Desde 33 hasta 65
2170	4708900	Desde 96 hasta 100
2940	8643600	Desde 118 hasta 122
4472	19998784	Desde 69 hasta 100
4914	24147396	Desde 81 hasta 108
5187	26904969	Desde 64 hasta 105
5880	34574400	Desde 64 hasta 111
5984	35808256	Desde 120 hasta 136
6630	43956900	Desde 144 hasta 156
7497	56205009	Desde 25 hasta 122
8721	76055841	Desde 153 hasta 170
8778	77053284	Desde 144 hasta 164
9360	87609600	Desde 111 hasta 149
10296	106007616	Desde 133 hasta 164
10695	114383025	Desde 81 hasta 149
11024	121528576	Desde 21 hasta 148

Estos resultados coinciden con los publicados en https://oeis.org/A238099, luego nuestro primer objetivo está cumplido.

Usamos números triangulares

Recordamos la siguiente equivalencia:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots n)^2$$

Según ella, una suma de cubos que no comience con 1 será equivalente a una diferencia de los cuadrados de dos números triangulares.

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+\cdots+(n+k)^3 = \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

Esto nos permite utilizar la diferencia entre los cuadrados de dos números triangulares para identificar las sumas de cubos. Así obtendríamos una variante alternativa a la vista en anteriores párrafos.

Para encontrar los dos números triangulares basta descomponer N en productos de suma por diferencia de dos números, ya que eso equivale a una diferencia de cuadrados. Una vez obtenidos se les exige que sean triangulares y que sus órdenes se diferencien en más de 3 unidades.

Descomponemos N en productos de la misma paridad, N=pq y después definimos a=(p+q)/2 y b=(p-q)/2, con lo que tendríamos los posibles triangulares. Es una técnica que hemos usado a menudo. Después analizamos si son triangulares con las funciones *estriangular* y *ordentriang*, muy usadas en este blog.

```
Function estriangular(n) As Boolean
Dim a

a = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
If a * (a + 1) = 2 * n Then estriangular = True Else
estriangular = False
End Function

Public Function ordentriang(n)
Dim k
If estriangular(n) Then k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
Else k = 0
ordentriang = k
End Function
```

El código de esta función es:

```
Function albanil2$(n)
Dim i, j, p, q, a, b, n1
Dim s$
Dim novale As Boolean

s = "" ‘Contenedor de la solución
n1 = n ^ 2 ’Trabajamos con el cuadrado
i = 1 ‘Primer divisor
novale = True
While i <= n And novale
```

If n1 / i = n1 \ i Then ‘Es divisor
j = n1 / i ‘Divisor complementario
If (j - i) Mod 2 = 0 Then ‘Tienen la misma paridad los factores
p = (i + j) / 2: q = (j - i) / 2 ‘Vamos construyendo la diferencia de cuadrados
If estriangular(p) And estriangular(q) Then
a = ordentriang(p): b = ordentriang(q) ‘Son ambos triangulares
If a - b > 3 And b > 1 Then s = s + "Desde" + Str$(b + 1) + " hasta " + Str$(a): novale = False
End If
End If
End If
i = i + 1
Wend
If novale Then s = "NO"
albanil2 = s
End Function

En la entrada a la que regresamos hoy se termina considerando que los dos triangulares de la diferencia de cuadrados y el número N estudiado forman una terna pitagórica, pero este tema es preferible leerlo en la entrada original.

Con esto cumplimos nuestro objetivo, que era sólo algorítmico.

REGRESOS 13 - DIFERENCIA DE POTENCIAS

En este blog hemos tratado frecuentemente las diferencias de cuadrados y, recientemente, las de cubos. Parecía conveniente intentar una generalización a pares de potencias de cualquier exponente.

Para ello nos basaremos en la conocida fórmula

$$b^k - a^k = (b-a)(b^{k-1} + a^1 b^{k-2} + a^2 b^{k-3} + \cdots + a^{k-1})$$

Para nuestro estudio es preferible expresar la diferencia de potencias como $(a+h)^k - a^k$

$$(a+h)^k - a^k = \binom{k}{1} a^{k-1} h + \binom{k}{2} a^{k-2} h^2 + \cdots + h^k$$

Observamos que se puede extraer factor común la diferencia h:

$$(a+h)^k - a^k = h\left(\binom{k}{1} a^{k-1} + \binom{k}{2} a^{k-2} h + \cdots + h^{k-1}\right)$$

Expresión de un número N como diferencia de potencias

Si igualamos la anterior expresión a N, llegaremos a una conclusión interesante:

Si un número entero positivo N es expresable como diferencia de potencias, $(a+h)^k$ - a^k, la diferencia h entre las bases ha de ser divisor de N

Esto nos da una base segura para las búsquedas, pero es que, además, con esa fórmula, tal como efectuamos para los cubos (ver mi entrada http://hojaynumeros.blogspot.com/2024/09/diferencias-de-cubos-enteros-positivos.html), obtenemos una cota para el valor de **a**:

Sería **$ka^{k-1}h$** menor que la diferencia de potencias, o lo que es igual, que **N**. Así que tendríamos:

$$ka^{k-1}h < N \text{ , } luego\ a < \sqrt[k-1]{\frac{N}{kh}}$$

Con esta cota y el carácter de divisor de **h** ya podemos intentar determinar si un número **N** es expresable o no como diferencia de potencias de exponente dado.

Ya se vio en la entrada enlazada que en el caso de los cubos la acotación era

$$a < \sqrt{\frac{N}{3k}}$$

Una idea sencilla es que si un número es diferencia de dos potencias de exponente **k**, si lo multiplicamos por otro número $\mathbf{b^k}$ obtendremos otro número con la misma propiedad. De aquí deducimos que este tipo de números forma una sucesión infinita para cualquier valor de k, ya que el primero siempre existe.

Función de búsqueda

Con esta base teórica podemos construir una sencilla función de búsqueda:

Function espotencia_igual(n, k)’Parámetros número y exponente
Dim a, h, tope
Dim s$

s = "" ’Contenedor de soluciones
For h = 1 To n / 2 ‘Posibles valores de h
If n / h = n \ h Then ‘Es divisor
tope = Int((n / k / h) ^ (1 / (k - 1))) ‘Tope calculado para h

For a = 1 To tope 'Si es diferencia de potencias, se publica

If (a + h) ^ k - a ^ k = n Then s = s + "# " + Str$(a) + ", " + Str$(a + h)

Next a

End If

Next h

If s = "" Then s = "NO"

espotencia_igual = s

End Function

Por ejemplo, para k=4 obtenemos todos los números expresables como b^4-a^4 (y por tanto, también como m^2-n^2) y con divisor diferencia de cuadrados. Igualmente, por el Teorema de Fermat, no existirá entre ellos ninguna cuarta potencia:

Número N	Valores de a y a+h
15	# 1, 2
65	# 2, 3
80	# 1, 3
175	# 3, 4
240	# 2, 4
255	# 1, 4
369	# 4, 5
544	# 3, 5
609	# 2, 5
624	# 1, 5
671	# 5, 6
1040	# 4, 6
1105	# 6, 7
1215	# 3, 6
1280	# 2, 6
1295	# 1, 6
1695	# 7, 8
1776	# 5, 7
2145	# 4, 7

Están publicados en https://oeis.org/A147857

En esta sucesión y en las que seguirán sólo podrán aparecer números primos si h=1, según las fórmulas de los primeros párrafos de este apartado. En este caso de k=4 no aparecerán, porque b^4-a^4 es múltiplo de b^2-a^2, que no valdrá 1 para b>a. Ocurrirá lo mismo en todos los casos en los que el exponente sea número compuesto.

Según un comentario de OEIS, no figuran cuadrados en esta sucesión. Hemos visto alguna demostración similar y resulta larga y complicada.

Para k=5 obtenemos:

Número N	Valores de a y a+h
31	# 1, 2
211	# 2, 3
242	# 1, 3
781	# 3, 4
992	# 2, 4
1023	# 1, 4
2101	# 4, 5
2882	# 3, 5
3093	# 2, 5
3124	# 1, 5
4651	# 5, 6
6752	# 4, 6
7533	# 3, 6
7744	# 2, 6
7775	# 1, 6
9031	# 6, 7

Al ser el exponente primo impar, sí pueden figurar primos en esta sucesión, para h=1. Los primeros son estos:

Número N	Valores de a y a+h
31	# 1, 2
211	# 2, 3
4651	# 5, 6

Tal como se comentó ya, el valor de h ha de ser 1, o bien a y b consecutivos.

Están publicados en https://oeis.org/A121616 , y ahí se sugiere el nombre de primos "pentan", por analogía con los primos "cubanos", ya estudiados en este blog.

También figuran cuadrados, como 7744=88^2=6^5-2^5.

Así podríamos seguir con otros valores de exponentes.

Versión en PARI

Sabemos que las hojas de cálculo no pueden manejar bien los números grandes. Para ello son mejores otras herramientas, como el lenguaje PARI. Hemos creado una rutina que devuelve las formas, si existen, de expresar un número como diferencia de potencias en varios casos de exponentes. En el ejemplo lo hemos aplicado al número 7744 y exponentes en un rango de 3 a 20, pero todo eso se puede cambiar.

n=7744;for(k=3,20,for(h=1,n/2,if(n%h==0,tope=(n/h/k)^(1/(k-1));for(a=1,tope,if((a+h)^k-a^k==n,print("# n=",n," k=",k," a=",a," b=",a+h))))))

Nos devuelve algo ya conocido:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
(18:54) gp > \r pote_igual.txt
# n=7744 k=5 a=2 b=6
```

Nos indica que 7744 se expresa con exponente 5 como diferencia 6^5-2^5.

Si no nos importa dejar a nuestro equipo varios minutos calculando, podemos investigar todo un rango de números, con esta otra versión:

for(n=1000,2000,for(k=4,20,for(h=1,n/2,if(n%h==0,tope=(n/h/k)^(1/(k-1));for(a=1,tope,if((a+h)^k-a^k==n,print("# n=",n," k=",k," a=",a," b=",a+h)))))))

Aquí le hemos añadido al código un bucle entre 1000 y 2000, con este resultado:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
(18:54) gp > \r pote_igual.txt
# n=7744 k=5 a=2 b=6
(18:55) gp > \r pote_igual.txt
# n=1023 k=5 a=1 b=4
# n=1023 k=10 a=1 b=2
# n=1040 k=4 a=4 b=6
# n=1105 k=4 a=6 b=7
# n=1215 k=4 a=3 b=6
# n=1280 k=4 a=2 b=6
# n=1295 k=4 a=1 b=6
# n=1695 k=4 a=7 b=8
# n=1776 k=4 a=5 b=7
```

Destaca el número 1023, y es fácil adivinar la razón.

REGRESOS 14 – BASES DE CUBOS CON SUMA CERO

Hace unos años publiqué en este blog un estudio sobre las sumas de cubos cuyas bases suman cero. Lo restringí a las sumas de tres cubos.

Releyendo la entrada he visto que le sobra mucho material y que algunos aspectos de la cuestión no están bien explicados. Regresamos a ella para completarla y quitarle cuestiones poco interesantes.

Comenzaba así:

Otro estudio más que se basa en mis cálculos en Twitter (@connumeros). El día 22/3/2020 publiqué:

22320 se puede representar mediante dos sumas de cubos cuyas bases suman 0:

22320=(-16)^3+(-15)^3+31^3, con 31+(-15)+(-16)=0
22320 =(-60)^3+(-2)^3+62^3 y 62+(-2)+(-60)=0

No son muchos relativamente los números que cumplen una propiedad similar. Comenzaremos con aquellos que presenten suma de cubos cuyas bases sumen cero al menos una vez. El primero es el 6, que se puede representar como 6=2^3+(-1)^3+(-1)^3, con 2+(-1)+(-1)=0

Función adecuada

Todo el planteamiento del problema se basa en que N sea entero positivo, pues el caso contrario es equivalente en su planteamiento. Para que la suma de bases sea cero y la de cubos positiva deberá existir un cubo positivo y dos negativos, pues en ese caso la base del positivo será la suma de las los negativos, es decir, que el esquema de la suma sería (p+q)^3-p^3-q^3. Cualquier otro planteamiento daría suma no nula o negativa.

Para la búsqueda que sigue es preferible llamar p a la base del cubo positivo y a las negativas -q y –(p-q). Cualquier otra nomenclatura también nos serviría. Así que trabajaremos con el esquema $N=p^3-q^3-(p-q)^3$, con p>q

Si partimos de esa igualdad, desarrollando, $N=p^3-q^3-(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3)=3p^2q-3pq^2=3pq(p-q)$. Equivale a afirmar que N es el triple del producto de los valores absolutos de las bases de los cubos

Esta expresión 3pq(p-q) nos servirá para construir una parada en la búsqueda, exigiendo que $3pq(p-q)\le N$ para cada valor de p y q y que en el caso de la igualdad haga finalizar la búsqueda. Es más rápido así. También nos indica que N ha de ser múltiplo de 6, ya que pq(p-q) es siempre par.

Versión para Excel

La siguiente función actúa sobre un número natural y devuelve una cadena de texto, que puede estar vacía o contener la primera solución que se encuentre. Este es su listado:

```
Function cubossum(n)
Dim i, j, a
Dim es
Dim s$

If n Mod 6 <> 0 Then cubossum = "": Exit Function
'Da salida si no es múltiplo de 6
es = False 'Parará el proceso si se encuentra solución
i = 1  'Contador para la variable p
s = ""  'Cadena de texto para el resultado
```

a = 0 ‘Contendrá la suma de cubos

While a <= n And Not es ‘Se para si se llega a ***n*** o se encuentra una suma

j = 1 ‘Contador de la variable ***q***

While j < i And Not es

a = 3 * i * j * (i - j) ‘Expresión buscada

If a = n Then es = True: s = s + Str$(j) + Str$(i) ‘Se encuentra solución

j = j + 1

Wend

i = i + 1

Wend

cubossum = s

End Function

Con esta función podemos organizar una búsqueda de aquellos números que presentan la descomposición buscada. Los primeros son:

6	1 2
18	1 3
36	1 4
48	2 4
60	1 5
90	2 5
126	1 7
144	2 6
162	3 6
168	1 8
210	2 7
216	1 9
252	3 7
270	1 10
288	2 8
330	1 11

Cada número encontrado viene acompañado del valor de q y el de p. Así, para 210, q=2 p=7, luego 210 = $7^3-2^3-(7-2)^3 = 7^3-2^3-5^3$ = 343-8-125 = 210

Un listado más completo es

6, 18, 36, 48, 60, 90, 126, 144, 162, 168, 210, 216, 252, 270, 288, 330, 360, 378, 384, 396, 468, 480, 486, 540, 546, 594, 630, 720, 750, 792, 816, 858, 918, 924, 972, 990, 1008, 1026, 1140, 1152, 1170, 1260, 1296, 1344, 1386, 1404, 1518, 1530, 1560, 1620, 1638, 1656, 1680, 1728, 1800…

Hemos publicado esta sucesión en
https://oeis.org/A333821

Todo esto se puede traducir al lenguaje PARI:

```
ok(n) =
{my(i=1,a=0,m=0,j);if(n%6==0,while(a<=n&&m==0,j=
1;while(j<i&&m==0,a=3*i*j*(i-
j);if(a==n,m=1);j+=1);i+=1)); m}
{for(p=1,2000,if(ok(p),print1(p,", ")))}
```

Si lo pruebas en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html obtendrás la lista de los primeros números que cumplen esta descomposición:

6, 18, 36, 48, 60, 90, 126, 144, 162, 168, 210, 216, 252, 270, 288, 330, 360, 378, 384, 396, 468, 480, 486, 540, 546, 594, 630, 720, 750, 792, 816, 858, 918, 924, 972, 990, 1008, 1026, 1140, 1152, 1170, 1260, 1296, 1344, 1386, 1404, 1518, 1530, 1560, 1620, 1638, 1656, 1680, 1728, 1800,…

Algoritmo más rápido

En el anterior planteamiento no se aprovecha el hecho de que p, q y p-q son divisores de N/3 y por eso en los bucles de búsqueda se prueban demasiados valores inútiles. En la siguiente versión se consigue más velocidad, y se han añadido al resultado todas las posibilidades de forma más clara, así como el añadido al principio del número de soluciones, Este sería el listado de la nueva función:

Function cubossum2$(n)
Dim p, q, r, m
Dim s$

If n Mod 6 <> 0 Then cubossum2 = "NO": Exit Function
s = " sol: "
m = 0 ‘Nuevo: contador de soluciones
For p = 2 To n / 3

If n / p = n \ p Then ‘Sólo se admite **p** si es divisor

For q = 1 To p - 1
If n / q = n \ q Then ’ También **q** ha de ser divisor
r = p – q ‘Tercera base de cubos
‘Prueba para identificar una solución y su incorporación
If n = 3 * p * q * r And r <= q Then m = m + 1: s = s + " # " + ajusta(p) + "^3+(-" + ajusta(q) + ")^3+(-" + Str$(r) + ")^3"
End If
Next q

End If
Next p
s = Str$(m) + s ’Se incorpora el contador de soluciones
cubossum2 = s
End Function

Así quedan las primeras soluciones, con más información que en la función anterior:

Número N	Soluciones
6	1 sol: # 2^3+(-1)^3+(- 1)^3
18	1 sol: # 3^3+(-2)^3+(- 1)^3
36	1 sol: # 4^3+(-3)^3+(- 1)^3
48	1 sol: # 4^3+(-2)^3+(- 2)^3
60	1 sol: # 5^3+(-4)^3+(- 1)^3
90	2 sol: # 5^3+(-3)^3+(- 2)^3 # 6^3+(-5)^3+(- 1)^3
126	1 sol: # 7^3+(-6)^3+(- 1)^3
144	1 sol: # 6^3+(-4)^3+(- 2)^3
162	1 sol: # 6^3+(-3)^3+(- 3)^3
168	1 sol: # 8^3+(-7)^3+(- 1)^3
210	1 sol: # 7^3+(-5)^3+(- 2)^3
216	1 sol: # 9^3+(-8)^3+(- 1)^3
252	1 sol: # 7^3+(-4)^3+(- 3)^3
270	1 sol: # 10^3+(-9)^3+(- 1)^3
288	1 sol: # 8^3+(-6)^3+(- 2)^3
330	1 sol: # 11^3+(-10)^3+(- 1)^3
360	1 sol: # 8^3+(-5)^3+(- 3)^3
378	1 sol: # 9^3+(-7)^3+(- 2)^3
384	1 sol: # 8^3+(-4)^3+(- 4)^3
396	1 sol: # 12^3+(-11)^3+(- 1)^3
468	1 sol: # 13^3+(-12)^3+(- 1)^3
480	1 sol: # 10^3+(-8)^3+(- 2)^3
486	1 sol: # 9^3+(-6)^3+(- 3)^3
540	1 sol: # 9^3+(-5)^3+(- 4)^3
546	1 sol: # 14^3+(-13)^3+(- 1)^3
594	1 sol: # 11^3+(-9)^3+(- 2)^3
630	2 sol: # 10^3+(-7)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-14)^3+(- 1)^3
720	3 sol: # 10^3+(-6)^3+(- 4)^3 # 12^3+(-10)^3+(- 2)^3 # 16^3+(-15)^3+(- 1)^3

Ahora se perciben mejor las soluciones múltiples, que serán objeto del siguiente apartado.

Resultados múltiples

Algunos de estos números presentan varias descomposiciones. El primero es 90, que admite las dos sumas 90=5^3-3^3-2^3 y 90=6^3-5^3-1^3. Después le siguen estos:

Número N	Soluciones
90	2 sol: # 5^3+(-3)^3+(- 2)^3 # 6^3+(-5)^3+(- 1)^3
630	2 sol: # 10^3+(-7)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-14)^3+(- 1)^3
720	3 sol: # 10^3+(-6)^3+(- 4)^3 # 12^3+(-10)^3+(- 2)^3 # 16^3+(-15)^3+(- 1)^3
1170	2 sol: # 13^3+(-10)^3+(- 3)^3 # 15^3+(-13)^3+(- 2)^3
1260	2 sol: # 12^3+(-7)^3+(- 5)^3 # 21^3+(-20)^3+(- 1)^3
1386	2 sol: # 14^3+(-11)^3+(- 3)^3 # 22^3+(-21)^3+(- 1)^3
2430	2 sol: # 15^3+(-9)^3+(- 6)^3 # 18^3+(-15)^3+(- 3)^3
2640	2 sol: # 16^3+(-11)^3+(- 5)^3 # 22^3+(-20)^3+(- 2)^3
3024	2 sol: # 16^3+(-9)^3+(- 7)^3 # 18^3+(-14)^3+(- 4)^3
3060	2 sol: # 17^3+(-12)^3+(- 5)^3 # 20^3+(-17)^3+(- 3)^3
3168	2 sol: # 24^3+(-22)^3+(- 2)^3 # 33^3+(-32)^3+(- 1)^3
3366	2 sol: # 17^3+(-11)^3+(- 6)^3 # 34^3+(-33)^3+(- 1)^3
3570	2 sol: # 17^3+(-10)^3+(- 7)^3 # 35^3+(-34)^3+(- 1)^3
4446	2 sol: # 19^3+(-13)^3+(- 6)^3 # 39^3+(-38)^3+(- 1)^3

Si adaptamos a PARI obtenemos un listado más extenso:

90, 630, 720, 1170, 1260, 1386, 2430, 2640, 3024, 3060, 3168, 3366, 3570, 4446, 5040, 5760, 5940, 6210, 6300, 6930, 8910, 9360, 10080, 11088, 11250, 12480, 12870, 12960, 14490, 14742, 16380, 17010, 18018, 18270, 18810, 19440, 19890, 21120, 22140, 22320, 23310, 24192, 24480, 24570, 25344, 25740, 26928, 27360, 27720, 28560, 29700, 30870, 31590, 31920, 34020, 35568, 36630, 37296, 37422, 39330, 40320, 41328, 42120, 42840, 43056, 44460, 45408, 46080, 47250, 47520, 49680,…

Se ha usado el código

ok(n) = {my(p,q,r,m=0);if(n%6==0,for(p=2,n/2,if(n%p==0,for(

```
q=1,p-1,if(n%q==0,r=p-
q;if(n==3*p*q*r&&r<=q,m+=1)))))); m}
{for(p=1,30000,h=ok(p);if(h>1,print1(p,", ")))}
```

Destaca el 720 con tres descomposiciones:
720=10^3-6^3-4^3=12^3-10^3-2^3=16^3-15^3-1^3
El primero con 4 es 19440: 19440=30^3+(-18)^3+(-12)^3=36^3+(-30)^3+(-6)^3=48^3+(-45)^3+(-3)^3=81^3+(-80)^3+(-1)^3

Con cinco hemos obtenido el 55440, equivale a estas sumas:

55440=42^3+(-22)^3+(-20)^3=44^3+(-30)^3+(-14)^3=55^3+(-48)^3+(-7)^3=70^3+(-66)^3+(-4)^3=80^3+(-77)^3+(-3)^3

Lo dejamos aquí, porque nuestros instrumentos de cálculo se ralentizan con números grandes.

Sumas con cuatro cubos

Algunas consideraciones relativas a las sumas de tres cubos cuyas bases suman cero son válidas para el caso de las sumas de cuatro cubos. La más importante es la de que el número que equivale a la suma de cubos ha de ser múltiplo de 6.

Distinguiremos dos casos, según sean los signos de las bases de los cubos.

Dos positivos y dos negativos

Si el esquema de los cuatro cubos es el de dos positivos y dos negativos, se puede intentar un estudio algebraico no muy complicado. Llamamos k a la suma de las dos bases positivas, y a ellas, p y k-p. Igualmente, podemos llamar –r y r-k a las negativas. Quedaría, pues, el valor de N como

$N=p^3+(k-p)^3-r^3-(k-r)^3$
$N=p^3+k^3-p^3-3k^2p+3kp^2-r^3-k^3+r^3+3k^2r-3kr^2$
$N=-3k^2p+3kp^2+3k^2r-3kr^2=3k^2(r-p)+3k(p^2-r^2)=3k(k(r-p)+(p-r)(p+r))$

$\mathbf{N=3k(p-r)(p+r-k)}$

Llegaríamos a una situación similar a la del caso de tres cubos, pero con un parámetro más. Por ejemplo:

30=6^3+4^3-5^3-5^3, y p=6, k=10, k-p=4, r=5 y k-r=5
30=3*10*(6-5)*(6+5-10)=30*1*1=30

30 también es igual a $4^3+1^3-3^3-2^3$, y queda

30=3*5*(4-2)(4+2-5)=3*5*2*1=30

Esto abre camino a una función similar a la usada para tres cubos, pero con tres bucles de búsqueda en lugar de dos. El número N también ha de ser múltiplo de 6, porque k(p-r)(p+r-k) siempre es par.
Podemos usar esta función:

```
Function cubossum4$(n)
Dim p, q, r, k
Dim s$

s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum4 = "NO": Exit Function
For k = 2 To n / 2
If n / k = n \ k Then
For p = 1 To k / 2 - 1
q = k - p
For r = 1 To k / 2
If n = 3 * k * (p - r) * (p + r - k) Then s = s + " # " + ajusta(p) + "^3+" + ajusta(q) + "^3-" + Str$(r) + "^3-" + Str$(k - r) + "^3"
Next r
Next p
End If
Next k
If s = "" Then s = "NO"
cubossum4 = s
End Function
```

No necesita comentarios, porque es similar a las anteriores.

Con ella conseguimos un listado de soluciones, todas ellas con dos cubos positivos y dos negativos:

Número N	Soluciones
12	# 1^3+3^3- 2^3- 2^3
18	# 2^3+4^3- 3^3- 3^3
24	# 3^3+5^3- 4^3- 4^3
30	# 1^3+4^3- 2^3- 3^3 # 4^3+6^3- 5^3- 5^3
36	# 5^3+7^3- 6^3- 6^3
42	# 2^3+5^3- 3^3- 4^3 # 6^3+8^3- 7^3- 7^3
48	# 7^3+9^3- 8^3- 8^3
54	# 1^3+5^3- 2^3- 4^3 # 3^3+6^3- 4^3- 5^3 # 8^3+10^3- 9^3- 9^3
60	# 9^3+11^3- 10^3- 10^3
66	# 4^3+7^3- 5^3- 6^3 # 10^3+12^3- 11^3- 11^3
72	# 1^3+5^3- 3^3- 3^3 # 2^3+6^3- 3^3- 5^3 # 11^3+13^3- 12^3- 12^3
78	# 5^3+8^3- 6^3- 7^3 # 12^3+14^3- 13^3- 13^3
84	# 1^3+6^3- 2^3- 5^3 # 13^3+15^3- 14^3- 14^3
90	# 3^3+7^3- 4^3- 6^3 # 6^3+9^3- 7^3- 8^3 # 14^3+16^3- 15^3- 15^3
96	# 2^3+6^3- 4^3- 4^3 # 15^3+17^3- 16^3- 16^3
102	# 7^3+10^3- 8^3- 9^3 # 16^3+18^3- 17^3- 17^3
108	# 2^3+7^3- 3^3- 6^3 # 4^3+8^3- 5^3- 7^3 # 17^3+19^3- 18^3- 18^3
114	# 8^3+11^3- 9^3- 10^3 # 18^3+20^3- 19^3- 19^3

Un cubo positivo y tres negativos

El otro caso de cuatro cubos presentaría este otro esquema

$$\mathbf{N=(p+q+r)^3-p^3-q^3-r^3}$$

Esto obliga a que N sea par, pues así es para todos los juegos de paridad de p, q y r.

También es múltiplo de tres, ya que desarrollando esa diferencia llegamos a

$N=3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+3y^2z+3yz^2$

En este caso no es seguro que algún parámetro sea divisor de N, por lo que la búsqueda recorrerá más números. Sí ocurrirá que x, y, z serán menores que N/3. Podemos usar esta función:

```
Function cubossum3(n)
Dim i, j, k
Dim s$
s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum3 = "NO": Exit Function
For i = 1 To n / 3
For j = 1 To i
For k = 1 To j
If (i + j + k) ^ 3 - i ^ 3 - j ^ 3 - k ^ 3 = n Then
s = s + "## " + Str$(i + j + k) + "^3-" + Str$(i) + "^3-" + Str$(j) + "^3-" + Str$(k) + "^3"
End If
Next k
Next j
Next i
If s = "" Then cubossum3 = "NO" Else cubossum3 = s
End Function
```

También en este caso dispondremos de bastantes resultados:

Número N	Soluciones
24	## 3^3- 1^3- 1^3- 1^3
54	## 4^3- 2^3- 1^3- 1^3
96	## 5^3- 3^3- 1^3- 1^3
108	## 5^3- 2^3- 2^3- 1^3
150	## 6^3- 4^3- 1^3- 1^3
180	## 6^3- 3^3- 2^3- 1^3
192	## 6^3- 2^3- 2^3- 2^3
216	## 7^3- 5^3- 1^3- 1^3
270	## 7^3- 4^3- 2^3- 1^3
288	## 7^3- 3^3- 3^3- 1^3
294	## 8^3- 6^3- 1^3- 1^3
300	## 7^3- 3^3- 2^3- 2^3
378	## 8^3- 5^3- 2^3- 1^3
384	## 9^3- 7^3- 1^3- 1^3
420	## 8^3- 4^3- 3^3- 1^3
432	## 8^3- 4^3- 2^3- 2^3
450	## 8^3- 3^3- 3^3- 2^3
486	## 10^3- 8^3- 1^3- 1^3
504	## 9^3- 6^3- 2^3- 1^3
576	## 9^3- 5^3- 3^3- 1^3
588	## 9^3- 5^3- 2^3- 2^3
600	## 9^3- 4^3- 4^3- 1^3## 11^3- 9^3- 1^3- 1^3
630	## 9^3- 4^3- 3^3- 2^3
648	## 9^3- 3^3- 3^3- 3^3## 10^3- 7^3- 2^3- 1^3
726	## 12^3- 10^3- 1^3- 1^3

Hemos avanzado en la tabla hasta descubrir soluciones múltiples.

Caso general

Si no nos apetece el estudio algebraico, podemos usar tan solo que las bases sean, en valor absoluto, menores que N/3.

Buscaremos tres cubos de base entera cuya suma se aproxime a N. A las tres bases de esa suma le añadiremos otra que con ellas forme suma cero. Si los cuatro cubos suman N, habremos resuelto la búsqueda. Parece lento, pero no es tanto como se podría esperar.

```
Function cubossum0(n)
Dim i, j, k, h
Dim s$

s = ""
If n Mod 6 <> 0 Then cubossum0 = "NO": Exit Function
'Usamos tres bucles para las tres primeras bases i, j y k
For i = -n / 3 To n / 3
For j = i To n / 3
For k = j To n / 3
h = -i - j - k 'h será la cuarta base para suma nula
If i ^ 3 + j ^ 3 + k ^ 3 + h ^ 3 = n And h >= k Then
'Se cumple la condición
s = s + "# " + Str$(i) + ", " + Str$(j) + ", " + Str$(k) + ", " + Str$(h)
End If
Next k
Next j
Next i
```

If s = "" Then cubossum0 = "NO" Else cubossum0 = s
End Function

Con esta función obtenemos todas las soluciones al problema, las más frecuentes, del tipo de dos cubos positivos y dos negativos, el resto, como el 108, con un solo cubo positivo e, incluso, casos de tres cubos, cuando uno de ellos resulte nulo. Estos son los primeros resultados:

Número N	Soluciones
6	# -1, -1, 0, 2
12	# -2, -2, 1, 3
18	# -3, -3, 2, 4# -2, -1, 0, 3
24	# -4, -4, 3, 5# -1, -1, -1, 3
30	# -5, -5, 4, 6# -3, -2, 1, 4
36	# -6, -6, 5, 7# -3, -1, 0, 4
42	# -7, -7, 6, 8# -4, -3, 2, 5
48	# -8, -8, 7, 9# -2, -2, 0, 4
54	# -9, -9, 8, 10# -5, -4, 3, 6# -4, -2, 1, 5# -2, -1, -1, 4
60	# -10, -10, 9, 11# -4, -1, 0, 5
66	# -11, -11, 10, 12# -6, -5, 4, 7
72	# -12, -12, 11, 13# -5, -3, 2, 6# -3, -3, 1, 5
78	# -13, -13, 12, 14# -7, -6, 5, 8
84	# -14, -14, 13, 15# -5, -2, 1, 6
90	# -15, -15, 14, 16# -8, -7, 6, 9# -6, -4, 3, 7# -5, -1, 0, 6# -3, -2, 0, 5
96	# -16, -16, 15, 17# -4, -4, 2, 6# -3, -1, -1, 5
102	# -17, -17, 16, 18# -9, -8, 7, 10
108	# -18, -18, 17, 19# -7, -5, 4, 8# -6, -3, 2, 7# -2, -2, -1, 5
114	# -19, -19, 18, 20# -10, -9, 8, 11
120	# -20, -20, 19, 21# -6, -2, 1, 7# -5, -5, 3, 7
126	# -21, -21, 20, 22# -11, -10, 9, 12# -8, -6, 5, 9# -6, -1, 0, 7# -4, -3, 1, 6
132	# -22, -22, 21, 23# -7, -4, 3, 8

Con esto finalizamos las búsquedas

REGRESOS 15 - GENERACIONES CON CIFRAS Y POTENCIAS

En una entrada antigua de mi blog se invitaba a buscar igualdades similares a la siguiente:

$88^2+33^2=8833$

En aquella ocasión se dio más protagonismo a seguidores del blog, pero los tiempos han cambiado y ahora es preferible ampliar el tema algorítmicamente, ya que existen menos interacciones en el mismo que entonces.

Por otra parte, puede ser una buena ocasión para ampliar las búsquedas de este tipo de casualidades. En la entrada antigua sugeríamos la existencia de otra solución de cuatro cifras, pero pedíamos buscarla con más. También, por otra parte, a partir del año 2025 nos interesan las igualdades del tipo $(20+25)^2=2025$. Unificaremos ambas cuestiones.

Usaremos una función que admita como parámetros el número a buscar, los exponentes a los que se elevan los trozos y el tipo de descomposición, si es *a^k+b^k* o bien *(a+b)^k*.

Función de búsqueda

En el listado que sigue usamos la función AJUSTA en lugar de STR$ para eliminar el espacio en blanco que Excel puede añadir a las cadenas.

A la primera versión de la función la denominaremos CIFRAS_POTE2, para indicar que el número se descompone en dos trozos. Ya se verá en qué direcciones se puede generalizar.

Function cifras_pote2(n, tope, tipo)
'El tope es el maximo exponente - El tipo es si se toma a^k+b^k+...o bien (a+b+c...)^k
Dim i, k, a, b, t
Dim s$, v$

s = ""
v = ajusta(n) ‘Convertimos **n** en texto
t = Len(v$) ‘Número de cifras
For i = 1 To t – 1 ‘Punto de corte
a = Val(Left(v, i)) ‘Los dos trozos
b = Val(Right(v, t - i))
For k = 2 To tope ‘Distintos exponentes
If tipo = 1 Then ‘Tipo 1: a^k+b^k
If potencia(a, k) + potencia(b, k) = n Then s = s + "## " + ajusta(a) + "^" + ajusta(k) + "+" + ajusta(b) + "^" + ajusta(k)
Else ‘Tipo 2: (a+b)^k

```
If potencia(a + b, k) = n Then s = s + "## (" + ajusta(a) + "+" + ajusta(b) + ")^" + ajusta(k)
End If
Next k
Next i
cifras_pote2 = s
End Function
```

Si usamos esta función con tope 2 y tipo 1 obtendremos la solución conocida y otra más de cuatro cifras:

Número	Potencias de trozos
1233	## 12^2+33^2
8833	## 88^2+33^2

Si usamos el tipo 2, obtenemos otras expresiones, una de ellas la popular del 2025:

Número	Potencias de sumas de trozos
2025	## (20+25)^2
3025	## (30+25)^2
9801	## (98+1)^2

Con tres cifras se obtienen

Número	Potencias de trozos
100	## 10^2+0^2
101	## 10^2+1^2

Con el segundo tipo sólo existe (10+0)^2=100

Con cinco cifras sólo se encuentran ejemplos triviales en el tipo 1:

Número	Potencias de trozos
10000	## 100^2+0^2
10001	## 100^2+1^2
10100	## 10^2+100^2

En el tipo 2 sí aparece este ejemplo: 88209=(88+209)^2

Por completar, hay que destacar que el único ejemplo de dos cifras es del tipo 2: (8+1)^2=81

Con cubos, además de las trivialidades, es interesante el ejemplo 407=4^3+0^3+7^3

No parece que el tema dé más de sí. Teniendo la herramienta, con un poco de paciencia se pueden explorar otros números de cifras y exponentes.

Descomposición en todas las cifras

Es interesante también la búsqueda de las igualdades entre un número y potencias de todas sus cifras, como la ya conocida 407=4^3+0^3+7^3.

Para encontrar estos casos cambiaremos un poco la estructura de la función. Ahora basta con que devuelva el valor del número, pues la descomposición será siempre la misma. Se propone esta función:

Function cifras_pote(n, exponente, tipo)
‘El tipo es idéntico al de la versión anterior
Dim i, a, b, t, c
Dim s$, v$

s = "" ‘Soluciones
v = ajusta(n) ‘El número como texto
t = Len(v$)
b = 0
For i = 1 To t
a = Val(Mid$(v, i, 1)) ‘Se recorren las cifras
‘Solución según el tipo (suma de potencias o potencia de la suma)
If tipo = 1 Then b = b + potencia(a, exponente) Else b = b + a
Next i
c = 0
If tipo = 1 And b = n Or tipo = 2 And potencia(b, exponente) = n Then c = n
cifras_pote = c ‘Devuelve el número o cero si no hay solución
End Function

Con esta función se descubren más ejemplos interesantes. Vemos algunos:

Número	Potencia de suma de cifras
512	(5+1+2)^3
4913	(4+9+1+3)^3
5832	(5+8+3+2)^3

Número	Suma de potencias de cifras
1634	1^4+6^4+3^4+4^4
8208	8^4+2^4+0^4+8^4
9474	9^4+4^4+7^4+4^4

Y he seguido jugando con el tema:

54748=5^5+4^5+7^5+4^5+8^5

92727=9^5+2^5+7^5+2^5+7^5

93084=9^5+3^5+0^5+8^5+4^5

17576=(1+7+5+7+6)^3

19683=(1+9+6+8+3)^3