Números y hoja de cálculo I

Curso 2008-09

Colección Hojamat.es

ISBN 978-1-4452-7769-1
http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Este libro recoge, ampliadas y dotadas de soluciones, las principales entradas publicadas en el blog del mismo título (http://www.hojaynumeros.blogspot.com) en la temporada 2008-09.

Estudia, por tanto, temas de Matemáticas y de hojas de cálculo separadamente o de forma conjunta. Los primeros se estudian, salvo alguna excepción, dentro de los cuatro apartados incluidos en la página web http://www.hojamat.es: Aritmética, Combinatoria, Congruencias y Divisibilidad, es decir, capítulos de Matemática Discreta. No se han distribuido los temas de forma equitativa, pues ha sido la actualidad la que nos ha hecho optar por unos u otros.

El blog origen de esta publicación no tiene planificación previa. Por ello, se ha querido estructurar los temas en distintos capítulos según su temática o metodología. Es importante intentar responder a las cuestiones planteadas sin acudir a las soluciones, pero el autor comprende que la tentación es muy fuerte, por lo que ha ampliado algunas de ellas.

El condicionamiento de la actualidad ha podido causar que algunos temas tratados en el blog carezcan de entidad, por lo que no figurarán en este libro.

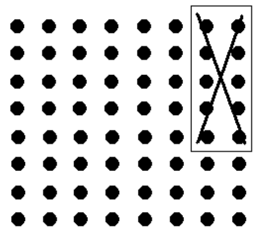
TABLA DE CONTENIDO

El atractivo de los cuadrados

Diofanto de Alejandría dedicó casi toda su Aritmética al estudio de los cuadrados. Libros enteros dedicados a conjuntos de cuadrados y sus relaciones. Y es que estos números nos atraen a primera vista, tanto si los consideramos aritméticamente como si observamos su representación geométrica. Nos dan sensación de perfección, de algo acabado. No es casual que el de Pitágoras sea el teorema más popular en nuestra cultura, porque, además, nos muestra algún cuadrado troceado, descompuesto, lo que da más interés al tema, pues la aparente sensación de que un cuadrado es algo terminado y perfecto se rompe cuando se convierte en pieza de construcciones o término de las mismas.

ELIMINAR BOLAS EN UN CUADRADO

Forma un cuadrado con bolas, situándolas en filas y columnas, las que quieras. Después elimina 10 bolas e intenta reorganizar



el resto hasta formar otro cuadrado más pequeño, y verás que resulta imposible, cualquiera que sea el lado del cuadrado que has formado.

Prueba entonces a quitar sólo 6 bolas, y observarás que tampoco puedes formar un cuadrado con las restantes. Con otros números sí se puede, dependiendo del lado del cuadrado.

¿Qué tienen de particular el 6 y el 10 para que ocurra esto?

Descubre más números con un comportamiento similar, o encuentra una propiedad que cumplan todos.

(a) De hecho, hay muchos comportamientos respecto a esta operación. Existen dos tipos de números que sólo permiten convertir un cuadrado en otro más pequeño quitando tantas unidades como tienen ellos de una sola forma. Por ejemplo $8= 3^2 – 1^2$ como única solución y $7 = 4^2 – 3^2$ *¿Qué tipo de números son?*

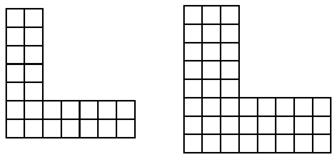
Otros, sin embargo, no sólo permiten la operación, sino que presentan varias soluciones. Por ejemplo, $192 = 49^2 – 47^2 = 26^2 – 22^2 = 19^2 – 13^2 = 16^2 – 8^2 = 14^2 – 2^2$ *¿De qué depende que unos números presenten una solución y otros varias?*

(b) Entre los números menores que 1000 hay uno que es igual a diez diferencias de cuadrados *¿Cuál?*

(c) Por último, en el caso de varias soluciones podemos relacionarlas con los cuadriláteros con lados de medida entera inscriptibles en una circunferencia. Así, los lados 49, 47, 26 y 22 forman uno de esos cuadrados *¿Por qué?*

Notas

- Los números que no pueden igualarse a una diferencia de cuadrados tampoco pueden expresarse como $\mathbf{a^2+2ab}$, con **a** y **b** enteros. Si se distinguen los casos de **a** par o impar se llega fácilmente a la misma conclusión.
- Ser diferencia de cuadrados equivale a poder construir un gnomon con sus unidades. En las siguientes imágenes podemos ver uno con a par y otro con a impar.



CUADRADOS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

No es difícil encontrar ternas de cuadrados perfectos que estén en progresión aritmética, tales como 1, 25 y 49, o 4, 100 y 196. ¿Cómo podríamos encontrar más ternas con una hoja de cálculo? Se podría organizar una tabla de doble entrada con los cuadrados perfectos, y después someter a su media aritmética a una condición ¿Cuál?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			1	2	3	4	5	6	7	8
3			**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**
4	1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	1	0
5	2	**4**	0	**1**	0	0	0	0	0	0
6	3	**9**	0	0	**1**	0	0	0	0	0
7	4	**16**	0	0	0	**1**	0	0	0	0
8	5	**25**	0	0	0	0	**1**	0	0	0
9	6	**36**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
10	7	**49**	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0
11	8	**64**	0	0	0	0	0	0	0	1
12	9	**81**	0	0	0	0	0	0	0	0
13	10	**100**	0	0	0	0	0	0	0	0
14	11	**121**	0	0	0	0	0	0	0	0
15	12	**144**	0	0	0	0	0	0	0	0
16	13	**169**	0	0	0	0	0	0	0	0
17	14	**196**	0	**1**	0	0	0	0	0	0
18	15	**225**	0	0	0	0	0	0	0	0
19	16	**256**	0	0	0	0	0	0	0	0
20	17	**289**	0	0	0	0	0	0	**1**	0
21	18	**324**	0	0	0	0	0	0	0	0
22	19	**361**	0	0	0	0	0	0	0	0
23	20	**400**	0	0	0	0	0	0	0	0
24	21	**441**	0	0	**1**	0	0	0	0	0
25	22	**484**	0	0	0	0	0	0	0	0
26	23	**529**	0	0	0	0	0	0	1	0

En la imagen puedes ver el resultado de una búsqueda similar, en la que se han marcado con un 1 los cuadrados perfectos pertenecientes a una terna como la propuesta. Si te animas a construir un buscador semejante podrás encontrar muchas más ternas. Ponte a prueba: *¿Con qué otros dos cuadrados forma progresión aritmética el número 10404, cuadrado de 102?*

Para concretar las ternas pedidas hemos recurrido a una exploración sistemática. Es una forma válida de trabajar en Matemáticas (así se encuentran los números primos), pero que alguien puede pensar que es algo perezosa. A continuación aportamos un análisis algo más profundo.

Enfoque algebraico

Llamemos n a la raíz cuadrada del término central, que sería n^2.

El tercer cuadrado tendrá la forma $(n+h)^2$ y el primer cuadrado $(n-k)^2$ con k>h *¿por qué?*

Las diferencias entre ellos serán iguales, luego

$(n+h)^2 - n^2 = n^2 - (n-k)^2$

Simplificando: $2nh + h^2 = 2nk - k^2$

Despejando n: $n = (h^2 + k^2) / (2(k-h))$

Como k>h, llamamos m=k-h, y entonces queda:

$n = (h^2 + (h+m)^2) / (2m) = (2h^2 + 2mh + m^2) / (2m)$

Esto obliga a que m sea par, y la podemos sustituir por 2p

$\mathbf{n} = (2h^2 + 4ph + 4p^2) / (4p) = \mathbf{h^2/(2p) + h + p}$ (1)

Esto nos da un procedimiento de generación de ternas de cuadrados:

Elegimos cualquier entero p y buscamos un número par h cuyo cuadrado sea divisible entre p y cuyo cociente sea mayor que el mismo p (para que n-k sea positivo), y mediante la fórmula (1) calculamos n. Seguidamente encontramos los valores de n+h y n-k = n-h-2p

Ejemplo: p=5, h=10, n=100/10 + 10 + 5 = 25; (n+h)=35: (n-k)=25-10-5*2=5.

Por tanto, los cuadrados en progresión aritmética buscados son: 25, 625 y 1225.

Notas

- Si tres cuadrados están en progresión aritmética, sus diferencias mutuas son siempre múltiplos de 24. Intenta demostrarlo, que es un reto muy interesante. Si no lo logras, en las Soluciones tienes una demostración basada en los restos cuadráticos.

- No existen cuatro cuadrados en progresión aritmética, ni en mayor número.

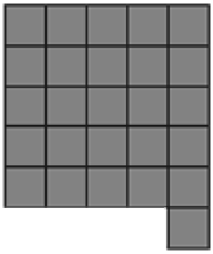
- Tampoco existen tres cubos en progresión aritmética.

- Leonard Dickson en su libro "History of the Theory of Numbers" (1919), propone estas fórmulas:

$x = 2\, v^2/u - u$
$y = 2\, v^2/u + u + 2\, v$
$z = 2\, v^2/u + u + 4\, v$
donde u divide a $2\, v^2$ con un cociente mayor que u.

Este método coincide con el que se propone en este libro. Por ejemplo, para h=12 y p=6 las soluciones son n=30, n+h=42, n-k=6, y con la propuesta de Dickson se logra la misma solución con $2v^2=72$ y u=6:
x=72/6-6=6; y=72/6+6+12=30; z=72/6+6+24=42.

UN CUADRADO Y UNA UNIDAD



Los números de la forma n^2+1 con n natural tienen un atractivo especial: un cuadrado que se estropea por añadirle un elemento más. ¿Qué hacer con esta figura? A veces da lugar a un número primo, como 17, 37 o 101. Una conjetura pendiente de demostrar afirma que existen infinitos números primos de este tipo n^2+1.

Otras veces n^2+1 es un compuesto, como 26 o 50. En ese caso la figura se puede convertir en un rectángulo, se formaría uno de 2 por 13.

Lo que es seguro es que nunca será múltiplo de 3, ni de 4, y tampoco de 7, pero sí puede serlo de 17 ($13^2+1=170=17*10$) o de 13 ($21^2+1=442=13*34$)

¿De qué depende eso? Puedes abordarlo sin especiales conocimientos de teoría, con el uso de una hoja de cálculo. Si prefieres profundizar, esto está relacionado con los restos cuadráticos.

Notas

- Los restos cuadráticos clasifican, respecto a expresiones del tipo n^2+1, a los números primos en tres clases:
    - Primos que no dividen a este tipo de expresiones: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43,…En la descomposición factorial de cuadrados más una unidad no figurarán estos números primos. Son los que presentan la forma 4N+3
    - Números primos que sí son factores de expresiones del tipo n^2+1: 2, 13, 29, 41, 53,…Se corresponden con los primos de la forma 4N+1

- Por último, los que se pueden expresar como n^2+1: 5, 17, 37, 101, 197, … que son un subconjunto de los anteriores.

Así, por ejemplo, se dan estas descomposiciones: $32^2+1=5^2*41$; $57^2+1=2*5^3*13$; $211^2+1=2*113*197=2*113*(14^2+1)$

- Los números de la forma n^2+1 tienen una propiedad muy elegante, y es que son divisores de otros números similares, y además, su cociente también es del tipo n^2+1, es decir, que para todo n, existen m y p tales que $(n^2+1)(m^2+1)= p^2+1$. En efecto, basta tomar m=n-1 y $p=n^2-n+1$:

$$(n^2+1)\cdot((n-1)^2+1) \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

$$(n^2-n+1)^2+1 \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

- El que los primos del tipo 4N+1 posean un múltiplo del tipo n^2+1 no es muy difícil de demostrar si se conoce la teoría de los restos cuadráticos. (Ver Fundamentos de la Teoría de Números de Vinográdov)

LA MITAD, CUADRADO, EL TERCIO, CUBO

Encuentra los primeros números naturales N que admiten estas dos descomposiciones:

$N= 2n^2 = 3m^3$

Es necesario recorrer los posibles factores primos de m y de n y sus exponentes.

Una solución es N=41472, pero existe otra menor.

Si has aprendido a hacerlo, prueba con

$N= 2n^2 = 5m^5$

Una solución es un número “muy redondo”

Si tu valor no ha sufrido merma, aborda el que

$N= 3n^3 = 5m^5$

Quizás la primera solución tenga nueve cifras

CASI NARCISISTAS

Esta propuesta está basada en un ejemplo incluido por Eugenio Manuel Fernández Aguilar en su blog Ciencia del Siglo XXI - Mirando con la mente.

$\mathbf{88^2+33^2=8833}$

¿Existirán otros números de cuatro cifras con esta propiedad?

Observa que es una situación parecida a la de los números narcisistas, tales como $153 = 1^3+5^3+3^3$ ó $1033 = 8^1+8^0+8^3+8^3$

Si deseas averiguarlo, implementa este código, que te sirve para Excel y para OpenOffice.org Calc

(Entre paréntesis los comentarios)

```
Sub busqueda
dim i,j,k,l (Cifras del número)
dim a,b,c   (a y b están formados por dos cifras)

for i=0 to 9
for j=0 to 9
for k=0 to 9
for l=0 to 9

a=10*i+j  (Formamos un número con las dos primeras cifras)
b=10*k+l  (Formamos otro con las dos últimas)
c=100*a+b   (Formamos el número total)

if a^2+b^2=c then (Si se cumple, tenemos la solución)

msgbox(a)  (Se comunican las soluciones)
msgbox(b)
msgbox(c)
end if
```

```
next l
next k
next j
next i

End Sub
```

La respuesta es que existe otro número de cuatro cifras con la misma propiedad ¿Cuál?

Otras propuestas

(a) Ya que tienes el código adecuado para resolver la cuestión, si efectúas en él algunos cambios puedes encontrar números narcisistas de cuatro cifras. Uno es $1634=1^4+6^4+3^4+4^4$. ¿Cuáles son los otros dos?

(b) Con otro pequeño cambio puedes encontrar números de cifras **abcd** que cumplen que **abcd**=$\mathbf{a^3+(bc)^3+d^3}$. Hay dos

(c) Con otro cambio más puedes encontrar números de cifras **abcd** que cumplen que **abcd** = $\mathbf{(cd)^2-(ab)^2}$. Sólo existe una solución.

CUADRADO DEL SIMÉTRICO

Claudi Alsina, en su libro "Vitaminas matemáticas", señala como una propiedad del número 12 la siguiente: $\mathbf{12^2 = 144}$ **y** $\mathbf{21^2 = 441}$, es decir, que el cuadrado de su número simétrico en cifras coincide con el simétrico de su cuadrado.

Esta propiedad la poseen otras parejas de números, en concreto hay, si la hoja de cálculo no falla, las siguientes:

Dos parejas de dos cifras: 12 y 21, 13 y 31

Cinco parejas de tres cifras, desde 102 con 201 hasta 311 y 113

Dieciocho de cuatro cifras, desde 1002-2001 hasta 3111-1113

Cuarenta y una parejas de cinco cifras…

(a) Una cuestión sencilla: ¿Qué cifras no pueden figurar entre las componentes de esos números? ¿Cuál es la causa?

(b) Otra algo más compleja: De las cifras que pueden figurar, ¿qué combinaciones de ellas habría que desechar?

(c) Y más difícil, porque hay que contar bastante: ¿Por qué aparecen estos números de parejas?: 2 de dos cifras, 5 de tres cifras, 18 de cuatro y 41 de cinco…

UNA EXPLORACIÓN MATEMÁTICA

En la entrada número 120 del interesante blog de Claudio (http://simlementenumeros.blogspot.com) se hacía una propuesta que esencialmente consistía en buscar los números que son cuadrados perfectos y que su doble aumentado en una unidad también lo es, como $144=12^2$ y $144*2+1=289 = 17^2$. En un primer comentario, se proponían las soluciones 0^2, 2^2, 12^2, 70^2, 408^2 y 2378^2 con una ley de formación $a_{n+1} = 6a_n – a_{n-1}$

Una entrada posterior contenía un enlace a una página de sucesiones de números enteros muy popular.

Navegando un poco y siguiendo enlaces sucesivos al propuesto descubrí que las soluciones 0, 4, 144, 4900, 166464, … divididas entre 4 coincidían con los números enteros que son cuadrados y triangulares a la vez (se puede prescindir del 0): 1, 36, 1225, 41616,…

Recordé que estos números se encuentran mediante la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$, una de cuyas soluciones es x=1, y=3. De esta forma se aclaró bastante la cuestión, y por su posible interés, se desarrolla a continuación el proceso que seguí, mediante una serie de propuestas encadenadas complementarias a las de Claudio.

(1) Demuestra que si $2n^2 + 1 = m^2$, entonces $n^2/4$ es también cuadrado y triangular.

(2) Demuestra que los números x que son cuadrados y triangulares a la vez coinciden con los valores de x^2 que son soluciones de la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$

(3) Una de las soluciones de la ecuación citada es $x_1=1$, $y_1=3$. Según la teoría correspondiente a las ecuaciones de Pell, las demás soluciones de esta ecuación vienen dadas por la igualdad

$$\left(3+\sqrt{8}\right)^n = y_n + \sqrt{8}\,x_n$$

Usa esta propiedad para encontrar las soluciones de x, que serán 1, 6, 35, 204,…., que elevadas al cuadrado coincidirán con los números cuadrados y triangulares a la vez 1, 36, 1225, 41616,…que, a su vez, multiplicados por 4, resultarán ser las soluciones de $2n^2 + 1 = m^2$, 4, 144, 4900, 166464…

(4) Usa la fórmula del apartado anterior para demostrar esta fórmula doble de recurrencia:

$y_n=8x_{n-1}+3y_{n-1}$, $x_n=3x_{n-1}+y_{n-1}$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Su aplicación reiterada nos permitirá encontrar los valores (1,3), (6,17), (35,99)…

Convierte esas dos fórmulas de recurrencia en una sola para x_n, y te resultará

$x_n=6x_{n-1}-x_{n-2}$, que coincide con la propuesta en el blog para sus dobles 0, 2, 12, 72,…

(5) ¿Por qué el cociente entre las x parece tender a esta expresión?

$3 + 2\sqrt{2}$

Nos podemos basar en que $q_n = 6-1/q_{n-1}$, que nos lleva, tomando límites para n tendiendo a infinito, a la ecuación x = 6 -1/x, una de cuyas soluciones es $3 + 2\sqrt{2}$, que es la que vale al ser creciente la sucesión.

¡CÓMO PRESCINDIR DE LOS NÚMEROS PRIMOS!

Ninguna publicación sobre números puede dejar atrás a los primos. Son los números más estudiados y misteriosos. Las cuestiones sobre ellos son muy numerosas, y abarcan distintos niveles de dificultad. Se puede estar toda la vida investigando con los números primos aunque no se tenga formación superior. Son como piezas de construcción, que permiten levantar los más hermosos edificios.

DOS DEMOSTRACIONES PROPUESTAS POR T. M. APOSTOL

En el libro "Introducción a la Teoría analítica de números" de T. M. Apostol hemos encontrado dos propuestas de demostración de nivel medio sobre números primos y compuestos:

(a) Demostrar que todo número N mayor que 12 es suma de dos compuestos.

(b) Demostrar que si 2^n+1 es primo, n ha de ser potencia de 2.

En la primera has de darte cuenta del papel que juega el número 12. Quizás debas expresar el número N en forma de binomio.

La segunda recuerda los números de Fermat. Quizás un camino sea abordar el teorema recíproco.

No son excesivamente difíciles.

LA HOJA DE CÁLCULO AYUDA A RAZONAR

Recientemente, en el blog Problemas matemáticos (http://problemate.blogspot.com), se ha publicado este elegante problema:

Dado un número cualquiera, llamamos MFI de ese número a su mayor divisor impar. Así, el MFI de 12 es 3, y el MFI de 15, es 15. Por cierto, que hay números, como el 8, que tienen por MFI a 1.
Demuestra que la suma de los MFI de los números n + 1, n + 2, ..., 2n de cualquier entero positivo n siempre da n^2.
Puedes comprobarlo con cualquier número, si no te lo crees.
¿Podrás convencer a todo el mundo de que sucede de verdad para todos los números?

La cuestión propuesta permite intentar su resolución con la ayuda de la hoja de cálculo, ya que automatizando el cálculo del MFI es posible investigar su distribución en algunos intervalos de números. A continuación se desarrolla un camino de resolución de este tipo.

La solución dada $\mathbf{n^2}$ me dio la pista de que aparecerían todos los números impares desde 1 hasta n. Para comprobarlo creé para OpenOffice.org Calc la función *mayorprim* para determinar el MFI de cualquier número (ver Apéndice)

Con ella construí tablas entre n y 2n para varios valores de n, escribiendo pares de números en los que el primero fuera el número y en el segundo su mayor divisor impar

14 - 7, 15 – 15, 16 – 1, 17 – 17, 18 – 9, 19 – 19, 20 – 5, 21 – 21, 22 – 11, 23 – 23, 24 – 3, 25 – 25, 26 - 13

Teniendo a la vista este tipo de tablas se observa que en ellas figuran todos los impares desde 1 hasta 2n+1, luego mi sospecha estaba justificada. ¿Por qué ocurre esto?

La causa es que todo número n se puede expresar como $n=MFI.2^p$, y esto produce dos hechos: Todos los impares menores que n figurarán con seguridad en la lista de MFI entre n+1 y 2n y además una sola vez.

(a) Que figuran una sola vez es fácil de ver, pues si $h.2^p$ figura en la lista desde n+1 hasta 2n, su siguiente número del mismo tipo sería el doble $n=MFI.2^{p+1}$, y sería mayor que 2n.

(b) Que deban figurar todos se deduce de que para cualquier número menor que n, al multiplicarlo por 2, 4, 8, etc., siempre será posible que el múltiplo formado esté en el intervalo pedido n+1 a 2n. Omito los detalles.

Este ejemplo ilustra la dificultad que a veces se tiene de "ver" los componentes de un problema. Al comprobar con la hoja de cálculo que la lista contenía todos los números impares deseados, fue mucho más simple investigar la causa.

Esta cuestión se podría haber visualizado usando el sistema binario de numeración. La idea fundamental es la siguiente: Si un número **n** se expresa en sistema binario como un conjunto de unos y ceros, multiplicarlo por 2 equivale a añadir un cero a su derecha, o, en términos muy gráficos, "empujarle" sus cifras hacia la izquierda.

Así, si 7=111(2 su doble 14=1110(2 y multiplicado por 4 28=11100(2

En el problema citado, todos los números impares menores o iguales a **n** son "empujados" hasta convertirse en los números pares existentes entre n+1 y 2n. Como además esa operación equivale a ir multiplicando por 2, los números primitivos serán los MFI de los resultantes.

Se puede ver en la siguiente tabla, que contiene los números del 1 al 22 con su correspondiente desarrollo binario (se han suprimido los ceros): Los impares menores o iguales a 11 (1,3,5,7,9 y 11) son desplazados según las celdas de color naranja (que representan potencias de 2), hasta situarlos en las celdas de color verde, lo que los hace iguales a los números situados a su izquierda. Es mejor verlo que seguir la explicación.

1					1
2				1	
3				1	1
4			1		
5			1		1
6			1	1	
7			1	1	1
8		1			
9		1			1
10		1		1	
11		1		1	1
12		1	1		**3**
13		1	1		1
14		1	1	1	**7**
15		1	1	1	1
16	1				**1**
17	1				1
18	1			1	**9**
19	1			1	1
20	1		1		**5**
21	1		1		1
22	1		1	1	**11**

Notas

- Del razonamiento anterior se deduce que si un número está escrito en el sistema binario, su MFI se obtiene suprimiendo los últimos ceros de dicha expresión binaria.

Así, si 20 = 10100 (2, al suprimir los ceros queda 5=101, su MFI.

- Entre n+1 y 2n sólo puede haber una potencia de 2, y por tanto un sólo MFI igual a la unidad.

PRIMOS REVERSIBLES (PRIMO-OMIRP)

Es muy popular la definición de los pares de números ***primo-omirp, o primos reversibles***, que son aquellos en los que uno se forma invirtiendo las cifras del otro (en base de numeración decimal) y que ambos son primos, como los pares 199 y 991, 7589 y 9857. Se suelen excluir los capicúas.

No vamos a insistir en el concepto, que incluso se recoge en la Wikipedia, sino en la posibilidad de encontrarlos con Hoja de Cálculo.

Para ello necesitamos las dos funciones del Apéndice, INVERTIR_CIFRAS y ESCAPICUA. Además, deberemos contar con la función ESPRIMO, uno de cuyos posibles códigos figura también en el Apéndice.

Se pueden encontrar así (excluyendo capicúas) 4 parejas de dos cifras (13 – 31, 17 – 71, 37 – 73, 79 – 97), 14 parejas de tres cifras, desde 107-701 hasta 991-199, y 102 de cuatro cifras. Se pueden ordenar bien los cálculos usando las mencionadas funciones.

1	107	701
2	113	311
3	149	941
4	157	751
5	167	761
6	179	971
7	199	991
8	311	113
9	337	733
10	347	743

Aquellas personas no interesadas en la programación de macros pueden descargar el archivo de texto ***omirp.txt***, que contiene una lista con los números "omirp" inferiores a 200.000, de la dirección ***http://www.hojamat.es/blog/omirp.txt***. Una vez descargado es fácil trasladar los datos a una hoja de cálculo. Sobre esta lista doble se pueden plantear cuestiones bastante atractivas:

Cuestiones

(a) Muchos números "omirp" restados con su pareja producen cuadrados perfectos. ¿Qué se puede escribir en las celdas de la derecha de las listas para que se detecte esta propiedad?

Llama la atención la repetición de los resultados 30, 60 y 78 en las raíces cuadradas, así como 738, todos múltiplos de 6. ¿Será siempre así? ¿Será siempre divisible entre 6 la raíz cuadrada de la diferencia entre dos "omirp"?

Como curiosidad, si siguiéramos escribiendo números hasta un millón, una raíz cuadrada que aparece varias veces es 666.

$746.203 – 302.647 = 443.556 = 666^2$

$767.323 – 323.767 = 443.556 = 666^2$

$785.143 – 341.587 = 443.556 = 666^2$

$797.353 – 353.797 = 443.556 = 666^2$

(b) Si hemos buscado diferencias que sean cuadrados perfectos, nada nos impide intentarlo con triangulares. Un criterio fácilmente programable en hoja de cálculo es que un número N es triangular si 8n+1 es cuadrado perfecto. ¿Existirán diferencias triangulares?

(c) Un poco más difícil: ¿Existirán diferencias que sean cubos perfectos?

Notas

(1) La distribución de apariciones de cuadrados perfectos al restar las parejas primo-omipr (contando una diferencia por pareja) inferiores a 200000 es la siguiente:

Diferencia	Frecuencia
36	1
900	10
3600	5
544644	1

(2) Ya que hablamos de parejas, podríamos definir como "hijo" al mayor número primo que divide a la diferencia primo-omirp. Por ejemplo, para números menores que 10000 el hijo más crecidito es 449 y el más pequeño 3. Como las diferencias son pares, eso significa que nunca serán potencias de 2.

Si ampliamos la búsqueda hasta 200000 nos aparecen dos hijos algo monstruosos:

996001 y 100699 tienen como hijo mayor a 49739

997001 y 100799 tienen como hijo mayor a 49789

PRIMOS CON CIFRAS CONSECUTIVAS

(Sobre una propuesta del blog "Números"-

http://www.simplementenumeros.blgspot.com)

a) Encontrar todos los primos cuyos dígitos son consecutivos y están ordenados de menor a mayor (yo encontré cinco), y de mayor a menor.

Esta cuestión es muy interesante para la construcción de un algoritmo sobre ella. La idea es comenzar con la cifra de las unidades, que sólo puede ser 1, 3, 7 ó 9, e ir adosando a esa cifra por la izquierda cifras decrecientes en una unidad, analizando en cada paso si es primo o no.

Por ejemplo:

7 es primo. Le adoso un 6.

67 es primo. Le adoso un 5.

567 no es primo. Lo salto, pero le adoso un 4.

4567 es primo. Añado un 3.

Así se van añadiendo hasta llegar a **n** cifras.

Se puede plantear en el Basic de la hoja de cálculo, con estos resultados:

Primos con cifras ascendentes:

Código

Sub buscaprimos(n) (n es una cifra igual a 1,3,7 ó 9)
dim m,p,n

m=n:p=n (Variables que albergan las cifras)

for i=1 to n (Se recorren **n** cifras para agotar las posibilidades)
p=p-1 (Cifras crecientes, van disminuyendo a la izquierda)
m=10^i*p+m (Se forma el número con cifras crecientes)
if esprimo(m) then msgbox(m) (Si es primo, se comunica)
next i

End Sub

Si se dan a **n** los valores 1,3,7 y 9, resultan las soluciones 23, 67, 89, 4567 y 23456789

Para los descendentes sólo hay que corregir un detalle:

Sub buscaprimos(n) (n es una cifra igual a 1...9)
dim m,p,n

```
m=n:p=n

for i=1 to n
p=p-1 (Cifras decrecientes)
m=10*m+p (Se forma el número con cifras decrecientes)

if esprimo(m) then msgbox(m) (Si es primo, se comunica)
next i

End Sub
```

Con este otro código, dando valores a n entre 1 y 9, resultan dos soluciones: 43 y 76543.

Esta cuestión no es importante, pero resalta la simplicidad que puede tener un algoritmo que después resulta bastante potente.

NIDOS DE PRIMOS

Hace unos días se me ocurrió averiguar cuántos números primos se pueden generar permutando conjuntos determinados de cifras. Les llamé “nidos de primos”.

Consideré los números primos permutables, que son aquellos cuyas permutaciones de cifras forman también números primos. Los primos permutables de pocas cifras son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, 1111111111111111111, 11111111111111111111111…

En ellos se repite algún dígito, por lo que no llegan al máximo posible, que coincide con el factorial del número de cifras.

Con una hoja de cálculo emprendí la búsqueda para estudiar el máximo número de primos que se puede generar. Estudié separadamente los que contenían la cifra 0, en los que cambia el número de cifras. Encontré lo siguiente:

Conjuntos de dos cifras: Con éstos no había que probar nada. El máximo de primos generados es 2, como en el caso de 13 y 31 y los permutables de la lista anterior.

Tres cifras: El máximo número de primos generado podría ser 6, pero ningún número de tres cifras llega a tanto. Aquí me fallaron algunos candidatos que parecían idóneos, como el 137, y los conjuntos de cifras que producen más primos resultan ser 149, 179 y 379 (y todas sus permutaciones), que forman 4 primos cada uno. Por ejemplo, 1, 4 y 9 generan 149, 419, 491, y 941.

Si consideramos la cifra 0, también producen cuatro primos 107, 709 y todas sus permutaciones.

Cuatro cifras: Con cuatro cifras el número de permutaciones posibles es de 24. No se llega a tanto. Aquí hay dos conjuntos con número máximo de primos. Forman exactamente 11 primos, y son 1237 y 1279. Es curioso que la cifra 2 entre a formar parte de los dos conjuntos que forman más primos.

Cinco cifras: Aunque mi búsqueda no ha sido totalmente exhaustiva, creo que el máximo número de primos lo engendra el conjunto 13789, que permite formar 39 primos, seguido de 13459 con 37 y 12379 con 36.

Es instructivo el estudio de los cocientes entre el número de primos generado y el de permutaciones de los conjuntos:

2/2!=1; 4/3! = 0,6667; 11/4! = 0,4583; 39/5! = 0,325

Podemos compararlos con los cocientes entre los primos menores o iguales a 10, 100, 1000,.. y esas mismas cantidades:

4/10=0,4; 25/100=0,25; 168/1000= 0,168; 1229/10000=0,1229

Observamos que ambas son decrecientes y muy cercanas a progresiones geométricas de razón similar, como se ve en los cocientes entre cada elemento y su anterior:

0,6667/1	= **0,6667** y	0,25/0,4	= **0,625**
0,4583/0,6667	= **0,6875** y	0,168/0,25	= **0,672**
0,325/0,4583	= **0,7091** y	0,1229/0,168	= **0,7315**

Esto indica que ambos están relacionados de alguna forma con la distribución de números primos.

Aquí detuve la búsqueda, porque la hoja de cálculo se lentifica pronto. Si alguien emplea programas más potentes puede seguir con números más altos de cifras.

EL MAYOR DIVISOR

Es fácil demostrar que todo número natural M que venga dado por la expresión 2^n-1 con n natural compuesto, es también compuesto. Lo que no es tan inmediato es calcular su mayor divisor propio. Por ejemplo, el mayor divisor de 2^{20}-1=1048575 es 349525.

¿Qué protocolo de cálculo podríamos seguir para encontrar el mayor divisor de 2^n-1 (n compuesto) con un número pequeño de pasos? No es exactamente un algoritmo, sino una estrategia. Para números grandes se puede complicar, pero para n menor que 100 no debería darnos problema.

Aquí puedes estudiar algunos resultados con valores de n compuestos:

n	2^n-1	Mayor divisor
4	15	5
6	63	21
9	511	73
12	4095	1365
20	1048575	349525
25	33554431	1082401
30	1073741823	357913941
33	8589934591	1227133513
35	34359738367	1108378657
49	562949953421311	4432676798593

La idea es buscar el menor divisor de M, con lo que el mayor divisor será el cociente de ambos.

Consulta en las soluciones alguna de esas estrategias.

CERCA DEL CUADRADO DE UN PRIMO

Alrededor del cuadrado de un número primo mayor que 3 no hay muchos más primos. El cuadrado parece que los aleja. En efecto, no son primos los números $p^2 - 1$, $p^2 - 3$, $p^2 - 4$, $p^2 - 5$, $p^2 + 1$, $p^2 + 2$ y $p^2 + 3$. Lo podemos expresar con este esquema construido en los alrededores de 49:

44	45	46	47	48	49	50	51	52
Par	**Múltiplo de 3**	**Par**	**Libre**	**Múltiplo de 48**	**Cuadrado de 7**	**Par**	**Múltiplo de 3**	**Par**

Sólo queda un lugar para un posible número primo, y es $p^2 - 2$.

En algunos casos se rellena con un número primo, como en el caso de 49, en el que 47 es primo, y en otros es un compuesto con divisores primos superiores a 5.

¿Podrías demostrarlo? La clave de todo está en $p^2 - 1$, que es múltiplo de…(piensa y demuestra)

Además, hay cuadrados de primos que están muy aislados, como el $529 = 23^2$, al que sólo rodean los primos 521, 523, 541 y 547, entre 520 y 550, o el $1681=41^2$ cuyos primos más cercanos son 1669 y 1893. ¿Sabrías encontrar casos similares?

FÓRMULA DE POLIGNAC

Es relativamente sencillo encontrar los divisores primos del factorial de un número natural n. Simplemente son todos los primos inferiores o iguales a n. El problema reside en calcular los exponentes a los que están elevados. Por ejemplo, la descomposición factorial de 22! Es

$$22!=2^{19}.3^{9}.5^{4}.7^{3}.11^{2}.13.17.19$$

Para obtener los exponentes Polignac propuso esta fórmula

$$r=\sum\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

En la que el exponente r de cada factor primo p viene dado por la suma de los cocientes enteros del número n entre las sucesivas potencias de p.

Puedes usar esta fórmula para resolver las cuestiones siguientes:

¿Cuál es el mayor divisor del factorial 12! que es cuadrado perfecto? (Solución 2073600, cuadrado de 1440)

¿En cuántos ceros termina el cociente 100!/50!? (Solución en 12 ceros)

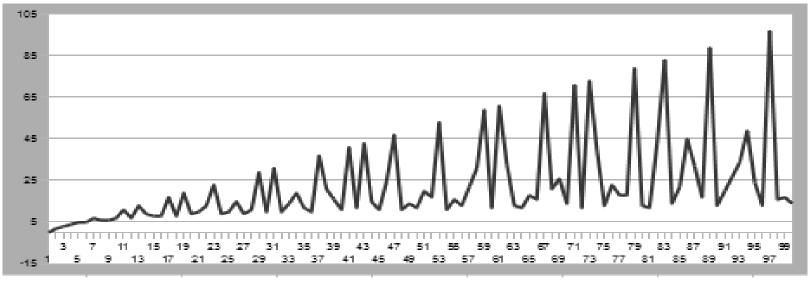
¿Cuál es la máxima potencia de 56 que divide a 56!? (Solución 56 elevado a 9)

Si te da pereza ir contando, puedes usar la hoja de cálculo contenida en

http://www.hojamat.es/sindecimales/diisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#polignac

LOGARITMO ENTERO

Llamaremos logaritmo entero de un número natural a la suma de todos sus factores primos, contando sus repeticiones. Se suele representar por la función sopfr(n). Así, sopfr(28)=2+2+7=11. El valor más pequeño corresponde a sopfr(1)=0 y los mayores coinciden con los números primos, como es evidente. Aquí tienes la gráfica de esta función para los primeros números, en la que se perciben los máximos correspondientes a los primos:



Se le llama logaritmo porque posee la propiedad aditiva: sopfr(a*b)=sopfr(a)+sopfr(b). Se cumple por el hecho de contar las repeticiones de los factores primos. Si se contaran una sola vez, esta propiedad sólo se verificaría si los números fueran primos entre sí y daría lugar a otra función que se representa por sopf(n).

Propuestas:

(a) La función sopfr nunca sobrepasa el valor de su argumento, es decir, n>=sopfr(n). No es difícil demostrarlo. Se da la igualdad en el número 1, el 4 y en los números primos. Después considera que si k=m*n (no necesariamente primos) y alguno de los dos factores es mayor que 2, se cumple que k>m+n. Finalmente, aplicas esta propiedad de forma reiterada a las descomposiciones en un número creciente de factores hasta llegar a los primos.

(b) Si sopfr(n) es menor o igual que n, se podrían buscar los números que son divisibles entre su logaritmo entero. No hay muchos. Sin contar los números primos, en cuyo caso la divisibilidad es en realidad una identidad, entre los 1000 primeros números sólo hay 42 que sean divisibles entre su logaritmo entero, y entre los 10000 primeros hay 201. Entre ellos sólo en un caso es además su raíz cuadrada ¿En cuál?

(c) En los casos anteriores, si sopfr(n) divide a n, y n no es primo, tampoco lo es sopfr(n) ¿Sabrías demostrarlo? El razonamiento es fácil. Sin embargo, si suprimimos la condición de divisibilidad, el logaritmo entero puede ser primo, y de hecho lo es en multitud de casos. Por ejemplo, entre los 1000 primeros, el valor 19 es el que más se repite.

(d) Hemos visto que sopfr(n)<=n, luego si buscamos el valor de sopfr(sopfr(n)), se verificará que n>=sopfr(n)>=sopfr(sopfr(n)), y si reiteramos, habremos construido una sucesión recurrente no creciente de números naturales, que tendrá un valor mínimo, que puede ser el 0, el 4, o bien un número primo que actuará como punto fijo de la sucesión. Consideraremos que la sucesión termina cuando llega a su punto fijo o al 0.

Los números primos son ya puntos fijos, por lo que su sucesión se reducirá a un valor. Otros números necesitan más pasos, como 393, que da lugar a la sucesión 134, 69, 26, 15, 8, 6, 5.

El número 20 presenta la curiosidad de ser igual a la suma de los elementos de la sucesión: 20=9+6+5. Tienen esa propiedad otros dos números de dos cifras. Te invito a encontrarlos.

(e) El número 140 es cuatro veces mayor que los términos de su sucesión: 140 =4*(16+8+6+5). Los números 546, 616, 735 y 800 tienen una propiedad similar, pero con cocientes mayores que 4. ¿Cuáles?

(f) Si deseas investigar con el logaritmo entero (función **sofpr(n)**) puedes implementar en Excel o en Calc de OpenOffice.org un algoritmo voraz que encuentre el logaritmo. Es bastante eficiente, y similar al de encontrar todos los factores primos de un número.

La idea consiste en ir recorriendo los números k inferiores a n y cuando k sea divisor de n acumularlo a una variable S preparada al efecto. Si es divisor, n se sustituye por n/k (por eso el algoritmo es voraz), para disminuir el tiempo de búsqueda del siguiente divisor. Se vuelve a repetir la búsqueda hasta que n quede reducido a 1. En ese momento se lee el valor de la suma S y obtendremos el logaritmo entero.

Puedes leer en el Apéndice el código de implementación en Basic del esta función SOPFR

Jugamos con cifras

El sistema de numeración no es una cuestión importante en la teoría matemática, pero da lugar a temas divertidos, curiosos, que no hay que tomar demasiado en serio, pues todos sus resultados tendrán siempre un ámbito limitado. No obstante, entretienen y son fuente de desarrollo de habilidades matemáticas. Un reto importante es el de intentar trasladar las propiedades a otros sistemas de numeración.

UNA PROPUESTA DEL "ESPEJO LÚDICO"

En la entrada del blog "Espejo lúdico" (http://espejo-ludico.blogspot.com/) de fecha 18 de agosto de 2008, se presentó la siguiente propuesta:

Aprovechando las cifras

Buscar números tales que entre su cuadrado y su cubo se utilicen todas las cifras (del 0 al 9) y una sola vez cada una.

Podríamos darle la vuelta a esta propuesta, y en lugar de aconsejar que no se use la hoja de cálculo, que era lo recomendado, promover su uso, y de manera más fuerte, exigiendo que sea la propia hoja, sin ayuda nuestra, quien encuentre la solución. Evidentemente, en ese caso el objetivo es algorítmico, y no los razonamientos matemáticos que pedía el Espejo Lúdico.

¿Te atreves a crear una "trampa automática" en la que caigan los números que cumplan la condición exigida?

	1		5041	504	50	5			
	71	5041	1	4	0	5			
			357911	35791	3579	357	35	3	
		359711							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	0	1	1	2	0	1	0	1
	No se cumple								

Para conseguirlo puedes plantear las siguientes operaciones de hoja de cálculo

(1) El cuadrado y el cubo del número a probar se descomponen en cifras, una por celda (zona verde de la imagen). Es el primer problema a resolver.

(2) Se construye una tabla con las cifras del 0 al 9 y se cuenta el número de veces que cada una aparece tanto en el desarrollo en cifras del cuadrado como del cubo. (zona amarilla)

(3) La celda de "Se cumple" o "No se cumple" examina los contadores, y si todos presentan el valor 1 (¿cómo se averigua eso en una sola operación?) da por válido el número.

(4) Se va probando, de forma manual o automática (mediante un bucle con ayuda de macros) en un rango de búsqueda, y se espera a que aparezca el número probado como válido. Esto ocurre muy pronto.

¿Te atreves a construir algo similar?

ALGORITMO DERIVADO DE UN PROBLEMA

2758620689655172413793103448 * 3=8275862068965517241379310344

¿Qué tiene de particular este resultado?

Hace días leí en un libro de problemas el siguiente:

Encontrar un número entero que termine en 6, y que si esa cifra 6 se mueve hasta situarse delante del resto de las cifras del número, el resultado equivalga a multiplicar ese número por 4: 6abc..de=4*abc..de6

Un caso similar es el número 205128, que si movemos el 8 a la primera posición 820512 el resultado equivale a cuatro veces el primitivo: 205128*4=820512

¿Cuál es la forma más rápida de resolver este tipo de problemas?

Intenté analizar el problema propuesto por la parte izquierda, y aunque llegué a alguna solución, vi que resultaba mucho más eficiente trabajar por las unidades, después las decenas, etc. En efecto, si las unidades son 6, al multiplicar por 4 han de resultar 4 unidades. Luego el número termina en 4. Por un razonamiento similar, las decenas han de valer 8 (4*4+2=18), las centenas…seguí así hasta encontrar la solución. ¿Puedes encontrarla tú?

Este razonamiento se puede convertir en un algoritmo, en el que dada la cifra de las unidades (la que ha de moverse) y el número a multiplicar te devuelva el resultado, si es que existe. El problema es que hay que darle dos condiciones de parada:

(a) Debe aparecer la cifra buscada

(b) El algoritmo se detiene cuando la cifra multiplicadora es igual a cero.

Si lo implementamos en hoja de cálculo el límite es el número de filas o columnas.

Si te animas a encontrar un procedimiento de resolución e incluso a convertirlo en algoritmo, intenta conseguir resultados tan espectaculares como el que encabeza esta entrada.

Aquí tienes otro resultado del algoritmo

9	1	3	0	4	3	4	7	8	2	6	0	8	6	9	5	6	5	2	1	7	3	**9**
0	2	0	3	2	3	5	5	1	4	0	6	4	6	3	4	3	1	1	5	2	6	**7**

Equivale a encontrar que

1304347826086956521739 * 7=9130434782608695652173

En las soluciones puedes ver otros casos con más cifras

¿Existirán datos que produzcan algoritmos sin parada?

Hasta donde hemos experimentado, siempre se llega a la cifra primitiva y a un multiplicador cero que detiene el algoritmo.

Planteamiento algebraico

Una de las características más elegantes de las Matemáticas es la concurrencia de resultados procedentes de métodos muy distintos. Basta recordar, por ejemplo, las demostraciones que existen del teorema de Pitágoras procedentes de planteamientos muy variados.

Intentaremos un planteamiento del problema de tipo más algebraico. En lugar del 6 consideraremos cualquier cifra a entre 2 y 9 (el 0 y el 1 dan casos triviales) y llamaremos b al número formado por el resto de cifras. Así, el número que debemos buscar se puede expresar como 10b+a. Llamemos N al factor por el que hay que multiplicar ese número. Si se cumplen las condiciones del problema se podrá escribir

$N(10b+a) =10^x a+b$, siendo x el número de cifras de b

Despejando: $(10N-1)b=(10^x-N)a$

Serán soluciones del problema (no todas) las procedentes de la condición de que 10N-1 sea divisor de 10^x-N, que estará formado por varios 99…9 seguidos de la cifra 10-N.

Podemos ir probando los valores de N, con lo que 10N-1 irá teniendo el valor de 9, 19, 29,…89, y deberán ser divisores de 10x-N. Es fácil programarlo en una hoja de cálculo. En la siguiente tabla se han descubierto tres posibilidades (si siguiéramos encontraríamos más)

	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0
999	0	0	0	0	0	0	0	0
9999	0	0	1	0	0	0	0	0
99999	0	0	0	0	0	0	0	0
999999	0	0	0	0	0	0	0	0
9999999	0	0	0	0	0	0	0	0
99999999	0	0	0	0	0	0	0	0
999999999	0	0	0	0	0	0	0	0
9999999999	0	0	1	0	0	0	0	0
99999999999	0	0	0	0	0	0	1	0
999999999999	0	0	0	0	0	0	0	0
9999999999999	0	0	0	0	0	0	0	0

El primer 1 corresponde a N=4 y expresa que 99996 es divisible entre 39. Si multiplicamos su cociente 2564 por las distintas cifras, nos resultarán valores de b, y por tanto soluciones del problema: 102564*4 = 410256; 128205*4 = 512820; 153846*4 = 615384 (Esta es la solución para el enunciado de arriba). Intenta encontrar más.

El segundo 1 nos da otras soluciones con más cifras: 99999999996/39=2564102564, que al multiplicar por a y añadirle una cifra nos devuelve más soluciones, por ejemplo:

128205128205*4 = 512820512820

Prueba a obtener soluciones del último 1, que corresponde a N=8

Este método no agota las soluciones, pues 10N-1 puede tener factores comunes con a que alteren las condiciones, pero como diversión ya está bien con lo estudiado.

LAS PRIMERAS, DOBLE DE LAS SEGUNDAS

El siguiente problema consiste en encontrar los dos únicos números de seis cifras que son iguales a un cuadrado menos uno, y en los que la última mitad (los tres últimos dígitos tomados como un número de tres cifras) es el doble que la primera.(Propuesta del blog “Números”)

Es decir que se cumple: abcdef = n^2-1 y abc = 2 x def

Los dígitos abcdef no tienen que ser todos diferentes.

Si las tres primeras son el doble de las tres segundas las soluciones son: 190095, 446223 y 806403 y si es al revés: 112224 y 444888

Lo bueno de este problema es que se puede abordar con distintas técnicas:

Algebraica

Es la que ofrece el autor del blog, que en esencia consiste en lo siguiente:

Podemos llamar x al número formado por las tres cifras inferiores, con lo que el resto del número sería 2000x (o bien al revés) y pplanteamos que 2001x = n(n+2), ya que todo cuadrado menos 1 equivale al producto de dos enteros cuya diferencia es 2 (en el caso simétrico sería 1002x=n(n+2) y deberemos intentar descomponer 2001 en factores y ver cuáles de ellos se pueden completar a un producto de dos factores que se diferencien en dos unidades. Los factores de 2001 son: 2001*1; 667*3; 87*23 y 29*69 y se deberán completar multiplicando por un número de tres cifras hasta conseguir el producto del tipo n(n+2)

(Ver Soluciones)

Hoja de cálculo sin macros

Se forma una columna con todos los múltiplos de 2001 (o de 1002) que tengan seis cifras (supongamos que es la D) y en la columna paralela siguiente (la E) se inserta una fórmula similar a la siguiente:

=SI(D6+1=ENTERO(RAIZ(D6+1))^2;"SI";"")

Que viene a expresar que si D6+1 es cuadrado perfecto (igual al cuadrado de la parte entera de la raíz) se escribirá un SI, y en caso contrario se dejará en blanco. Al rellenar esa fórmula observaremos que aparece un SI en las soluciones 190095, 446223 y 806403. Cambia a 1002 y obtendrás las otras.

217	434217	
218	436218	
219	438219	
220	440220	
221	442221	
222	444222	
223	446223	SI
224	448224	
225	450225	
226	452226	
227	454227	
228	456228	

Hoja de cálculo con macro

Si se intenta mediante Basic, el código de macro adecuado sería:

```
Sub buscar
v=7

for i=1 to 999
a=1002*i (o bien 2001)
if a+1=int(sqr(a+1))^2 then (se prueba si es cuadrado perfecto)
v=v+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(4,v)
.value=a (En OpenOffice Calc)
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(v,5).Value = " " (En Excel)
end if
next i
End sub
```

Sería esta buena ocasión para iniciarte en la programación de macros. Puedes consultar la Guía correspondiente.

(http://www.hojamat.es/guias/guiaopen/guia8.pdf)

Variantes

¿Existen soluciones similares con cuatro cifras? Sí: 4623 si las dos primeras son el doble de las segundas, y 1224 y 4488 en el caso contrario. Intenta demostrarlo o encontrarlas con la hoja de cálculo.

¿Se podrían estudiar cuestiones similares con n^2-4 o con n^2 – 9? ¿Y con n^2+1?

(Ver Soluciones)

NÚMEROS AUTOMÓRFICOS

Los números de la primera columna de la siguiente tabla son *automórficos*. Si los estudias adivinarás pronto qué propiedad tienen para recibir este nombre.

1	1
5	25
6	36
25	625
76	5776
376	141376
625	390625
9376	87909376
90625	8212890625
109376	11963109376

Efectivamente, interviene su cuadrado en la propiedad que está patente en la tabla.

¿Cómo podríamos encontrarlos con una hoja de cálculo? Para construir la tabla que se incluye se han usado macros, pero se puede prescindir de ellas. Puedes crear una tabla de números consecutivos y después aplicarles una condición. ¿Cuál?

Esta tabla es complementaria de la anterior. ¿Qué relación tiene con ella?

1	0	0
5	4	20
6	5	30
25	24	600
76	75	5700
376	375	141000
625	624	390000
9376	9375	87900000
90625	90624	8212800000
109376	109375	11963000000

En ella tienes contenido el procedimiento de búsqueda.

Notas

Después de publicar esta entrada, se recabó más información sobre este tipo de números, mucha de ella interesante, que se añade en forma de notas. En la sección de Soluciones se completan algunos razonamientos.

(1) Salvo los casos triviales de 0 y 1, todos los números automórficos terminan en 6 ó 5.

Basta ver que si **a** es automórfico, $\mathbf{a^2 - a = (a-1)a}$ es múltiplo de 10, y que esto se reduce a cuatro casos. Dos de ellos son triviales, el 0 y el 1, y los otros terminan en 5 o en 6.

(2) Si un número es automórfico, no sólo coincide en sus cifras con las últimas de su cuadrado, sino también con las del cubo y todas las demás potencias. Por ejemplo, las potencias de 76 terminan todas en 76

76
5776
438976
33362176
2535525376
192699928576
14645194571776

(3) Si a un número automórfico de varias cifras se le suprime la primera, sigue siendo automórfico.

Esto nos lleva a que un automórfico cualquiera, como 109376, contiene en sí todos los automórficos que comparten la última cifra con él: 6, 76, 376, 9376 y 109376.

(4) En cada nivel de cifras sólo pueden existir dos números automórficos, uno terminado en 5 y otro en 6.

En efecto, de una cifra existen dos, 5 y 6, de dos cifras otros dos, 25 y 76, y se puede demostrar que si a cada uno de ellos se le añade una determinada cifra, se convierten en automórficos de una cifra más (ver Soluciones).

Si se suma los dos automórficos del mismo número de cifras, resulta siempre un número de la forma 10^k+1:

5+6=11
25+76=101
625+376=1001

(5) Si m es automórfico de k cifras, entonces $3m^2 - 2m^3 \pmod{10^{2k}}$ también es automórfico. Esta propiedad permite generar otro automórfico con doble de cifras.

Así, a partir del automórfico 109376 se genera

$3*109376^2 - 2*109376^3 \pmod{10^{12}} = -2616918212890624 \pmod{10^{12}} = 7383081787109376 \pmod{10^{12}} = 081787109376$

No se incluye demostración a causa de su longitud.

FUNCIÓN "DÍGITOS"

Si escribimos la serie de números 1, 2, 3,….N-1, N, ¿cuántos dígitos hemos escrito en el sistema decimal de numeración?

Esta cuestión se puede expresar de forma inversa mediante un problema:

Para numerar las páginas de un libro hemos tenido que escribir 702 dígitos ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Es interesante estudiar la relación entre un número natural N y los dígitos empleados en escribir desde 1 hasta N. ¿Cómo se te ocurre abordar esta cuestión? Damos tres pistas:

(a) Recuento simple

Deberemos contar un dígito por cada número escrito, otro por cada número a partir de 10, otro a partir de 100, etc. Esto nos daría, para el número de tres cifras del ejemplo, la expresión

N+N-9+N-99 = 702; 3N=810; N=270

luego el libro tiene 270 páginas.

(b) Truco de Hoja de Cálculo

A partir de la resolución anterior, ¿podríamos construir una función tal que dado un número N nos devolviera el número de dígitos empleados en la sucesión 1...N?

Aprovechamos un truco. En las hojas de cálculo una igualdad o desigualdad verdadera posee el valor 1 y la falsa 0. Podríamos entonces construir esta función:

D(N)=N+(N-9)*(N>9)+(N-99)*(N>99)+(N-999)*(N>999)+(N-9999)*(N>9999)

que nos devolvería el valor deseado para cada entero positivo menor que 100000.

Así se puede construir una tabla para esta función en Hoja de Cálculo

Número	Dígitos
...	...
93	177
94	179
95	181
96	183
97	185
98	187
99	189
100	192
101	195
102	198
103	201
...	...

(c) Uso en el aula

Esta función definida en Z puede usarse en las clases de Matemáticas, como ejemplo de

* Función definida entre números enteros
* Definición por intervalos
* Ejemplo de linealidad a trozos

Este tipo de ejemplos ayuda a extender el concepto de función, que a veces se queda tan solo en funciones reales, continuas y de definición simple.

¿Te atreverías con la definición de la función inversa de esta? Es evidente que su dominio no contendría a todos los números naturales.

Lo anterior puede sugerir otras cuestiones similares. Por ejemplo ésta:

Si escribimos en sistema de numeración binario todos los números naturales comprendidos entre 1 y 2^n, ¿cuántos "unos" hemos escrito? Se debe expresar mediante una expresión dependiente de n.

La siguiente imagen puede sugerirte la solución:

	256	128	64	32	16	8	4	2	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	13
9	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
11	0	0	0	0	0	1	0	1	1	
12	0	0	0	0	0	1	1	0	0	
13	0	0	0	0	0	1	1	0	1	
14	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
15	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
16	0	0	0	0	1	0	0	0	0	33
17	0	0	0	0	1	0	0	0	1	
18	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
19	0	0	0	0	1	0	0	1	1	

DÁNDOLE VUELTAS A UN PROBLEMA

A veces una propuesta sencilla da lugar a múltiples preguntas. El papel del matemático es el hacerse esas preguntas, aunque no sepa responderlas. A esta actividad la llamaremos "dar vueltas a una cuestión". Se trata de generalizar, buscar variantes, resolver cuestiones afines, cambiar los supuestos del problema, etc.

Lo bueno de este planteamiento es que cada vez que se responde a una cuestión aparecen otras preguntas, con lo que habremos construido un verdadero árbol con tantas ramas como nuestra imaginación conciba. A continuación incluimos algunas propuestas. Los lectores quedan invitados a recorrerlas y a inventar otras nuevas

NÚMERO MÁS LA SUMA DE SUS CIFRAS

Esta propuesta parte de un problema incluido en el libro "Concurso intercentros de Matemáticas", de Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire.

"Encuentra razonadamente un número positivo "n" tal que la suma de "n" y la suma de sus cifras, resulte ser 379"

No es muy difícil encontrar la solución, 365, aunque el razonamiento debe ser cuidadoso.

¿Sería posible crear un algoritmo que resolviera el problema para cualquier otro número de tres cifras distinto del 379? Por ejemplo, para 832 la solución sería n=821.

El problema radica en que para algunos datos, como 717, existen dos soluciones: 696 y 705, ya que 696+6+9+6 = 717 y 705+7+0+5=717. Para más complicación, existen datos que no producen ninguna solución, como 222.

Proponemos algunos estudios sobre este problema:

(1) Encontrar un algoritmo que resuelva la cuestión para números de tres cifras (quizás deba tener dos ramas). La siguiente imagen recoge uno de ellos.

1							
2	Encuentra razonadamente un número positivo "n" tal que la suma de "n" y la suma de sus cifras, resulte ser el número de tres cifras que elijas						
3							
4	A, Roldán 2008						
5							
6	Escribe un número de tres cifras		222				
7			**2**	20	**1**	9	
8					**0**	20	
9							
10			**1**	121			
11							
12							
13							
14		Soluciones					
15							
16							
17							
18							

(2) ¿Existirá alguna caracterización para aquellos números que admitan, como 717 o 218, dos soluciones?

(3) ¿Se podrá encontrar, igualmente, alguna condición que cumplan los números que no producen soluciones, como 198 o 266?

Puede ayudar el estudio de las igualdades del tipo 101X+11Y+2Z = N, y también la construcción de tablas con hoja de cálculo como la que sigue.

Número	**Cifras**			**Suma**
190	1	9	0	200
191	1	9	1	202
192	1	9	2	204
193	1	9	3	206
194	1	9	4	208
195	1	9	5	210
196	1	9	6	212
197	1	9	7	214
198	1	9	8	216
199	1	9	9	218
200	2	0	0	202

LOS PUNTOS DEL DOMINÓ

He aquí una afirmación de Lucas en uno de sus libros:

"El número total de puntos de un juego completo de dominós jamás es igual al cuadrado de un número entero"

Le damos vueltas:

(a) ¿Qué es un dominó de número máximo n? (Lo nombraremos como n-dominó)

Intentar una definición formal, sin olvidar los "blancos".

(b) Nuestro dominó usual se corresponde con n=6 (Un 6-dominó). Se compone de 28 fichas, con una media de 6 puntos por ficha y un número total de puntos de 168 (demostrarlo)

(c) ¿Cuántas fichas y puntos presenta un n-dominó?

El número de fichas viene dado por la expresión $n(n+1)/2$ y el de puntos por $n(n+1)(n+2)/2$ (demostrarlo)

(d) ¿Es cierta la afirmación de Lucas?

Intenta demostrarla considerando cómo se reparten los factores primos del cuadrado perfecto entre los factores $n(n+1)(n+2)/2$

(e) Esta fórmula es parecida a la de los números triangulares $n(n+1)/2$, y sin embargo estos sí pueden ser cuadrados, como por ejemplo el 36 o el 1225, que son triangulares y cuadrados a la vez ¿Cuál es la diferencia?

(f) ¿Valdría la afirmación para el producto de tres números consecutivos? ¿Nunca pueden ser un cuadrado perfecto?

Para quienes no se atrevan con las demostraciones, una salida es comprobar las afirmaciones con una hoja de cálculo, cambiando el valor de n

¿Podríamos conjeturarlos con una hoja de cálculo? ¿Cómo?

(g) La fórmula para la suma de primeros cuadrados $n(n+1)(2n+1)/6$ es parecida a las anteriores, pero sin embargo puede ser igual a un cuadrado perfecto. Un caso trivial es el 1. ¿Cuál es el siguiente?

EL FÓSIL DE UN NÚMERO

(Problema propuesto en la Fase provincial de Alicante de la XIX Olimpiada Matemática, 2008)

Dado un número natural N, se multiplican todas sus cifras. Se repite el proceso con el resultado obtenido, hasta obtener un número de una cifra únicamente; a ese número se le llama el fósil de N. Por ejemplo, el fósil de 327 es 8. Hallar el mayor número natural, con todas sus cifras distintas, cuyo fósil sea impar.

Nosotros le daremos unas vueltas a la idea de "fósil" de un número.

(1) ¿Tienen fósil todos los números naturales?

Te lo puedes plantar en dos pasos:

Fósil de un número				
Escribe un número de cuatro cifras o menos				998
	0	9	9	8
998	998	98	8	
1	1	9	81	648
	0	6	4	8
648	648	48	8	
1	1	6	24	192
	0	1	9	2
192	192	92	2	
1	1	1	9	18
	0	0	1	8
18	18	18	8	
1	1	1	1	8

(a) El algoritmo de multiplicar todas las cifras produce una sucesión estrictamente decreciente y llega a términos de una cifra.

(b) Sólo los números de una cifra son invariantes en el proceso.

(2) Construye un algoritmo de hoja de cálculo tal que dado un número natural, encuentre su fósil. Puedes restringirlo sólo a números de tres o cuatro cifras, pero ten en cuenta que si disminuye el número de cifras no pueden aparecer ceros, que arruinarían el cálculo. En el algoritmo de la imagen, cuando disminuye el número de cifras aparece la unidad, para no desvirtuar el producto.

(3) ¿Obtendríamos otro tipo de fósil si sumáramos las cifras en lugar de multiplicarlas?

(4) Se pueden aplicar estas ideas al aula si se restringe el estudio a tres cifras, por ejemplo. Se podrían formar grupos e intentar que cada uno, con calculadora u hoja de cálculo lograra todos los fósiles posibles entre 0 y 9, y después se discutieran algunos casos:

¿Cuándo el fósil resulta ser cero? ¿Qué crees que hay más, fósiles pares o impares? ¿Por qué siempre se desemboca en una cifra? Etc.

MÚLTIPLOS DE 11

En un tomo de la colección "La tortuga de Aquiles" hemos encontrado el siguiente problema:

Determinar todos los números N de tres cifras que tengan la propiedad de ser divisibles por 11 y que N/11 sea igual a la suma de los cuadrados de los dígitos de N

Es un problema complicado, por lo que, con un poco de humor, recorreremos varias opciones de resolución según el ánimo que nos dejen los primeros intentos:

Método directo: Sea N=100a+10b+c, luego se cumplirá que

$N=100a+10b+c = 11(a^2+b^2+c^2)$

(1) Después de simplificar esto un poco, intentar eliminar alguna variable y seguir un desarrollo tremebundo de tipo algebraico, se desemboca en dos discriminantes de ecuaciones de segundo grado que han de ser cuadrados perfectos, y ¡oh maravilla!, descubrimos las dos soluciones. No es recomendable.

(2) Con ayudita: El mismo método anterior desemboca mejor en esos discriminantes si consideramos que los múltiplos de 11 de tres cifras sólo pueden tener estas dos expresiones:

$\underline{a(a+b)b}$ si $a+b<10$ o $\underline{(a+1)(a+b-10)}b$ si $a+b>10$ (Nos referimos a expresión decimal y no a un producto)

Seguimos un método similar al anterior, pero ya tenemos eliminada una variable. Se desemboca básicamente en dos expresiones, cada una con una sola solución.

(3) Sin Álgebra: Si lo anterior nos asusta, podemos emprender una búsqueda (buena para un cálculo mental mientras paseamos. Así lo resolvimos hace días).

¿En qué terminarán esos números? Expresemos como $10a+b$ el número $N/11$ y sólo buscaremos entre 10 y 90.

Si $b=9,8,7,6$ es fácil ver que no hay solución, porque $10a+b$ ha de ser mayor que el cuadrado de b, y si $a+b<10$, incluso mayor que el doble de su cuadrado. Con pocas pruebas se desecha esta posibilidad.

Si $b=5,4,3$ la condición anterior se cumple con más facilidad, por lo que hay que ir con más cuidado. Serán mejores candidatos aquellos en los que $a+b>=10$ ¿Por qué? Quizás encontremos alguno terminado en 5,4 ó 3.

Si $b=2,1,0$, caliente, caliente…

(4) Con hoja de cálculo: Una búsqueda sistemática se puede organizar creando una columna con los números que van desde 10 hasta 90, multiplicándolos por 11 en otra columna paralela. Después se descomponen estos últimos en sus tres cifras ¿cómo? y finalmente se calcula la suma de sus cuadrados y se comparan con la primera columna.

Apúntate a un método o dos y encuentra las dos soluciones que existen.

JUGAMOS CON LOS TRIANGULARES

El estudio de cuestiones aritméticas deriva pronto a cálculos algebraicos, generalmente tediosos, y, en algunos casos, también a esquemas geométricos. Estos dos caminos, el algebraico y el visual se complementan perfectamente. Los números figurados, por su propia definición, son buenos elementos de unión entre ellos. Veamos un ejemplo con números triangulares:

“Llamamos T(n) al enésimo numero triangular. ¿Qué obtenemos si sumamos los cuadrados de un número triangular T(n) y de su siguiente T(n+1)?

Orientación algebraica

(1) Conjetura: Diseñamos una tabla de números triangulares en una hoja de cálculo y en una columna adjunta calculamos la suma de cuadrados pedida para todos los casos posibles. Fácilmente se descubre una ley de formación. No indicamos el resultado, tan sólo que es un número triangular. ¿Cuál?

(2) Cálculo: Mediante cálculos algebraicos se puede verificar la conjetura. Basta desarrollar la expresión y comprobar su resultado con el imaginado. En la imagen tienes un desarrollo efectuado con la calculadora Wiris. La conjetura está un poco escondida.

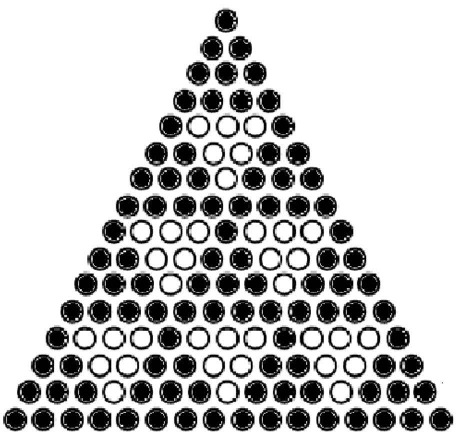
$$(x\cdot(x+1)/2)^\wedge 2+((x+1)\cdot(x+2)/2)^\wedge 2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^4+2\cdot x^3+\frac{7}{2}\cdot x^2+3\cdot x+1$$

$$((x+1)\cdot(2x+2)/2)\cdot((x+1)\cdot(2x+2)/2+1)/2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^4+2\cdot x^3+\frac{7}{2}\cdot x^2+3\cdot x+1$$

Orientación geométrica

(3) Podemos atrevernos a pensar que si T(n) es un número triangular, su cuadrado se podrá representar por otro número triangular idéntico a él, pero sus elementos no serán puntos o bolitas, sino triángulos más pequeños. Sería “un triángulo de triángulos”.

Si no acertaste la conjetura por medio del Álgebra, esta imagen te la sugerirá con más facilidad. Las bolitas negras corresponden al cuadrado de T(4) y las blancas al de T(3). Si no sientes una pequeña emoción al analizarla es que no te gustan de verdad las Matemáticas.



ALGORITMOS

La utilidad mayor de una hoja de cálculo en el estudio de los números es la de implementación de algoritmos. Con ellos se logra automatismo y velocidad, liberando así nuestro tiempo para tareas más interesantes.

La programación de un algoritmo es una tarea altamente formativa y entretenida, aunque requiere algo de experiencia.

PERIODO DE LA FRACCIÓN 77/23

Las hojas de cálculo están orientadas a los números decimales y se comportan mal en algunos problemas que necesitan operaciones con números enteros. Así, en la cuestión de obtener el periodo de una fracción, aunque es un problema propio de números racionales, los cálculos se efectúan mediante la división entera tradicional. Así se efectuaba en las aulas cuando no existían las calculadoras.

No es difícil implementar una división entera para obtener los periodos largos que se producen con denominadores que contengan como factores números primos grandes. La idea es usar las funciones COCIENTE y RESIDUO

Por ejemplo, para obtener muchas cifras decimales del cociente 77/23, podemos proceder así: El cociente entre ambos sería COCIENTE(77;23) = 3, que sería la parte entera. El resto se hallaría mediante RESIDUO(77;23)=8.

A continuación podemos imitar la división que efectuábamos en el colegio ("sacar decimales"). Podemos multiplicar el resto 8 por 10 y volver a repetir la operación: COCIENTE(80;23) = 3, que sería la primera cifra decimal. Volvemos a hallar el resto: RESIDUO(80;23) = 11. Y así reiteramos cuantas veces deseemos.

En la imagen puedes estudiar la forma de ordenar estos cálculos

Núm. cifras	Restos	Cifras del cociente	
0	8	3	Parte entera del cociente
1	11	3	
2	18	4	
3	19	7	
4	6	8	
5	14	2	
6	2	6	
7	20	0	
8	16	8	
9	22	6	
10	13	9	Cifras decimales
11	15	5	
12	12	6	
13	5	5	
14	4	2	
15	17	1	
16	9	7	
17	21	3	
18	3	9	
19	7	1	

Puedes estudiar este algoritmo en el archivo de dirección

http:www.hojamat.es/aritmetica/teoria/hojas/granperiod.ods

En ocasiones desearás definir otras funciones además de las que OpenOffice.org Calc te ofrece. Por ejemplo, sería útil una función tal que si se aplica a un número entero positivo devuelva su mayor divisor. Para ello disponemos del lenguaje Basic (de macros) que llevan incorporado Calc y Excel. En este capítulo usaremos el primero.

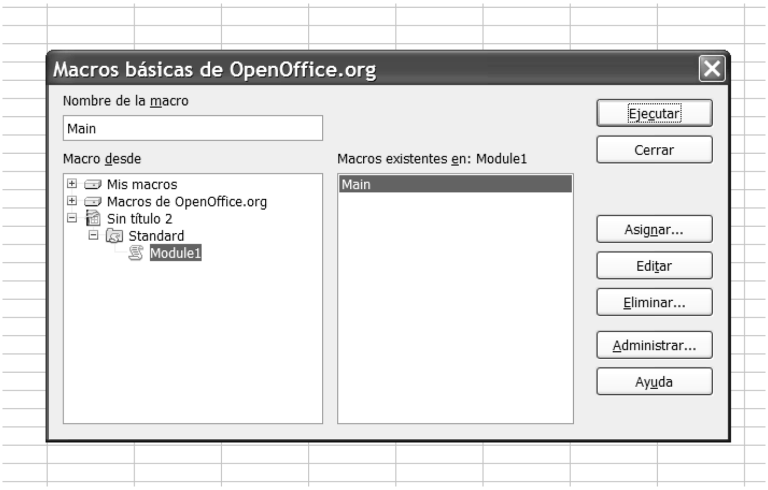
A partir de esta entrada iremos explicando en otras sucesivas la forma de implementar algunas funciones. Antes de nada hay que aprender a definirlas en el Editor de Basic.

Editor de Basic de Calc

Crea una hoja o abre alguna existente. Para abrir el editor sigue la secuencia: **Menú Herramientas > Macros > Organizar macros > OpenOffice.org Basic.**

Si es la primera función que defines, busca la carpeta correspondiente al nombre de tu hoja de cálculo (si lo acabas de crear, se llamará Sin Nombre o Sin Título). No señales la otra carpeta Standard, que es más general. Si ya has definido algunas funciones, habrás definido un módulo contenedor. Abre ese módulo.

Si no habías creado ningún módulo, una vez elegida la carpeta, pulsa el botón **Nuevo** para abrir un nuevo módulo contenedor. Se te ofrecerá el nombre de *module1, module2* u otro similar. Acepta el nombre o cámbialo según tu criterio. Al aceptar el nombre se abrirá el editor de macros. Por defecto aparecerá la macro Main, que puedes borrar o ignorar.



Escritura del código

Terminada la secuencia anterior, borra lo que esté escrito de la macro Main y escribe el código de una función:

Debes comenzar con

Public function nombre de la función (argumento)

y terminar con

End function

y entre ambas, el código de la función. El argumento es la variable sobre la que actuará la función. En ese código debemos usar el nombre de la función seguida del signo igual y de su definición

Es mejor verlo con un ejemplo:

Public function cubo (numero)
cubo=numero*numero*numero
End function

En el ejemplo, el nombre de la función es cubo, y su argumento numero (lo traduciríamos como "Cubo de un número")

Después volvemos a escribir cubo, el signo igual, y su definición.

Uso de la función

Una vez escrito el código, cierra el Editor de Basic y usa tu función en cualquier celda. En la imagen puedes ver que en B2 se ha escrito un número y en B4 la fórmula =CUBO(B2)

	A	B
1		
2	Número	17
3		
4	Cubo	4913
5		

Con esto ya tienes definida la función.

Con la técnica explicada, esa función sólo estará activa en la hoja de cálculo en la que la has creado, no en otras. Al cerrar la hoja ya no podrás usarla.

ALGORITMO 196

En el blog "Espejo lúdico", con fecha 9 de Diciembre de 2008, se ha publicado esta propuesta:

Si a un número se le suma su reverso (por ejemplo 75 + 57) y se hace lo mismo con el resultado, llega un momento en que el resultado es capicúa.

Por ejemplo

75 + 57 =132; 132 +231 = 363

Se llama así el algoritmo porque para el número 196, en el momento de escribir este texto, aún no se sabe si el proceso para en un capicúa concreto o se prolonga indefinidamente. Se han llegado a organizar búsquedas que han durado años.

El 196 es el primero de los llamados números de Lychrel, de los que aún no se sabe si producen una parada en el algoritmo. Los siguientes son 295, 394, 493, 592, etc. Todos están cerca de un número terminado en cero.

Para un cierto número de dos cifras es necesario repetir este proceso más de 10 veces. ¿Cuál es ese número?

El algoritmo propuesto tiene fácil ejecución para quien sepa sumar, pero no es tan simple para una hoja de cálculo como OpenOffice.org Calc. Hay que tener en cuenta que los números se almacenan en formato binario y la hoja "no sabe" la cifras que tiene un número en el sistema de numeración decimal. Por tanto, si no definimos nuevas funciones, no podrá invertir las cifras de un número ni tampoco averiguar si es capicúa o no. Así que necesitamos:

Función INVERTIR_CIFRAS: Debe de actuar sobre un número e invertir el orden de todas sus cifras, devolviéndonos el resultado.

Función ESCAPICUA: Debe averiguar si un número es capicúa o no y devolver, por ejemplo, un 1 si es capicúa y un 0 si no lo es.

Las dos funciones que proponemos son algo complejas, por lo que las hemos copiado en el Apéndice por si alguien las desea estudiar. Os invitamos a usar el algoritmo para averiguar (para números no muy grandes) cuántos pasos son necesarios hasta que un número desemboque en un capicúa sumando de forma reiterada su reverso.

Jugando un poco con este algoritmo se pueden descubrir hechos interesantes.

Llamaré meta al capicúa en el que termina un algoritmo aplicado a un número (semilla) y ruta al conjunto de números que se recorren hasta llegar desde la semilla hasta la meta.

Metas capicúas de dos cifras: Es evidente que los números semilla que desembocan en el mismo capicúa tienen todos la misma suma de cifras y esta es menor que 10. Por ejemplo, 70, 61, 52, 43, 34, 25, 16, 7 desembocan en 77=11*(a+b) con a+b<10

Llegan a 121 los de dos cifras que sumen 10 u 11 y alguno más de tres cifras ¿cuál? Y a 363 los de suma 12 y alguno más de tres cifras, con expresión N=11*(a+b) en el que se cumple a+b>10=11(10m+n)=110m+11n

Metas de tres cifras: Se puede demostrar que sólo son metas los capicúas en los que la cifra del centro es par, como 343, 929, 787,…y por tanto no lo son 232, 878 o 171. Intenta demostrarlo, que no es complicado.

Metas de cuatro cifras: Han de ser múltiplos de 11. ¿Por qué?

Números ilustres: Los números 495 y 1089, están ambos en la misma ruta que desemboca en el 79497. Además, tienen como meta el 1089 los múltiplos de 198 de tres cifras.

Otra curiosidad: Los 10 primeros múltiplos de 1089 llegan todos hasta el 79497.

Si no recuerdas el porqué de que les llame “ilustres” al 495 y al 1089, consulta esta dirección:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/propuestas/proparit.htm

Ahí te enterarás que 495 es la constante de Kaprekar para tres cifras. Si elegimos como semilla la constante para cuatro cifras 6174, también tiene como meta 79497, lo que nos confirma que ambos algoritmos están relacionados. Es curioso que 6174+4716 = 10890 = 1089+9801.

CONJUNTOS IDÉNTICOS

En algunas cuestiones resulta útil decidir de forma automática si dos conjuntos son idénticos o no. Por ejemplo, en las tablas de multiplicar de los cuerpos finitos, como Z/Z7, es interesante descubrir si

(a) No existen elementos repetidos en ninguna fila o columna
(b) Los elementos de las distintas filas son los mismos.

Si escribimos los dos conjuntos en una hoja de cálculo, en filas paralelas, deberemos comprobar cuatro hechos para decidir si los conjuntos son idénticos o no:

1. No existen elementos repetidos en el primer conjunto
2. Tampoco se repiten los del segundo
3. Todo elemento del primero ha de pertenecer al segundo
4. Todo elemento del segundo ha de pertenecer al primero.

Las cuatro cuestiones las resuelve la función CONTAR.SI. Recorremos todo el primer conjunto y mediante esta función contamos las veces que figuran en el segundo. Si esos valores son mayores que 1, es que existen repetidos en el segundo conjunto, y si es 0, es que falta alguno. Lo deseable, pues, es que todos los contadores presenten el valor 1.

Procedemos de la misma forma, contando las veces que los elementos del segundo conjunto figuran en el primero, y también han de valer 1. Para evitar problemas en las siguientes operaciones que explicaremos, a las celdas vacías también se le debe asignar un 1.

¿Cómo resumimos la situación? Multiplicamos todos los contadores del primer conjunto, y nos ha de resultar la unidad. Ocurrirá lo mismo con el producto de los del segundo, por lo que si multiplicamos ambos productos, obtendremos un criterio para decidir si los dos conjuntos son idénticos: el que el producto final tenga el valor de 1.

LA DIFÍCIL Y ELEGANTE COMBINATORIA

Los problemas combinatorios suelen resultar difíciles, y requieren planteamientos ordenados y mucha atención para resolverlos. Suelen admitir varios planteamientos, lo que refuerza la certeza de haberlos resuelto bien. Vemos algunos:

COMBINADO DE MURCIÉLAGO

La palabra MURCIELAGO ha sido usada tradicionalmente para la codificación en pequeños comercios, por tener diez letras distintas (5 vocales y 5 consonantes) que se pueden usar para representar las cifras de 0 a 9 en una asignación decidida por cada comerciante: M=0, C=1, E=2, etc.

Sobre ella se pueden plantear muchos problemas de distintos niveles. Aquí hemos elegido tres:

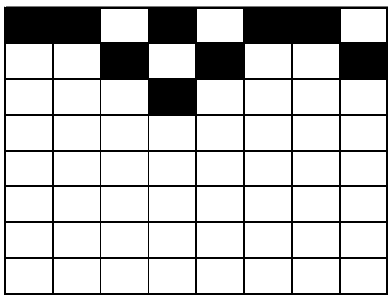
(a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de MURCIELAGO, de forma que no caigan todas las vocales seguidas? (Se prohíben permutaciones como MRC**OAEIU**LG)

(b) ¿Y si deseamos que nunca aparezcan vocales consecutivas, aunque sólo sean dos? (Deseamos que todas estén separadas)

(c) ¿Y si, por el contrario, deben estar las cinco vocales consecutivas y en su orden natural?

Se pueden inventar más, pero la Combinatoria cansa mucho.

COLOREANDO EL TABLERO



¿De cuántas formas se puede colorear un tablero de ajedrez usando sólo los colores Blanco y Negro, de forma que cada cuadrado del mismo, de dos casillas de lado, contenga dos de ellas coloreadas en blanco y las otras dos en negro?

Para encontrar la solución puedes considerar las formas de rellenar de color la primera fila y cómo influye su contenido en las demás filas de más abajo, cumpliéndose la condición de que cada cuadrado de 2 por 2 contenga dos casillas blancas y dos negras.

Aquí la hoja de cálculo te puede ayudar a visualizar cada situación, como puedes observar en la imagen adjunta. Puedes usar el “deshacer” para ir viendo posibilidades

¿Cuántas formas de colorear pueden existir?

SUMAS GENERADAS CON TRES CIFRAS

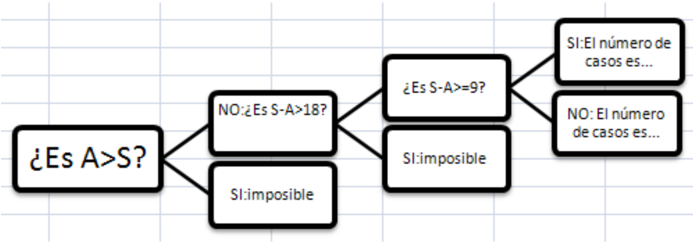
Consideramos los números enteros menores que 1000, desde el 000 hasta el 999. Para cada uno sumamos sus cifras y obtendremos una suma S. Encuentra un valor de S para el que hay exactamente 63 números que la producen.

Tres ayudas:

Para suma S=4 hay 15 números que la producen, desde 004 hasta 400.

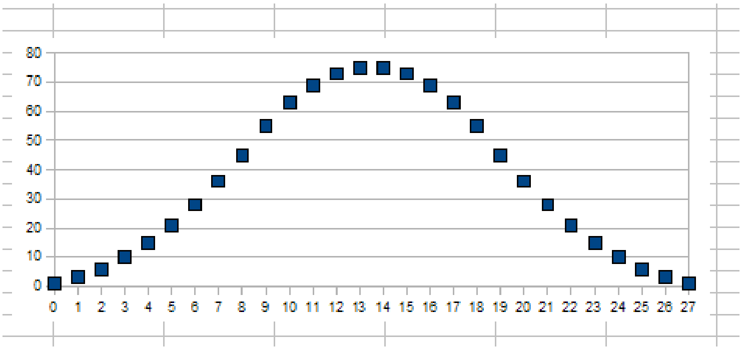
Para suma S=15 tendremos 69 soluciones.

Te puede ayudar este esquema de decisión, si llamas A a la primera cifra



Y una curiosidad:

Si representamos el número de soluciones para cada valor de S entre 0 y 27, nos resulta esto:



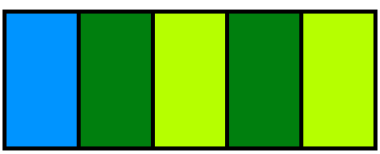
¿Te recuerda algo?

PROBLEMAS DE COMBINATORIA CON COMPROBACIÓN

Los problemas de Combinatoria resultan muy difíciles en la Enseñanza Media. Requieren orden y sentido común y, en menor medida, el conocimiento de los principios fundamentales y las fórmulas de variaciones, combinaciones o permutaciones. El uso de los diagramas de árbol facilita la tarea, pero siempre hay ramas que “se pierden”.

El poder comprobar un problema después de encontrar una solución da seguridad si ha sido bien resuelto y posibilidad de rectificación en caso contrario. Para este fin hemos usado durante muchos años distintas versiones de nuestro programa Combimaq. Usaremos hoy la versión para hojas de cálculo.

Problema: *Se desea diseñar una nueva bandera constituida por cinco barras verticales que tengan como fondo uno de los tres colores azul, verde o amarillo. No se quiere que un mismo color sirva de fondo a dos barras consecutivas. ¿Cuántas banderas distintas se pueden diseñar con estas condiciones?*



Intenta encontrar la solución, que no resulta muy difícil.

Comprobación

Puedes descargarte Combimaq en una de sus versiones, para OpenOffice.org Calc o para Microsoft Office Excel 2003, en las direcciones *http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/hoja/combimaq.ods*

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/hoja/combimaq.xls

En su primera hoja debes definir el número de símbolos, si importa el orden o no, etc.

En la segunda has de definir la condición de que no haya dos colores consecutivos iguales. Para ello activa la casilla de Condición de tipo algebraico (y desactiva las demás) y rellena con la fórmula adecuada:

(SU1#SU2)*(SU2#SU3)*…

Es decir: El primer elemento es distinto del segundo, y éste del tercero y… Lo dejamos así para que lo completes tú.

La solución es el producto de dos números pares consecutivos.

IDEAS PARA EL AULA

Estas ideas son muy generales, y no se desea fijar nivel de enseñanza y momento de su inclusión en las clases. Quienes tengan interés en aplicarlas las situarán perfectamente. Para ello pueden añadir, quitar o cambiar las actividades que se proponen.

UN CUADRADO CONOCIDO A MEDIAS

Proponemos una búsqueda ordenada a partir de una cuestión similar a la siguiente:

Encuentra un número entero positivo de tres o cuatro cifras sabiendo que su cuadrado comienza con las cifras 82541…

La idea es resolverlo con calculadora u hoja de cálculo, con lo que la primera reacción, además de una búsqueda bastante larga, es obtener la raíz cuadrada de lo que tenemos, y comenzar con las cifras que nos resulten: raíz(82541)=287… Pero ¿qué hacemos ahora? ¿irle añadiendo cifras e ir probando? ¿considerar los decimales?...Puede resultar bien, y al final de diez intentos conseguiríamos la solución, 2873, pero es que faltaban dos cifras, y por eso fue fácil. ¿Y si hubieran faltado tres?

El interés del problema, para el alumnado de Enseñanza Secundaria, es que al ignorar a priori cuántas cifras faltan, no

sólo debemos pensar en la raíz del número dado, sino también en la raíz del número que queda al eliminar una cifra. Lo vemos con este ejemplo:

¿Qué número tiene un cuadrado que comienza por 824… sabiendo que faltan por escribir una, dos o tres cifras?

Probamos el procedimiento anterior: Raíz(824)=28,7

Si faltaran dos cifras, deberíamos probar con números cercanos a 285, 286, 287,…y ninguno de sus cuadrados comienza con 824.

Probamos la hipótesis de que falte una cifra, con lo que deberíamos basarnos en Raíz(82)=9,05, y obtenemos otro fracaso, pues desde 90 a 100 ningún número produce un cuadrado que comience con 824.

Por último, probamos con tres cifras más. En teoría deberíamos probar desde 2850 a 2880, por ejemplo, y con paciencia llegaríamos a 2872^2=8248384

¿Qué se podría lograr en el aula con este ejercicio? Destacamos algunos aprendizajes y estrategias que se podrían descubrir:

Posibles objetivos

- Darse cuenta de que la raíz cuadrada actúa sobre pares de cifras
- Descubrir búsquedas binarias cuando los procesos se ponen difíciles (caso de tres cifras)
- Aprovechar los decimales que nos dan las calculadoras (aquí no lo hemos hecho)
- Saber cambiar de estrategia a tiempo.

Posible desarrollo

Se lee en común la cuestión propuesta por el procedimiento que se juzgue más adecuado.

No se debe nombrar la raíz cuadrada en un principio, salvo que transcurran los minutos y no se logre ningún avance. Se plantea la cuestión, explicando las dudas que surjan y se comienza el trabajo de búsqueda. Es conveniente tener preparados varios ejemplos más con distinto número de cifras para intentar conseguir que se resuelvan varios en una misma sesión.

Al finalizar el trabajo se organiza una puesta en común para compartir resultados y estrategias. Si el proceso va lento, se puede abrir una debate breve cuando hayan aparecido dos o tres soluciones.

Agrupamiento del alumnado

Puede organizarse en grupos de dos o individualmente. Si se ve necesario para atender a la diversidad, se pueden permitir grupos de tres.

Material

- Calculadora y papel: Tiene la ventaja de que se puede organizar el trabajo de forma individual, pero las búsquedas pueden ser exasperantes.
- Hoja de cálculo: Obliga a organizar equipos, pero se da facilidad para organizar mejor las búsquedas y aprovechar la posibilidad de ordenar los intentos en serie en una columna.

Evaluación

Debe obligarse a la escritura de conclusiones, ya sea en otra sesión, o bien fuera del horario escolar. En este ejercicio es tan importante la velocidad como el descubrimiento de estrategias y atajos.

La evaluación se realizará atendiendo al documento producido y a las notas tomadas por el profesorado respecto al desarrollo del trabajo, número de soluciones, variedad de métodos, etc.

IDEAS PARA UNA WEBQUEST

“Los números triangulares, expresados en base decimal, no pueden terminar en 2, 4, 7 ó 9”

La metodología de las webquest se adapta muy bien al uso de las hojas de cálculo y a una buena atención a la diversidad. La afirmación anterior constituye un punto de partida que admite la organización de una webquest con distintos itinerarios de aprendizaje.

Se puede comenzar con esta frase, y organizar una webquest para entender bien su significado y los fundamentos de esa afirmación. Incluimos a continuación algunos pasos que se podrían seguir:

(a) Definición de número triangular. Se puede buscar en páginas fiables, tales como Wikipedia o la misma Hojamat del autor de este libro.

(a1) Para el alumnado más aventajado, se sugerirá alguna búsqueda de carácter histórico sobre estos números.

(a2) Los estudiantes con dificultades pueden copiar imágenes de números triangulares y pegarlas en un documento.

(b) Fórmula de los números triangulares. Lo ideal sería que se pudiera deducir en el aula mediante inducción y discusión en grupos con la ayuda del profesorado. Así lo ha conseguido el autor en varias ocasiones, Si no, en las mismas páginas se puede encontrar dicha fórmula.

Una vez conseguida la fórmula T(n)=n(n+1)/2, se construye una tabla de números triangulares con una hoja de cálculo.

(b1) Este paso admite una rama de profundización consistente en buscar en Internet propiedades de los números triangulares y experimentarlas con la misma hoja de cálculo. También se puede intentar generarlos por recurrencia: T(n+1) = T(n)+n+1

(b2) Una rama de consolidación del aprendizaje consistiría en aplicar esa fórmula sin el uso del ordenador y reproducir en papel los cálculos que se han efectuado en la hoja de cálculo.

(c) Ya se está en condiciones de comprobar que ningún número triangular termina en 2, 4, 7 ó 9, y, lo más importante, intentar justificarlo mediante la fórmula o razonamiento.

Mediante la fórmula T(n)=n(n+1)/2 se puede discutir en qué cifra puede terminar n, después n+1, su producto y, por último, la mitad del mismo.

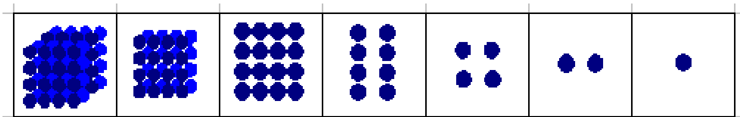
(c1) Una actividad de perfeccionamiento consistiría en usar la propiedad de que “si tomo ocho veces un número triangular y después sumo 1, resulta un cuadrado”. Se estudian las terminaciones de los cuadrados impares, se les quita una unidad y se discute su cociente entre 8.

(c2) Para el alumnado que necesite consolidar lo aprendido, se puede organizar el cálculo de números triangulares grandes para comprobar sus terminaciones.

(d) Todo el trabajo realizado se expone al resto del aula mediante documentos, presentaciones o puestas en común. Si se dispone de una web de centro, se incluye en ella todo el material generado en la webquest.

SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIA

El sistema de numeración en base 2 puede tener un aprendizaje totalmente distinto que el del resto de sistemas en otras bases. Su esencia es la de intentar formar un número a partir de los sumandos 1, 2, 4, 8, 16,… tomados sin repetir. Por ello, si se presenta al alumnado un catálogo de estos números, representados como conjuntos o “montones”, basta ir eligiéndolos uno a uno para formar el número deseado.



64	32	16	8	4	2	1	Total
1	0	1	0	0	0	1	
☑	☐	☑	☐	☐	☐	☑	81

Así, para formar el número 81, se van sumando los números 64, 32, 16, etc. añadiendo o quitando cada uno de ellos hasta llegar a la solución 81 = 64 + 16 + 1. La parte más difícil es interpretar después que esta suma da lugar a la representación binaria 1010001. Para ayudar en ese paso hemos creado una hoja de cálculo que visualiza tanto la agregación de los “montones” como la representación binaria a la que dan lugar.

No se dan aquí indicaciones de cómo usar esta hoja, pues su simplicidad permite varios itinerarios distintos en el aprendizaje y la elección de la metodología más adecuada a juicio de cada docente.

La hoja de cálculo de OpenOffice.org Calc está alojada en la siguiente dirección:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aula/hojas/binario2.ods

Al abrirla se nos consulta sobre la activación de macros. Se puede aceptar sin problemas de seguridad, porque sólo contiene un pequeño código para el funcionamiento de un botón.

DESCOMPONER EN TRES FACTORES

La descomposición de un número en dos factores mayores que 1 de todas las formas posibles es una operación relativamente sencilla para el alumnado. Puede intentarlo mediante pruebas repetidas, aunque el procedimiento más seguro es el de encontrar todos los divisores propios del número, desechar el 1 y después ir emparejando cada uno con su complementario:

Por ejemplo, los divisores propios de 84 son 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28 y 42, con lo que basta emparejarlos en productos: 84=2*42=3*28=4*21=6*14=7*12

¿Y si se pidiera descomponerlo en tres factores mayores que 1?

Esta operación es más difícil, y no nos ayuda tanto el encontrar todos los divisores, porque se pueden producir duplicaciones.

Proponemos plantear esta búsqueda en el aula con un número concreto, por ejemplo 216, que admite estas descomposiciones: 2*2*54 2*3*36 2*4*27 2*6*18 2*9*12 3*3*24 3*4*18 3*6*12 3*8*9 4*6*9 6*6*6

La búsqueda puede organizarse en tres etapas:

Búsqueda libre: Organizada por equipos para que se puedan efectuar correcciones mutuas y lograr avances en las estrategias. Si algún equipo se acerca a la solución se le puede indicar que han de llegar a 11 posibilidades. Es el momento también de corregir los fallos.

Búsqueda con ayudas: Con otros números similares se emprenden otras búsquedas, pero ahora con algunas sugerencias:

¿Convendría descomponerlo en factores primos?

¿No sería bueno que los factores fueran crecientes, para evitar repeticiones?

¿Te vendría bien obtener una lista de todos los divisores?

Atención a la diversidad: Para quienes hayan tenido dificultades se puede repasar la descomposición en dos factores, además de proponer más descomposiciones con números sencillos.

Para los alumnos y alumnas que hayan superado con comodidad el reto, se les pueden sugerir descomposiciones en cuatro factores y la redacción de un texto breve en el que expliquen las estrategias que han seguido.

También en esta etapa se puede mostrar cómo lo hace un modelo de hoja de cálculo. El algoritmo voraz que lo consigue está explicado en el Apéndice.

Se puede descargar la hoja de cálculo que lo contiene desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.ods (Versión para Calc)

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.xls (Versión para Excel)

MÚLTIPLO DE CUADRADOS

El número 144 es el entero positivo más pequeño que es divisible entre 1, 4, 9 y 16, los cuatro primeros cuadrados. ¿Cuál es el número más pequeño que es múltiplo de los 20 primeros cuadrados? La solución es 54192375991353600, pero ¿cómo encontrarlo?

Llegar hasta ese número puede resultar complicado, en parte porque las calculadoras y hojas de cálculo pueden no llegar a gestionar tantas cifras. Por eso, sería preferible establecer una especie de competición en el aula para ver quién consigue el número más alto que sea múltiplo de los N primeros cuadrados. Salvo algún error por nuestra parte, esta es la solución:

1	
4	4
9	36
16	144
25	3600
36	3600
49	176400
64	705600
81	6350400
100	6350400
121	768398400
144	768398400
169	129859329600
196	129859329600
225	129859329600
256	519437318400
289	150117385017600
324	150117385017600
361	54192375991353600
400	54192375991353600

Se pueden abordar varias estrategias:

* Multiplicar todos los cuadrados y después eliminar factores primos comunes. Es un método poco fiable y sujeto a errores y distracciones.

* Usar el MCM. Es la mejor estrategia, pero hay que organizarla bien. Con una hoja de cálculo no es difícil, pero se produce desbordamiento de cifras.

* Ir multiplicando cada solución por los factores nuevos que aporta la siguiente. Por ejemplo, la solución para 324, si se multiplica por 361, nos da la solución para 400 ¿por qué?

* Cualquier otra que se le ocurra al alumnado, basada en ensayo y error, pero debe completarse con alguna prueba de que el número encontrado es el más pequeño posible.

Para que la experiencia tenga éxito no se deben dar pistas, tan sólo asegurarse de que se ha entendido bien la propuesta. Si acaso, presentar el número 144 como solución para N=4.

Si se logra algo distinto de un fracaso absoluto, se puede completar el trabajo con puestas en común, entradas de blog o confección de una página en la web del centro de enseñanza en las que se vuelquen los distintos resultados, métodos y dificultades.

PASATIEMPO SENCILLO

Hoy presentamos un pasatiempo tomado del libro “Estimula tu inteligencia natural”, de Bragdon y Fellows. Es sencillo adaptarlo a hoja de cálculo, y por eso tiene un sitio en este libro.

Es un pasatiempo fácil, pero que hace pensar y a veces se complica. Consiste en descubrir la pauta de cálculo que siguen las cuatro filas de una tabla numérica y aplicarla a encontrar el valor adecuado que ha de tener la celda que contiene la interrogación.

	A	B	C		Llevas	
	2	8	7		**Juegos**	**0**
	1	9	0		**Acierto**	**0**
	3	10	21		**Intento:**	**0**
¿Qué valor situarías en esta celda?	?	2	9		Confirmar solución	

Los resultados de la última columna se obtienen a partir de las dos primeras y de un número desconocido mediante las operaciones de sumar, restar y multiplicar. Hay que adivinar dos operaciones y el número desconocido.

Aunque es un pasatiempo sencillo, en él se desarrollan tres habilidades fundamentales:

(a) Descubrimiento de regularidades

(b) Análisis de la relación entre resultado y datos. Estudiando las variaciones de estos y su influencia en los resultados, se puede conjeturar qué operaciones han intervenido.

(c) Uso de las operaciones inversas para descubrir el dato que falta.

Como es costumbre en este libro, no se indica ni nivel de enseñanza ni el momento de uso de este pasatiempo en clase.

Para quienes deseéis practicar con él, podéis descargar la versión en Excel desde la dirección

http://hojamat.es/sindecimales/juegos/hoja/pauta.xls

y la versión en Calc desde

http://hojamat.es/sindecimales/juegos/hoja/pauta.ods

MISCELÁNEA

FECHAS CRUZADAS

Propuesta para nivel de Secundaria

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

			-7	-7	-7
-7	-7	-7	-7	-7	-7
-7	-7	-7	-7	-7	-7
-7	-7	-7	-7	-7	

Elige una hoja de calendario, y destaca en ella un rectángulo cualquiera (ver imagen). Multiplica los números situados uno arriba a la izquierda (lo nombraremos como F11) y el otro abajo a la derecha (F22, al final de la línea roja de la imagen, números 7 y 29). Multiplica también los situados en los vértices restantes (F12=8 y F21=28 en el ejemplo). Resta los productos y descubrirás que el producto de los números de la diagonal roja F11*F22 es siempre menor que los de la verde, F21*F12, independientemente del rectángulo que hayas elegido, y su diferencia (negativa) es siempre un múltiplo de 7

(a) ¿Ocurre esto siempre así? Para demostrarlo puedes llamar X al número más pequeño (7 en el ejemplo) y a partir de él, le das como nombre una expresión que contenga X también a los otros cuatro. Desarrolla los productos y te darás cuenta de que el resultado es siempre negativo.

(b) Simultáneamente verás que es múltiplo de 7. Cambia el salto entre semanas y entre días, y siempre obtendrás ese resultado.

(c) Observa que en la imagen, a la derecha de la hoja de calendario, figuran resultados que son todos -7. Haz tú algo similar. Elige rectángulos, escribe la diferencia de productos que estamos estudiando en varias celdas, con datos distintos, y obtendrás siempre un número negativo y múltiplo de 7.

(d) ¿Qué ocurriría si usáramos sumas de diagonales en lugar de productos? Esto es mucho más fácil…

(e) ¿Y si usamos la diferencia entre sus sumas de cuadrados $(F11^2+F22^2)-(F12^2+F21^2)$? Pues resulta que ahora todas las diferencias son positivas, y siguen siendo múltiplos de 7. Intenta comprobarlo con la Hoja de Cálculo y después demostrarlo mediante el álgebra. Llama X a la fecha más pequeña.

(f) Inventa una hoja de calendario en la que las semanas fueran de cinco días ¿Cómo cambiaría todo?

(g) Prueba otros cálculos en diagonal además de productos y sumas de cuadrados. Investiga por si ves algo interesante.

RESOLUCIÓN CON DOS TECLAS

Intentemos resolver el siguiente problema con calculadora u hoja de cálculo:

Encontrar varios números naturales consecutivos cuyo producto sea igual a un número natural N dado.

(a) Con dos números es inmediato: Si sabemos **con seguridad** que la ecuación x(x+1)=N tiene soluciones enteras, como sería x(x+1)=132, es posible encontrar la solución de la ecuación con las teclas **de raíz cuadrada y parte entera**. En la hoja de cálculo se usaría =ENTERO(RAÍZ(N)) (En Excel escribe RAIZ sin tilde)

En efecto ENTERO(RAÍZ(132))=11, que es la solución de x(x+1)=132, pues 11*12=132.

La razón de que esto funcione es la desigualdad

$$X^2<x(x+1)<(x+1)^2$$

También funciona este procedimiento para x(x+1)(x+2)=N. Así, la solución de x(x+1)(x+2)=13800 es **la parte entera de su raíz cúbica**, que en hoja de cálculo se expresaría como =ENTERO(N^(1/3)), y en el ejemplo nos daría la solución 23, y comprobando, 23*24*25=13800.

La razón aquí es una desigualdad similar a la anterior

$$X^3<x(x+1)(x+2)<(x+1)^3$$

Esta no es trivial. Razónala.

¿Ocurriría lo mismo con cuatro números consecutivos? Pues no exactamente, pues necesitarías dos teclas y algo más. Quizás el siguiente desarrollo te dé una idea, pero razona o demuestra todo con rigor, que hay alguna dificultad.

$$(X+1)\wedge 4 \Rightarrow X^4+4\cdot X^3+6\cdot X^2+4\cdot X+1$$
$$x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) \Rightarrow x^4+6\cdot x^3+11\cdot x^2+6\cdot x$$
$$(x+2)\wedge 4 \Rightarrow x^4+8\cdot x^3+24\cdot x^2+32\cdot x+16$$

PROPORCIONES RELATIVAS

“Recientes estudios estadísticos han puesto de manifiesto que de cada veinte maltratadores condenados, sólo uno sobrepasaba los dos metros de estatura. Aconsejen, por tanto, a sus amigas y conocidas que se emparejen con hombres altos, que vivirán más tranquilas”

¿Qué te parece esta conclusión? Descabellada, ¿no? Pues en nuestra vida diaria a veces razonamos de forma similar. El otro día oí en la televisión este comentario: “De cada 50.000 accidentes de tráfico, sólo en 400 estuvieron involucrados autocares, lo que demuestra que son más seguros que los turismos” Estoy totalmente de acuerdo con la última afirmación, pero no con el modo de obtenerla. Deberían darnos el dato del número de turismos y autocares que circulan por término medio en nuestras carreteras. De esa forma, dividiríamos el número de accidentados entre el número total de cada clase, y así obtendríamos la proporción de accidentes de cada uno, lo que nos permitiría evaluar qué porcentaje es mayor. En este caso, seguro que sería el de turismos, pero con los datos de la noticia eso no se deduce.

Otra afirmación sobre tráfico: “Las carreteras secundarias son más peligrosas que las autovías, porque en aquellas se producen muchos más accidentes de tráfico”. ¿No habría que dividir entre el número de kilómetros existentes en España de cada clase de vía? Y si alguien nos dijera que los camiones son más peligrosos de noche, porque a esas horas están más involucrados en accidentes que los turismos, ¿no necesitaríamos otros datos? ¿no hay tramos en los que de noche prácticamente sólo circulan camiones?

Cuando no vivía en Madrid, los amigos y familiares que viajaban a la capital nos traían de regalo un décimo de lotería, porque “en Madrid toca más”. El mismo fenómeno se da cuando se compra la lotería en Sort, fiados en una mayor probabilidad de obtener premio, ya que en esa localidad se dan muchos. A pocas personas se les ocurre comparar los premios con los números vendidos en esas ciudades.

El error básico que cometemos en estos razonamientos es el de usar cantidades absolutas, y no proporciones relativas o porcentajes. Para comparar la incidencia de un fenómeno cualquiera deberíamos plantearnos una tabla de doble entrada, rellenarla con las cantidades absolutas y después proceder a convertirlas en porcentajes.

Veamos esta, que podemos imaginar perteneciente a una empresa:

	Hombre	Mujer
Fuma	34	13
No fuma	46	14
Proporción	42,5%	48,2%

Si entráramos en la sala de fumar veríamos muchos más hombres que mujeres, y sin embargo sólo fuma el 42,5% de hombres frente a un 48,2% de mujeres.

Ya sabes: si preguntas en tu parque a la gente que pasea si es diabética o no, no deduzcas de los resultados que a los diabéticos no les gusta tomar el sol.

FORMAS CURIOSAS DE EXPRESAR EL AÑO 2009

Al comenzar un año nuevo, siempre aparecen propiedades númericas del mismo en blogs y páginas web. En el año 2009 nos quisimos unir a esa costumbre. También se incluyen algunas propiedades aparecidas en otros medios.

(a) Diferencia de cuadrados $2009=45^2-4^2 = 1005^2-1004^2 =147^2-140^2$ ¿Puedes demostrar que no hay más?

(b) Producto de una suma por una diferencia similar con el mismo sustraendo 2009=(50-1)(40+1)

(c) Diferencia de un capicúa y el simétrico de 2009: 2009=11011 – 9002

(d) Suma de los cuadrados de dos múltiplos consecutivos de 7: 2009=282+352

(e) Suma de tres triangulares: 1 + 55 + 1953

(f) Suma de capicúas: 2009=1111+898

(g) Se puede comprobar (si quieres llámalo demostrar) que 2009 sólo se expresa en forma de capicúa de dos cifras en las bases

2008, en la que 2009=11 (2008; 186, resultando 2009 = 77 en base 186; 48, que produce el resultado JJ (¿Cuál es el valor de J?

(h) Sin embargo, como tres cifras seguidas AAA no se puede expresar en ninguna base. Puedes construir una pequeña prueba (esta sí que no es demostración) con una hoja de cálculo. Parece ser que tampoco admite la forma AAAA.

De forma experimental, probando bases entre 13 y 44 (¿por qué esas?) se comprueba que 2009 no produce capicúas de tres cifras en ninguna base de numeración.

(i) En el blog "El espejo Lúdico" se propuso 2009 como diferencia de primos: 2011-2

(j) Las cifras del 2009 lo construyen mediante un producto y una suma, porque 200*9+200+9=2009

Parece una peculiaridad del 2009, pero no es así. Todos los números terminados en 9 presentan la misma propiedad: 189=18*9+18+9, 1279 = 127*9+127+9

¿Sabrías demostrarlo?

(k) Por otra parte, existen otras formas de generar el 2009 mediante una expresión del tipo a*b+a+b

Son estas: 1*1004+1+1004; 2*669+2+669; 4*401+4+401; 5*334+5+334; 9*200+9+200; 14*133+14+133 y 29*66+29+66.

De hecho, casi todos los números naturales presentan este tipo de descomposición, pero algunos no, como 10, 66 ó 100.

¿Qué números naturales no se pueden expresar como a*b+a+b, con a y b también naturales?

RESOLUCIÓN HETERODOXA

El siguiente problema apareció publicdo en el blog http://problemate.blogspot.com/ y me apeteció resolverlo mediante el uso de hojas de cálculo:

Halla dos enteros positivos a y b conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea 3972 y el mínimo común múltiplo sea 985928.

Comencé descomponiendo el número 985928 en factores primos. Para ello acudí a mi hoja de cálculo ***divisibilidad.ods*** (Ver en http://www.hojamat.es/, sección Herramientas de Divisibilidad), con lo que obtuve la descomposición factorial $985928=2^3*251*491$. Estos factores deben estar contenidos en los dos enteros a y b buscados.

Como el producto 251*491 sobrepasa la suma 3972, supuse que uno estaría contenido en a y el otro en b, y dado que el MCM contiene el factor 8, éste debería estar contenido también en a, en b o en ambos.

Me planteé, pues, la ecuación diofántica **251X+491Y=3972**, con el cuidado de elegir soluciones en las que al menos X o Y contuvieran el factor 8. Usé mi hoja de cálculo ***diofant1.ods*** (http://www.hojamat.es/ en Herramientas de Aritmética), y ajusté el parámetro T hasta obtener la solución X=8 Y=4, con lo que a=2008 y b=1964, que coincide con la ya publicada en el referido blog.

Hasta aquí la resolución, que he adjetivado de *heterodoxa*, porque me plantea algunas dudas que dejo aquí en forma de interrogantes:

(a) ¿He realizado una verdadera actividad de tipo matemático?

(b) ¿Podríamos incluir en las aulas actividades similares, en las que una resolución se obtiene con la ayuda de recursos informáticos?

(c) ¿Se atrevería el profesorado a evaluar con propuestas de este tipo?

Para no dejar las preguntas así, en el aire, me las respondo yo en primer lugar: Mi respuesta sería afirmativa, con matices:

(a) Creo que es otra forma de resolución, siempre que la palabra final la tenga el rigor matemático y la comprobación exhaustiva posterior de todo el proceso, prescindiendo de la ayuda informática. Si no se llega a este nivel de profundidad, el problema se quedaría en una mera actividad de uso de herramientas informáticas.

(b) Con las garantías expuestas, creo que se pueden introducir en el aula estas herramientas de cálculo, pues pueden ayudar a pensar de otra forma y a saber tomar decisiones sobre las herramientas utilizadas.

(c) Si se usan herramientas nuevas para calcular, también tienen que ser objeto de una evaluación. Sería contradictorio que se introdujeran metodología nuevas y después se evaluara con el examen de toda la vida. Si se usan varios recursos en el aprendizaje, también han de usarse en la valoración del trabajo.

COMENTARIO RADIOFÓNICO

“El gobierno está actuando sobre la derivada segunda cuando asegura la protección al desempleo, pero debería actuar sobre la derivada primera, promoviendo la creación de puestos de trabajo”

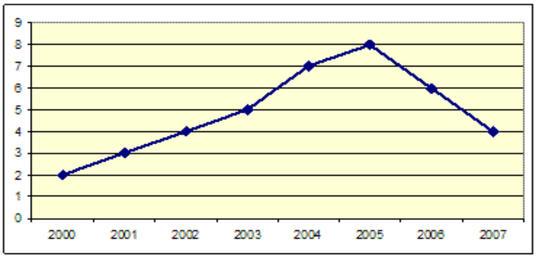
(Comentario de un periodista en una tertulia radiofónica. La redacción final es nuestra).

¿Cómo juzgar esta frase desde el punto de vista de las Matemáticas? La segunda parte se puede aceptar sin gran problema, pues si se crea empleo se está actuando sobre la tasa de variación del número de personas empleadas. Si tomamos como función ese número total, su derivada está relacionada con el incremento o disminución de la misma, y la creación de empleo pertenece a ese ámbito.

Más de difícil de aceptar es la primera parte. La protección al desempleado no se relaciona con la forma de evolucionar el crecimiento del empleo, porque es una acción estática. Se protege a los que ya están en situación de desempleo en un momento dado. Una idea algo malévola sería la de considerar que una excesiva protección no impulsa la búsqueda de trabajo, pero en ese caso se estaría actuando sobre esa búsqueda, y no sobre la creación de puestos de trabajo. No parece tener, pues, justificación el uso del concepto de derivada segunda en este contexto.

La derivada segunda no es bien entendida por el público en general. Por ejemplo, el concepto de punto de inflexión se confunde con el de máximo o mínimo. Si un equipo de fútbol lleva perdiendo varias semanas y comienza a ganar, se habla de que ya se ha llegado al punto de inflexión. O si la bolsa cambia su tendencia: "yo venderé cuando se produzca una inflexión". En lugar de considerarlo como un punto de separación entre aceleraciones y desaceleraciones, se le suele situar entre crecimientos y decrecimientos, y no es el mismo concepto.

El estudio de las diferencias segundas (o las derivadas) y las tasas de variación calculadas a partir de los datos de una tabla es muy enriquecedor, pero la experiencia nos demuestra que es un tema con frecuencia difícil de entender. Hace unos meses, en un debate político, se presentó un gráfico que recogía la evolución del precio de la vivienda. Era parecido a este:



Se mostró de forma tan rápida que la mayoría de los espectadores sacó la impresión de que se quería indicar que la vivienda había comenzado a bajar de precio en el año 2005, cuando en realidad se trataba de un gráfico de diferencias, y lo que se había producido en ese año era una desaceleración en la subida de los precios.

En este gráfico sí había un punto de inflexión, pero por la forma de presentarlo se interpretó como un máximo, con lo cual parecía que el candidato estaba mintiendo, ya que era claro que en ese año el precio de la vivienda no había parado de crecer. No mentía, el gráfico contenía datos reales, pero los asesores tuvieron la habilidad de sugerir una idea errónea in faltar a la verdad. Bastó para eso confeccionar un gráfico de diferencias en el precio en lugar de usar el valor real del mismo.

SOLUCIONES

EL ATRACTIVO DE LOS CUADRADOS

Eliminar bolas en un cuadrado

Si 10 es la diferencia entre dos cuadrados n^2 y m^2, se tendrá que verificar que

10=(m+n)(m-n)

Pero m+n y m-n tienen la misma paridad. Esto obliga a que el número 10 también se descomponga en dos factores, ambos pares o ambos impares, pero eso es imposible, debido a que sólo se pueden considerar 10*1 y 5*2, que no tienen la misma paridad. Lo mismo ocurre con el 6.

En general, todos los números de la forma 2(2k+1) con k entero, no serán idóneos para ser diferencia de cuadrados. Expresado de otra forma, son números múltiplos de 2 pero no de 4.

Todos los números naturales podemos escribirlos como $N=2^m.a^{p1}.b^{p2}\ldots z^{pn}$, siendo a,b..z primos y m eventualmente cero. El exponente m nos permite distinguir tres casos:

(a) m=1

El número N no se puede descomponer en dos factores pares ni impares. Es el caso de 2,6,10…que acabamos de estudiar

(b) m=0

El número es impar, y presentará tantas soluciones como la mitad del su número de divisores. Por ejemplo 105= 53^2-52^2 = 19^2-16^2 = 13^2-8^2 = 11^2-4^2 que corresponden a los pares de divisores 105= 105*1=35*3=21*5=15*7. Si el número es primo admitirá una sola diferencia de cuadrados.

(c) m>1

2^m se puede descomponer en dos factores pares de tantas maneras como indique la parte entera de (N-1)/2. Así, si m=3 sólo se admite una descomposición, como 8 = 3^2-1^2 y si m=7 128= 33^2-31^2 = 33^2-31^2 = 18^2-14^2 . Combinando estos casos con los producidos por los factores impares obtendremos todas las soluciones.

Se ve, pues que el número de soluciones está relacionado de cierta forma con el de divisores, aunque pueden discrepar bastante.

(b) El número menor que 1000 que se puede representar como diez diferencias de cuadrados es el 960.

En la siguiente tabla se han inluido todas las formas de descomponer 960 en dos factores. Después se han seleccionado los de la misma paridad, y mediante suma y diferencia se han obtenido A y B tales que 960 = $A^2 – B^2$

Factores de 960		Paridad	A	B	Comprobación
2	480	0	241	239	960
3	320	1			
4	240	0	122	118	960
5	192	1			
6	160	0	83	77	960
8	120	0	64	56	960
10	96	0	53	43	960
12	80	0	46	34	960
15	64	1			
16	60	0	38	22	960
20	48	0	34	14	960
24	40	0	32	8	960
30	32	0	31	1	960

Igual paridad **10**

Pero, ¿cómo encontramos el 960? Aparte de un análisis bastante pesado de los factores de los números menores que 1000 podemos usar este código en Basic para Calc

```
Sub numerodiferencias

Dim i,j,fila
dim a


fila=7  (Fila inicial de la tabla que se prepara)
for i=1 to 1000  (Números a probar)
a=0  (Contador de factores de la misma paridad)
for j=1 to sqr(i)  (Se buscan los factores hasta la raíz cuadrada)
if esdivisible(i,j)  then (Comprueba si es factor)
if paridad(j)=paridad(i/j) then a=a+1 (Igual paridad, se incrementa a)
end if
next j
fila = fila+1  (El resto es la presentación de resultados)
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(3,fila).value=i
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(4,fila).value=a
next i
End Sub
```

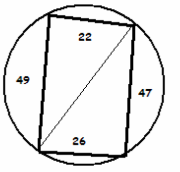
Con una macro definida por este código obtenemos una tabla con el número de descomposiciones de igual paridad similar a la de la imagen

32	2
33	2
34	0
35	2
36	2
37	1
38	0
39	2
40	2
41	1
42	0

Así se ha encontrado que 960 admite 10 descomposiciones, y que los múltiplos de 2 que no lo son de 4, ninguna.

Consulta en el Apéndice los códigos de las funciones **esdivisible** y **paridad**.

(c) Si dos diferencias son iguales, como $49^2 - 47^2 = 26^2 - 22^2$, también se verificará que $49^2 + 22^2 = 26^2 + 47^2$, que se puede interpretar como dos triángulos rectángulos que comparten un mismo diámetro por lo que formarán un cuadrilátero inscriptible.



Cuadrados en progresión aritmética

La condición que ha de cumplir la media aritmética de los dos cuadrados, es la de ser ella también un cuadrado perfecto, y en hoja de cálculo se puede expresar mediante esta condición: N=(ENTERO(RAÍZ(N))^2

El número 10404= 102^2 forma progresión aritmética con 1764= 42^2; y la media aritmética de ambos 6084 = 78^2

Las diferencias entre tres cuadrados en progresión aritmética son siempre múltiplos de 24. Lo razonaremos en dos fases:

(A) Las diferencias son múltiplos de 3

Partimos de $a^2+b^2=2c^2$ como condición de estar en progresión aritmética. Los restos cuadráticos módulo 3 son 0 y 1. Nunca pueden ser 2.

Si el resto de c^2 es 0, el de $2c^2$ también lo es, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 0 (es la única posibilidad). Por tanto sus diferencias serán múltiplo de 3.

Si el resto de c^2 es 1, el de $2c^2$ será 2 y eso obliga a que a^2 y b^2 tengan también resto 1, luego las diferencias vuelven a ser múltiplos de 3. Con esto queda demostrado.

(A) Las diferencias son múltiplos de 8

Los restos cuadráticos módulo 16 son 0, 1, 4 y 9. Podemos construir una tabla de sumar entre ellos para que comprendas mejor el razonamiento:

+	0	1	4	9
0	0	1	4	9
1	1	2	5	10
4	4	5	8	13
9	9	10	13	2

Con razonamientos similares al caso de 3, tendremos:

Si el resto de c^2 es 0, el de $2c^2$ también lo es, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 0. Por tanto sus diferencias serán múltiplos de 16 y con mayor razón de 8.

Si el resto de c^2 es 1, el de $2c^2$ es 2, luego a^2 y b^2 deberán presentar ambos resto 1 o resto 9. Por tanto su diferencia será al menos múltiplo de 8 si no lo es de 16 (en el caso 9-1)

Si el resto de c^2 es 4, el de $2c^2$ es 8, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 4. Por tanto sus diferencias serán múltiplos de 16.

Si el resto de c^2 es 9, el de $2c^2$ será 2, y ya hemos estudiado ese caso.

Acabamos de razonar que las diferencias son múltiplos de 16 salvo en un caso en el que sólo lo son de 8.

Resumiendo: Las diferencias mutuas son múltiplos de 24.

Un cuadrado y una unidad

Para que n^2+1 sea múltiplo de un número k, deberá ocurrir que k-1 sea un resto cuadrático módulo k, pero eso no ocurre para ciertos números. Basta consultar las tablas de restos cuadráticos para diferentes valores para comprobarlo

Módulo	3	4	5	7	11	13
	NO	NO	SÍ	NO	NO	SÍ
Restos	1	1	1	1	1	1
	1		**4**	4	4	4
		1	**4**	2	9	9
	1		1	2	5	3
	1	1		4	3	**12**
			1	1	3	10
	1	1	**4**		5	10
	1		**4**	1	9	**12**
		1	1	4	4	3
	1			2	1	9
	1	1	1	2		4
			4	4	1	1

En la tabla se observa que para 5 existe un resto cuadrático 4, y para el 13 el 12, pero para 3, 4, 7 y 11 no es resto cuadrático k-1.

La mitad, cuadrado, el tercio, cubo

Si $\mathbf{N = 2m^2 = 3n^3}$**,** deberán figurar, tanto en **m** como en **n**, los factores **2** y **3.** Luego $\mathbf{m^2 = 36*k^2}$ y $\mathbf{n^3 = 216*h^3}$.

$\mathbf{N = 72*k^2 = 648*h^3}$ y h ha de ser cuadrado perfecto para que se pueda dividir entre $\mathbf{k^2}$

Queda, pues, que $\mathbf{N=648p^6}$

Así que las soluciones se obtendrán de los valores de p

p=1, **648**, p=4, **41472**, p=9, **472392**, p=16, **2654208**

En el caso $\mathbf{N= 2n^2 = 5m^5}$

deberá ser **N = 200*k² = 500000*h⁵**

y una solución **500000**

En el caso **N= 3n³ = 5m⁵**

será **10125*k³ = 500000*h⁵**

y una solución posible es **922640625**

Casi narcisistas

Si ejecutamos el código obtendremos otra solución, que es 1233 = 12^2+33^2

(a) Los demás números narcisistas de cuatro cifras son $8208=8^4+2^4+0^4+8^4$ y $9474=9^4+4^4+7^4+4^4$.

(b) En el otro grupo propuesto las soluciones son $4160=4^3+16^3+0^3$ y $4161=4^3+16^3+1^3$
(No se cuentan soluciones triviales formadas por 1 y 0)

(c) La solución única es $3468 = 68^2-34^2$

Cuadrado del simétrico

Si excluimos los capicúas o palindrómicos y los terminados en cero, para no alterar el número de cifras, las parejas obtenidas son (sólo se escribe el primer número):

12, 13

102, 103, 112, 113, 122

1002, 1003, 1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1031, 1102, 1103, 1112, 1113, 1121, 1122, 1202, 1212, 2012, 2022

10002, 10003, 10011, 10012, … (hasta 41)

(1) No figurarán en estos números las cifras del 4 al 9, pues en sus productos por sí mismas producen cifras de arrastre que rompen la simetría.

(2) Tampoco puede figurar la combinación 23, pues también produce arrastre 2*3+3*2=12

(3) Para contar los casos hay que organizar un diagrama en árbol e incluir como cifras 0, 1, 2 y 3, evitando la combinación 23.

Exploración matemática

(1) Si $2n^2 + 1 = m^2$, ambos naturales, m ha de ser impar, luego m=2k+1 con k natural, con lo que se cumple si $2n^2 + 1 = 4k^2+4k+1$. Simplificando y dividiendo entre 8: $n^2/4 = k(k+1)/2$, luego se cumple que $n^2/4$ es cuadrado y triangular.

(2) Partimos de la igualdad $x^2=k(k+1)/2$. Multiplicamos todo por 8 y queda: $8x^2 =4k^2+4k+1-1=(2k+1)^2-1$. Si llamamos **y** a 2k+1, nos queda la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$

(3) (Para no complicar la edición, usaremos la palabra RAÍZ para representar la raíz cuadrada). Como $(3+\text{RAÍZ}(8))^n = y_n+\text{RAÍZ}(8)x_n$, basta ir multiplicando por sí mismo y sumando por separado los números naturales y los coeficientes de RAÍZ(8): (3+RAÍZ(8)), (17+6*RAÍZ(8)), (99+35*RAÍZ(8))… van resultando los valores de x 1, 6, 35,…

(4) Basta usar $(y_{n-1}+\text{RAÍZ}(8)x_{n-1})*\ (3+\text{RAÍZ}(8))= y_n+\text{RAÍZ}(8)x_n$ con lo que resultan las fórmulas pedidas. Para reducir a una sola con x, se puede acudir a esta transformación:

$y_n=3x_{n-1}+8y_{n-1}$, $x_n=3x_{n-1}+y_{n-1}$

$x_n=3x_{n-1}+y_{n-1} = 9x_{n-2}+3y_{n-2}+(8x_{n-2}+3y_{n-2}) = 17\ x_{n-2} + 6\ y_{n-2} = 6(3x_{n-2} + y_{n-2})-\ x_{n-2} = 6\ x_{n-1} -\ x_{n-2}$

¡CÓMO PRESCINDIR DE LOS NÚMEROS PRIMOS!

Dos demostraciones propuestas por Apostol

Demostración (a)

Expresemos el número N como 4k+h, con h<4. En ese caso, N puede expresarse de una de estas cuatro posibilidades: 4k, 4k+1, 4k+2 y 4k+3, con k>2, para que sea mayor que 12. Analicemos las cuatro alternativas:

(a) 4k se puede descomponer en 2k+2k, ambos compuestos.
(b) 4k+1=4(k-2)+8+1= 4(k-2)+9, con lo que conseguimos también dos compuestos (recuerda que k>2).
(c) 4k+2=4k-6+6+2=2(2k-3)+8. Conseguido también, porque 2k-3 es positivo.
(d) 4k+3=4k-6+6+3=2(2k-3)+9, lo que completa la demostración.

Obsérvese que es fundamental que k>2

Demostración (b)

La validez de la proposición se puede verificar demostrando su recíproca, es decir: *Si n no es potencia de 2, 2^n+1 es compuesto.*

Si no es potencia de 2, será primo distinto de 2 o poseerá un factor primo impar k. Tanto en un caso como en el otro, n se puede expresar como n=k*l (si es primo, k=n y l=1)

y $2^{kl}+1 =(2^l+1)(2^{k(l-1)}-2^{k(l-2)}+\ldots+1)$, que es compuesto.

Como curiosidad, hemos descubierto que si n es primo, un divisor de 2^n+1 será 3.

Primos reversibles (Primo-Omirp)

Cuestión 1: Tiene varias soluciones. Una sencilla para que aparezcan destacados los cuadrados perfectos es crear una columna nueva con las raíces cuadradas de las diferencias (supongamos que comienza en G5) y después crear otra columna nueva con la fórmula **=SI(G5=ENTERO(G5);G5;"")**

13	31	4,24264069	
17	71	7,34846923	
37	73	6	6
79	97	4,24264069	
107	701	24,3721152	
113	311	14,0712473	
149	941	28,1424946	
157	751	24,3721152	

El que sea múltiplo de 6 se justifica porque la diferencia entre dos “omirps” es múltiplo de 18, ya que tiene que ser par como diferencia entre impares, y múltiplo de 9 por ser diferencia entre dos números simétricos (su diferencia está formada con múltiplos de 9). Si esa diferencia es además cuadrado perfecto, deberá contener otro factor 2 que formará un 36.

Cuestión 2: La respuesta es afirmativa. Basta someter a las diferencias a un criterio similar al siguiente:

=SI(8*G5+1=ENTERO(RAÍZ(8*G5+1))^2;G5;"")

Entre las diferencias triangulares más frecuentes están 630, 990, 4950 y 16290. La más pequeña es 36.

Cuestión 3: Aunque parecía difícil, también aparecen cubos perfectos, como en

$3251 – 1523 = 1728 = 12^3$

$747451 – 154747 = 592704 = 84^3$

$758561 – 165857 = 592704 = 84^3$

$764171 – 171467 = 592704 = 84^3$

$767471 – 174767 = 592704 = 84^3$

Se encuentran con el criterio

=SI(G5=ENTERO(G5^(1/3))^3;G5;"")

El mayor divisor

Estrategia de búsqueda

Si **n** es compuesto en la expresión 2^n-1 su menor divisor **a** formará la expresión 2^a-1, que será mayor o igual que el mínimo divisor de expresión 2^n-1. En efecto:

$2^n-1 = 2^{a*b}-1 =(2^a-1)(1+2^a+2^{a*2}+\ldots 2^{a*(b-1)})$

En esta descomposición factorial el valor del primer paréntesis es menor que el del segundo, luego o bien 2^a-1 es el menor divisor buscado o lo es un divisor menor que él. Por tanto se cumple lo afirmado.

Así que para buscar el menor divisor de 2^n-1 bastará buscar divisores menores que 2^a-1, lo que simplifica la cuestión. En la siguiente tabla figura a comparación de estos divisores para algunos de los primeros valores de **n**:

n	2^n-1	2^a-1	Menor divisor	Mayor divisor
4	15	3	3	5
6	63	3	3	21
8	255	3	3	85
9	511	7	7	73
10	1023	3	3	341
12	4095	3	3	1365
14	16383	3	3	5461
15	32767	7	7	4681
20	1048575	3	3	349525
21	2097151	7	7	299593
25	33554431	31	31	1082401
49	562949953421311	127	127	4432676798593

En estos casos el menor divisor es 2^a-1, pero no siempre es así. Por ejemplo, si a=11, el menor divisor no es 2^{11}-1 sino 23.

Estrategia algorítmica

Para encontrar el menor divisor de un número, en este caso 2^n-1, bastará ir probando números a partir del 2 y ver si 2^n-1 es divisible entre ellos. Al encontrar el primero se para la búsqueda. La idea es trivial, pero con la rapidez de un ordenador se obtiene el resultado en poco tiempo para números no muy grandes.

En el Apéndice se ha incluido la función **menordiv** en código Basic.

Cerca del cuadrado de un primo

Si p es primo, p^2-1 es múltiplo de 24.

(a) Es múltiplo de 3

Un número primo puede presentar una de las formas 3n+1 o 3n+2.

Si p=3n+1, entonces

$p^2-1=9n^2+6n+1-1 = 3(3n^2+2n)$

Si p=3n+2, entonces

$p^2-1=9n^2+12n+4-1 = 3(3n^2+4n+1)$

(b) Es múltiplo de 8

Un número primo puede presentar una de las formas 8n+1, 8n+3, 8n-1 ó 8n-3. Procediendo de igual forma:

Si p=8n+1, entonces

$p^2-1=64n^2+16n+1-1 = 8(8n^2+2n)$

Si p=8n-1, entonces

$p^2-1=64n^2-16n+1-1 = 8(8n^2-2n)$

Si p=8n+3, entonces

$p^2-1=64n^2+48n+9-1 = 8(8n^2+6n+1)$

Si p=8n-3, entonces

$p^2-1=64n^2-48n+9-1 = 8(8n^2-6n+1)$

Con esto hemos demostrado que p^2-1 es múltiplo de 24, por lo que no será primo. Tampoco lo serán $p^2 – 5$, $p^2 – 3$, $p^2 + 1$ y $p^2 + 3$ por ser pares. $p^2 – 4$ y $p^2 + 2$ serán múltiplos de 3. Por tanto, ninguno es primo.

El número $p^2 – 2$ no puede ser múltiplo de 2 porque es par, ni de 3, porque es de la forma 24k-1, ni de 5, porque termina en 7 o en 9 (p^2 sólo puede terminar en 1 ó 9), luego sus factores primos serán mayores que 5. Es el caso, por ejemplo, de 23^2-1=17*31.

Búsquedas

Se pueden organizar búsquedas para encontrar los números primos más próximos a p^2. Para ello se necesitan las funciones “próximo primo” PRIMPROX y “anterior primo” PRIMANT, que dan los primos más cercanos a un número por la parte superior y por la inferior respectivamente (ver Apéndice). Así se pueden organizar tablas similares a la siguiente:

Distancia	PRIMANT(p2)	p2	PRIMPROX(p2)	Distancia
6	523	529	541	12

De esta forma podemos descubrir que el cuadrado de primo más aislado por la derecha entre los primos menores que 10000 es 66896041, el cuadrado de 8179, que dista 102 unidades de su próximo primo, que es 66896143.

Por la izquierda el más aislado es 15437041, cuadrado de 3929, que dista 98 unidades del número 15436943, primo más cercano inferiormente.

Por ambos lados el que dista más de sus primos cercanos es el cuadrado de 7559, 57138481, que está rodeado de compuestos entre los límites 57138413 y 57138539, con un rango de 126 números.

Logaritmo entero

(a) Para demostrar que k>m+n consideramos que si m>2 o n>2, (m-1)(n-1)>1, con lo que mn-m-n>0 y por tanto mn>m+n.

Si un número posee más de dos factores primos, se va aplicando reiteradamente esta propiedad a las distintas descomposiciones de dos factores. Por ejemplo:

60>6+10 = 3*2+5*2>3+2+5+2

(b) 256=2^8 sopfr(256)=2*8=16

(c) Porque si fuera primo ya estaría incluido en la suma de primos que lo forma, por ser un divisor.

(d)

20=9+6+5

38=21+10+7

74=39+16+8+6+5

(e)

546=13*(25+10+7)

616=14*(24+9+6+5)

735=21*(22+13)

800=20*(20+9+6+5)

JUGAMOS CON CIFRAS

Una propuesta del "Espejo lúdico"

La solución es el número 69. Puedes utilizar y cambiar a tu gusto el buscador de números de este tipo alojado en la dirección de Internet **http://www.hojamat.es/blog/ludico.zip**.

Algoritmo derivado de un problema

La solución es **153846**, porque 153846*4=615384

Otros resultados relevantes son:

1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966 * 6=
6101694915254237288135593220338983050847457627118644067796

1632653061224489795918367346938775510204088 * 5 =
8163265306122448979591836734693877551020408

Las primeras, doble de las segundas

Orientación algebraica

En el caso 2001*1 = 3*23*39 no es posible igualar a n(n+2), pues se necesitaría un número de cuatro cifras.

Si es 667*3 completamos a 667*3*223 = 667*669 = **446223** = (668-1)(668+1) = **668^2 -1**, que constituye la primera solución.

En el caso 87*23 completamos a 87*23*5*19 = 435*437 = **190095** = (436-1)(436+1) = **436^2-1**

Por último, 29*69 se completa con 29*31*69*13 = 899*897 = **806403** = (898+1)(898-1) = **898^2-1**

El caso contrario, si las segundas son el doble de las primeras, habrá que analizar el número 1002 = 2*3*167 = 1002*1=167*6 = 501*2 = 334*3

Para abreviar, sólo se darán las soluciones válidas:

167*2*6*56 = 334*336 = **112224** = 335^2-1

334*2*3*222= 668*666 = **444888** = 669^2-1

Variantes

Para n^2-4 existen estas soluciones de seis cifras:

442221 = 665^2-4; 760380 = 782^2-4; 110220 = 332^2-4; 448896 = 670^2-4

Para n^2-9 existen esta otra solución: 480240 = 693^2-9;

Números automórficos

La propiedad que comparten los números de la primera tabla es que sus cifras coinciden con las últimas de sus cuadrados (en el sistema de numeración decimal).

La condición que han de cumplir en la hoja de cálculo ha de ser similar a esta: =SI(RESIDUO(E77-D77;100)=0;”Sí”;"No"), en la que 100 se va sustituyendo por 1000, 10000, etc. según el número de cifras.

Es decir, que a^2-a = a(a-1) = N.10, que es lo que expresa la segunda tabla.

Para encontrarlos con OpenOffice.org Calc puedes usar este código. Cambia el 10000 por un número mayor si deseas encontrar más.

```
Sub busquedas
Dim x,fila,i,j as long

fila=10

for i=1 to 10000
x=10^(int(log(i)/log(10))+1)
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(2,2).value=i
j=(i*i-i)
if int(j/x)=j/x then
fila=fila+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(5,fila).value=i
end if
next i

End Sub
```

Este código dará como soluciones falsas algunas potencias de 10, debido al uso de logaritmos decimales.

Notas

(1) En efecto, sólo hay cuatro casos para a-1 y a

(1a) **a-1** es múltiplo de 10^k y **a** congruente con 1 módulo 10^k. En este caso sólo obtendremos el caso trivial 1.
(1b) **a** es múltiplo de 10^k , lo que nos lleva al caso trivial 0.
(1c) **a-1** es múltiplo de 5 y **a** lo es de 2. En este caso **a** termina en la cifra 6
(1d) **a** es múltiplo de 5 y **a-1** de 2. El número termina en 5.

(2) Si $a^2 \equiv a \pmod{10^k}$, multiplicando por a resulta $a^3 \equiv a^2 \pmod{10^k}$ y reiterando $a \equiv a^2 \equiv a^3 \equiv a^4$ …

(3) Sea $a = m.10^{k-1}+n$ la descomposición del número automórfico de **k** cifras en la suma de la primera **m** y del resto **n**. Se deberá cumplir que $(m.10^{k-1}+n)^2 - (m.10^{k-1}+n) \equiv 0 \pmod{10^k}$. Si desarrollamos se tendrá que la expresión

$m^2.10^{2(k-1)}+n^2+2mn10^{k-1} - m.10^{k-1}-n \equiv 0 \pmod{10^k} \equiv 0 \pmod{10^{k-1}}$

lo que nos lleva a que $n^2-n \equiv 0 \pmod{10^{k-1}}$ y que por tanto, n es automórfico con una fila menos.

(4) Si la situación es la inversa de la anterior, hay que encontrar un valor de m que haga que la expresión anterior sea automórfica para k cifras, lo que obliga a que $2mn-m+(n^2-n)/ 10^{k-1}$ termine en cero, es decir, que se puede despejar m de la ecuación en congruencias

$m(2n-1)+(n^2-n)/ 10^{k-1}\equiv 0 \pmod{10}$

En los casos tratados, 2n-1 es congruente con 1 o con 9, lo que garantiza la solución única.

Por ejemplo, generemos automórficos a partir del 6:

n=6; k=1 Ecuación $11m+3\equiv 0 \pmod{10}$ Solución m=7
n=76; k=2 Ecuación $151m+57\equiv 0 \pmod{10}$ Solución m=3
n=376; k=3 Ecuación $751m+141\equiv 0 \pmod{10}$ Solución m=9
y así se puede seguir hasta la generación de infinitos automórficos.

Para n=5 quedaría este proceso:

n=5; k=1 Ecuación $9m+2\equiv 0 \pmod{10}$ Solución m=2
n=25; k=2 Ecuación $49m+6\equiv 0 \pmod{10}$ Solución m=3
…

Función “Dígitos”

La solución es $n*2^{n-1}+1$

Número más la suma de sus cifras

El algoritmo que se puede considerar en primer lugar es el de dividir el número entre 101 para calcular X, hallar el resto y dividirlo entre 11 para hallar Y. Reiterando se calcula Z.

Esta idea tiene algún inconveniente:

(a) Al dividir entre 101, o posteriormente entre 11, se debe considerar también una unidad menos, pues es muy probable que también sea solución si Y y Z son cercanos a 9.

(b) El resto de dividir el número entre 101 no debe sobrepasar al número 117, pues entonces Y o Z sobrepasarían el valor de 9.

Según esto, el algoritmo debería ser:

Divido N entre 101 y le llamo X al cociente y H al resto.

Tanto para el valor X como para X-1

Si H>117 paro el cálculo

Si H<=117 lo divido entre 11 con cociente Y y resto M

Tanto para Y como para Y-1

Si M es par y menor que 20, Z será su mitad.

Tienen solución los números del tipo 101X+11Y+Z con Y>0 y Z par, como es evidente. También tienen solución los terminados en 1, 3, 5 y 7, porque detrayendo 11 de 11Y se pueden convertir en 12, 14, 16 y 18 respectivamente, que al ser pares pueden ofrecer una Z entera.

No tienen solución los números de la forma: 101X+11Y+9 con Y>11, porque si le añadimos 11 ya el 9 se convertiría en 20, lo que produciría una Z=10.

Si Y=0, no tienen solución los de la forma 101X+K con K igual a 7 ó 9, porque aunque detraigamos un 101 de X, o se forma una Y>=10 o una Z no entera o mayor que 9.

Tienen dos soluciones 101X+K con K par entre 0 y 16, pues si separamos un 101 de 101X, al ser 101=99Y+2, la nueva última cifra será par y producirá un Z entero.

Los puntos del dominó

(a) Un n-dominó es el conjunto de combinaciones con repetición tomadas de 2 en 2 que se pueden formar con el conjunto {0,1,2…n}. Por tanto su número será Cn+2,2 = (n+2)(n+1)/2. En el caso usual sería C8,2=8*7/6 = 28

(b) Como cada combinación contiene dos valores, en total estarán representados 56, que divididos entre 7 posibilidades nos señalan que cada número aparece 8 veces en el dominó. Por tanto, la suma total será 8(0+1+2+3+4+5+6)=8*21=168 puntos totales tiene el dominó.

(c) Para demostrarlo basta generalizar los razonamientos anteriores.

(d) Si $n(n+1)(n+2)=2M^2$ llegamos a una serie de contradicciones. En efecto:

Los factores primos impares del producto n(n+1)(n+2) pertenecen sólo a uno de los tres, n, n+1 ó n+2, porque si fueran comunes, deberían dividir a la diferencia entre ellos, que sería 1 ó 2, lo cual es imposible para un impar. Por tanto, si hay factores impares en el producto serán distintos para cada uno de los tres números y además estarán presentes como un cuadrado perfecto, por serlo M^2 (figurarán un número par de veces)

Podemos distinguir dos casos:

(a) Si n+1 es par, entonces n y n+2 serán impares, y por lo razonado en el párrafo anterior, cuadrado perfectos con diferencia 2, lo que es imposible (Ver “Eliminar bolas de un cuadrado”, Pág. 11). Es el caso, por ejemplo de 7*8*9/2.

(b) Si n+1 es impar, será cuadrado perfecto, es decir, de la forma $(2k+1)^2$, con lo que n es múltiplo de 4 y n+2 será par, pero no múltiplo de 4. Por tanto tendrá la forma $2*H^2$. Si dividimos entre dos tendremos que n(n+1)(n+2) será el producto de tres cuadrados, pero es imposible que n y n+1 lo sean simultáneamente. Es el caso, por ejemplo, de 48*49*50/2.

Con hoja de cálculo podemos crear una columna con los primeros números naturales, llamémosles N, otra con la fórmula N(N+1)(N+2)/2 y otra que calcule el cuadrado de la parte entera de la raíz cuadrada de esa segunda columna. Si ambas presentan el mismo resultado es que se trata de un cuadrado perfecto.

A continuación se inserta un fragmento de tabla similar al propuesto:

N	**N(N+1)(N+2)/2**	**¿Es cuadrado?**
61	119133	No
62	124992	No
63	131040	No
64	137280	No
65	143715	No
66	150348	No
67	157182	No
68	164220	No
69	171465	No
70	178920	No
71	186588	No
72	194472	No
73	202575	No

También se puede utilizar un código en Basic similar al siguiente, que busca cuadrados en la fórmula hasta N=50000

```
for i=1 to 50000
n=i*(i+1)*(i+2)/2
if n=(Int(Sqr(N))^2 then
msgbox(n)
end if
next i
End Sub
```

(e) En el caso de los números triangulares no existe el problema de la existencia de cuadrados impares con diferencia 1 ó 2, porque n(n+1) presenta un factor impar y otro par. Así, basta con que $n=2*k^2$ y $n+1= h^2$ para que se cumpla. Por ejemplo, 8*9/2 es igual a $2^2*3^2 = 36 = 6^2$.

(f) El razonamiento y el método para conjeturar con hoja de cálculo son similares a los propuestos en el apartado (d)

(g) En efecto, la suma de los 24 primeros cuadrados equivale al cuadrado de 70, como se puede comprobar con una calculadora u hoja de cálculo.

El fósil de un número

Solución del problema

Puesto que buscamos un fósil impar, ninguna de las cifras del número que buscamos puede ser par.

Como todas sus cifras deben ser diferentes, para ser lo más grande posible deberíamos usar todas las cifras impares, es decir, el 1, el 3, el 5, el 7 y el 9. Sin embargo, el producto de todos estos números es el 3*5*7*9 = 945, y tiene una cifra par, de forma que al final tendría un fósil par.

Por tanto, tenemos que usar cuatro cifras. Quitar la más pequeña, el 1, no ayuda, pues el producto seguiría siendo el mismo, de forma que probamos a quitar el 3, así que el producto 5*7*9 = 315, y 3*5 = 15, proporciona un fósil impar, el 5.

Ya sabemos que debemos usar los números 1, 5, 7 y 9, y para que sea lo mayor posible pondremos los mayores en las posiciones más significativas (más a la izquierda). El número buscado es, entonces, el 9751.

(1) Todos los números naturales tienen fósil. Lo veremos en dos pasos:

(a) Todo número natural es mayor que el producto de sus cifras. En efecto, sea $N=a_0*10^n + a_1*10^{n-1}....+a_{n-1}*10+a_n > a_0*10^n > a_0*a_1*...*a_{n-1}*a_n$

Por tanto, la operación de multiplicar las cifras produce una sucesión estrictamente decreciente, pero al tener como cota el 0 y ser finito el conjunto posible de valores del producto, éste tiene que llegar necesariamente a un número de una cifra.

(b) Los números de una cifra son invariantes

Es un hecho evidente, por lo que completa el razonamiento.

(2) Un algoritmo para calcular el fósil ha de contener una fase que descomponga el número en sus cifras

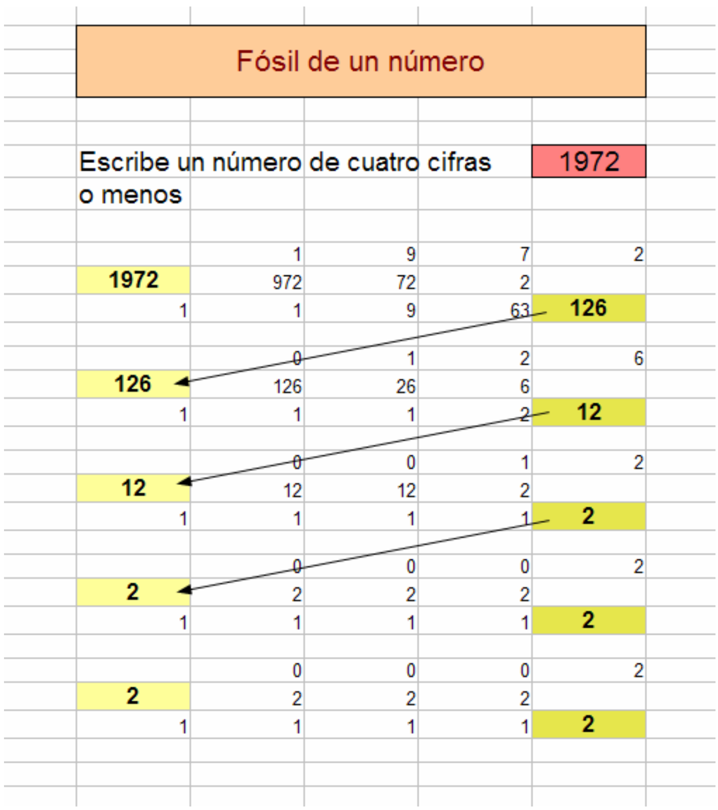
		9	8	0	7
9807			807	7	7
	1	9	72	72	504

Esta operación se corresponde con las dos primeras filas. En la primera se calculan los cocientes de la segunda fila entre 1000, 100…y en esta segunda los residuos del número anterior respecto a los mismos 1000, 100…De esta forma la primera fila contendrá las cifras del número.

Si el algoritmo está preparado para números de cuatro cifras, por ejemplo, y escribimos un número de tres, aparecerían ceros al principio de la primera fila y alterarían el producto final. Para evitarlo en la tercera fila se van multiplicando las cifras siempre que no sean *ceros iniciales*.

Desde 1 hasta el final sólo se van multiplicando cifras si son reales. Por ejemplo, la primera cifra se multiplica si el número es mayor que 1000, la segunda si es mayor que 100, y así hasta el final.

Este bloque se repite varias veces, tomando como entrada de cada una la salida de la otra, hasta llegar a una cifra. En l siguiente imagen se puede estudiar el proceso:



Fósil de un número

Escribe un número de cuatro cifras o menos				1972
	1	9	7	2
1972	972	72	2	
1	1	9	63	126
	0	1	2	6
126	126	26	6	
1	1	1	2	12
	0	0	1	2
12	12	12	2	
1	1	1	1	2
	0	0	0	2
2	2	2	2	
1	1	1	1	2
	0	0	0	2
2	2	2	2	
1	1	1	1	2

(3) Si sumáramos en lugar de multiplicar, la sucesión que lleva hasta el fósil también sería estrictamente decreciente:

$N=a_0*10^n + a_1*10^{n-1}....+a_{n-1}*10+a_n > a_0+ a_1+...+a_n$

y por tanto existiría un límite que sería el fósil.

Múltiplos de 11

(1) El primer método no es muy recomendable, salvo que se desee sufrir.

(2) Sea un número de dos cifras a y b entre 10 y 90. Si lo multiplicamos por 11 obtendremos un número de tres cifras como el considerado en el problema. Si la suma a+b es menor que 10, ese número estará compuesto por las cifras a, a+b y b, y en caso contrario por a+1,a+b-10 y b. Esto nos permite plantear dos ecuaciones:

(a) $10a+b = a^2+(a+b)^2+b^2$

Desarrollando como una ecuación de segundo grado en “a” (por ejemplo), y exigiendo que el discriminante esa igual a un cuadrado perfecto M^2 llegamos a la condición

$b(3b+8)=25 - M^2$, que sólo tiene solución si b=0. Esto nos da el valor 5 para M y sustituyendo en la primera ecuación, que a=5. Luego el número de dos cifras sería el 50, y el de tres cifras pedido el 550, que constituye nuestra primera solución.

(b) $10a+b = (a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2$

Procediendo de la misma forma se llega a la condición

$b(14-3b)=6+ M^2$, con solución b=3 M=3 y a=7. El número de dos cifras sería el 73, y su múltiplo 803, que sería la segunda solución.

Por tanto, las dos soluciones son 803 y 550.

(3) Esta búsqueda está explicada en gran parte y no necesita más aclaraciones.

(4) Para implementar un algoritmo que resuelva el problema hay que vencer la dificultad de descomponer el número en tres cifras. Puedes usar para ello la función CIFRA contenida en el Apéndice..

Una vez resuelto este paso se pueden organizar siete columnas en la hoja de cálculo. En la primera se situará el número de dos cifras, en la siguiente su producto por 11, que se descompondrá en tres cifras en las siguientes columnas. Se calcula la suma de sus cuadrados en la penúltima cifra y si usa la función condicional SI para que en la última columna se nos responda si es solución o no.

En la siguiente tabla puedes ver unos resultados:

N	N*11	Centenas	Decenas	Unidades	Suma cuad.	
69	759	7	5	9	155	
70	770	7	7	0	98	
71	781	7	8	1	114	
72	792	7	9	2	134	
73	**803**	**8**	**0**	**3**	**73**	**Sí**
74	814	8	1	4	81	
75	825	8	2	5	93	
76	836	8	3	6	109	

Jugamos con los triangulares

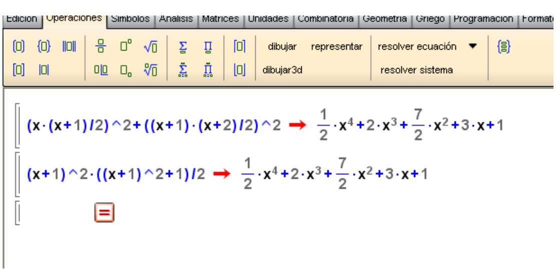
(1) La tabla a construir puede ser similar a la siguiente:

N	T(N)	Suma cuad.	X
1	1		
2	3	10	4
3	6	45	9
4	10	136	16
5	15	325	25
6	21	666	
7	28	1225	

En la primera columna figura el número de orden, en la segunda el triangular correspondiente, y a continuación la suma de cuadrados entre dos consecutivos. Fácilmente se descubre que los resultados son números triangulares de índice X, que resulta ser el cuadrado del índice. Por tanto conjeturamos que la suma del triangular de índice n con el siguiente de índice n+1 da como resultado al triangular correspondiente a $(n+1)^2$

(2) Si recordamos que $T(n)=n(n+1)/2$, será $T(n+1)=(n+1)(n+2)/2$. Desarrollamos sus cuadrados y sumamos, resultando la expresión $(n+1)^2(n^2+(n+2)^2)/4 =(n+1)^2(2n^2+4n+4)/4 =(n+1)^2((n+1)^2+1)/2$, que corresponde al triangular de índice $(n+1)^2$.

Con la calculadora Wiris se comprueba fácilmente:



(3) No necesita comentarios

ALGORITMOS

Algoritmo 196

El número 98 necesita 24 iteraciones para desembocar en capicúa.

El número 110 desemboca en el 121

Es fácil razonar que la segunda cifra de un capicúa de tres cifras que sea meta ha de ser par.

En efecto, si proviene de un número de dos cifras ha de ser múltiplo de 11, y los únicos capicúas son 121, 242, 363 y 484, todos con las decenas pares.

Si proviene de un número de tres cifras 100a+10b+c, tendrá la forma 101(a+c)+20b, con a+c<=9 y b<6, con lo que sus cifras serán a+c, 2b, a+c, y por tanto la cifra de las decenas será par.

Las metas de cuatro cifras han de ser múltiplos de 11. Es evidente por ser capicúas N=1000a+100b+100b+a=1001a+110b

LA DIFÍCIL Y ELEGANTE COMBINATORIA

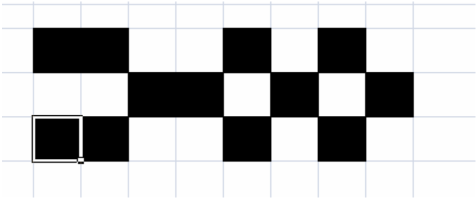
Combinado de murciélago

(a) Consideremos el caso contrario, que las cinco vocales estén juntas. Si las consideráramos como un solo elemento, obtendríamos en total 6! permutaciones. Si después las permutamos entre ellas, de cada permutación se obtendrían 5!, luego el caso contrario constaría de 6!*5! sucesos. Por tanto, la solución pedida es 10!-6!*5! = **3542400 permutaciones.**.

(b) Sólo existen dos configuraciones que cumplan lo exigido: CVCVCVCVCV y VCVCVCVCVC, luego la solución es **2*5!*5! = 28800 permutaciones.**

(c) Es similar al contrario de (a). Basta eliminar el factor 5!, luego la solución es **6!=720 permutaciones.**

Coloreando el tablero



La clave la tiene la primera fila (o primera columna, según como desees trabajar), según sus colores estén totalmente alternados o no.

Si están alternados, sólo hay dos posibilidades en la primera fila, BNBNBNBN y NBNBNBNB. Estas dos condicionan a las demás, que sólo pueden colorearse negro bajo y blanco bajo blanco, o bien alternados, negro bajo blanco o blanco bajo negro. Cada fila volverá a tener dos posibilidades, luego en total existirán 2^8 formas de colorear de forma alterna: 2^8 =256.

El resto de las configuraciones de la primera fila condicionan totalmente a todas las de abajo. Haz la prueba.

Luego sólo quedarían 254 posibilidades. Sumamos y obtenemos la solución: 256+254 =510

Sumas generadas con tres cifras

Para las sumas comprendidas entre 0 y 9 y entre 18 y 27 no hay problema de cálculo, pues van apareciendo los números triangulares como suma de consecutivos:

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N(S)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

En las sumas restantes hay que usar el esquema de decisión sugerido en el enunciado. Los datos que faltan son, que si S-A>=9, los casos que aparecen son 19-S+A, y en el caso contrario S-A+1. Puedes ir comprobándolo.

Por las ayudas incluidas y aplicando la simetría existente, se puede pensar que la suma pedida estará entre 10 y 12

Para S=10 podemos construir una tabla con el valor de A, el de S-A y los casos producidos:

Suma 10	S-A	Casos
0	10	**9**
1	9	**10**
2	8	9
3	7	8
4	6	7
5	5	6
6	4	5
7	3	4
8	2	3
9	1	2
		63

Hemos dado con la solución: **S=10**

En la tabla se han destacado en negrita los casos pertenecientes a S-A>=9.

Como el problema tiene una contrapartida simétrica, existe otra solución: **S=17**

Problemas de Combinatoria con comprobación

La solución es 48 banderas.

La puedes lograr con un diagrama de árbol. Las primeras ramas son tres, pero las siguientes sólo pueden ser dos. Por tanto la solución es 3*2*2*2*2 = 48

Para comprobar con Combimaq has de concretar estos datos:

Total de elementos: 3

Entran en cada arreglo: 5

Importa el orden: SÍ

Se pueden repetir: Sí

Con ello obtendrás un número total de 243 posibles banderas.

Para obligar a que no se repitan colores en barras consecutivas has de activar Condición de tipo algebraico y rellenar la condición

(SU1#SU2)*(SU2#SU3)*(SU3#SU4)*(SU4#SU5)

Obtendrás 48 casos favorables, que es la solución.

MISCELÁNEA

Fechas cruzadas

1a y 1b- Si a F11 lo representamos con el número x, F22 equivaldrá a x+7n+d, siendo n el número de semanas entre ellos y d la diferencia en el día de la semana. Entonces F12 se representará por x+d y F21 x+7n. Con ello tendremos que F11*F22-F21*F12 = x*(x+7n+d)-(x+d)*(x+7n) = x^2+7xn+xd- x^2-7xn-xd-7dn = -7dn, que es múltiplo de 7 negativo.

1d- En el caso de la suma obtendríamos: x+(x+7n+d)-(x+d)-(x+7n) = 0. Siempre da cero.

1e- Desarrollamos $x^2+(x+7n+d)^2$ – $(x+d)^2-(x+7n)^2$ = x^2+ x^2+ 49 n^2+ d^2+14xn+2xd+14nd- x2- d2-2xd- x2-49 n2-14xn = 14nd

1f- Bastaría sustituir el 7 por el 5 en todas las fórmulas.

Resolución con dos teclas

La desigualdad para el cuadrado

$$X^2<x(x+1)<(x+1)^2$$

se justifica porque $(x+1)^2 = x^2+2x+1 > x^2+x =x(x+1) > x^2$

La del cubo

$$X^3<x(x+1)(x+2)<(x+1)^3$$

se puede razonar de forma parecida: $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$x(x+1)(x+2) = x^3+3x^2+2x$, luego se cumple la doble desigualdad.

En el caso de cuatro factores, no basta con extraer la raíz cuarta, sino que hay que quitar una unidad, en virtud del desarrollo que se incluye en el enunciado. La función a usar con hoja de cálculo sería =ENTERO(RAÍZ(RAÍZ(N)))-1

Formas curiosas de expresar el año 2009

Para que un número sea igual a una diferencia de cuadrados $\mathbf{a^2 - b^2}$, sus divisores primos han de ser iguales al conjunto de la suma **a+b** y de la diferencia **a-b**. Los factores primos de 2009 son 7^2 y 41. Deberemos repartirlos en factores de la misma paridad e identificar el mayor con a+b y el menor con a-b. Tendremos así:

a+b=2009 a-b=1 a=1005 b=1004

a+b=287 a-b=7 a=147 b=140

a+b=49 a-b=41 a=45 b=4

(g) Para que 2009 se exprese como un capicúa de dos cifras en la base B, ha de cumplirse que 2009=C(B+1), siendo C una "cifra" menor que B

Recorriendo los divisores de 2009, que son 1, 41, 49, 287 y 2009, obtenemos estas posibilidades:

2009 = 41(48+1). Si representamos 41 por el símbolo J, tendríamos que **2009 = JJ (48**
2009 =9(286+1), luego **2009 = 99 (286**
2009 = 1(2008+1), y resulta **2009 =11 (2008**

(h) Bastará comprobar que ningún divisor de 2009 se puede expresar como B^2+B+1

Para la forma AAA deberemos comprobar que tampoco se pueden igualar esos divisores al polinomio B^3+B^2+B+1

El que no existen capicúas en alguna base se puede comprobar con una tabla similar a la siguiente, en la que no se observa igualdad entre la cifra 1 y la 3. Se tendría que prolongar hasta base 44.

Cifra 3			**Cifra 2**	**Base**	**Cifra 1**
11	169	150	**11**	***13***	**7**
10	196	49	**3**	***14***	**7**
8	225	209	**13**	***15***	**14**
7	256	217	**13**	***16***	**9**
6	289	275	**16**	***17***	**3**

(j) Un número terminado en 9 tiene la forma N*10+9 = N*(9+1)+9 = N*9+N+9

(k) Si N=a*b+a+b, será (N+1)=(a+1)(b+1), por lo que N+1 ha de ser compuesto. En el caso de 2009 deberemos buscar las formas de descomponer 2010 en dos factores: 2*1005, 3*670, 5*402, 6*335, 10*201, 15*134, 30*57

APÉNDICE

CÓDIGOS DE MACROS Y FUNCIONES

Los comentarios van entre paréntesis y en cursiva para distinguirlos del código.

Los siguientes códigos son válidos tanto para Excel como para OpenOffice.org Calc. Cuando existan diferencias se destacarán en cursiva con un comentario entre paréntesis.

Están situados en orden alfabético

ALGORITMO VORAZ PARA DESCOMPONER EN FACTORES

Entrada: Un número entero m

Operación: Descompone n en tres factores de todas las formas posibles.

Código en Basic

```
Sub voraz

dim m,n,r,j,fila as long
dim f(10),nume(10) as long
dim esdivi,sobrepasa as boolean
dim expre$
```

```
m=val(inputbox("Número a descomponer")) (Lee el número)
n= val(inputbox("Número de factores")) (Lee el número de factores)

(El número de factores debe ser pequeño, de 3 a 6, por ejemplo)

r=1  (Este contador avanza y retrocede según vayan los cálculos)
f(1)=1:nume(1)=m

while r>0
f(r)=f(r)+1 (Factor que se prueba)

(A continuación se acepta si es divisor y no sobrepasa sqr(n))

if nume(r)/f(r)= int(nume(r)/f(r)) then esdivi=true else esdivi=false
if f(r)>sqr(nume(r)) then sobrepasa=true else sobrepasa=false

if sobrepasa then (Se ha terminado con este factor. Retrocede)
r=r-1

else

if esdivi then (Avanza)
   r=r+1
   nume(r)=nume(r-1)/f(r-1)  (Es voraz. Se come al número)

   if r=n then  (Se han encontrado todos los factores pedidos)
   expre=""
   for j=1 to n-1:expre=expre+str$(f(j))+"*":next j
   expre=expre+str$(nume(r)
   msgbox(expre)   (Se presenta el resultado)
   r=r-1  (Se retrocede para buscar más)
   else
   f(r)=f(r-1)-1
   end if
end if
end if
wend

End Sub
```

FUNCIÓN *CIFRA*

Argumento: Un número entero m

Valor: Devuelve la cifra de orden n del número

Código en Basic

Public function cifra(m,n)
dim v

v=int(m/10^(n-1)) *Divide de forma entera el número entre 10^(n-1)*
v=v-10*int(v/10) *Le suprime las cifras de la izquierda*
cifra=v *Se recoge la función Cifra*
end function

FUNCIÓN *ESCAPICUA*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve 1 si es capicúa y 0 si no lo es.

Código en Basic

```
Public function escapicua(n)
dim l%,i%,c%
dim auxi$
auxi = str$(n) (Convierte el numero en texto)
l = len(auxi)
auxi=mid(auxi,2,l-1)
l = l-1
if l<2 then
escapicua = 0
else
```

c = 1
for i=1 to int(l/2) *(Comprueba cifra a cifra si es igual a su simétrica)*
if mid(auxi,i,1)<>mid(auxi,l-i+1,1) then c = 0 *(Hay un fallo)*
next i
escapicua = c
end if
end function

FUNCIÓN *ESDIVISIBLE*

Argumento: Dos números enteros

Valor: Devuelve True si el primero es divisible entre el segundo y False si no lo es.

Código en Basic

```
public function esdivisible(a,b) as boolean
if int(a/b)=a/b then esdivisible=True else esdivisible=False
end function
```

FUNCIÓN *ESPRIMO*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve True si es primo y False si no lo es.

Código en Basic

```
Public function esprimo(a as long) as Boolean

dim n as long
dim es as boolean
if a=1 then es=false
if a=2 then es=true
if a>2 then
n=2:es=true
while n<=sqr(a) and es=true
if a MOD n=0 then es=false
```

```
n=n+1
wend
endif
esprimo=es
end function
```

FUNCIÓN *INVERTIR_CIFRAS*

Argumento: Un número entero positivo

Valor: Devuelve el mismo número con sus cifras invertidas

Código en Basic

```
Public function invertir_cifras(n)
dim l%,i%
dim auxi$,auxi2$,c$
dim m

auxi = str$(n) (Convierte el número en texto)
l = len(auxi)
auxi=mid(auxi,2,l-1) (Le quita un espacio en blanco)
l = l-1  (En todas estas líneas cambia el orden de las cifras)
auxi2=""
for i=1 to l
c=mid(auxi,i,1)
auxi2=c+auxi2
next i
m=val(auxi2) (Convierte de nuevo el texto en número)
invertir_cifras=m
End function
```

FUNCIÓN MENORDIV

Argumento: Un número entero positivo

Valor: Devuelve el menor divisor de dicho número.

Código en Basic

```
function menordiv(a)
dim n
dim vale as boolean

vale=true (permite seguir el algoritmo)
n=1  (Comenzamos a buscar en el 1)
while vale and n<=a  (Bucle para buscar el divisor)
n=n+1  (se incrementa el número a probar)
if a/n=int(a/n) then vale=false (Si es divisible paramos)
wend
if n=a then n=1 (Caso en el que a es primo)
menordiv=n
End function
```

FUNCIÓN *MAYORDIVIMP*

Argumento: Un número entero positivo

Valor: Devuelve el mayor divisor impar de dicho número.

Código en Basic

```
public function mayordivimp(a) as long
dim a,n, max as long

if a=0 then max=0
if a=1 then max=1 (Casos triviales)
if a>1 then
max=1
for n=1 to a step 2 (va de 2 en 2 para recorrer los impares)
if a/n = int(a/n) then max=n (Si es divisible se guarda)
next n
end if
mayordivimp=max (la variable max va recogiendo el MFI)
end function
```

FUNCIÓN *PARIDAD*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve 0 si es par y 1 si es impar.

Código en Basic

```
public function paridad(n)
paridad=n-int(n/2)*2
end function
```

FUNCIÓN *PRIMANT*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve el mayor primo que es inferior a él

Código en Basic

```
Public Function primant(a) as long
dim  p, prim as long
dim sale as boolean

p=a-1:sale=false:prim=0 (prepara las variables)

while not sale (bucle para buscar el número primo)
if esprimo(p) then
   prim=p  (la variable prim recoge el primo encontrado)
   sale=true (si es primo se sale del bucle)
   end if
p=p-1
wend  (fin del bucle)
primant=prim
end function
```

FUNCIÓN *PRIMPROX*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve el menor primo que es superior a él

Código en Basic

```
Public Function primprox(a) as long
dim  p, prim as long
dim sale as boolean

p=a+1:sale=false:prim=0 (prepara las variables)

while not sale (bucle para buscar el número primo)
if esprimo(p) then
   prim=p  (la variable prim recoge el primo encontrado)
   sale=true (si es primo se sale del bucle)
   end if
p=p+1
wend  (fin del bucle)
primprox=prim
end function
```

FUNCIÓN SOFPR

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve la suma con repetición de todos los divisores primos del número.

Código en Basic

```
Public function sofpr(n)
Dim ene,f,c,s [creación de variables]

ene=n  [la variable ene recoge el argumento para preservar su valor]
```

f=1 *[contendrá los factores primos]*
s=0 *[contendrá la suma de primos]*

[bucle para encontrar los factores primos y sumarlos]

while ene>1 *[la variable ene va disminuyendo en el algoritmo]*
f=f+1 *[la variable f va aumentando para buscar factores primos]*

[bucle para determinar si f es factor primo y si se repite]

while ene/f=int(ene/f) *[determina si f es divisor y busca sus repeticiones]*
ene=ene/f *[se divide ene entre el factor, que ya se sabe que lo es]*
s=s+f *[se incorpora f a la suma de primos]*
wend *[fin de bucle]*
wend *[fin de bucle]*

sofpr=s *[la función sofpr recoge el valor de s]*

End function