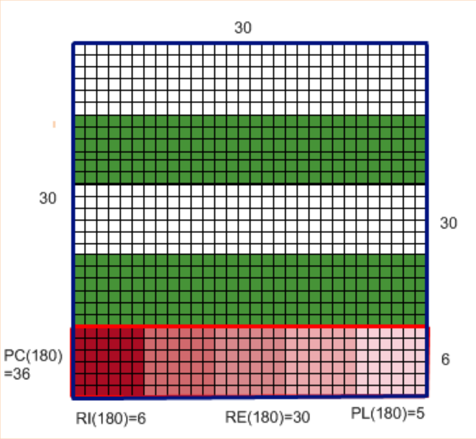
Funciones multiplicativas



Edición Octubre-2012

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Este es el documento más teórico de los publicados hasta la fecha en la colección. La razón es que las distintas entradas de este tema han formado parte de una planificación remota en lugar de seguir las informaciones de actualidad. También puede resultar de un nivel algo superior al de otros, pero no presenta grandes dificultades para su comprensión.

En él se incluyen ejemplos de funciones multiplicativas poco frecuentes en los textos, pero que pueden resultar muy útiles para la comprensión de los conceptos.

Como advertiremos en todos los documentos de esta colección, el material presentado no contiene desarrollos sistemáticos, ni pretende ser un manual teórico. En cada tema se incluirán cuestiones curiosas o relacionadas con las hojas de cálculo, con la única pretensión de explicar algunos conceptos de forma amena.

TABLA DE CONTENIDO

DEFINICIÓN Y CATÁLOGO

FUNCIONES ARITMÉTICAS

Son funciones reales o complejas definidas sobre el conjunto de los números naturales.

FUNCIONES MULTIPLICATIVAS

Una función aritmética es multiplicativa cuando para todo par a y b de números naturales **primos entre sí** se cumple que

F(a*b)=F(a)*F(b) (si (a,b)=1, siendo (a,b) el MCD de ambos números)

Si esto se cumple aunque los números no sean coprimos, llamaremos a la función completamente multiplicativa.

La expresión de una función multiplicativa depende tan sólo de sus factores primos (y sus exponentes). Usaremos esta notación en todos los ejemplos:

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \ldots {p_k}^{a_k}$$

FUNCIONES MULTIPLICATIVAS MÁS USADAS

Divisor D(x) o Tau

Cuenta el número de divisores de N

$$\mathbf{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \ldots (1 + a_k)}$$

Sigmas

Llamamos función sigma-k(N) a la suma de todos los divisores de N elevados al exponente k

$$\sigma_k(N) = \sum_{d \vdots n} d^k$$

Su expresión respecto a la factorización es

$$\sigma_k(N) = \prod \frac{{p_i}^{(e_i+1)k} - 1}{{p_i}^k - 1}$$

Parte cuadrada y parte libre

La parte cuadrada de un número N, PC(N), es el mayor cuadrado que divide a N. Su expresión respecto a un factor primario es

$$PC(p^r) = p^{r - r\ MOD\ 2}$$

La parte libre PL(N) es el cociente entre un número y su parte cuadrada.

$$PL(p^r) = p^{r\ MOD\ 2}$$

Radical de N es el mayor divisor de N libre de cuadrados. Equivale al producto de todos sus factores primos elevados a la unidad.

Menor múltiplo cuadrado MMC(N): Como indica su nombre, es el menor cuadrado divisible entre N

$$MMC(p^r) = p^{r + r\ MOD\ 2}$$

Suma de las partes cuadradas SPC(N): Suma las partes cuadradas de todos los divisores de N. Su expresión para un factor primario es

Si **e** es par:

$$SPC(p^e) = \frac{p^{e+2} - 1}{p^2 - 1} + \frac{p^e - 1}{p^2 - 1}$$

Si **e** es impar:

$$SPC(p^e) = 2\frac{p^{e+1}-1}{p^2-1}$$

Suma de partes libres SPL(N): Suma las partes libres de los divisores de N. Su expresión para primarios es:

Si **e** es par:

$$SPL(p^e) = (p+1)\frac{e}{2} + 1$$

Si **e** es impar

$$SPL(p^e) = (p+1)\frac{e+1}{2}$$

Suma de mínimos múltiplos cuadrados SMMC(N): Como las anteriores, suma a lo largo de los divisores. Para primarios:

Si **e** es par

$$SMMC(N) = 1 + 2\frac{p^{e+2}-p^2}{p^2-1}$$

Si **e** es impar

$$SMMC(N) = (1+p^2)\frac{p^{e+1}-1}{p^2-1}$$

Suma de los divisores cuadrados de un número N:

$$SDC(p^e) = \frac{p^{c+2}-1}{p^2-1}$$

Indicatriz de Euler

La función φ(n) (indicatriz o indicador de Euler) es **el cardinal del conjunto de elementos inversibles en Z_n** o bien el conjunto de números coprimos con n y menores que él contando el 1.

La función indicatriz de Euler es multiplicativa, porque si m y n son coprimos, se cumple que

φ(m). φ(n) = φ(m.n)

Su fórmula explícita es

$$\boldsymbol{\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$$

(p_i son sus factores primos)

Función de Moebius μ(n)

Se define así:

Si n no es libre de cuadrados, μ(n) = 0

Si no contiene ningún cuadrado como divisor, μ(n) = 1 si posee un número par de factores primos distintos y μ(n) = -1 si ese número es impar.

FUNCIONES MULTIPLICATIVAS

DEFINICIONES

Este tema de las funciones multiplicativas está muy bien tratado en muchos manuales y páginas web, entre ellas la referida más arriba. Por eso, en estas entradas no nos limitaremos a repetir el tratamiento teórico, sino que abordaremos los temas mediante esquemas, cálculos, búsquedas o curiosidades. Los lectores no deben buscar en ellas los fundamentos teóricos, porque sólo aparecerán sintetizados. Así constituyen una invitación a la profundización teórica.

Comenzamos con unas definiciones:

Funciones aritméticas

Son funciones reales o complejas definidas sobre el conjunto de los números naturales.

Por tanto, toda función aritmética admite una representación como una sucesión de números (enteros, reales, complejos…)

Por ejemplo, la sucesión siguiente (representada como una correspondencia con los naturales) representa a la función “mayor divisor propio”. En efecto, repasa la tabla y observarás que los números de abajo son los máximos divisores propios de los de arriba.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	2	1	3	1	4	3	5	1	6	1	7	5	8	1	9	1	10

Con frecuencia usaremos esta notación u otra similar para representar funciones aritméticas.

Funciones multiplicativas

Una función aritmética es multiplicativa cuando para **todo par a y b de números naturales primos entre sí** se cumple que

F(a*b)=F(a)*F(b) (si (a,b)=1, siendo (a,b) el MCD de ambos números)

Si esto se cumple aunque los números no sean coprimos, llamaremos a la función *completamente multiplicativa*. Por ahora no las consideraremos.

Hoy lo explicaremos con un ejemplo sencillo: la función Tau, que es la que cuenta los divisores de un número, y que por comodidad tipográfica designaremos por D(n), ya que es parte de la familia de las funciones divisor o sigmas

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com/2011/02/la-familia-de-las-sigmas-1.html)

Así, D(15)=4, porque admite los divisores 1, 3, 5 y 15. De igual forma, D(28)=6, ya que dividen a 28 los números 1, 2, 4, 7, 14 y 28

Pues bien, como 15 y 28 son coprimos, resulta que D(15*28)=24, como puedes comprobar. Más tarde lo razonaremos en general.

A partir de aquí podremos publicar tablas de doble entrada en las que practicar y hacer comprobaciones con las funciones multiplicativas. Aquí tienes la primera, dedicada a la función Tau:

Funciones multiplicativas

A Roldán 2011

Función DIVISOR O TAU

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
10	4		8		8				8		8		16		8				16		8	
11	2	8		12	4	8	8	10	4	12	4	12	8		4	16	6	8	8	12	4	16
12	6		12		12				12		12				12		18				12	
13	2	8	4	12		8	8	10	4	12	4	12	8	8	4	16	6		8	12	4	16
14	4		8		8		16		8		8				8		12		16		8	
15	4		8		8	16		20	8		8			16	8			16		24	8	
16	5		10		10		20		10		10		20		10		15		20		10	
17	2	8	4	12	4	8	8	10		12	4	12	8	8	4	16	6	8	8	12	4	16
18	6		12		12				12		12				12		18				12	
19	2	8	4	12	4	8	8	10	4	12		12	8	8	4	16	6	8	8	12	4	16
20	6		12		12				12		12		24		12				24		12	
21	4	16	8		8			20	8		8	24		16	8		12	16			8	
22	4				8		16		8		8		16		8		12		16		8	
23	2	8	4	12	4	8	8	10	4	12	4	12	8	8		16	6	8	8	12	4	16
24	8		16		16				16		16				16		24				16	
25	3		6	18	6	12		15	6	18	6		12	12	6	24		12	12	18	6	
26	4		8				16		8		8		16		8		12		16		8	
27	4	16	8		8	16		20	8		8	24		16	8		12	16		24	8	
28	6		12		12		24		12		12				12		18		24		12	
29	2	8	4	12	4	8	8	10	4	12	4	12	8	8	4	16	6	8	8	12		16
30	8		16		16				16		16				16						16	

En la tabla sólo aparecen los valores de los productos cuando los dos factores son primos entre sí. Se ha elegido el rango de 20 a 30 porque en el mismo disponemos de gran variedad de números: primos, semiprimos, cuadrados…

Repasa algunos valores, calcúlalos si lo deseas y comprueba el carácter multiplicativo de Tau.

Propiedades de las funciones multiplicativas

(1) Si una función es multiplicativa se dará que F(a*1)=F(a)*F(1), luego deberá ser F(1)=1

A veces esta propiedad no está clara en alguna función, porque puede que no acabe de tener mucho sentido aplicarla a la unidad. En ese caso se suele definir directamente: F(1)=1.

En nuestro ejemplo D(1)=1 porque 1 sólo tiene un divisor.

(2) Si una multiplicativa está definida para cada potencia de un primo, lo estará para todo número natural, pues aplicando la función a la factorización

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \dots {p_k}^{a_k}$$

Por su carácter multiplicativo se tendrá

$$\mathrm{F(N) = F({p_1}^{a_1} * {p_1}^{a_2} * \dots {p_k}^{a_k}) = F({p_1}^{a_1}) * F({p_1}^{a_2}) * \dots F({p_k}^{a_k})}$$

Puedes seguir los detalles en los documentos teóricos. En ellos también se demuestra lo siguiente, que es fundamental para manejar funciones multiplicativas:

Si una función aplicada a N actúa de igual forma e independientemente para cada factor de N del tipo pr, siendo p un factor primo de N y r su exponente (factor primario) y después multiplica los resultados, esa función será multiplicativa

Si recuerdas la Teoría de la Divisibilidad, la función Tau tiene un desarrollo muy sencillo, que es el producto de los exponentes en la factorización aumentados en una unidad:

$$\mathbf{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \dots (1 + a_k)}$$

Sólo por este desarrollo ya se habría adivinado que es multiplicativa.

(3) El producto de dos multiplicativas también es también multiplicativo

Consúltalo, pero con un poquito de Álgebra comprenderás esta propiedad.

(4) En esta propiedad hay que detenerse un poco, aunque no la demostraremos (busca, busca…): Si g(x) es una función multiplicativa, entonces, la función f(n) definida por

$$f(n) = \sum_{(d|n)} g(d)$$

(el sumatorio recorre todos los divisores de n), **también es multiplicativa**. Omitiendo detalles, la base de esta propiedad está en que los divisores de un producto de dos números coprimos M y N son productos de dos divisores, uno de M y otro de N, y al final la suma de productos coincidirá con el producto de sumas. ¿Es difícil de entender? Pues busca el desarrollo en cualquier manual o página que lo explique.

Nosotros lo comprobaremos en el caso de la tau para dos números concretos. Esto no demuestra nada, pero te ayudará a crearte una idea del proceso.

Divisores de 105	1	3	5	7	15	21	35	105	Sumas
Número de divisores	1	2	2	2	4	4	4	8	**27**
Divisores de 22	1	2	11	22					
Número de divisores	1	2	2	4					**9**
Divisores de 105*22	1	2	3	5	6	7	10	11	
	1	2	2	2	4	2	4	2	19
	14	15	21	22	30	33	35	42	
	4	4	4	4	8	4	4	8	40
	55	66	70	77	105	110	154	165	
	4	8	8	4	8	8	8	8	56
	210	231	330	385	462	770	1155	2310	
	16	8	16	8	16	16	16	32	128
	Se verifica que 27*9 = 243								**243**

Ves que arriba hemos escrito los divisores de 105 y debajo de cada uno su número de divisores. Nos dan una suma de 27. Hemos efectuado la misma operación con 22 y nos suman 9. El producto de ambos (nótese que son coprimos) es 2310, que tiene 32 divisores (era de esperar ¿no?) y sus divisores suman 243, que es precisamente el producto de 27 por 9, luego en este caso el proceso ha sido multiplicativo. Pero no generalices. Hay que demostrar las cosas.

EL CONJUNTO DE LOS DIVISORES

Aunque el conjunto de los divisores de un número aparece en muchas cuestiones y ya hemos hecho bastantes referencias a él, conviene, para entender algunas cuestiones sobre funciones multiplicativas, que le demos un repaso.

Consideremos, por ejemplo, el conjunto de los divisores de $240=2^4*3*5$:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240

Lo primero que hay que considerar es que es un conjunto finito. Eso parece una trivialidad, pero nos evita preocuparnos por sumas o productos infinitos.

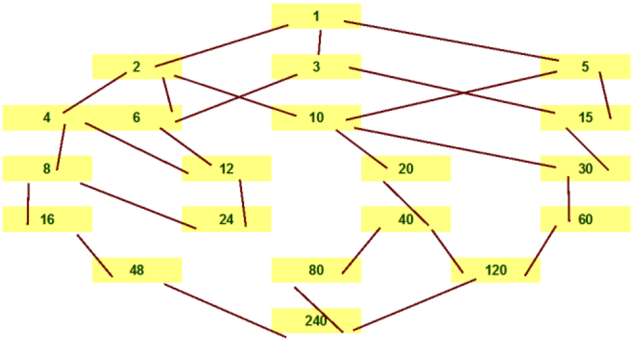
Orden

Los divisores presentan **un orden total** respecto a su valor absoluto, y además, cada divisor **d** está asociado a **N/d** mediante una correspondencia biunívoca que invierte ese orden. Si multiplicamos en la tabla siguiente dos divisores en columna siempre nos resulta 240:

240	120	80	60	48	40	30	24	20	16	15	12	10	8	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	20	24	30	40	48	60	80	120	240

Por tanto, d y N/d recorren el mismo conjunto con órdenes opuestos.

Como todo tipo de divisores, los de N presentan también **un orden parcial** respecto a la relación divisor-múltiplo. En el siguiente esquema representamos el retículo correspondiente a los divisores de 240:



No se han representado todas las relaciones, para no complicar el esquema, pero cada dos divisores tiene un elemento minimal que es su MCD y otro maximal, su MCM. Obsérvese que al recorrer el esquema de arriba abajo va aumentando el número de divisores primos de las descomposiciones factoriales.

Número

Desde las enseñanzas secundarias sabemos que si un número N se descompone como

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \dots {p_k}^{a_k}$$

El número de divisores, o función Tau, viene dado por

$$\boldsymbol{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \dots (1 + a_k)}$$

Y el conjunto de divisores coincide con los términos del producto

$$\boldsymbol{(1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots {p_1}^{a_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots {p_2}^{a_2}) \dots (1 + p_k + {p_k}^2 + \cdots {p_k}^{a_k})} \quad (1)$$

Esto ya es algo sabido. Sólo hay que destacar que el número de divisores depende de la **signatura prima**, que es el conjunto de exponentes, y no de los factores primos.

La fórmula anterior se traduce en un producto cartesiano formado eligiendo una potencia de un factor primo cada vez. Este producto cartesiano que forman los términos de la expresión (1) es fundamental para entender más tarde cómo se comportan las funciones multiplicativas sobre el conjunto de divisores.

El conjunto de divisores de un número es uno de los mejores ejemplos que existen de concurrencia entre cuestiones combinatorias y de divisibilidad.

Divisores libres de cuadrados

Si sólo consideramos los factores libres de cuadrados obtendremos un esquema similar al del Binomio de Newton. Esto nos será muy útil para algunas funciones multiplicativas.

Los divisores libres de cuadrados poseen factores primos distintos. De esta forma, para engendrar uno de estos divisores bastará elegir algunos de los factores primos, **pero una sola vez cada uno**. Así desembocamos en un problema de combinaciones. Lo vemos para el caso del 240, para el que el número de factores primos distintos es 3:

Divisores sin ningún factor primo: El 1. Hay en total $C_{3,0}$

Divisores con un factor: 2, 3, 5. En total $C_{3,1}$

Con dos factores distintos: 6, 10 y 15: $C_{3,2}$

Con tres factores: 30, es decir $C_{3,3}$

Así que en total hay 8. Si recuerdas el desarrollo del binomio, esto ocurre porque $C_{3,0}+ C_{3,1}+ C_{3,2}+ C_{3,3} = 2^3 = 8$

Generalizando:

El número de divisores libres de cuadrados en un número que posee k factores primos distintos es 2^k

Esta clasificación la usaremos en una próxima entrada. Hemos recorrido los ocho números libres de cuadrados 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.

Por tanto, el número de divisores no libres de cuadrados será:

$$D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \dots (1 + a_k) - 2^k$$

En el caso de 240 sería: 5*2*2-8=12, que son estos: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 40, 48, 60, 80, 120, 240

Divisores del producto

Si tomamos dos números A y B primos entre sí y los multiplicamos, sus conjuntos de divisores quedarán multiplicados término a término, todos los de A con cada uno de B.

Por ejemplo, si 240, con 20 divisores, lo multiplicamos por 119=7*17, que posee 4 divisores, 1, 7, 17 y 119, resultará 28540, con estos 80 divisores:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
5	10	20	40	80
15	30	60	120	240
7	14	28	56	112
21	42	84	168	336
35	70	140	280	560
105	210	420	840	1680
17	34	68	136	272
51	102	204	408	816
85	170	340	680	1360
255	510	1020	2040	4080
119	238	476	952	1904
357	714	1428	2856	5712
595	1190	2380	4760	9520
1785	3570	7140	14280	28560

No sólo eso, sino que cada divisor de 28540 será el producto de uno de 240 por otro de 119, como puedes ver en esta otra forma de presentar los divisores:

	1	7	17	119
1	1	7	17	119
2	2	14	34	238
3	3	21	51	357
4	4	28	68	476
5	5	35	85	595
6	6	42	102	714
8	8	56	136	952
10	10	70	170	1190
12	12	84	204	1428
15	15	105	255	1785
16	16	112	272	1904
20	20	140	340	2380
24	24	168	408	2856
30	30	210	510	3570
40	40	280	680	4760
48	48	336	816	5712
60	60	420	1020	7140
80	80	560	1360	9520
120	120	840	2040	14280
240	240	1680	4080	28560

Esto es así porque al ser primos entre sí A y B aportan factores primos distintos sin que se mezclen los de uno con los del otro.

Por tanto, los divisores de un producto AB en el que A y B son coprimos, están formados por todos los productos posibles dd’ en los que d divide a A y d’ a B

Y con esto llegamos a donde queríamos. Es fácil ya ver lo siguiente:

Si f es multiplicativa y se define F como

$$\boldsymbol{F(n)=\sum_{(d|n)} f(d)}$$

Entonces F es también multiplicativa

Ya que las multiplicativas actúan por separado sobre los factores primos y hemos visto que estos se combinan totalmente en el producto.

Este teorema hace que las funciones sigma y tau sean multiplicativas, pero ya volveremos sobre ello. Por ahora lo comprobaremos para la tau mediante un ejemplo:

1	7	11	77																						
1	2	2	4					9																	
1	2	3	4	6	12																				
1	2	2	3	4	6			18																	
1	2	3	4	6	7	11	12	14	21	22	28	33	42	44	66	77	84	132	154	231	308	462	924		
1	2	2	3	4	2	2	6	4	4	4	6	4	8	6	8	4	12	12	8	8	12	16	24		162

La suma de la función Tau para el número 77 recorriendo todos sus divisores es 9, la correspondiente a 12, coprimo con 77, es 18. Si los multiplicamos resulta 77*12=924, cuya suma de Tau es 162, producto de 9 con 18.

PARTE CUADRADA Y PARTE LIBRE

Todos los números naturales contienen un cuadrado en alguna de sus descomposiciones factoriales (eventualmente valdría 1) y otro factor libre de cuadrados (quizás también 1).

Así, tendríamos, por ejemplo: $80=4^2*5$, $121=11^2*1$, $90=3^2*10$, $15=1^2*15$

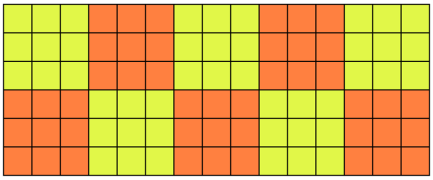
Podemos llamar parte cuadrada PC(N) a la primera y parte libre PL(N) a la segunda (se llama “core” en inglés y podemos traducir por “núcleo”) No se debe confundir con el *radical* de N, que es el mayor divisor de N que está libre de cuadrados.

Tendremos que:

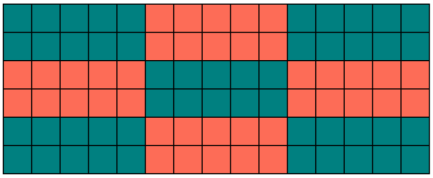
En un cuadrado perfecto PL(N)=1, en un número libre de cuadrados PC(N)=1 y en el resto de números ambos serán mayores que la unidad. En este caso los podemos llamar “cuadrables”, porque admiten su representación como un embaldosado de estructura cuadrada (las mismas filas que columnas), o bien como uno rectangular con baldosas cuadradas.

Así, el número $90=3^2*10$ es cuadrable, y admite estas dos estructuras:

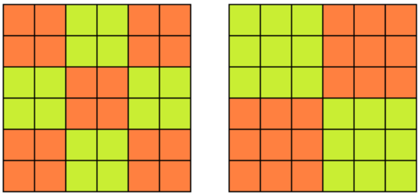
Rectangular con baldosas cuadradas



Mismo número de filas y columnas con baldosas rectangulares



Los cuadrados, como el 36, es evidente que admiten estructuras cuadradas con baldosas cuadradas, y tal vez de varias formas. Son totalmente cuadrables.



Por último, los libres de cuadrados solo admitirán estructuras rectangulares con baldosas también rectangulares. No son nada cuadrables.

¿Cómo encontrar la parte cuadrada de un número? Plantéatelo como ejercicio. Si lo deseas programar ten en cuenta que basta encontrar el mayor divisor cuadrado de N.

Es evidente que teniendo la parte cuadrada, también tienes la parte libre.

Proponemos una cuestión:

¿Qué números presentan la propiedad de que su parte cuadrada y su parte libre de cuadrados son "casi iguales", que se diferencian sólo en una unidad? Expresado de otra forma: la media aritmética de ambas partes está muy próxima a la raíz cuadrada de N.

Pueden darse dos casos, o que la parte cuadrada tenga una unidad más que la libre, o que tenga una unidad menos. ¿Cómo buscar esos números?

Caso 1: PC(N)+1=PL(N)

Comenzamos por buscar los números de la forma $n^2(n^2+1)$ para n>=1: 2 20 90 272 650 1332 2450 4160 6642 10100 14762 20880 28730 38612 50850 65792 83810 105300 130682 160400 194922 234740 280370 332352 391250 457652 532170 615440 708122 810900…

La condición del Buscador

ES PARTECUAD(N)+1=N/PARTECUAD(N)

también la genera.

Así nos aseguramos que hemos recorrido todas las posibles partes cuadradas. Después deberemos tachar aquellos en los que n^2+1 no esté libre de cuadrados.

2, 20, 90, 272, 650, 1332, 4160, 6642, 10100, 14762, 20880, 28730, 38612, 50850, 65792, 83810, 130682, 160400, 194922, 234740, 280370, 332352, 391250, 457652, 532170, 615440, 708122, 810900, 924482, 1187010, 1337492, 1501850, 1680912, 1875530, 2314962, 2561600…(ver http://oeis.org/A069187)

Entre los tachados está 2450=49*50 y 50 es divisible entre el cuadrado de 5, y 105300=324*325, con 325 divisible también entre 25.

Caso 1: PC(N)=PL(N)+1

Aquí deberíamos buscar los números del tipo $n^2(n^2-1)$, pero tampoco nos resuelve el problema. Nos resultaría la lista (prescindiendo del 0): 12, 72, 240, 600, 1260, 2352, 4032, 6480, 9900, 14520, 20592, 28392, 38220, 50400,…

Pero $72=3^2(3^2-1)$ está en la lista y no cumple la condición: PC(72)=36 y PL(32)=2 y. Ha de ocurrir que (n^2-1) sea libre de cuadrados. Esto equivale a que n+1 no sea cuadrado, n-1 tampoco y que n+1 y n-1 no tengan un factor en común. Esta última excluye el caso de n impar, luego la lista queda reducida a

12, 240, 1260, 4032, 9900, 20592, 38220, 65280, 104652, 159600…

Habría que excluir después a 4032, porque n+1 es cuadrado, a 9900, porque n-1 es cuadrado, y así sucesivamente. Quedarían

12, 240, 1260, 20592, 38220, 65280, 104652, 159600…

¿Sabrías completar hasta unos quince términos?

Puedes usar ES PARTECUAD(N)-1=N/PARTECUAD(N) en el Buscador

EMPAREDADO DE CUADRADOS

Primeras definiciones

Para el estudio que vamos a emprender necesitamos repasar algunas definiciones:

Parte cuadrada PC(N): Es el mayor divisor cuadrado de N (Ver http://oeis.org/A008833)

Parte libre PL(N): Equivale al cociente entre N y su parte cuadrada (http://oeis.org/A007913)

Radical RAD(N): Es el mayor divisor de N que está libre de cuadrados (http://oeis.org/A007947)

Y añadimos otra

Menor múltiplo cuadrado MMC(N): Como indica su nombre, es el menor cuadrado divisible entre N (http://oeis.org/A053143)

Así que el número N está *emparedado* entre dos cuadrados. Uno es el mayor divisor cuadrado PC(N) y el otro es el menor múltiplo de esa clase MMC(N).

Lo aclaramos con un ejemplo

Si consideramos el número 126, sus factores primos son 2*3*3*7, luego

PC(126)=9 porque es el único cuadrado que podemos formar con 2,3,3,7. El exponente de 3 es par, como cabía esperar.

PL(126)=126/9=14, que equivale al producto de 2*7, ambos elevados a 1

RAD(126)=2*3*7=42 Está formado por todos los factores primos elevados a 1.

MMC(126)=$2^2*3^2*7^2$=1764. Se consigue este número completando los exponentes de sus factores primos a un número par.

Así que, como veremos, cualquier número está comprendido entre dos cuadrados de este tipo. A continuación estudiaremos su cálculo y carácter multiplicativo, dejando para la siguiente entrada sus relaciones.

Parte cuadrada PC

Es evidente que para calcularlo bastará sustituir cada exponente de los factores primos **por el mayor número par contenido en cada uno de ellos**. Por ejemplo, si N=2^3*7^2*11=4312, su parte cuadrada se obtendrá

truncando cada exponente al máximo número par que contiene, es decir: PC(N)= $2^2*7^2*11^0$=196

Vimos que las funciones multiplicativas quedaban caracterizadas por su acción sobre los factores primarios de N. De esta forma, la definición de parte cuadrada podía quedar como

$$PC(p^r) = p^{r-r\ MOD\ 2}$$

Es decir, que a cada exponente se le resta su resto al dividirlo entre 2. Por este tipo de actuación sobre factores primarios de forma independiente, multiplicando después los resultados, ya sabemos que la parte cuadrada **es multiplicativa**.

Intenta reproducir esta comprobación:

	1617		49	
	2000		400	
MCD(1617;2000)	1		Producto	19600
Producto	3234000		19600	

En ella vemos que 1617 y 2000 son coprimos y que el producto de sus partes cuadradas 49 y 400 coincide con la parte cuadrada del producto 3234000=1617*2000. Tendrás que trabajar un poquito, pero aprenderás mucho.

Parte libre

Para no alargar el tema, tan sólo destacaremos que su definición para factores primarios puede ser:

$$PL(p^r) = p^{r\ MOD\ 2}$$

Esto quiere decir que los factores pares desaparecerán en la parte libre y que los impares se convertirán en 1. Al actuar sobre los factores primarios de forma independiente, esta función es también multiplicativa.

Te proponemos una comprobación de su carácter multiplicativo:

	1617		33	
	1625		65	
MCD(1617;2000)	1		Producto	2145
Producto	2627625		2145	

Repasa los cálculos y recuerda que ahora se trata de la parte libre.

Mínimo múltiplo cuadrado

Con todo lo que ya llevamos, su definición te vendrá a la mente al momento. Es esta:

$$MMC(p^r) = p^{r+r\ MOD\ 2}$$

Era de esperar. El número N está “emparedado” entre dos cuadrados: el que resulta de restar un 1 o un 0 a los exponentes y el que se calcula sumando ese 1 a los impares y un 0 a los pares. Por ejemplo:

PC(2400)= $=2^4*5^2$=400; 2400= $=2^5*5^2*3$; MMC(2400)=14400= $=2^6*5^2*3^2$

Esta función es multiplicativa por la misma razón que las anteriores.

Relaciones entre los cuadrados

Según lo definido en la entrada anterior, para conseguir el mínimo múltiplo cuadrado de N sólo tendremos que multiplicar N por su parte libre. En efecto, esa parte libre contiene los factores primos de N elevados al residuo de cada exponente módulo 2. Más claramente: contiene los números primos elevados a 1 si su exponente era impar. Pero si los multiplicamos por N todos esos exponentes se harán pares, con lo que hemos conseguido el MMC(N). Lo repasamos con un ejemplo:

Sea 11400=5^2*2^3*3*19. Su parte cuadrada contendrá los factores con exponente truncado a par: PC(1140)= 5^2*2^2 = 100. Su parte libre estará formada por el resto de factores, es decir, PL(1140)=2*3*19=114. Es evidente pues que:

PC(N)*PL(N)=N   (1)

Pero si ahora volvemos a multiplicar por PL(N), todos los exponentes se harán pares y el producto se habrá convertido en MMC(N):

1140*PL(1140)=
$5^2*2^3*3*19*2*3*19=5^2*2^4*3^2*19^2$=1299600=MMC(11400)

Hemos razonado que

N*PL(N)=MMC(N)   (2)

Uniendo (1) con (2) llegamos a una conclusión muy elegante: N es la media geométrica entre el mayor cuadrado que lo divide y su menor múltiplo cuadrado.

Es así porque N^2=PC(N)*MMC(N), según (1) y (2)

En nuestro ejemplo 11400^2=100*1299600.

Como los factores del segundo miembro son cuadrados, podemos considerar sus raíces cuadradas. Así definiremos:

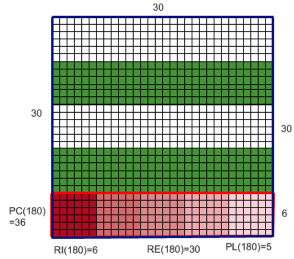
(a) **Raíz interna de N** es la raíz cuadrada de su parte cuadrada. En el ejemplo sería 10. La representaremos como RI(N). En este caso RI(11400)=10

(b) **Raíz externa de N** es la raíz cuadrada de su menor múltiplo cuadrado. En el caso de 11400 podríamos escribir RE(11400)=1140, que es la raíz cuadrada de MMC(11400)

Un resumen también muy elegante: Todo número natural equivale al producto de sus dos raíces enteras, interna y externa

En efecto: 11400=10*1140

Podemos representar todo lo anterior gráficamente. Observa esta imagen:



Representa los cuadrados correspondientes al número $180=2^2*3^2*5$.

El cuadrado rojo de la esquina es su parte cuadrada PC(180)= 2^2*3^2=36, que son los cuadritos que contiene. Su raíz cuadrada es RI(180)=6, que se representa por el lado del cuadrado.

La parte libre de 180 es 5. Si copiamos el cuadrado rojo cinco veces a la derecha nos resultará un rectángulo (el separado por la línea gruesa roja) de 180 cuadros, o sea, el número considerado. Esto es así porque N=PC(N)*PL(N).

Si ese rectángulo que contiene 180 cuadros lo trasladamos cinco veces hacia arriba nos resultan 900 cuadros, que es precisamente el menor múltiplo cuadrado. Esto funciona porque N*PL(N) =MMC(N). El lado de ese cuadrado, 30, será la raíz cuadrada externa de 180.

¿Qué hemos visualizado?: que todo número se puede representar por un rectángulo de base su raíz externa y de altura la interna.

Si el interior de ese rectángulo lo descomponemos en tantos trozos iguales como indique la parte libre obtendremos la parte cuadrada.

Si ese rectángulo lo adosamos consigo mismo por su base tantas veces como indique la parte libre, formaremos un cuadrado que será su menor múltiplo de ese tipo.

¡Se completó el emparedado!

Y lo mejor, como todas las funciones que hemos usado son multiplicativas, dados dos números coprimos, sus esquemas de este tipo se pueden fundir en uno solo multiplicando uno a uno los datos que han intervenido: PC, PL, RI,…

Todo esto no pasa de ser un divertimento, pero te ayuda a aprender conceptos.

Sumas de funciones

En esta entrada comprobaremos la potencia del concepto de función multiplicativa. Usaremos fundamentalmente dos propiedades:

(1) Según vimos en otro apartado, si f(x) es una función multiplicativa, entonces, la función F(n) definida por

$$\boldsymbol{F(n)} = \sum_{(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{n})} \boldsymbol{f(d)}$$

En la que el sumatorio **recorre todos los divisores de n**, también es multiplicativa.

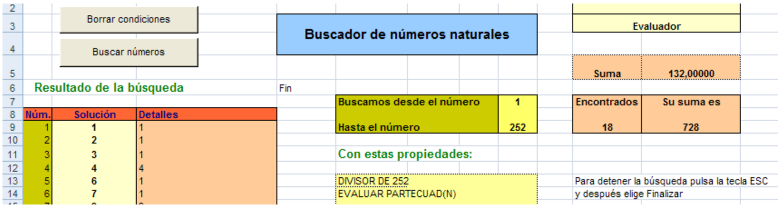
(2) Debemos recordar también que la definición de una función multiplicativa basta hacerla para los factores primarios $\mathbf{p^e}$ de un número, siendo **p** un factor primo y **e** su exponente.

Estudiaremos esas sumas que recorren todos los divisores en las funciones estudiadas en la sección anterior

Suma de las partes cuadradas SPC(N)

Es una función multiplicativa

Si la parte cuadrada de un número es multiplicativa, **su suma a lo largo de los divisores de un número también lo será**. Una forma rápida de encontrar esa suma se consigue con el Buscador de Naturales, usando estas condiciones y consultando después la suma en el evaluador. Observa cómo lo hemos conseguido para el número 252= 2*2*3*3*7



Se ha definido una búsqueda entre 1 y 252, con las condiciones DIVISOR DE 252 y EVALUAR PARTECUAD(N) y nos da un resultado de 132.

Así que la suma de esas partes cuadradas (SPC(N)) para 252 es 132.

Esta función está publicada en http://oeis.org/A068976 y ahí se dan fórmulas y desarrollos para el cálculo de la misma. Es claro que es multiplicativa y por eso la fórmula de Vladeta Jovovic que se propone en esa página sólo define la función para un factor primario p^e.

La escribimos de forma algebraica aplicada a p^e:

Si **e** es par:

$$SPC(p^e) = \frac{p^{e+2} - 1}{p^2 - 1} + \frac{p^e - 1}{p^2 - 1}$$

Si **e** es impar:

$$SPC(p^e) = 2\frac{p^{e+1} - 1}{p^2 - 1}$$

¿Cómo demostrarlo? Te damos una idea.

Considera todos los divisores del número p^e:

$1 \quad p \quad p^2 \quad p^3 \quad p^4 \quad p^5 \quad p^6 \ldots p^{e-1} \quad p^e$

Si les aplicamos la función “parte cuadrada” PC deberemos truncar los exponentes al máximo número par que contienen.

Si **e** es par quedaría:

$1 \quad 1 \quad p^2 \quad p^2 \quad p^4 \quad p^4 \quad p^6 \ldots p^{e-2} \quad p^e$ que se puede descomponer en dos sumas:

$SPC(p^e)=(1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots p^e)+(1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots p^{e-2})$ que al final desembocan en la suma propuesta

Si es impar las dos sumas serían iguales, luego

$SPC(p^e)=2(1 + p^2 + p^4 + p^6 \ldots p^{e-1})$ que también nos lleva a la fórmula propuesta arriba.

Aplicamos estas fórmulas a 252= $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, en el que aplicaría el caso par para el 2 y el 3 y el impar para el 7:

SPC(252)=(15/3+3/3)(80/8+8/8)(2*48/48)=6*11*2=132, como era de esperar.

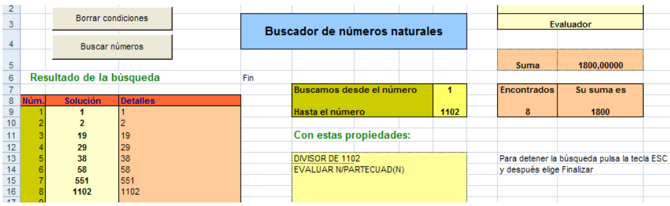
Si practicas estos cálculos con otros números, tanto manualmente como con el Buscador o las fórmulas aprenderás mucho.

Suma de partes libres SPL(N)

Es también multiplicativa

Con los mismos procedimientos y propiedades podemos intentar sumar las partes libres de los divisores de un número.

Con el Buscador podemos encontrar esa suma para 1102, por ejemplo:



Las condiciones usadas son DIVISOR DE 1102 y EVALUAR N/PARTECUAD(N), ya que esa es una definición de parte libre. Recorremos los números del 1 al 1102 y el evaluador nos da una solución de 180.

En la página http://oeis.org/A069088 puedes ver la lista de los primeros valores de esta función (1, 3, 4, 4, 6, 12, 8, 6, 5, 18, 12, 16, 14, 24…) y la definición ligeramente distinta a la nuestra. Lo que no ofrece es una fórmula para la evaluación directa. La ofrecemos nosotros para p^e, como en los casos anteriores:

Si **e** es par:

$$SPL(p^e) = (p+1)\frac{e}{2} + 1$$

Si **e** es impar

$$SPL(p^e) = (p+1)\frac{e+1}{2}$$

La demostración también se basa en el conjunto

1 p p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 … p^{e-1} p^e

Al aplicarle la función "parte libre" PL las potencias pares se convertirán en 1 y las impares en p, por lo que la suma de las partes libres será

1+p+1+p+1+p+1+p+…. Que terminará en 1 o en p según el exponente sea par o impar. El resto de la demostración es trivial, sacando factor común el factor (1+p) hasta donde se pueda.

Aplicamos la fórmula a

$2200=2^3*5^2*11$:
SPL(2200)=(2+1)*4/2*((5+1)*2/2+1)(11+1)*2/2=3*2*7*12=504

Lo hemos comprobado con el Buscador y coincide.

Suma de los mínimos múltiplos cuadrados SMMC(N)

Otra multiplicativa

Si ahora, en lugar de N/PARTECUAD(N) usamos N*N/PARTECUAD(N) en el Buscador (¿por qué? Revisa la propiedades vistas anteriormente) obtendremos la suma de MMC(N)

Esta función multiplicativa la hemos publicado en OEIS, pues en la fecha de su creación permanecía inédita. Sus primeros valores son

1, 5, 10, 9, 26, 50, 50, 25, 19, 130, 122, 90, 170, 250, 260…

(https://oeis.org/A198286)

Podemos usar una fórmula similar a las anteriores. No es difícil que la puedas justificar si entendiste las primeras.

Si **e** es par

$$SMMC(N) = 1 + 2\frac{p^{e+2} - p^2}{p^2 - 1}$$

Si **e** es impar

$$SMMC(N) = (1 + p^2)\frac{p^{e+1} - 1}{p^2 - 1}$$

Lo vemos con un número compuesto, el $12=2^2*3$

En primer lugar aplicamos la definición de SMMC y para cada primo sumamos el mínimo múltiplo cuadrado de cada una de sus potencias: SMMC(12)=(1+4+4)(1+9)=9*10=90, como puedes ver en la lista general.

Ahora aplicamos la fórmula:

SMMC(2^2) (caso par) = 1+2((16-4)/(4-1))=1+2*4=9, que era lo esperado

SMMC(3) (caso impar) = (1+9)((9-1)/(9-1))=10*1=10, que con el 9 anterior da 90.

Cuestiones

Proponemos unas cuestiones:

(a) La suma de las partes cuadradas de los divisores de un número coincide con esta suma:

$$SPC(N) = \sum_{(d|N)} \left(MCD(d, \frac{N}{d})\right)^2$$

¿Sabrías demostrarlo? Se consigue como en las anteriores, comenzando a considerar el conjunto 1 p p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 … p^{e-1} p^e

(b) Si A divide a B, ¿crees que la parte cuadrada de A dividirá a la de B?

(c) ¿Ocurrirá lo mismo con los menores múltiplos cuadrados?

(d) Si A divide a B y son distintos, ¿cuándo se dará que PC(A)=PC(B)?

(e) ¿Podemos relacionar de igual forma la parte libre de A con la de B?

(f) Considera el máximo común divisor de la parte cuadrada y la libre de un número natural N ¿qué podremos afirmar de él? ¿Se comportará como una función multiplicativa?

Como otro ejemplo de función multiplicativa, veremos hoy una muy simple: a cada número natural le hacemos corresponder la suma de todos los divisores cuadrados (SDC) que posea. Por ejemplo. SDC(28)=1+4=5, SDC(1000)=1+4+25+100 = 130. También es multiplicativa la cuenta de esos divisores (NDC)

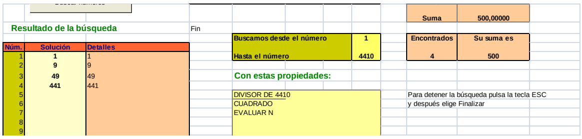
Es evidente que para algunos, como 15 o 33, el resultado es 1.

No se debe confundir con la suma **de las partes cuadradas** vista en la entrada http://hojaynumeros.blogspot.com/2011/12/emparedado-de-cuadrados-3.html

Esta de hoy presenta valores menores, pues solo entran los divisores con parte libre igual a 1 es decir, cuadrados perfectos. En la anterior algunos cuadrados se repetían, por ejemplo en 4*3 y 4*7 como divisores de 4*3*7.

Además del muy conveniente método de calcular manualmente, con hoja de cálculo puedes evaluar fácilmente esta función

Con el Buscador de Naturales



El Buscador te resuelve el problema con las condiciones DIVISOR DE…, CUADRADO y EVALUAR N y después se cuentan y se suman los divisores en el evaluador. En la parte superior de la imagen leemos que 4410 tiene 4 divisores cuadrados que suman 500. Luego NDC(4410)=4 y SDC(4410)=500

Como función en Basic

Se supone que ya poseemos las funciones ESMULTIPLO y ESCUAD, que ya se han usado varias veces en este blog.

```
Public Function sumadivcuad(n)
Dim i, s
s = 0
For i = 1 To n
```

```
If esmultiplo(n, i) And escuad(i) = 1 Then s = s + i
Next i
sumadivcuad = s
End Function
```

Con esta función se puede descubrir qué valores presenta la suma de divisores cuadrados para los primeros números naturales:

1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 5, 10, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 21, 1, 10, 1, 5, 1, 1, 1, 5, 26, 1, 10…,

La tienes publicada en http://oeis.org/A035316

Si sustituyes la orden ***s=s+i*** por la de ***s=s+***1, en lugar de sumar contará los divisores cuadrados con lo que generará la unción NDC. Los resultados son:

1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 2

http://oeis.org/A046951

En ambas páginas, la A035316 y la A046951 puedes aprender detalles teóricos muy interesantes. Aquí nos detendremos sólo en algunos aspectos.

Son multiplicativas

Basta considerar que ambas provienen de productos de este tipo

$$\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{4}}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{6}}+\cdots\right)\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{q}^{\mathbf{4}}+\boldsymbol{q}^{\mathbf{6}}+\cdots\right)\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{r}^{\mathbf{4}}+\boldsymbol{r}+\cdots\right)$$

siendo p,q y r divisores primos del número.

En un producto de dos números coprimos lo que ocurrirá es que se unirán paréntesis de este tipo pero con primos distintos, con lo que tanto la cuenta de divisores como la suma se convertirán en producto de esas mismas funciones en los factores.

Como en todas las multiplicativas, basta dar la operación que efectúan sobre los factores primarios $\mathbf{p^e}$ con **p** factor primo del número y **e** su exponente. Se ve a la primera reflexión.

Los divisores de $\mathbf{p^e}$ forman el conocido conjunto 1 p p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 … p^{e-1} p^e

De ellos sólo nos servirán los pares: 1 p^2 p^4 p^6 … p^c, siendo c el máximo par contenido en e, es decir **e – e MOD 2**. Así que el **número de divisores cuadrados NDC(p^e)** será:

$$NDC(p^e) = 1 + \left[\frac{e}{2}\right]$$

El corchete representa la parte entera. En el caso del ejemplo del primer párrafo, el número $4410=2*3^2*5*7^2$ tendrá tantos divisores cuadrados como indica el cálculo

NDC(N)=(1+0)(1+1)(1+0)(1+1)= 4

En efecto, en la imagen del Buscador correspondiente hemos visto sólo cuatro divisores: 1, 9, 49 y 441.

Es interesante destacar que, como ocurre en casos similares, el valor de esta fución no depende de los divisores primos, sino tan sólo de sus exponentes (su *signatura prima*)

La suma tampoco requiere mucho estudio. Sabemos sumar potencias mediante un cociente de diferencias. Así, si usamos **c**, **el máximo número par contenido en e, es decir e – e MOD 2**, nos resultará la fórmula para SDC(p^e)

$$SDC(p^e) = \frac{p^{c+2} - 1}{p^2 - 1}$$

La aplicamos $4410=2*3^2*5*7^2$

SDC(4410)=((2^2-1)/(2^2-1))*((3^4-1)/(3^2-1))*(5^2-1)/(5^2-1))*(7^4-1)/(7^2-1))=

1*10*1*50=500, que fue el resultado obtenido con el Buscador.

SOLUCIONES

Emparedado de cuadrados

(a) La fórmula

$$SPC(N) = \sum_{(d|N)} \left(MCD(d, \frac{N}{d})\right)^2$$

Funciona porque en

1 p p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 … p^{e-1} p^e

Los MCD entre d y N/d son:

1 p p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 … p^{e-1} p^e

(b) Sí, porque B contendrá a todos los factores de A y quizás alguno más. En el caso de los factores primos de A, sus exponentes en B serán iguales o mayores que los de A, luego al truncarlos a un número par darán resultados también iguales o mayores, luego PC(A) divide a PC(B)

(c) Sí, por la misma razón

(d) Llamemos Q al cociente entre B y A. Si sus factores primos son todos distintos de los de la parte cuadrada de A, esta no se incrementará al pasar de A a B. Si algún factor primo coincide, sólo serán iguales si ese factor está elevado a un número par en A y una unidad más en B.

Ejemplo: La parte cuadrada de 72 es 36. Si multiplicamos 72 por factores primos distintos de 2 y 3, como 72*7=504, la parte cuadrada seguirá siendo 36. Si lo multiplicamos por 3 también, porque su exponente pasa de par a impar, pero al truncar coinciden: 72*3=216 y su parte cuadrada sigue siendo 36. Si lo multiplicamos por 2 sí cambiará, porque su exponente 3 pasa a 4 y eso altera la parte cuadrada.

(e) La parte libre sólo quedará inalterada si B aporta como nuevos factores los mismos de la parte cuadrada elevados a un número par, porque así se integrarán en una nueva parte cuadrada dejando inalterada la libre.

(f) Ese MCD sólo podrá contener los factores de N que estén elevados a un exponente impar, pues así PC(N) se llevará su truncamiento a par y PL(N) se llevará la unidad. Así que esta función no se comporta igual con los exponentes pares que con los impares, luego no ha de ser multiplicativa. Basta un contraejemplo: PC(9)=9, PL(9)=1, MCD(9,1)=1. Por otra parte PC(12)=4; PL(12)=3, MCD(4,3)=1. Sin embargo, si multiplicamos 9*12=108 tenemos que PC(108)=36, PL(108)=3 MCD(36,3)=3 y no 1 como sería de esperar si fuera multiplicativa.

PC*PL^2=MMC

N es la media geométrica entre PC y MMC

N*PL(N)=MMC(N)

Raíz cuadrada interna es la raíz cuadrada de PC(N). En el caso de 126 sería 3

Raíz cuadrada externa es similar con MMC. Así en 126 sería 42

Se comprende que su producto es N, por ser este media geométrica de los dos cuadrados.