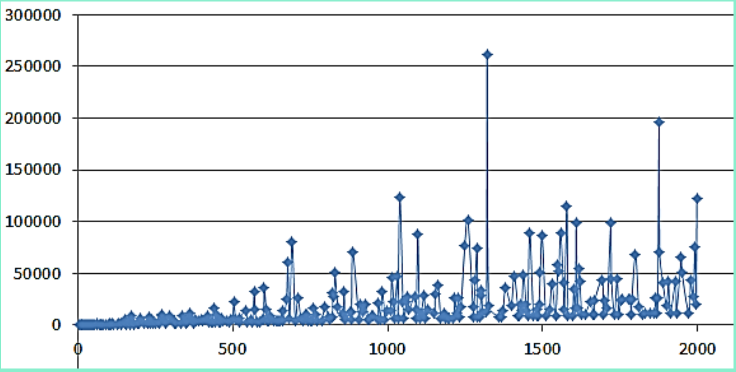
Promedios de divisores

Números aritméticos y “arolmar”



Edición 2023

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

En el año 2011 introduje los números AROLMAR, que son libres de cuadrados y con el promedio de sus factores primos también primo. Rafael Parra Machío (D.E.P) escribió algún documento sobre ellos (ver http://www.hojamat.es/parra/arolmar.pdf). Yo los considero una mera curiosidad cuyo estudio me ha divertido.

Como consecuencia de unas entradas dedicadas a los números aritméticos en mi blog "Números y hojas de cálculo", he decidido unir en un solo documento números en los que es relevante el promedio de unos divisores, sean todos ellos, los primos o los unitarios.

También se consideran otras medias además de la aritmética, como en los números de Ore o en los aritméticos y AROLMAR de grado superior.

Al final resultará una sencilla colección de propiedades y curiosidades relacionadas con los promedios de divisores, que espero sean de utilidad.

TABLA DE CONTENIDO

NÚMEROS ARITMÉTICOS

CONCEPTO Y EJEMPLOS

Los números aritméticos son aquellos en los que el promedio de sus divisores positivos es un número entero. Expresado de otra forma, aquellos en los que su función TAU (número de divisores) divide a su función SIGMA (suma de divisores). Su similitud con nuestros números AROLMAR nos ha motivado a estudiarlos.

(ver http://www.hojamat.es/publicaciones/arolmar.pdf)

El interés de estos números no está en descubrirlos, ya que son abundantes, están publicados (https://oeis.org/A003601) y son fáciles de encontrar. Basta exigir que TAU(N) divida a SIGMA(N). Ambas funciones las puedes encontrar implementadas para hoja de cálculo en este blog y en nuestras publicaciones. Aquí nos interesaran más sus distintos tipos y propiedades.

En la siguiente tabla hemos organizado una búsqueda:

N	SIGMA(N)	TAU(N)	COCIENTE	
1	1	1	1	**Aritmético**
2	3	2	1,5	
3	4	2	2	**Aritmético**
4	7	3	2,33333333	
5	6	2	3	**Aritmético**
6	12	4	3	**Aritmético**
7	8	2	4	**Aritmético**
8	15	4	3,75	
9	13	3	4,33333333	
10	18	4	4,5	
11	12	2	6	**Aritmético**
12	28	6	4,66666667	
13	14	2	7	**Aritmético**
14	24	4	6	**Aritmético**
15	24	4	6	**Aritmético**
16	31	5	6,2	

Observamos que son aritméticos 1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14 y 15.

Los primeros, ya publicados, son:

1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 77, 78, 79, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 101, 102, 103, 105,...

Para quienes no tengan interés en las dos funciones SIGMA y TAU, adjuntamos una sencilla función en Vbasic para Excel y Calc:

```
function esaritmetico(n) as boolean
dim t,s,i,c

t=0 'variable para TAU
s=0 'variable para SIGMA
for i=1 to n
if n/i=n\i then 'se trata de un divisor
t=t+1 'incrementa TAU
s=s+i 'incrementa SIGMA
end if
next i
c=s/t' cociente entre SIGMA y TAU
if c=int(c) then esaritmetico=true else
esaritmetico=false
End function
```

Aplicando esta función a cualquier buscador obtenemos la lista de números aritméticos.

Por ejemplo, esta es la lista de ellos entre 1000 y 1020:

Visor búsquedas

Buscar

1020

1020 1000

N	SIGMA	TAU	COCIENTE
1001	1344	8	168
1002	2016	8	252
1003	1080	4	270
1004	1764	6	294
1005	1632	8	204
1006	1512	4	378
1007	1080	4	270
1009	1010	2	505
1011	1352	4	338
1012	2016	12	168
1013	1014	2	507
1014	2196	12	183
1015	1440	8	180
1016	1920	8	240
1017	1482	6	247
1019	1020	2	510
1020	3024	24	126

Hoja1 Hoja2 Hoja3 Hoja4

Observamos que casi todos los números de ese rango son aritméticos. Más adelante combinaremos esta función *esaritmetico* con otras, para buscar propiedades interesantes.

Para búsquedas con PARI, la mejor función es la publicada en OEIS:

is(n)=sigma(n)%numdiv(n)==0 \\ Charles R Greathouse IV, Jul 10 2012

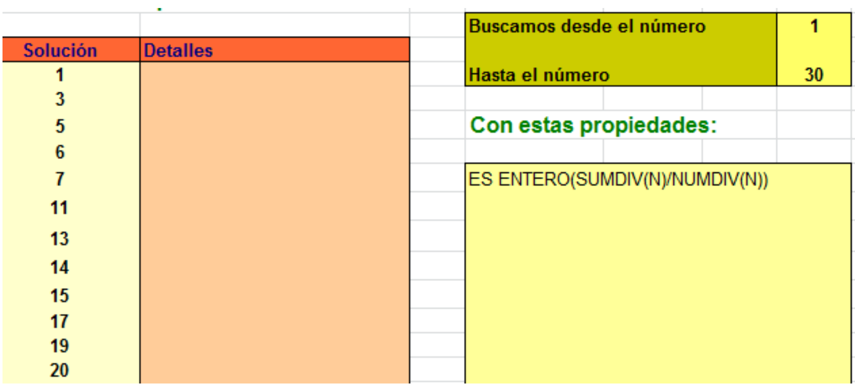
En la siguiente imagen se ha usado esta función en la página oficial de PARI, para comprobar el listado anterior:

```
? is(n)=sigma(n)%numdiv(n)==0
for(i=1,100,if(is(i),print1(i,", ")))
1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37,
38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 65,
66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 77, 78, 79, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96,
97, 99,
```

```
is(n)=sigma(n)%numdiv(n)==0
for(i=1,100,if(is(i),print1(i,", ")))
```

A nivel elemental es adecuado el uso de nuestro Buscador de Naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador)



Se entiende fácilmente la condición impuesta.

Carácter multiplicativo

Para entender algunas cuestiones que seguirán, hay que recordar que las funciones SIGMA y TAU son multiplicativas, es decir, que en ellas se cumple la igualdad fundamental de este tipo de funciones, que es

F(a*b)=F(a)*F(b) si a y b son primos entre sí.

Puedes consultar la teoría de estas funciones en nuestra publicación "Funciones multiplicativas" (http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf)

Se puede construir un pequeño esquema con Excel o Calc para comprobar esta propiedad:

	Factores	Es aritmético?
	13	VERDADERO
	1891	VERDADERO
Producto	24583	VERDADERO

Escribimos dos aritméticos primos entre sí y comprobamos que su producto también es aritmético.

Números primos y sus productos

Todos los números primos **p** mayores que 2 son aritméticos, ya que son impares, su función Sigma(p) equivale a 1+p, par, y su función Tau(p) es 2, luego su cociente es entero. Como consecuencia, según demostró Ore (*O. Ore, On the averages of the divisors of a number, Amer. Math. Monthly 55 (1948), 615-619*), **todo número libre de cuadrados impar ha de ser aritmético**, porque se puede aplicar la propiedad multiplicativa a todos sus factores primos. Como ejemplo, hemos repetido el esquema de más arriba usando productos de distintos primos:

	Factores	**¿Es aritmético?**
7*11*13	1001	VERDADERO
31*41	1271	VERDADERO
Producto	1272271	VERDADERO

Según lo anterior, los números semiprimos impares no cuadrados deberán ser aritméticos. Por ejemplo, 851=23*37

SIGMA(851)=SIGMA(23)*SIGMA(37)=24*38=912
y como TAU(851)=4, se cumple la definición al ser 912 divisible entre 4.

Aritméticos no libres de cuadrados

Existen muchos números aritméticos que no son libres de cuadrados. Uniendo las dos propiedades de ser aritmético y de poseer una parte cuadrada mayor que 1, resultan estos otros números:

20, 27, 44, 45, 49, 54, 56, 60, 68, 92, 96, 99, 116, 125, 126, 132, 135, 140, 147, 150, 153, 164, 168, 169, 184, 188, 189, 198, 204, 207, 212, 220, 224, 236, 245, 248, 260, 261, 264, 270, 275, 276, 280, 284, 294,…

Entre ellos hay cuadrados, cubos o productos de cuadrados por otros factores. Según se explica en la página https://oeis.org/A023883, algunos tipos de ellos se pueden identificar:

Cuadrados de primos del tipo 6k+1

Lo podemos comprobar fácilmente, pues el valor de TAU será 3, y SIGMA será:

$(6k+1)^2+6k+1+1=36k^2+18k+3$

Esta expresión es claramente un múltiplo de 3, luego el número es aritmético.

Los primeros ejemplos son:
49, 169, 361, 961, 1369, 1849, 3721, 4489, 5329, 6241, 9409, 10609, 11881, 16129,…

Cubos de primos impares

Los cubos de primos tienen cuatro divisores, y en el caso de impares resulta:

$TAU(N)=(2k+1)^3+(2k+1)^2+2k+1+1=8k^3+12k^2+6k+1+4k^2+4k+1+2k+1+1=8k^3+16k^2+12k+4$, que es múltiplo de 4 y convierte en aritmético al cubo.

Primos del tipo 6k-1 multiplicados por cuadrado de otro primo

La función TAU de p^2q, siendo ambos primos será:

$TAU(N)=TAU(p^2)*TAU(q)=3*2=6$

La función SIGMA vendrá dada por

$(1+p+p^2)(1+q)$

y bastará con que sea q del tipo 6k-1 para que sea múltiplo de TAU.

En la tabla de los primeros casos de $N=p^2q$ observamos la abundancia de este tipo, de un primo al cuadrado multiplicado por otro q=6k-1.

N	Factores
20	[2,2][5,1]
44	[2,2][11,1]
45	[3,2][5,1]
68	[2,2][17,1]
92	[2,2][23,1]
99	[3,2][11,1]
116	[2,2][29,1]
147	[3,1][7,2]
153	[3,2][17,1]
164	[2,2][41,1]
188	[2,2][47,1]
207	[3,2][23,1]
212	[2,2][53,1]
236	[2,2][59,1]
245	[5,1][7,2]
261	[3,2][29,1]
275	[5,2][11,1]
284	[2,2][71,1]

Números aritméticos primitivos

Vimos anteriormente que el carácter de aritmético tiene la propiedad multiplicativa, es decir, que el producto de dos números aritméticos coprimos es otro número aritmético.

Llamaremos *números aritméticos primitivos* a aquellos que no hayan tenido ese origen, que no sean producto de dos aritméticos coprimos mayores que 1.

Podemos identificarlos con una función para VBasic:

```
Function esprimaritmetico(n)
Dim i, a, r
Dim sigue As Boolean

If Not esaritmetico(n) Then esprimaritmetico = False: Exit Function ‘Si no es aritmético, no seguimos
sigue = True ‘Control de detención de la búsqueda
i = 2 ‘Posible divisor
r = Sqr(n) ‘Buscamos hasta la raíz cuadrada
While i < r And sigue ‘Bucle de búsqueda
If n Mod i = 0 Then ‘Es divisor
a = n / i ‘Posible factor aritmético
```

If esaritmetico(i) And esaritmetico(n / i) And mcd(i, n / i) = 1 Then sigue = False ‘Ambos aritméticos y coprimos
End If
i = i + 1
Wend
esprimaritmetico = sigue
End Function

Con esta función y un buscador cualquiera, identificamos los aritméticos primitivos. Los primeros son estos:

1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 27, 29, 31, 37, 38, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 53, 54, 56, 59, 61, 62, 67, 68, 71, 73, 79, 83, 86, 89, 92, 94, 96, 97, 99, 101, 103, 107, 109, 113, 116, 118, 125, 126, 127, 131, 134, 137, 139, 142, 149, 150, 151, 153, 157

Están publicados en https://oeis.org/A342438. Los hay primos y compuestos, pares e impares.

Los números primos han de ser necesariamente aritméticos primitivos, porque no son producto de dos factores mayores que 1.

Entre los números compuestos, según A342438, estarán los cuadrados de primos del tipo 6m+1. La razón es que son aritméticos, pues la suma de sus divisores es
$36m^2+12m+1+6m+1+1=36m^2+18m+3$, que es múltiplo del valor de TAU, que es 3.

Como, además, no son producto de dos factores coprimos, deberán ser aritméticos primitivos.

También serán de este tipo los cubos de primos impares.

DISTRIBUCIÓN

Basta observar los listados de aritméticos para comprobar que es relativamente frecuente encontrar aritméticos consecutivos, o bien diferenciados en dos unidades o en tres, por lo que este estudio de pequeñas diferencias carecería de interés. De hecho, Paul Erdös y tres colaboradores hicieron notar que el conjunto de los aritméticos tiene densidad 1

(ver https://math.dartmouth.edu/~carlp/PDF/31.pdf)

Nos dedicaremos, pues, al extremo opuesto, a aritméticos consecutivos que se diferencien en varias unidades.

Si exigimos que la diferencia sea mayor que 2, ya observamos la poca frecuencia de este tipo de diferencias, como podemos comprobar en esta tabla:

7	11
23	27
62	65
73	77
79	83
119	123
169	173
174	177

Sólo existen ocho pares con diferencias mayores que 3 entre los 200 primeros números. Podemos contar los que se presentan, por ejemplo, entre los 10000 primeros, y nos resultarían pares de este tipo sólo 190. Como curiosidad, elaboraremos una tabla de intervalos:

Diferencias mayores que 2 en aritméticos consecutivos.	
Intervalo	Frecuencia
0 a 10000	190
10000 a 20000	167
20000 a 30000	171
30000 a 40000	154
40000 a 50000	149

Vemos que las frecuencias son estables con tendencia a disminuir.

Si nos vamos a diferencias mayores, las frecuencias disminuyen bastante. Con las mayores que 3 baja a menos de la mitad, sobre 55 por cada 10000 y con mayores que 4 no llega a 10. Después, las diferencias mayores son muy escasas. Por tanto, los aritméticos presentan diferencias muy pequeñas, casi todas con valores 1, 2, 3 o 4.

Dentro de las diferencias pequeñas, deberán ser más escasas las ternas, los conjuntos de tres aritméticos ordenados que presenten las mismas diferencias. Hemos encontrado estos casos:

Conjuntos de aritméticos consecutivos

En un primer intento, con conjuntos de tres, resultan muchas ternas

5	6	7
13	14	15
19	20	21
20	21	22
21	22	23
29	30	31
37	38	39
41	42	43

Hemos advertido que en la terna (20, 21, 22) los promedios de los divisores son también consecutivos, pues son 7, 8 y 9 respectivamente.

7=(1+2+4+5+10+20)/6,

8=(1+3+7+21)/4,

9=(1+2+11+22)/4

Buscamos más ejemplos y no se han encontrado ninguno más entre los números menores que 500000.

Por curiosidad, hemos buscado conjuntos de cuatro consecutivos y también son muy frecuentes, por lo que no estiramos el tema. Queda abierta una línea de búsqueda.

Números cuadrados

Si combinamos la función *esaritmetico* con la de *escuad* (muy usada en nuestras publicaciones y en el blog) encontraremos los números aritméticos cuadrados:

N	SIGMA	TAU
1	1	1
49	57	3
169	183	3
361	381	3
961	993	3
1369	1407	3

Con PARI llegamos más lejos en pocos segundos:

aritm(n)={sigma(n)%numdiv(n)==0}
is(n)={aritm(n)&&issquare(n)}
for(i=1,100000,if(is(i),print1(i,", ")))

1, 49, 169, 361, 961, 1369, 1849, 3721, 4489, 5329, 6241, 8281, 9409, 10609, 11881, 14641, 16129, 17689, 19321, 22801, 24649, 26569, 32761, 37249, 39601, 44521, 47089, 49729, 52441, 58081, 61009, 67081, 73441, 76729, 80089, 87616, 90601, 94249, 97969,…

Están publicados en https://oeis.org/A277793, con el añadido de que la media geométrica de los divisores es también entera. Esta última propiedad es típica de los cuadrados, porque en ellos la media geométrica es la raíz cuadrada del número.

El caso más sencillo es el de un primo al cuadrado. Podemos demostrar fácilmente que si el primo es de tipo 6n+1, su cuadrado es aritmético, y no lo será en el caso 6n+5. En efecto, en ambos casos TAU vale 3, ya que los divisores son 1, p y p^2, y SIGMA se comporta de forma diferente en cada tipo:

1)
$SIGMA(p)=p^2+p+1=(6n+1)^2+6n+1+1=36n^2+12n+1+6n+1+1=36n^2+18n+3$, claramente múltiplo de 3, que es el valor de TAU.
2)
$SIGMA(p)=p^2+p+1=(6n+5)^2+6n+5+1=36n^2+60n+25+6n+5+1=36n^2+66n+31$, no divisible entre 3.

En la siguiente tabla (salvo el caso de 14641, que es una cuarta potencia) observamos que todos los números primos involucrados son del tipo 6n+1 (el 2 que figura en los corchetes es su exponente):

	Aritmético cuadrado	Factores primos	
	1		
	49	[7,2]	
	169	[13,2]	
	361	[19,2]	
	961	[31,2]	
	1369	[37,2]	
	1849	[43,2]	
	3721	[61,2]	
	4489	[67,2]	
	5329	[73,2]	
	6241	[79,2]	
	8281	[7,2][13,2]	
	9409	[97,2]	
	10609	[103,2]	
	11881	[109,2]	
	14641	[11,4]	
	16129	[127,2]	
	17689	[7,2][19,2]	
	19321	[139,2]	
	22801	[151,2]	

En la tabla figuran también los productos de cuadrados de primos cuando son del tipo 6n+1, como 8281 y 17689.

Podemos construir más aritméticos cuadrados si multiplicamos factores primos del tipo 6n+1, como sería, por ejemplo, $2989441=7^2*13^2*19^2$, que hemos comprobado su carácter con la función *esaritmetico*.

Aritméticos triangulares

Si usamos las funciones *esaritmetico* y *estriangular* simultáneamente, obtenemos los primeros números de este tipo:

Número	Factores	Orden triangular
1		1
3	[3,1]	2
6	[2,1][3,1]	3
15	[3,1][5,1]	5
21	[3,1][7,1]	6
45	[3,2][5,1]	9
55	[5,1][11,1]	10
66	[2,1][3,1][11,1]	11
78	[2,1][3,1][13,1]	12
91	[7,1][13,1]	13
105	[3,1][5,1][7,1]	14
153	[3,2][17,1]	17
190	[2,1][5,1][19,1]	19
210	[2,1][3,1][5,1][7,1]	20
231	[3,1][7,1][11,1]	21
253	[11,1][23,1]	22
276	[2,2][3,1][23,1]	23
351	[3,3][13,1]	26
378	[2,1][3,3][7,1]	27
406	[2,1][7,1][29,1]	28

No es de extrañar su relativa abundancia, ya que todo triangular se puede descomponer en dos factores primos entre sí (no es difícil razonarlo), lo que, por la propiedad multiplicativa, facilita su carácter aritmético. Ocurre algo similar con los números oblongos, que son los dobles de los triangulares.

Aritméticos libres de cuadrados

Este tipo nos interesa en esta publicación, pues veremos que contienen a los números *arolmar* que estudiaremos en la segunda parte. Bastará usar la función *esaritmetico* y combinarla con la igualdad PARTECUAD(N)=1. Con ellas obtenemos la sucesión

1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, **21**, 22, 23, 29, 30, 31, **33**, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 55, **57**, 59, 61, 62, 65, 66, 67, **69**, 70, 71, 73, 77, 78, 79, 83, **85**, 86, 87, 89, 91, **93**, 94, 95, 97, 101, 102, 103, **105**, 107,…

Hemos destacado en negrita los arolmar, aunque sea adelantar temas.

Es fácil obtenerlos con el Buscador de Naturales:

Núm.	Solución	Detalles
1	1	
2	3	
3	5	
4	6	
5	7	
6	11	
7	13	
8	14	
9	15	
10	17	
11	19	
12	21	
13	22	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	300

Con estas propiedades:

ES ENTERO(SUMDIV(N)/NUMDIV(N))
LIBREDECUADRADOS

Otros tipos de aritméticos

Repasamos brevemente algunos otros tipos de aritméticos

Aritméticos oblongos

La segunda columna representa la descomposición factorial y la tercera su orden como oblongo.

6	[2,1][3,1]	2
20	[2,2][5,1]	4
30	[2,1][3,1][5,1]	5
42	[2,1][3,1][7,1]	6
56	[2,3][7,1]	7
110	[2,1][5,1][11,1]	10
132	[2,2][3,1][11,1]	11
182	[2,1][7,1][13,1]	13
210	[2,1][3,1][5,1][7,1]	14
342	[2,1][3,2][19,1]	18
380	[2,2][5,1][19,1]	19
420	[2,2][3,1][5,1][7,1]	20
462	[2,1][3,1][7,1][11,1]	21
506	[2,1][11,1][23,1]	22
552	[2,3][3,1][23,1]	23
702	[2,1][3,3][13,1]	26
812	[2,2][7,1][29,1]	28
870	[2,1][3,1][5,1][29,1]	29
930	[2,1][3,1][5,1][31,1]	30
992	[2,5][31,1]	31
1056	[2,5][3,1][11,1]	32

También este caso y el siguiente se pueden encontrar con el Buscador.

Aritméticos cubos

Son más escasos que los anteriores:

Aritméticos y cubos perfectos	
1	
27	[3,3]
125	[5,3]
343	[7,3]
1331	[11,3]
2197	[13,3]
2744	[2,3][7,3]
3375	[3,3][5,3]
4913	[17,3]
6859	[19,3]
9261	[3,3][7,3]
12167	[23,3]
13824	[2,9][3,3]
24389	[29,3]
29791	[31,3]
35937	[3,3][11,3]
42875	[5,3][7,3]

Abundan entre ellos los cubos de primos p^3, en los que $SIGMA(p^3)=1+p+p^2+p^3$, y $TAU(p^3)=4$

Todos los cubos de primos impares son aritméticos. Lo comprobamos con los dos tipos de primos, 4k+1 y 4k-1:

$SIGMA((4K+1)^3)=(4k+1)^3+(4k+1)^2+4k+1+1=64k^3+48k^2+12k+1+16k^2+8k+1+4k+1+1=64k^3+64k^2+24k+4$, que es múltiplo de 4, que es el valor de TAU.

$SIGMA((4K-1)^3)=(4k-1)^3+(4k-1)^2+4k-1+1=64k^3-48k^2+12k-1+16k^2-8k+1+4k-1+1=64k^3-32k^2+8k+4$, también múltiplo de 4.

Puedes comprobar que el número 2^3 no es aritmético.

Todos los que tengan esos factores y que sean libres de cuadrados, por la propiedad multiplicativa, también serán aritméticos.

Además de ellos aparecerán otros con el factor 2, como $2744=2^3*7^3$, pero no de forma sistemática.

ARITMÉTICOS CON PROMEDIO PRIMO

Estos son los más parecidos a nuestros números AROLMAR, ya que en estos últimos ha de ser primo el promedio de los factores primos, mientras que ahora tomaremos todos los divisores.

Deberemos unir a la función *esaritmetico* la condición de que SIGMA(n)/TAU(n) sea un número primo. Los primeros encontrados son:

Aritmético	Factores	Media prima
3	[3,1]	2
5	[5,1]	3
6	[2,1][3,1]	3
13	[13,1]	7
20	[2,2][5,1]	7
37	[37,1]	19
45	[3,2][5,1]	13
49	[7,2]	19
61	[61,1]	31
73	[73,1]	37
150	[2,1][3,1][5,2]	31
157	[157,1]	79
169	[13,2]	61
193	[193,1]	97
277	[277,1]	139
313	[313,1]	157
361	[19,2]	127
397	[397,1]	199
421	[421,1]	211

También se obtienen con el Buscador y la condición ES PRIMO(SUMDIV(N)/NUMDIV(N))

Están publicados en https://oeis.org/A048968

Para encontrarlos con PARI puedes usar lo siguiente:

is(n)={if(sigma(n)%numdiv(n)==0,m=sigma(n)/numdiv(n),m=1);return(isprime(m))}
for(i=2,10^3,if(is(i),print1(i,", ")))

Comprobación:

```
? is(n)={if(sigma(n)%numdiv(n)==0,m=sigma(n)/numdiv(n),m=1);return(isprime(m))}
for(i=2,10^3,if(is(i),print1(i,", ")))

3, 5, 6, 13, 20, 37, 45, 49, 61, 73, 150, 157, 169, 193, 277, 313, 361, 397, 421, 4
57, 541, 613, 661, 673, 733, 757, 832, 877, 961, 997,
```

Caso de p primo

Si el número es un primo **p**, deberá ser también primo **(p+1)/2**, que es el cociente entre SIGMA(P) Y TAU(p). Esta situación recuerda a los primos de Sophie Germain, pero en ellos es primo (q-1)/2, siendo q el asociado de p.

Están publicados en https://oeis.org/A005383

Según esta página, vendrán seguidos del doble de un primo, como se deduce fácilmente. Por ejemplo, el número 157 que está en la tabla viene seguido del 158=2*79.

Según Zak Seidov, Feb 16 2017, todos ellos, a partir del 13, han de ser del tipo 12k+1. La razón es sencilla, y, como siempre, distinguimos entre primos del tipo 6k+1 y 6k-1

Si p=6k+1, (p+1)/2=(6k+1+1)/2=3k+1, lo que obliga a que k sea par, quedando el tipo 12k+1

Si p=6k-1 (p+1)/2=(6k-1+1)/2=3k, múltiplo de 3 y no primo.

Caso de p compuesto

Es fácil ver que son los siguientes:

Aritmético	Factores	Media prima
6	[2,1][3,1]	3
20	[2,2][5,1]	7
45	[3,2][5,1]	13
49	[7,2]	19
150	[2,1][3,1][5,2]	31
169	[13,2]	61
361	[19,2]	127
832	[2,6][13,1]	127
961	[31,2]	331
1445	[5,1][17,2]	307
1734	[2,1][3,1][17,2]	307
1849	[43,2]	631
5329	[73,2]	1801
8405	[5,1][41,2]	1723
9409	[97,2]	3169
9477	[3,6][13,1]	1093

También están publicados
(ver https://oeis.org/A048969)

Subcaso de cuadrados de primos

Observamos que en el listado figuran cuadrados de primos, y todas las bases son primos del tipo 6k+1, como ya se comprobó en el caso general.

En estos, SIGMA(n)=1+p+p^2, con lo que ha de ser primo (1+p+p^2)/3. Además, al igual que p, deberá ser del tipo 6k+1:

$(1+6k+1+(6k+1)^2)/3=(2+6k+36k^2+12k+1)/3=12k^2+6k+1$. Es del tipo deseado.

Podemos construir una tabla que compare los valores de p con los de la media de sus divisores, ambos primos del tipo 6k+1:

Valor de p	Media divisores
7	19
13	61
19	127
31	331
43	631
73	1801
97	3169
103	3571
127	5419
157	8269
199	13267
223	16651
241	19441
271	24571
409	55897
421	59221
661	145861
673	151201

Los promedios primos de la segunda columna están publicados en https://oeis.org/A338299, y los de la primera columna, en https://oeis.org/A240971

En esta página se comenta que, según la hipótesis de Schinzel, ambas sucesiones tienen carácter infinito.

Subcaso de libres de cuadrados

Por analogía con los AROLMAR, nos quedamos con los compuestos libres de cuadrados, pero en este caso sólo hemos encontrado el número 6, aunque se ha buscado hasta 10^6.

Caso en el que el promedio es divisor del número

Otra propiedad que pueden tener los números aritméticos es la de que el promedio de sus divisores sea también un divisor. Los algoritmos que hemos usado hasta ahora se pueden adaptar fácilmente a esta nueva propuesta. La función *esaritmetico* puede quedar así:

Function esaritmetico(n) As Boolean
Dim t, s, i, c

```
t = 0
s = 0
For i = 1 To n
If n / i = n \ i Then
t = t + 1
s = s + i
End If
Next i
c = s / t
If c = Int(c) And n / c = n \ c Then esaritmetico = True
Else esaritmetico = False
End Function
```

Ha bastado añadir el trozo de código que está subrayado en el listado, y que equivale a afirmar que el promedio de divisores es también un divisor. Con esta función obtenemos los primeros ejemplos:

N	Factores de N	Promedio	N / promedio
1		1	1
6	[2,1][3,1]	3	2
140	[2,2][5,1][7,1]	28	5
270	[2,1][3,3][5,1]	45	6
672	[2,5][3,1][7,1]	84	8
1638	[2,1][3,2][7,1][13,1]	182	9
2970	[2,1][3,3][5,1][11,1]	270	11
6200	[2,3][5,2][31,1]	620	10
8190	[2,1][3,2][5,1][7,1][13,1]	546	15

En la tabla figuran los valores de N, sus factores primos, el promedio de divisores y el cociente de N entre el mismo, que ha de ser entero.

Este procedimiento se puede adaptar al lenguaje PARI:

is(n)={if(sigma(n)%numdiv(n)==0,m=sigma(n)/numdiv(n),return(0));return(n%m==0)}
for(i=2,10^6,if(is(i),print1(i,", ")))

Nos devolverá un listado ya publicado:

6, 140, 270, 672, 1638, 2970, 6200, 8190, 18600, 18620, 27846, 30240, 32760, 55860, 105664, 117800, 167400, 173600, 237510, 242060, 332640, 360360, 539400, 695520, 726180, 753480,… (ver https://oeis.org/A007340)

Estos promedios resultan ser números de Ore, en los que la media armónica de los divisores también es entera. Los estudiaremos más adelante.

OTROS CASOS PARA EL PROMEDIO

Hemos estudiado el caso en el que el promedio de divisores es primo, pero puede presentar otra naturaleza, como cuadrado o triangular. Buscaremos algunos:

Promedio cuadrado

Los primeros números en los que el promedio de sus divisores es un cuadrado son;

N	FACTORES PRIMOS	PROMEDIO CUADRADO
1		1
7	[7,1]	4
17	[17,1]	9
22	[2,1][11,1]	9
30	[2,1][3,1][5,1]	9
31	[31,1]	16
71	[71,1]	36
94	[2,1][47,1]	36
97	[97,1]	49
115	[5,1][23,1]	36
119	[7,1][17,1]	36
127	[127,1]	64
138	[2,1][3,1][23,1]	36
154	[2,1][7,1][11,1]	36
164	[2,2][41,1]	49
165	[3,1][5,1][11,1]	36
199	[199,1]	100
210	[2,1][3,1][5,1][7,1]	36
214	[2,1][107,1]	81
217	[7,1][31,1]	64

Respecto a su descomposición, observamos que figuran primos, semiprimos, no libres de cuadrados y otros.

El caso de los primos está publicado y existe una expresión para ellos. Los primeros son estos:

7, 17, 31, 71, 97, 127, 199, 241, 337, 449, 577, 647, 881, 967, 1151, 1249, 1567,…
(https://oeis.org/A066436)

Son los primos de la forma $2n^2-1$, como fácilmente se comprueba:

SIGMA(p)/TAU(p)=(1+p)/2=n^2, luego p=$2n^2-1$.

En efecto, todos los términos, al sumarles una unidad y dividir entre 2 resultará un cuadrado.

Promedio triangular

Como es un caso muy similar al anterior, omitiremos algunos pasos. Los primeros términos de la sucesión son:

1, 5, 6, 11, 14, 15, 19, 27, 29, 38, 41, 54, 56, 65, 68, 71, 78, 89, 91, 92, 94, 96, 109, 115, 118, 119, 128, 131, 132, 138, 140, 145, 154, 165, …

Y los primos contenidos en la sucesión:
5, 11, 19, 29, 41, 71, 89, 109, 131, 181, 239, 271, 379, 419, 461, 599, 701, 811, 929, 991, 1259, 1481, 1559, 1721, 1979,…(https://oeis.org/A002327)

Dejamos com ejercicio comprobar que todos tienen la forma $\mathbf{n^2-n-1}$. Por ejemplo: $11=4^2-4-1$, $599=25^2-25-1$.

Promedio oblongo

En este caso nos dedicaremos tan solo a los números primos cuyo promedio de divisores tenga la forma n(n-1), que es un número oblongo.

Los primeros en cumplir esta condición son:

3, 11, 23, 59, 83, 179, 263, 311, 419, 479, 683, 839, 1103, 1511, 2111, 2243, 2663, 2963, 3119
También están publicados, pero con otras definiciones, en https://oeis.org/A098828.

En realidad, existen diversas expresiones que los identifican, además de ser primos aritméticos con promedio de divisores oblongo. Estudiamos alguna:
SIGMA(p)/TAU(p)=(1+p)/2=n(n-1), luego **$p=2n^2-2n-1$**

Esta condición los identifica de forma algebraica. Por ejemplo, 839= $=2*21^2-2*21-1$.

Si la escribimos como p=2n(n-1)-3, observaremos que el primer sumando es múltiplo de 4, con lo que todos los términos de la sucesión será primos del tipo 4k+3.

La condición que figura en A098828, como la diferencia **$p=3x^2-y^2$**, siendo x e y consecutivos, resulta de inmediato:
$2n^2-2n-1=3n^2-(k+1)^2$

Por ejemplo, $419=3*15^2-16^2$

Otros tipos

Números de Fibonacci

Estos son los primeros números cuyo promedio de divisores pertenece a la sucesión de Fibonacci:

1, 3, 5, 6, 21, 41, 45, 65, 67, 68, 78, 96, 109, 382, 497, 517, 527, 658, 682, 705, 759, 805, 930, 966, 1155, 1557, 1973, 3211, 3653 (https://oeis.org/A272440)

Entre ellos se encuentran términos de esa sucesión: 1, 3, 5, 21.

Cubos

Existen muchos ejemplos de promedios cúbicos:

N	Factores	Media cúbica
1		1
21	[3,1][7,1]	8
53	[53,1]	27
85	[5,1][17,1]	27
102	[2,1][3,1][17,1]	27
110	[2,1][5,1][11,1]	27
127	[127,1]	64
217	[7,1][31,1]	64
431	[431,1]	216
749	[7,1][107,1]	216
781	[11,1][71,1]	216
799	[17,1][47,1]	216
994	[2,1][7,1][71,1]	216
1034	[2,1][11,1][47,1]	216
1054	[2,1][17,1][31,1]	216
1065	[3,1][5,1][71,1]	216
1113	[3,1][7,1][53,1]	216
1172	[2,2][293,1]	343
1173	[3,1][17,1][23,1]	216
1261	[13,1][97,1]	343
1265	[5,1][11,1][23,1]	216

Curiosamente, en los primeros ejemplos no figura el cubo de 5, 125. Ignoramos la razón.

Destaca el número 9261, cubo de 21, cuyo promedio, 1000, es también un cubo..

CARÁCTER ARITMÉTICO COMPARTIDO

Finalizamos el estudio de los números aritméticos usuales buscando aquellos en los que su doble, cuadrado, o cubo o SIGMA también son aritméticos. Someteremos en un Buscador a cada número a dos condiciones, la de ser aritmético y la de que también lo sea otro número derivado de él. Resumimos algunos resultados:

Número y su doble

Existen muchos números aritméticos cuyo doble lo es también. La mayoría son impares libres de cuadrados, que ya sabemos que son todos aritméticos, pero existen ejemplos de aritméticos pares. Los primeros ejemplos de ambos casos son:

N	FACTORES(N)	2N	FACTORES(2N)
3	[3,1]	6	[2,1][3,1]
7	[7,1]	14	[2,1][7,1]
11	[11,1]	22	[2,1][11,1]
15	[3,1][5,1]	30	[2,1][3,1][5,1]
19	[19,1]	38	[2,1][19,1]
21	[3,1][7,1]	42	[2,1][3,1][7,1]
22	[2,1][11,1]	44	[2,2][11,1]
23	[23,1]	46	[2,1][23,1]
27	[3,3]	54	[2,1][3,3]
30	[2,1][3,1][5,1]	60	[2,2][3,1][5,1]
31	[31,1]	62	[2,1][31,1]
33	[3,1][11,1]	66	[2,1][3,1][11,1]
35	[5,1][7,1]	70	[2,1][5,1][7,1]
39	[3,1][13,1]	78	[2,1][3,1][13,1]
43	[43,1]	86	[2,1][43,1]
46	[2,1][23,1]	92	[2,2][23,1]
47	[47,1]	94	[2,1][47,1]
51	[3,1][17,1]	102	[2,1][3,1][17,1]

Son todos impares libres de cuadrados salvo el 30 y el 46. El primer caso está claro:

Caso 1: N es impar

En ese caso, 2N será el producto de dos coprimos, 2 y N, con lo que se dará:

SIGMA(2N)=SIGMA(2)*SIGMA(N)=3*SIGMA(N)
TAU(2N)=TAU(2)*TAU(N)=2*TAU(N)
SIGMA(2N)/TAU(2N)=3*K/2, luego K, cociente entre SIGMA(n) Y TAU(N), ha de ser par.
En efecto, en los primeros ejemplos impares se cumple:

N	SIGMA(N)	TAU(N)	SIGMA(N)/TAU(N)
3	4	2	2
7	8	2	4
11	12	2	6
15	24	4	6
19	20	2	10
21	32	4	8
23	24	2	12
27	40	4	10
31	32	2	16
33	48	4	12
35	48	4	12
39	56	4	14
43	44	2	22
47	48	2	24
51	72	4	18
55	72	4	18
57	80	4	20
59	60	2	30

Todos los cocientes son pares.

Caso 2: N es par

Este caso es más complicado, y han de encajar algunos cocientes enteros.

En ese caso, $N=2^{p}*M$, $2N=2^{p+1}*M$

$SIGMA(N)=SIGMA(2^{p})*SIGMA(M)=(2^{p+1}-1)*S$

$TAU(N)=TAU(2^{p})*TAU(M)=(1+p)*T$

$SIGMA(2N)=SIGMA(2^{p+1})*SIGMA(M)=(2^{p+2}-1)*S$

$TAU(2N)=TAU(2^{p+1})*TAU(M)=(2+p)*T$

Por ejemplo, en el 46:

46=2*23, SIGMA(46)=3*24=72, TAU(46)=2*2=4, y es aritmético porque 72/4 es entero.

Vemos su doble:
$92=2^2*23$, SIGMA(92)=7*24=168, TAU(92)=3*2=6, Y 168/6 es entero porque 6 divide a SIGMA(23), lo que es algo casual.

Número y su cuadrado

Si un número es aritmético, su cuadrado no tiene por qué serlo, porque la propiedad multiplicativa solo se aplica entre números primos entre sí. No obstante, son bastantes los casos que aparecen. Son estos:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 91, 97, 103, 109, 127, 133, 139, 151, 157, 163, 181, 193, 199, 211, 217, 223, 229, 241, 247, 259, 271, 277, 283, 301, 307, 313, 331, 337, 349, 367, 373, 379, 397, 403, 409, 421

Todos están incluidos en la sucesión https://oeis.org/A107925, pero en ella figuran números que no son aritméticos, aunque sí impares, como 121. Llama la atención que todos los que hemos descubierto son impares libres de cuadrados.

Número y su cubo

También existen casos en los que tanto N como su cubo son aritméticos. Con estas condiciones sí aparecen números pares. Los primeros términos son:

3, 5, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 55, 56, 57, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 94, 95

Anteriormente hemos publicado los cubos que son aritméticos, y en esta nueva sucesión faltan algunos como 13824, que es aritmético, y el cubo de 24, pero su base 24 no lo es, y por eso no figura en esta.

Elegimos un número par como ejemplo, el 42.

Los divisores del 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42, con lo que su promedio es

(1+2+3+6+7+14+21+42)/8=96/8=12, entero.

Su cubo también es aritmético, pues SIGMA(42^3)/TAU(42^3)=240000/64=3750, luego es aritmético.

Un número y su sigma

Terminamos estos ejemplos con aquellos números aritméticos cuya suma de divisores es también aritmética:

5, 13, 19, 20, 29, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 49, 53, 59, 60, 61, 62, 67, 68, 69, 77, 78, 86, 92, 101, 109, 113, 116, 123, 131, 134, 137, 139, 143, 149, 157, 163, 164, 167, 168, 169, 173, 181, 183, 197, 204, 211, 212, 215,…

Aquí se dan todos los casos de paridad entre N y SIGMA(N).

ARITMÉTICOS DE ORDEN SUPERIOR

Podíamos preguntarnos si existirán aritméticos con la media cuadrática, es decir si la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los divisores es entera. Bastará un ligero retoque en la función *esaritmetico*, sustituyendo SIGMA por SIGMA_2, (o los divisores por sus cuadrados) que suma los cuadrados de los divisores, dividiendo entre TAU, y verificando si la raíz cuadrada del cociente es entera.

Con estas condiciones resultan estos primeros ejemplos:

N	Media cuadrática divisores
1	1
7	5
41	29
239	169
287	145
1673	845
3055	1105
6665	2405
9545	3445
9799	4901
9855	2665

Los valores de N están publicados en https://oeis.org/A140480 y se les llama RMS numbers.

A140480 RMS numbers: numbers n such that root mean square of divisors of n is an integer.

1, 7, 41, 239, 287, 1673, 3055, 6665, 9545, 9799, 9855, 21385, 26095, 34697, 46655, 66815, 68593, 68985, 125255, 155287, 182665, 242879, 273265, 380511, 391345, 404055, 421655, 627215, 730145, 814463, 823537, 876785, 1069895, 1087009, 1166399, 1204281, 1256489

El carácter multiplicativo de las funciones que intervienen en la definición hace que si A y B pertenecen al listado anterior y son coprimos, A*B también pertenezca (comentario de Andrew Weimholt en OEIs). Por ejemplo 7 y 239 son coprimos, por lo que su producto 1673 también figura en el listado.

Un caso especial es el de los primos que figuran en la sucesión. Porque en ellos SIGMA(p)/TAU(p)=$(1+p^2)/2$ será un cuadrado, y su raíz un número de Pell. Estos números han sido tratados por el autor en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2014/02/numeros-de-pell.html

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/12/los-numeros-de-pell.html

Podemos plantear $1+p^2=2r^2$, con lo obtendríamos una ecuación de Pell $p^2-2r^2=-1$

Acudimos a nuestra herramienta para esta ecuación (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell) y quedan las primeras soluciones:

P	R	
1	1	+1 ó -1
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1
1393	985	-1
3363	2378	1
8119	5741	-1
19601	13860	1
47321	33461	-1
114243	80782	1

De ellas nos quedamos con las que se corresponden con -1 y con un valor de P primo:

P	R	
7	5	-1
41	29	-1
239	169	-1

Resultan los tres números primos que figuraban en el listado general.

Los valores de R, tal como se esperaba, son números de Pell, pues pertenecen a la sucesión 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832,…(ver enlaces anteriores)

Por último, planteamos un uso del Buscador de Naturales para rebajar un poco la dificultad del planteo anterior:

Núm.	Solución	Detalles
1	7	5
2	41	29
3	239	169
4		
5		
6		
7		

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1000

Con estas propiedades:

PRIMO
ES ENTERO(RAIZ((1+N^2)/2))
EVALUAR RAIZ((1+N^2)/2)

Fijamos las condiciones de que el número sea primo y que la raíz cuadrada de $(1+p^2)/2$ sea entera, para después pedir evaluar esa raíz.

De esa forma hemos reproducido los resultados derivados de la ecuación de Pell.

Podríamos seguir con aritméticos de orden 3 o 4, pero no parecen presentar detalles interesantes.

MEDIAS ARMÓNICA Y CONTRAARMÓNICA

Hemos estudiado ya la media aritmética de los divisores y la cuadrática. La geométrica tiene menos interés y no la hemos tratado. Tocaría ahora el turno a la media armónica y, después, a la contraarmónica.

MEDIA ARMÓNICA

El estudio de la media armónica nos lleva, en primer lugar, a los números de Ore, ya tratados por el autor en https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/11/numeros-de-ore.html

Un número entero positivo N se llama *de Ore* o *armónico* cuando la media armónica de todos sus divisores es un número entero. Por ejemplo, es armónico 140, porque sus 12 divisores son 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70 y 140 y por tanto su media armónica es

$$m_a = \frac{12}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{140}}=5$$

Parece muy pesado este cálculo para números grandes, pero existe una simplificación. Para ello basta observar que cada divisor ***d*** posee un complementario ***d'*** tales que ***d.d'=N***. Este hecho permite ir sustituyendo cada cociente del tipo 1/d por d'/N, con lo que todos los denominadores resultará iguales a N y se podrán sumar los cocientes con facilidad:

$$m_a = \frac{12}{\frac{140}{140}+\frac{70}{140}+\frac{35}{140}+\frac{28}{140}+\frac{20}{140}+\frac{14}{140}+\frac{10}{140}+\frac{7}{140}+\frac{5}{140}+\frac{4}{140}+\frac{2}{140}+\frac{1}{140}}=\frac{140.12}{336}=5$$

Este procedimiento es fácilmente generalizable: basta multiplicar N por su número de divisores y dividir después entre la suma de los mismos:

$$m_a = \frac{N.d(N)}{\sigma(N)}$$

Representamos el número de divisores mediante d(N) y su suma por σ(N), o bien como TAU y SIGMA respectivamente. Basta observar la fórmula para poder interpretarla de otra manera: La media armónica de los divisores equivale al cociente entre el número y la media aritmética de dichos divisores. Podríamos afirmar entonces que la media aritmética de los divisores es otro divisor. Por eso aparecieron números de Ore cuando estudiamos ese caso en los aritméticos.

Este cambio nos permite calcular la media armónica mediante un sencillo algoritmo: Se encuentran los divisores y se van contando y sumando hasta completar el valor de d(N) y σ(N). Si esta media es entera, el número N será armónico.

Incluimos un listado en Basic que lo logra:

Sub armonico
Input n
a=0 'Inicia el contador de divisores
b=0 'Inicia el sumador de divisores

for j=2 to n/2+1
if esmultiplo(n,j) then
a=a+1 'Se ha encontrado un divisor: se aumenta el contador en 1
b=b+j 'Se aumenta el sumador con el valor del divisor
end if
next j

a=a+2 'Se añade 2 para contar también 1 y N
b=b+n+1 'Se añaden al sumador 1 y N
m=i*a/b 'Media armónica
if m=int(m) then msgbox("Es armónico") else msgbox("No es armónico")
end sub

La siguiente tabla se ha obtenido con la repetición de este algoritmo:

N	D	S	M
6	4	12	2
28	6	56	3
140	12	336	5
270	16	720	6
496	10	992	5
672	24	2016	8
1638	24	4368	9

También se logra la sucesión de números de Ore con el Buscador de naturales:

Solución	Detalles
1	1
6	2
28	3
140	5
270	6
496	5
672	8
1638	9
2970	11

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	5000

Con estas propiedades:

ES ENTERO(N*NUMDIV(N)/SUMDIV(N))

EVALUAR N*NUMDIV(N)/SUMDIV(N)

En la primera condición reproducimos la fórmula obtenida más arriba, y en la segunda publicamos el resultado entero en la segunda columna.

Los primeros números de Ore son: 1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, 1638, 2970, 6200, 8128, 8190,…(https://oeis.org/A001599)

El listado incluye los números perfectos 6, 28, 496, 8128,…y otros más que no lo son.

Podemos entender su presencia con los números perfectos conocidos, que siguen la fórmula $2^{n-1}(2^n-1)$ con el paréntesis primo. Entonces, ese factor tendrá dos divisores, y por la propiedad multiplicativa, la función TAU del número perfecto será par. Aplicamos la fórmula que vimos anteriormente

$$m_a = \frac{N.d(N)}{\sigma(N)}$$

Resulta que SIGMA(N)/N=2 en los números perfectos, con lo que la fórmula queda como *d(N)/2*, y al ser par el numerador, será entera, y el número será de Ore.

Estos números no han de ser aritméticos, porque la media aritmética de los divisores no ha de ser entera. Si lo es, tendremos unos números que pertenecerán a las dos clases, los aritméticos y los de Ore. Los primeros son

1, 6, 140, 270, 672, 1638, 2970, 6200, 8190, 18600, 18620, 27846, 30240, 32760, 55860, 105664, 117800, 167400,…(https://oeis.org/A007340)

MEDIA CONTRAARMÓNICA

Podemos considerar la media contrarmónica de los divisores de un número. Ya se estudió aquí el caso particular de cuando sólo intervienen dos números en la media

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/01/media-contraarmonica-entera.html)

En su aplicación a los divisores de un número, esta media se puede calcular dividiendo la función SIGMA_2(N) entre SIGMA_1(N), es decir, la suma de los cuadrados de los divisores entre la suma de los mismos.

Este cociente no tiene por qué ser entero. Si lo es, el número N se llama *antiarmónico*, porque esta media también recibe el nombre de "antiarmónica".

Si se cuenta con la familia de sigmas según el exponente al que elevamos los divisores, no es difícil encontrar el cociente y comprobar si es entero. Si no se desea usar estas funciones, y también para traducir la búsqueda a otro lenguaje de programación, proponemos esta función:

```
Function esantiaritmetico(n) As Boolean
Dim i, s1, s2, a

s1 = n 'Suma de divisores
s2 = n ^ 2 'Suma de cuadrados de divisores
For i = 1 To n / 2
If n / i = n \ i Then s1 = s1 + i: s2 = s2 + i ^ 2
Next i
a = s2 / s1
If a = Int(a) Then esantiaritmetico = True Else esantiaritmetico = False
End Function
```

Por cualquiera de estos procedimientos, se encuenran rápidamente los primeros números antiarmónicos:

N	SIGMA_2(N)/SIGMA_1(N)
1	1
4	3
9	7
16	11
20	13
25	21
36	21
49	43
50	35
64	43
81	61
100	63
117	85
121	111
144	77
169	157
180	91
196	129
200	119

En PARI el planteo es mucho más simple:

```
is(n)=sigma(n,2)%sigma(n,1)==0
for(i=1,10^3,if(is(i),print1(i,", ")))
```

1, 4, 9, 16, 20, 25, 36, 49, 50, 64, 81, 100, 117, 121, 144, 169, 180, 196, 200, 225, 242, 256, 289, 324, 325, 361, 400, 441, 450, 468, 484, 500, 529, 576, 578, 605, 625, 650, 676, 729, 784, 800, 841, 900, 961, 968, 980,

Llama la atención el hecho de que están presentes todos los cuadrados. Profundizamos algo más con la ayuda de las fórmulas de las sigmas.

$$\sigma_k(N) = \prod \frac{p_i^{(e_i+1)k} - 1}{p_i^{k} - 1}$$

En este caso deberemos dividir la sigma de segundo orden entre la de primero. Nos quedaría:

$$m = \prod \frac{p_i^{2(e_i+1)} - 1}{p_i^{2} - 1} \frac{p_i^{1} - 1}{p_i^{(e_i+1)} - 1}$$

Simplificando:

$$m = \prod \frac{p_i^{(e_i+1)} + 1}{p_i + 1}$$

Por ejemplo, la media contraarmónica de 200 aparece en la tabla como 119. Lo podemos comprobar con esta fórmula:

$M(200)=M(2^3*5^2)=(2^4+1)/(2+1)(5^3+1)/(5+1)=17/3*126/6$

M(200)=17*126/18=119

Es elemental el hecho de que la suma de potencias impares es divisible entre la suma de las bases, luego la media será entera si los exponentes $\mathbf{e_i}$ son pares, lo que demuestra que todos los cuadrados han de figurar en el listado.

Una consecuencia de esto es la de que si un número pertenece a ella y los multiplicamos por un cuadrado primo con él, por la propiedad multiplicativa, el resultado pertenecerá a la sucesión (Charles R Greathouse IV, Aug 02 2013)

Por ejemplo, 20 pertenece a la sucesión y lo podemos multiplicar por 7^2. Quedaría:

$M(20*7^2)=M(2^2*5*7^2)=(2^3+1)/(2+1)*(5^2+1)/(5+1)*(7^3+1)/(7+1)=9/3*26/6*344/8=559$, luego el producto es antiarmónico.

Esta propiedad garantiza la infinitud de los números antiarmónicos.

Si en estos productos eliminamos los cuadrados, nos quedarán los llamados antiarmónicos primitivos, que están publicados en https://oeis.org/A228023

1, 20, 50, 117, 200, 242, 325, 500, 578, 605, 650, 800, 968, 1025, 1058, 1280, 1445, 1476, 1682, 1700, 2312, 2340, 2600, 2645, 3200, 3362, 3757, 3872, 4205, 4232,…

Todos los ejemplos encontrados poseen una parte cuadrada mayor que 1, salvo el caso del mismo 1. Hemos buscado hasta 10^7 términos libres de cuadrados, sin encontrar ninguno, salvo el 1. Queda como conjetura el hecho de que no se encontrará ninguno.

ARITMÉTICOS UNITARIOS

Un número natural **d** es un divisor unitario de otro número natural **N** cuando **d** y **N/d** son coprimos. Por ejemplo, 33 es divisor unitario de 66, ya que 33 es coprimo con 66/33=2. Es evidente que N/d también es unitario. **Los divisores unitarios aparecen por parejas.**

El número de divisores unitarios de N es 2^K, siendo K=omega(N), es decir, el número de factores primos diferentes que posee N. La razón es que cada divisor unitario ha de presentar la misma multiplicidad en sus factores primos que N, para garantizar que es coprimo con N/d. Así, coincidirán con todos los subconjuntos formados con los factores primos **distintos** que posea N.

Damos un ejemplo:

Los divisores unitarios de 84 son 1, 3, 4, 7, 12, 21, 28 y 84, en total $8=2^3$.

La suma de todos los divisores unitarios de un número N es una clase especial de la familia de las **funciones sigma**. Se la suele distinguir con un asterisco: σ* y también recibe el nombre de *usigma*.

La fórmula para calcular usigma es:

$$\sigma^*(N) = \prod (1 + p_i{}^{k_i})$$

En ella p_i son los factores primos y k_i sus multiplicidades. La razón ya la vimos, y es que hay que tomar todos los factores primos con su multiplicidad.

Así, σ*(84)=(1+3)(1+2^2)(1+7)=4*5*8=160=1+3+4+7+12+21+28+84

Aritméticos unitarios

Buscaremos ahora los aritméticos unitarios, que son aquellos en los que USIGMA(N)/UTAU(N) es un número entero. Por no repetir lo escrito en las entradas enlazadas, lo haremos con una técnica sencilla, sin basarnos en teorías previas.

```
Function u_aritmetico(n) As Boolean
Dim t, s, i, c

t = 0 'variable para UTAU
s = 0 'variable para USIGMA
For i = 1 To n
If n / i = n \ i Then 'se trata de un divisor
If mcd(i, n / i) = 1 Then ‘ han de ser coprimos i y n/i
s = s + i 'incrementa USIGMA
```

t = t + 1 'incrementa UTAU
End If
End If
Next i
c = s / t ' cociente entre USIGMA y UTAU
If c = Int(c) Then u_aritmetico = True Else u_aritmetico = False
End Function

Por ejemplo, si N = 660 sus divisores unitarios serán 1, 3, 4, 5, 11, 12, 15, 20, 33, 44, 55, 60, 132, 165, 220 y 660. Su suma es 1440, que al dividirla entre 16, que es el número de divisores, nos da un promedio entero de 90.

Los aritméticos unitarios están publicados en OEIS (https://oeis.org/A103826)

A103826 Unitary arithmetic numbers (those for which the arithmetic mean of the unitary divisors is an integer).

1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93,…

Para nuestro estudio de estos números distinguiremos dos casos:

(1) N es impar

El promedio de sus divisores unitarios será un entero, luego **serán todos aritméticos**.

El promedio provendrá de dividir la función usigma(N) entre 2^omega(N). La primera contendrá k paréntesis pares, según la fórmula explicada anteriormente, y cada uno estará dividido entre 2, dando cocientes enteros.

El listado de los primeros impares nos descubre varios casos:

1	1
3	2
5	3
7	4
9	5
11	6
13	7
15	6
17	9
19	10
21	8
23	12
25	13
27	14
29	15

Los primos **p** y potencias de primos $\mathbf{p^k}$ sólo tendrán dos factores unitarios, 1 y p^k, ambos impares con suma par luego la media de ambos será entera y ellos aritméticos unitarios.

Los demás impares también presentarán media entera por el razonamiento de párrafos anteriores. Por ejemplo, el 15. Sus factores unitarios son 1, 3, 5, 15, usigma(15)=24 2^omega(15)=2^2=4, luego el cociente valdrá 6, entero.

Tomemos un impar más complejo, el 315=3^2*7*5. Sus factores unitarios serán 1, 5, 7, 9, 35, 45, 63, 315, y usigma(315)=480. En lugar de suma directa podemos usar la fórmula:

Usigma(315)=(1+5)*(1+7)*(1+3^2)=6*8*10=480.

Tal como se explicó, todos los paréntesis son pares, luego al dividirlos entre 2^3, resulta un cociente de 60

(2) N es par,

En este caso el promedio de los divisores unitarios puede ser entero o no. Estos son los primeros que son aritméticos unitarios:

N par	USIGMA(N)/2ÔMEGA(N)
6	3
12	5
14	6
22	9
24	9
28	10
30	9
38	15
42	12
44	15
46	18
48	17
54	21
56	18
60	15
62	24

En uno de los comentarios de OEIS se afirma que estos números son doble de números que no pueden ser suma de dos cuadrados. Esto quiere decir que poseerán factores primos del tipo 4k+3 elevados a exponente impar. Lo comprobamos con los primeros:

N	FACTORES(N)
6	[2,1][3,1]
12	[2,2][3,1]
14	[2,1][7,1]
22	[2,1][11,1]
24	[2,3][3,1]
28	[2,2][7,1]
30	[2,1][3,1][5,1]
38	[2,1][19,1]
42	[2,1][3,1][7,1]
44	[2,2][11,1]
46	[2,1][23,1]
48	[2,4][3,1]
54	[2,1][3,3]
56	[2,3][7,1]
60	[2,2][3,1][5,1]

Todos los factores primos son 2 o del tipo 4k+3, estos con exponente impar.

Caso de la media prima

En algunos casos la media de divisores unitarios **es un número primo** Estos son los números con promedio primo de sus divisores unitarios:

3, 5, 6, 9, 12, 13, 25, 37, 48, 61, 73, 81, 121, 157, 193, 277, 313, 361, 397, 421, 457, 541, 613, 625, 661, 673, 733, 757, 768, 841, 877, 997, 1093, 1153, 1201, 1213, 1237, 1321, 1381, 1453, 1621, 1657, 1753, 1873, 1933, 1993, 2017, 2137, 2341, 2401, 2473…(La hemos publicado en https://oeis.org/A192577)

Todos son impares salvo 6, 12, 48,…Los estudiamos por separado:

(1) N es impar

En este caso, N ha de ser primo o potencia par de un primo.

La razón es la siguiente: sabemos que la expresión de usigma es

$$usigma(N) = \left(1 + {p_1}^{k_1}\right) * \left(1 + {p_2}^{k_2}\right) * \dots * \left(1 + {p_h}^{k_h}\right) \quad (1)$$

Si ahora dividimos entre 2^h, podemos asignar un 2 a cada factor, quedando:

$$usigma(N)/2^h = \frac{\left(1+{p_1}^{k_1}\right)}{2} * \frac{\left(1+{p_2}^{k_2}\right)}{2} * \dots * \frac{\left(1+{p_h}^{k_h}\right)}{2} \quad (2)$$

Todos los cocientes serán mayores que 1, porque los numeradores serán números pares iguales o mayores que 4, pues los primos serán distintos de 2, al ser N impar.

Pero así no puede resultarnos un número primo, ya que lo que obtenemos es una descomposición en varios factores, luego h ha de ser 1, es decir, que N ha de ser primo o potencia par de un primo distinto de 2, porque si fuera impar, la media no sería entera (lo razonaremos más adelante)

Los términos primos 3, 5, 13, 37, 61, 73, 157, 193 (http://oeis.org/A005383) son aquellos en los que (p+1)/2 también es primo.

Las potencias de primos han de ser pares, para que el cociente entre 2 sea entero. La expresión de la media de los divisores será:

$$m(p^k) = \frac{1 + p^k}{2}$$

La razón de que el exponente deba ser par es:

Si p es impar y k también, podemos plantear:

El cociente $(1+p^k)/(1+p)$ será entero si k es impar, según el álgebra elemental, luego $(1+p^k)$ será múltiplo de 1+p. Por otra parte, 1+p es par, luego $(1+p^k)/2$ será múltiplo de (1+p)/2, y por tanto compuesto. Así que k no podrá ser impar.

(Demostración adaptada de https://oeis.org/A192618)

(2) N es par

Los primeros números pares que hemos encontrado en este caso son:

6, 12, 48, 768, 196608,…

¿Porqué hay tan pocos pares que produzcan un promedio de divisores unitarios que sea primo?

Lo razonamos:

Todo número par de **h** factores primos diferentes es de la forma

$$N = 2^a * p_1{}^{k_1} * p_2{}^{k_2} * \ldots * p_{h-1}{}^{k_{h-1}}$$

En ella p_i son números primos impares y k_i sus multiplicidades.

Por tanto

$$usigma(N) = (1 + 2^a) * \left(1 + p_1{}^{k_1}\right) * \left(1 + p_2{}^{k_2}\right) * \ldots * \left(1 + p_{h-1}{}^{k_{h-1}}\right) \quad (1)$$

El número de divisores unitarios sería 2^h, y para que la media sea un número entero, la expresión (1) ha de ser divisible entre 2^h. Pero si además deseamos que sea primo, la media ha de ser exactamente el primer factor $(1+2^a)$, que es el único que es impar y no va a desaparecer en el cociente entre 2^h. Por tanto, el resto de factores ha de desaparecer.

Un factor del tipo $(1+p^k)$ con p primo para simplificarse en el cociente ha de ser una potencia de 2, y el valor mínimo que consigue esto es $(1+3^1) = 4$. Por tanto, cada paréntesis de (1) ha de ser una potencia de 2 de al menos exponente 2. Resumiendo,

$Usigma(N) \geq (1+2^a)*4*4*4\ldots*4 = (1+2^a)*2^{2(h-1)}$ (2)

Para hallar el promedio de divisores unitarios dividimos entre 2^h y nos resulta:

M = Usigma(N)/ $2^h \geq (1+2^a)*2^{h-2}$

Y llegamos a un resultado interesante: Para que M sea primo, h debe valer 2 y por tanto $M=(1+2^a)$. Y más todavía: para que en (2) sea válida la igualdad p_1 ha de valer 3 y k_1 la unidad.

Sólo los números pares de la forma 2^a*3 podrán tener una media M prima. Además, dicha media será un número primo de Fermat.

Lo hemos comprobado con hoja de cálculo:

N	Factores	Media: primo de Fermat
6	[2,1][3,1]	3
12	[2,2][3,1]	5
48	[2,4][3,1]	17
768	[2,8][3,1]	257
196608	[2,16][3,1]	65537

Si recordamos que los números de Fermat son del tipo

$$2^{2^n} + 1$$

Y que no todos son primos, obtendremos la solución anticipada:

$6=2*3$, $12=2^2*3$, $48=2^4*3$, $768=2^8*3$, $196608=2^{16}*3$,…

Se conjetura que sólo existen estos primos de Fermat, por lo que podemos pensar también que los únicos números pares que son aritméticos unitarios son

6, 12, 48, 768, 196608

En https://oeis.org/A085866 se hace referencia a una propiedad de estos números, y es que cada uno es igual al anterior multiplicado por el valor de la función PHI de Euler en él. Vemos esta generación en la tabla siguiente:

A(n)	PHI(A(N))	A(N+1)		
6	2	12		
12	4	48		
48	16	768		
768	256	196608		No es primo
196608	65536	12884901888		4294967297

Esta recurrencia no nos sirve para encontrar otros aritméticos con media prima de divisores unitarios, ya que en el siguiente, 12884901888 tiene media 4294967297, que no es primo.

Caso en el que la media es divisor

La media de N que estamos estudiando con divisores unitarios puede ser también divisor de N (no necesariamente unitario). Los primeros ejemplos son los siguientes:

N	Media	Cociente entero
1	1	1
6	3	2
45	15	3
60	15	4
420	60	7
630	90	7
1512	252	6
3780	420	9
5460	420	13
7560	756	10
8190	630	13
9100	910	10

Por ejemplo en el número 45 los divisores unitarios son 1, 5, 9, 45, con lo que usigma(45)=60 (también, $(1+3^2)(1+5)=60$)

La media de estos divisores será 60/4=15, que es divisor de 45

¿Podrá ser la media un divisor unitario? La respuesta es afirmativa. Estos son los primeros ejemplos:

N	Media	Cociente	Máximo común divisor
1	1	1	1
6	3	2	1
60	15	4	1
420	60	7	1
630	90	7	1
5460	420	13	1
8190	630	13	1

En ellos comprobamos que la media M es divisor unitario, pues el máximo común divisor con el cociente N/M es 1. Están publicados en https://oeis.org/A353039.

LOS NÚMEROS *AROLMAR*

Estos números creados por el autor tienen gran similitud con los números aritméticos. En estos se trabajaba con todos los divisores, y en los *arolmar*, sólo con primos.

HISTORIA Y GENERACIÓN

Historia

Con fecha 23/2/2011 se publicó en el blog "Números y hoja de cálculo" una pequeña entrada titulada "Primos por todas partes"

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/primos-por-todas-partes.html)

En ella se presentaba la sucesión

21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195,…

Son números compuestos que tienen todos sus factores primos distintos (son números libres de cuadrados) y el promedio de esos factores es un número primo.

Por ejemplo 145=5*29, y el promedio de ambos es (5+29)/2= 17, que es primo.

195=3*5*13, y el promedio es (3+5+13)/3 = 21/3 = 7, también primo.

Posteriormente se publicó esta sucesión en OEIS

(https://oeis.org/A187073),

y Rafael Parra Machío les dio el nombre de números ***arolmar,*** dedicándoles un estudio publicado en

http://hojamat.es/parra/arolmar.pdf

Dado el interés del tema, ampliaremos la búsqueda de esos números y estudiaremos algunos detalles más sobre esta sucesión y otras afines. Nos moveremos en un nivel de profundidad de tipo medio, que es el que domina el autor, sin pasar a cuestiones de criptosistemas, muy bien explicados en el documento de Rafael Parra. Nuestro objetivo será el de ampliar las formas de generarlos, estudiar alguna subsucesión y buscar números con propiedades similares.

Generación de la sucesión

Para futuras comparaciones, a esta sucesión le daremos el nombre global de **ARM**.

Con el Buscador de Naturales

En el documento

http://www.hojamat.es/publicaciones/Hojanum3.pdf publicamos la forma de encontrar estos números con nuestro Buscador de números naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global)

Basta leer las cuatro líneas de condiciones necesarias para entender la gran potencia de este buscador:

es primo(logentero(n)/bigomega(n))
evaluar logentero(n)/bigomega(n)
libredecuadrados
no primo

Si lo descargas y escribes las cuatro condiciones en la zona dedicada a ellas obtendrás los primeros términos de la sucesión:

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	21	5
2	33	7
3	57	11
4	69	13
5	85	11
6	93	17
7	105	5
8	129	23
9	133	13
10	145	17
11	177	31
12	195	7
13		

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

ES PRIMO(LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N))
EVALUAR LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N)
LIBREDECUADRADOS
NO PRIMO

En la primera columna figuran los términos y en la segunda el número primo promedio de los factores primos de los mismos.

La primera condición exige que el promedio de factores primos sea también primo. La segunda lo presenta. La tercera exige que esté libre de cuadrados, y la cuarta que no sea primo.

Con el Basic de las hojas de cálculo

Al ser el Buscador una herramienta no contrastada, puede ser bueno comprobar los resultados con otros instrumentos. Solemos usar el Basic de las hojas de cálculo. Si tenemos definidas las funciones pertinentes, la búsqueda se reduce a un simple bucle FOR-NEXT

Necesitamos las funciones

PARTECUAD

Te devuelve la parte cuadrada de un número natural. Si esa parte vale 1, es que el número es libre de cuadrados. La tienes en

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre-solucion.html

Se puede encontrar escribiendo PARTECUAD en Google.

ESPRIMO

La puedes encontrar en nuestra hoja sobre conjeturas

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global

SOPF y F_OMEGA (o SOPFR Y BIGOMEGA, que en libres de cuadrados son equivalentes)

La primera suma los factores y la segunda los cuenta. Su cociente dará el promedio.

En la entrada http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/11/de-donde-vengo-3-sumamos-y-contamos.html damos algunas ideas sobre ellas.

Bucle

Con esas funciones y alguna otra podemos ya construir nuestro bucle de búsqueda:

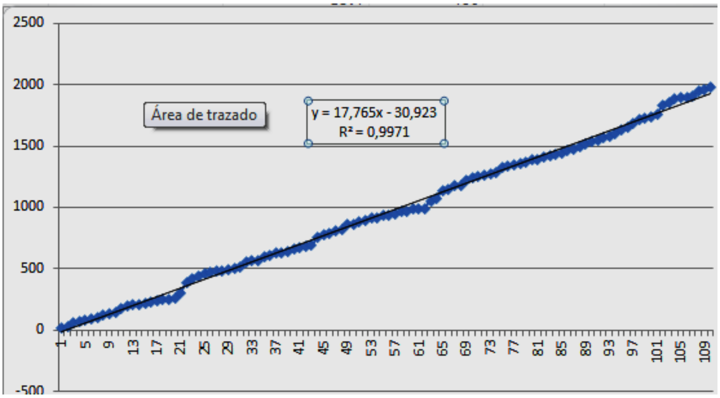
```
For i = 2 to 1000
If Not esprimo(i) And partecuad(i) = 1 Then
b = sopf(i) / f_omega(i)
If esentero(b) And esprimo(b) Then msgbox(i)
End If
Next i
```

Implementando un programa similar en una hoja de cálculo en la que los resultados aparecen bien ordenados, obtenemos los mismos resultados que con el Buscador.

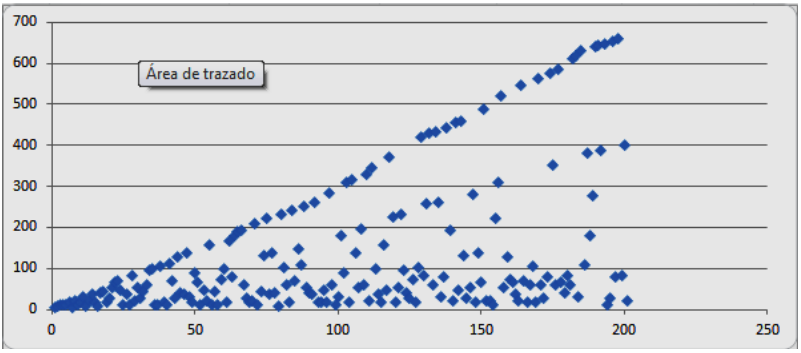
21	5
33	7
57	11
69	13
85	11
93	17
105	5
129	23
133	13
145	17
177	31
195	7
205	23
213	37
217	19

En la primera columna figuran los números ***arolmar*** y en la segunda la media (prima) de sus factores primos.

Existen infinitos números ***arolmar***, según veremos más adelante, siempre que se admita la conjetura de Goldbach. En el gráfico de los primeros de ellos (hasta una cota de 2000) se percibe una clara tendencia lineal, que en este intervalo presenta una pendiente aproximada de 17 con un ajuste de nivel 0,9971. Podemos esperar un número ***arolmar*** en cada incremento de 17.



Más incidencias presenta la distribución de los números primos que son promedio de sus factores:



En el gráfico distinguimos fácilmente varias líneas de tendencia ¿Adivinas la causa? Pues sí, depende del número de factores que intervengan en el promedio. La línea superior corresponden a los números ***arolmar*** que son semiprimos, la siguiente a los que tienen tres factores, y las de más abajo, que llegan a hacerse indistinguibles, a los números que poseen más factores aún. Como también veremos, este gráfico recorre todos los primeros números primos.

Código PARI

En la sucesión A187073 figura un código generador debido a Charles R Greathouse IV

isA187073(n)=my(f=factor(n)); #f[, 1]>1&vecmax(f[, 2])==1&denominator(f=sum(i=1, #f[, 1], f[i, 1])/#f[, 1])==1&isprime(f)

Como puede resultar incomprensible, por compacto, lo sustituiremos por otro más sencillo (y largo), pero que nos permitirá ir explicando las funciones que necesitamos:

freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)

sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }

averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}

{ for (n=4, 10^3, if(freesqrcomp(n), m=averg(n);if(m==truncate(m),if(isprime(m), print1(n, ", "))))))}

En él se van implementando las condiciones exigidas a los números buscados.

Carácter de número compuesto libre de cuadrados:

Basta definir esta función.

freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)

En ella exigimos que sea libre de cuadrados (***issquarefree***) y que no sea primo (***!isprime(n)***). El signo “!” representa la conectiva NO y && la conjunción Y. Si escribes a continuación “{print(freesqrcomp(30))}” la respuesta será 1, que significa VERDADERO, pues 30=2*3*5 es compuesto y libre de cuadrados. Ya tenemos el primer paso: identificar los números de este tipo.

Función SOPF

sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }

Esta parte es más difícil de entender. Esta función suma los factores primos de un número sin contar las repeticiones. En PARI la matriz (o vector) ***factor(n)*** contiene los factores primos en la primera columna y sus exponentes en la segunda. La variable ***s*** suma sólo los factores primos, pero no sus exponentes. Por eso se escribe ***s+=f[i, 1])***

Promedio de los factores primos

averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}

Se basa en la función anterior SOPF y en OMEGA, que cuenta los factores primos sin repetición. Por tanto, su cociente es el promedio de los factores primos.

Bucle de búsqueda

{ for (n=4, 10^3, if(freesqrcomp(n), m=averg(n);if(m==truncate(m),if(isprime(m), print1(n, ", "))))))}

Lo que queda es ya recorrer los números (en el ejemplo desde 4 hasta 1000) e imprimir aquellos cuyo promedio de factores primos es entero (***m==truncate(m)***) y primo (***isprime(m)***)

Aquí tienes la pantalla con el resultado:

```
%1 = (n)->issquarefree(n)&&!isprime(n)
%2 = (n)->local(f,s=0);f=factor(n);for(i=1,matsize(f)[1],s+=f[i,1]);return(s)
%3 = (n)->local(s);s=sopf(n)/omega(n);return(s)
21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195, 205, 213, 217, 231, 237, 2
49, 253, 265, 309, 393, 417, 445, 465, 469, 483, 489, 493, 505, 517, 553, 565, 5
73, 597, 609, 627, 633, 645, 663, 669, 685, 697, 753, 781, 793, 813, 817, 861, 8
65, 889, 897, 913, 915, 933, 935, 949, 969, 973, 985, 987, 993,
?
```

Hemos querido detenernos en esta generación en PARI porque usaremos más adelante códigos similares.

Por último, incluimos la función ESAROLMAR, que nos devuelve VERDADERO si su argumento es un número *arolmar*. Con ella se pueden emprender otras búsquedas y encontrar curiosidades.

Función ESAROLMAR

Con el Basic de las hojas de cálculo podría tener esta estructura:

Public Function esarolmar(n)
Dim es As Boolean
Dim b

es = False
If Not esprimo(n) And partecuad(n) = 1 Then
b = sopf(n) / f_omega(n)
If esentero(b) And esprimo(b) Then es = True
End If
esarolmar = es
End Function

La segunda línea exige que el número no sea primo (***Not esprimo(n)***)y que sí sea libre de cuadrados, o bien que su parte cuadrada sea igual a 1 (***partecuad(n) = 1***), que son las dos condiciones iniciales de la definición de número arolmar.

En la siguiente se calcula la media de los factores primos, dividiendo su suma (***sopf(n)***) entre su número (***f_omega(n)***) y, por último, se exige que el resultado sea entero y primo.

La versión con PARI necesita la definición progresiva de varias funciones:

freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)
sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }
averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}

esarolmar(n)={local(a=averg(n),s);s=freesqrcomp(n) &&a==truncate(a)&&isprime(a); return(s)}
{for(i=2,1000,if(esarolmar(i),print(i)))}

La última línea presenta todos los números arolmar hasta el 1000.

SUPERSUCESIONES DE LOS NÚMEROS AROLMAR

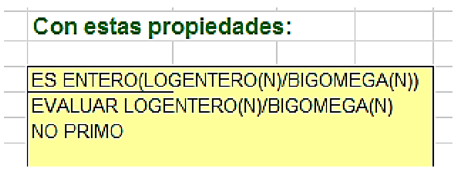
ARM-3: Media entera con repetición

Los números *arolmar* pertenecen trivialmente a la sucesión http://oeis.org/A078177, que está formada por los números compuestos tales que **la media de sus divisores primos es un entero**.

4, 8, 9, 15, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 35, 39, 42, 44, 49, 50, 51, 55, 57, 60, 64, 65, 68, 69, 77, 78,…

Es la sucesión "madre" de todas las que vamos a considerar en este documento, porque el que la media sea entera es la cuestión básica. Si no es entero, todo lo que hemos escrito hasta ahora sobra. Nos referiremos a ella como **ARM-3.**

La principal propiedad de estos números es la de que la función SOPFR da un valor que siempre es múltiplo de la función BIGOMEGA. Ambas funciones son las versiones de SOPF y OMEGA respectivamente para el caso en el que exista repetición de factores primos. A la primera, SOPFR, se le da también el nombre de logaritmo entero, y así la nombra nuestro Buscador de números, como vimos más arriba. Según eso, la generación con el Buscador se limitaría a lo siguiente:



Y obtendríamos como resultado ARM-3:

Núm.	Solución	Detalles
1	4	2
2	8	2
3	9	3
4	15	4
5	16	2
6	20	3
7	21	5
8	25	5
9	27	3
10	32	2
11	33	7
12	35	6
13	39	8
14	42	4

La segunda columna muestra que todas las medias de factores primos son enteras.

Los podemos generar en PARI mediante el código

sopfr(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]*f[i, 2]); s }

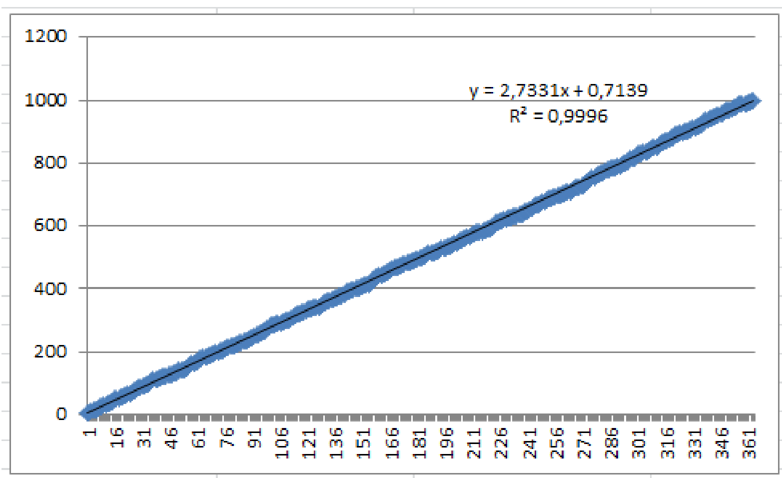
{forcomposite(i=4,200,m=sopfr(i)/bigomega(i);if(m== truncate(m),print1(i,", ")))}

Definimos SOPFR como la suma de divisores primos con repetición (por eso se multiplica por f[i, 2]) y bigomega como su cuenta. Dividimos y resulta la media, a la que exigimos que sea entera (m==truncate(m)).

El resultado es este, que coincide con el listado de **ARM-3**:

```
4, 8, 9, 15, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 35, 39, 42, 44, 49, 50, 51, 55, 57, 60,
 64, 65, 68, 69, 77, 78, 81, 85, 87, 91, 92, 93, 95, 105, 110, 111, 112, 114, 11
5, 116, 119, 121, 123, 125, 128, 129, 133, 140, 141, 143, 145, 155, 156, 159, 16
1, 164, 169, 170, 177, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 195, break>
```

Gráfico



Esta sucesión, como la ARM, presenta un crecimiento sensiblemente lineal, apareciendo en promedio un término cada 2,73 posibles. Una densidad seis veces mayor que la de los *arolmar*.

ARM-2 Media entera sin repetición

Un paso más sería exigir que los números fueran libres de cuadrados. Los primeros serían estos:

15, 21, 33, 35, 39, 42, 51, 55, 57, 65, 69, 77, 78, 85, 87, 91, 93, 95, 105, 110, 111, 114, 115, 119, 123, 129, 133, 141, 143, 145, 155,…

En todos ellos SOPF(N)/OMEGA(N) es un entero. En el listado ya se encuentran fácilmente los números *arolmar*. Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en http://oeis.org/A275384

Con el Buscador:

Con estas propiedades:

ES ENTERO(LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N))
EVALUAR LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N)
NO PRIMO
LIBREDECUADRADOS

Núm.	Solución	Detalles
1	15	4
2	21	5
3	33	7
4	35	6
5	39	8
6	42	4
7	51	10
8	55	8
9	57	11
10	65	9
11	69	13
12	77	9
13	78	6
14	85	11

El código en PARI se modificaría cambiando SOPFR por SOPF y BIGOMEGA por OMEGA (se elimina la repetición) y se exige que el número sea libre de cuadrados (issquarefree):

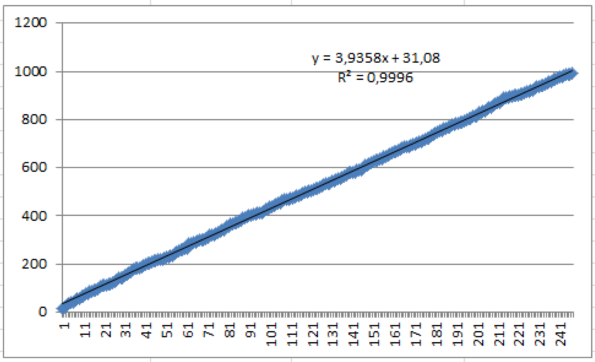
sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{for(i=4,200,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);if(m==truncate(m)&&bigomega(i)>1,print1(i,", "))))}

Así se generan fácilmente:

```
15, 21, 33, 35, 39, 42, 51, 55, 57, 65, 69, 77, 78, 85, 87, 91, 93, 95, 105, 110
, 111, 114, 115, 119, 123, 129, 133, 141, 143, 145, 155, 159, 161, 170, 177, 183
, 185, 186, 187, 195,
?
```

Su gráfico también es muy aproximado al lineal, con pendiente 3,93



Sucesión ARM-1

Al mismo nivel en jerarquía sería la sucesión determinada por la condición de que la media sea prima, pero sin exigir que el número sea libre de cuadrados. Está publicada en http://oeis.org/A134344 y también contiene a los *arolmar*.

4, 8, 9, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 44, 49, 57, 60, 64, 68, 69, 81, 85, 93, 105, 112, 116, 121, 125,…

Con nuestro Buscador bastaría usar las mismas condiciones que para ARM, sin exigir que sean números libres de cuadrados:

Con estas propiedades:
ES PRIMO(LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N))
EVALUAR LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N)
NO PRIMO

Resultado de la búsqueda		
Núm.	Solución	Detalles
1	4	2
2	8	2
3	9	3
4	16	2
5	20	3
6	21	5
7	25	5
8	27	3
9	32	2
10	33	7
11	44	5
12	49	7
13	57	11
14	60	3

En PARI volvemos a usar SOPFR y BIGOMEGA y suprimimos ISQUAREFREE:

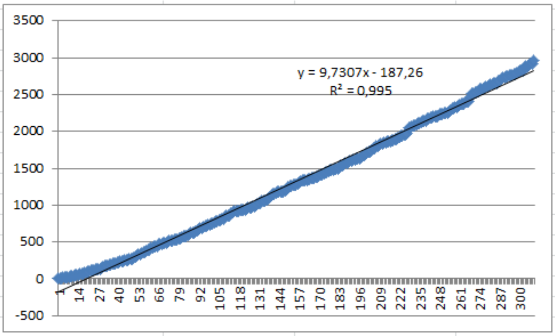
sopfr(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]*f[i, 2]); s }

{forcomposite(i=4,500,m=sopfr(i)/bigomega(i);if(m== truncate(m)&&isprime(m),print1(i,", ")))}

Aquí tienes la comprobación:

```
4, 8, 9, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 44, 49, 57, 60, 64, 68, 69, 81, 85, 93, 105
, 112, 116, 121, 125, 128, 129, 133, 145, 156, 169, 177, 180, 188, 195, 205, 212
, 213, 217, 220, 231, 237, 243, 249, 253, 256, 265, 272, 275, 289, 297, 309, 332
, 336, 343, 356, 361, 380, 393, 400, 417, 428, 441, 444, 445, 465, 469, 476, 483
, 489, 493,
? _
```

Esta sucesión tiene menos clara su aproximación a la linealidad y su densidad es menor que la de las anteriores, como era de esperar:



Debajo de estos en la jerarquía estarían nuestros *arolmar*. A la condición de media entera le añadimos la de que esa media sea prima. Sería la tercera exigencia.

En PARI:

sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{forcomposite(i=4,500,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);if(m==truncate(m)&&isprime(m),print1(i,", "))))}

Aquí añadimos isprime(m), para exigir media prima. Se reproduce así nuestra sucesión con otro código más:

```
21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195, 205, 213, 217, 231, 237, 2
49, 253, 265, 309, 393, 417, 445, 465, 469, 483, 489, 493,
?
```

Sucesión de aritméticos

No puede haber números pares en la sucesión *arolmar*, porque en ese caso uno de los factores primos sería 2 (elevado a la unidad por ser libres de cuadrados) lo que daría lugar a lo siguiente:

Si el 2 está acompañado de un número impar de primos impares, su suma con el 2 sería impar, y al hallar el promedio deberíamos dividir entre un número par, lo que produciría un promedio no entero. Si el número de factores primos que acompañan al 2 es par, la suma de todos sería par, pero habría que dividir entre un impar, con lo que, en el caso de media entera, esta sería par, al recibir el factor 2, y no prima.

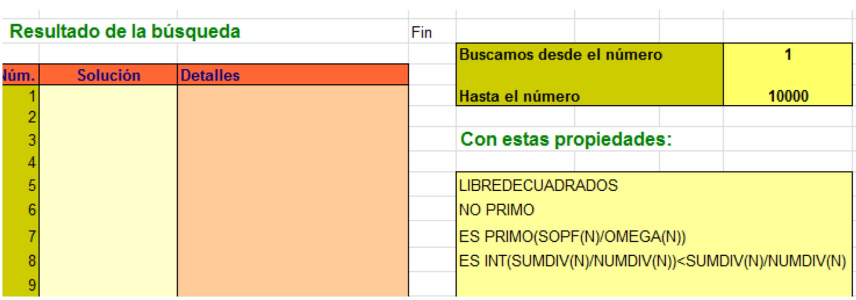
No obstante este razonamiento, hemos generado términos hasta altas potencias de 10 sin encontrar ningún par, como era de esperar.

Según la afirmación de Ore de que todo número libre de cuadrados impar ha de ser aritmético, nos resulta que todos los números *arolmar* lo han de ser, y será entera la media aritmética de todos sus factores, y no sólo la de los primos.

La sucesión *arolmar* es una subsucesión de la de los aritméticos.

Para comprobarlo, exigiremos la condición de ambos, pero la de aritméticos en sentidos negativo, para que no exista ninguna solución:

Con el Buscador de Naturales hemos exigido ambas condiciones contradictorias sin que aparezca ninguna solución entre 1 y 10000, como era de esperar.



Estudio de las diferencias

Podemos encontrar números *arolmar* que se diferencien en un número par dado 2K. Así podemos encontrar, por ejemplo números arolmar gemelos (que se diferencien en 2 unidades). Usaremos esta función para ver si N y N+2K son ambos del tipo arolmar:

Public Function aroldif(n, k) As Boolean

If esarolmar(n) And esarolmar(n + 2 * k) Then aroldif = True Else aroldif = False

End Function

Si formamos un bucle con todos los números naturales hasta un tope y una diferencia dada, se nos devolverán aquellos números N del tipo arolmar tales que N+2k también lo sea.

Números arolmar gemelos

Si hacemos k=1 y pasamos la función anterior a un conjunto de números, obtendremos la lista de los números *arolmar gemelos*. Son estos:

N	N+2	Factores(N)	Factores(N+2)	Media(N)	Media(N+2)
913	915	[11,1][83,1]	[3,1][5,1][61,1]	47	23
933	935	[3,1][311,1]	[5,1][11,1][17,1]	157	11
985	987	[5,1][197,1]	[3,1][7,1][47,1]	101	19
1417	1419	[13,1][109,1]	[3,1][11,1][43,1]	61	19
2605	2607	[5,1][521,1]	[3,1][11,1][79,1]	263	31
2893	2895	[11,1][263,1]	[3,1][5,1][193,1]	137	67
2913	2915	[3,1][971,1]	[5,1][11,1][53,1]	487	23
3335	3337	[5,1][23,1][29,1]	[47,1][71,1]	19	59
3367	3369	[7,1][13,1][37,1]	[3,1][1123,1]	19	563
3505	3507	[5,1][701,1]	[3,1][7,1][167,1]	353	59
4405	4407	[5,1][881,1]	[3,1][13,1][113,1]	443	43
4713	4715	[3,1][1571,1]	[5,1][23,1][41,1]	787	23
4715	4717	[5,1][23,1][41,1]	[53,1][89,1]	23	71
4765	4767	[5,1][953,1]	[3,1][7,1][227,1]	479	79
5017	5019	[29,1][173,1]	[3,1][7,1][239,1]	101	83
5377	5379	[19,1][283,1]	[3,1][11,1][163,1]	151	59
5883	5885	[3,1][37,1][53,1]	[5,1][11,1][107,1]	31	41
6097	6099	[7,1][13,1][67,1]	[3,1][19,1][107,1]	29	43
7683	7685	[3,1][13,1][197,1]	[5,1][29,1][53,1]	71	29
8553	8555	[3,1][2851,1]	[5,1][29,1][59,1]	1427	31

En las dos primeras columnas tenemos los pares de números *arolmar gemelos*, en las siguientes su descomposición en factores primos, y en las últimas, los promedios primos de sus factores. Los hemos incluido para que se destaque que aparecen valores promedio bastante alejados, especialmente si el número de primos en la descomposición es diferente en ellos.

También se observa que ambos gemelos han de tener factores primos diferentes. Si hubiera uno igual en ambos, al sacarlo factor común veríamos que la diferencia debería ser mayor que 2. Destacamos en la tabla el par (5883,5885), que produce primos promedio muy cercanos, 31 y 41.

Como esta publicación va de curiosidades en gran parte, incluimos ahora conjuntos de cuatro impares consecutivos, en los que los dos primeros son del tipo arolmar y los últimos primos gemelos:

Arol, Arol, Primo, Primo

3367, 3369, 3371, 3373
5017, 5019, 5021, 5023
15637, 15639, 15641, 15643
16645, 16647, 16649, 16651
23737, 23739, 23741, 23743
42277, 42279, 42281, 42283
48307, 48309, 48311, 48313
52285, 52287, 52289, 52291
52357, 52359, 52361, 52363
91093, 91095, 91097, 91099

Por su magnitud vemos que no parece ser un caso infrecuente, y que surgirán más en números mayores.

También existen conjuntos similares, pero con los dos primos gemelos anteriores a los gemelos arolmar:

Primo, Primo, Arol, Arol

5879, 5881, 5883, 5885
59357, 59359, 59361, 59363
82529, 82531, 82533, 82535
116189, 116191, 116193, 116195
121439, 121441, 121443, 121445
122609, 122611, 122613, 122615
152039, 152041, 152043, 152045
192629, 192631, 192633, 192635
206909, 206911, 206913, 206915
223829, 223831, 223833, 223835

Pueden estar los arolmar en los extremos y los primos entre ellos:

Arol Primo Primo Arol

10707, 10709, 10711, 10713
15639, 15641, 15643, 15645
46347, 46349, 46351, 46353
58227, 58229, 58231, 58233
144159, 144161, 144163, 144165
149487, 149489, 149491, 149493
289239, 289241, 289243, 289245
333267, 333269, 333271, 333273

366027, 366029, 366031, 366033

Y ya, por terminar, situaremos a los *arolmar* en el centro y los primos en los extremos:

Primo, Arol, Arol, Primo

7681, 7683, 7685, 7687
10831, 10833, 10835, 10837
23167, 23169, 23171, 23173
27067, 27069, 27071, 27073
28387, 28389, 28391, 28393
30631, 30633, 30635, 30637
33311, 33313, 33315, 33317
33931, 33933, 33935, 33937
37561, 37563, 37565, 37567

Os invitamos a encontrar otras posibilidades.

Números arolmar cousin (se diferencian en 4)

Usando la misma técnica que con los gemelos, podemos encontrar pares (N, N+4) entre los arolmar. Los primeros son:

N	N+4	Factores(N)	Factores(N+4)
129	133	[3,1][43,1]	[7,1][19,1]
213	217	[3,1][71,1]	[7,1][31,1]
249	253	[3,1][83,1]	[11,1][23,1]
465	469	[3,1][5,1][31,1]	[7,1][67,1]
489	493	[3,1][163,1]	[17,1][29,1]
813	817	[3,1][271,1]	[19,1][43,1]
861	865	[3,1][7,1][41,1]	[5,1][173,1]
969	973	[3,1][17,1][19,1]	[7,1][139,1]
1329	1333	[3,1][443,1]	[31,1][43,1]
1389	1393	[3,1][463,1]	[7,1][199,1]
1437	1441	[3,1][479,1]	[11,1][131,1]
1893	1897	[3,1][631,1]	[7,1][271,1]
2409	2413	[3,1][11,1][73,1]	[19,1][127,1]
2577	2581	[3,1][859,1]	[29,1][89,1]
2649	2653	[3,1][883,1]	[7,1][379,1]
2757	2761	[3,1][919,1]	[11,1][251,1]
2769	2773	[3,1][13,1][71,1]	[47,1][59,1]

Al igual que los anteriores, estos tampoco pueden tener factores primos comunes, pues en ese caso la diferencia no podría ser 4. Predominan los pares en los que uno de los términos es múltiplo de 3, con pocas excepciones, como 19561=31*631 y 19565=5*7*13*43. Como ambos son impares, si el primero es múltiplo de 3 se cumplirá que el segundo es del tipo 6k+1. Basta desarrollar 3*(2m+1)+4=6m+7=6k+1. Si el múltiplo de 3 es el segundo, el primero será 3*(2m+1)-4=6m-1

Los *arolmar sexy*

En los pares (N,N+6) sí puede existir el factor común 3, y es un caso que se presenta frecuentemente:

N	N+6	Factores(N)	Factores(N+6)
231	237	[3,1][7,1][11,1]	[3,1][79,1]
483	489	[3,1][7,1][23,1]	[3,1][163,1]
627	633	[3,1][11,1][19,1]	[3,1][211,1]
663	669	[3,1][13,1][17,1]	[3,1][223,1]
987	993	[3,1][7,1][47,1]	[3,1][331,1]
1887	1893	[3,1][17,1][37,1]	[3,1][631,1]
2067	2073	[3,1][13,1][53,1]	[3,1][691,1]
2751	2757	[3,1][7,1][131,1]	[3,1][919,1]
3507	3513	[3,1][7,1][167,1]	[3,1][1171,1]
4117	4123	[23,1][179,1]	[7,1][19,1][31,1]
4191	4197	[3,1][11,1][127,1]	[3,1][1399,1]
4623	4629	[3,1][23,1][67,1]	[3,1][1543,1]
5307	5313	[3,1][29,1][61,1]	[3,1][7,1][11,1][23,1]
5559	5565	[3,1][17,1][109,1]	[3,1][5,1][7,1][53,1]
5713	5719	[29,1][197,1]	[7,1][19,1][43,1]
6531	6537	[3,1][7,1][311,1]	[3,1][2179,1]

Como en casos similares, nos podemos preguntar si existirán pares con cualquier diferencia par que imaginemos. En la tabla siguiente hemos reflejado la primera aparición de dos números *arolmar* con diferencia 2k igual al doble de la dada k.

Primera ocurrencia de la diferencia 2k		
k	arolmar1	arolmar1+2k
1	913	915
2	129	133
3	231	237
4	85	93
5	195	205
6	21	33
7	217	231
8	69	85
9	177	195
10	85	105
11	195	217
12	33	57
13	205	231
14	57	85
15	597	627
16	145	177
17	231	265
18	21	57
19	445	483
20	93	133

Podemos confiar en que sea verdadera la conjetura de que para una diferencia dada 2k siempre existirá un par de números arolmar con esa diferencia.

Hemos proseguido con PARI y para las primeras 1000 diferencias pares nos resultan números arolmar no excesivamente grandes.

913, 129, 231, 85, 195, 21, 217, 69, 177, 85, 195, 33, 205, 57, 597, 145, 231, 21, 445, 93, 195, 85, 889, 21, 145, 33, 177, 253, 195, 33, 133, 21, 129, 145, 195, 21, 553, 57, 231, 133, 483, 21, 145, 57, 105, 85, 1239, 33, 133, 33, 93, 133, 1239, 21, 85, 21, 195, 133, 663, 57, 505, 21, 69, 85, 663, 85, 493, 69, 57, 253, 793, 33, 85, 57, 483, 85, 627, 21, 469, 57, 33, 85, 627, 69, 493, 33, 21, …

Ello puede ser debido a la tendencia prácticamente lineal de los números *arolmar*.

Ternas de números *arolmar* gemelos

Ya hemos adivinado que los números que estudiamos son más asequibles que los primos para ciertas propiedades. Por ejemplo, podemos encontrar muchas ternas de números *arolmar* con diferencia igual a 2:

4713, 4715, 4717
12813, 12815, 12817
26941, 26943, 26945
27861, 27863, 27865
46293, 46295, 46297
56013, 56015, 56017
57757, 57759, 57761
63969, 63971, 63973
66009, 66011, 66013…

Dejamos a los lectores su búsqueda, así como otras estructuras similares. Sólo daremos algún otro ejemplo destacado.

663243, 663245, 663247, 663249, es una cuaterna de números arolmar gemelos. Aquí tienes el desarrollo:

arolmar	663243	663245	663247	663249
Factores	[3,1][7,1][31583,1]	[5,1][11,1][31,1][389,1]	[13,1][163,1][313,1]	[3,1][221083,1]
Promedio	10531	109	163	110543

979145, 979147, 979149, 979151 es la siguiente.

Con cinco pares consecutivos hemos encontrado estos: 10075387, 10075389, 10075391, 10075393, 10075395. La comprobación es esta:

arolmar	10075387	10075389	10075391	10075393	10075395
Factores	[7,1][73,1][19717,1]	[3,1][3358463,1]	[137,1][251,1][293,1]	[67,1][150379,1]	5,1][11,1][227,1][269,1]
Promedio	6599	1679233	227	75223	103

Os dejamos el resto de búsquedas de este tipo.

Densidad de los números arolmar

La densidad natural, asintótica o aritmética es un límite que expresa la frecuencia de una sucesión respecto al conjunto de los números naturales. Es como la probabilidad de encontrar un término de la sucesión en una búsqueda aleatoria sobre todo el conjunto N. Como esto no es posible, se definirá para un subconjunto **(1,n)**, procediendo después a tomar límites para **n** tendiendo a infinito.

Así que una primera idea de la densidad natural es el cociente entre el número **k** de elementos de una sucesión pertenecientes a un conjunto **(1,n)** y el número **n**, es decir **k/n**. Si este cociente posee límite para **n** tendiendo a infinito, esa será la densidad natural.

En el caso de los números arolmar no tenemos las herramientas para encontrar la densidad asintótica, pero podemos intentar una aproximación. Recorreremos varios intervalos y dividiremos los números de este tipo encontrados entre la longitud del intervalo.

Una cota natural de esta densidad es $6/\pi^2$, porque es la propia de los números libres de cuadrados. Este valor, como veremos, queda algo alejado de los valores obtenidos por conteo.

En la siguiente tabla se agrupan valores de la densidad en varios intervalos, algunos de distinta longitud, para observar la tendencia.

N	Densidad	Diferencias
10000	0,0472	
20000	0,0395	0,0077
30000	0,0435	-0,004
40000	0,0374	0,0061
50000	0,0366	0,0008
60000	0,036	0,0006
70000	0,0373	-0,0013
80000	0,0379	-0,0006
90000	0,0347	0,0032
100000	0,0346	0,0001
110000	0,03849	-0,00389
210000	0,03415	0,00434
310000	0,03277	0,00138
410000	0,03201	0,00076
510000	0,03147	0,00054
610000	0,03045	0,00102
710000	0,03026	0,00019
810000	0,03057	-0,00031
910000	0,02984	0,00073
1E+06	0,02937	0,00047
Otros	0,02625	
	0,02536	
	0,02197	
	0,01879	

Hasta 10^6 las densidades son superiores a 0,03, pero después van descendiendo hasta 0,29. Tomando otros intervalos aislados, llega a bajar de 0,02, por lo que la sospecha de que llegaría a cero es fundada, pero no lo podemos demostrar con las herramientas que usamos. Además, las diferencias decrecen pero no nos aseguran nada.

Como curiosidad, la densidad exacta entre 2 y 10^7 es 0,0270947, por lo que podemos afirmar que en el intervalo de los números usuales, la frecuencia de los *arolmar* no llega al 3%.

COINCIDENCIAS

Los números *arolmar* pueden presentar otras características, pertenecer a otro tipo de números. Por definición, no pueden ser primos ni cuadrados, pero sí, por ejemplo, triangulares. Aquí tienes los primeros números *arolmar* que también son triangulares:

(En la tabla figura el número **n**, su orden triangular y sus factores)

n	Ordentriang	factores
21	6	[3,1][7,1]
105	14	[3,1][5,1][7,1]
231	21	[3,1][7,1][11,1]
253	22	[11,1][23,1]
465	30	[3,1][5,1][31,1]
861	41	[3,1][7,1][41,1]
1653	57	[3,1][19,1][29,1]

5253	102	[3,1][17,1][103,1]
5565	105	[3,1][5,1][7,1][53,1]
8911	133	[7,1][19,1][67,1]

Entre ellos hay pocos semiprimos, ya que se pueden necesitar más factores para construir una expresión del tipo n(n+1)/2. Un caso especial es el 231, que es triangular de orden también triangular.

Como ser triangular aquí es una mera casualidad, no aparecen muchos. Inferiores a 10000 sólo hay los diez de la tabla.

También pueden ser pentagonales:

N	Orden_5	Factores
145	10	[5,1][29,1]
1717	34	[17,1][101,1]
4845	57	[3,1][5,1][17,1][19,1]
5017	58	[29,1][173,1]
7107	69	[3,1][23,1][103,1]
9087	78	[3,1][13,1][233,1]

O hexagonales:

N	Orden_6	Factores

231	11	[3,1][7,1][11,1]
861	21	[3,1][7,1][41,1]
1653	29	[3,1][19,1][29,1]
5565	53	[3,1][5,1][7,1][53,1]
8911	67	[7,1][19,1][67,1]

Otra causalidad es que un *arolmar* pertenezca a la sucesión de Fibonacci. Entre los inferiores a 25000 sólo hemos encontrado estos dos, el de orden 8 y el de 16.

N	Quefibo
21	8
987	16

Existen también palindrómicos

33
393
505
565
949
969

1221
1441
5885

Y también hipotenusas de ternas pitagóricas:

N	Catetos
85	13 , 84
105	63 , 84
145	17 , 144
195	48 , 189
205	45 , 200
265	23 , 264
445	84 , 437

Parecerá que deben ser múltiplos de 5, pero no es necesario. El siguiente en la lista es el 493.

Con estos ejemplos vemos que los números *arolmar* están entremezclados con los de otros tipos, compartiendo términos con muchos de ellos. La principal causa de esto es su relativa abundancia y su tendencia casi lineal, que los aproxima a otros que presentan tendencias distintas.

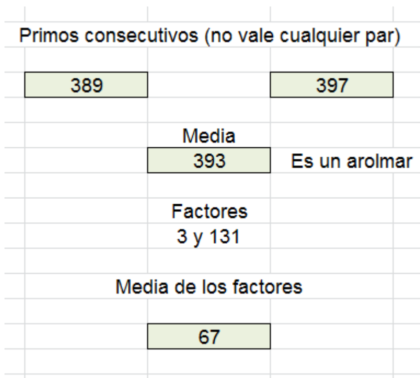
Números *arolmar* interprimos

En el apartado anterior presentamos pares de números *arolmar* gemelos entremezclados con primos gemelos. Esto nos anima a buscar interprimos, es decir, números que son media aritmética entre dos números primos consecutivos. Ya señalamos que la abundancia de los números *arolmar* propicia que aparezcan bastantes situaciones que planteemos. Esta es una de ellas. Basta ver la tabla para darse cuenta de la abundancia de los números *arolmar* interprimos:

AROLMAR	Primo anterior	Primo siguiente
21	19	23
69	67	71
93	89	97
105	103	107
129	127	131
195	193	197
205	199	211
217	211	223
231	229	233
309	307	311
393	389	397
465	463	467
483	479	487
489	487	491
645	643	647
861	859	863
897	887	907
915	911	919

Comprueba con algunos casos que los números primos son consecutivos y que su media es el número *arolmar*.

Un número *arolmar*, por definición, produce un número primo como media de sus divisores primos. Así tendríamos una generación de primos a partir de dos de ellos consecutivos. Esto no es más que una curiosidad, pero muy atractiva. Tienes un ejemplo en la imagen siguiente:



Es evidente que esta generación sólo tiene lugar si los dos primos tienen como media un número *arolmar*. Lo destacable, y eso lo hemos visto en anteriores entradas, es que los números *arolmar* relacionan números primos con otros fácilmente. Más adelante veremos otros casos.

Dobles interprimos

Recientemente hemos publicado la sucesión de dobles interprimos (https://oeis.org/A263674), aquellos que son media de dos primos consecutivos y también del anterior y el posterior a ese par. Por ejemplo, es doble interprimo el 9, porque 9 = (7+11)/2 = (5+13)/2, con 5, 7, 11, 13 primos consecutivos. También entre ellos figuran algunos *arolmar*:

AROLMAR	Factores	Media prima	Cuatro primos consecutivos				Media
105	[3,1][5,1][7,1]	5	101	103	107	109	105
195	[3,1][5,1][13,1]	7	191	193	197	199	195
489	[3,1][163,1]	83	479	487	491	499	489
897	[3,1][13,1][23,1]	13	883	887	907	911	897
987	[3,1][7,1][47,1]	19	977	983	991	997	987
1569	[3,1][523,1]	263	1559	1567	1571	1579	1569
2121	[3,1][7,1][101,1]	37	2111	2113	2129	2131	2121
3219	[3,1][29,1][37,1]	23	3209	3217	3221	3229	3219
3615	[3,1][5,1][241,1]	83	3607	3613	3617	3623	3615
4449	[3,1][1483,1]	743	4441	4447	4451	4457	4449

Estos son los primeros que aparecen. Hemos incluido sus factores y media prima, así como los cuatro primos consecutivos de los que el *arolmar* es media de dos en dos (y por tanto, también de los cuatro). Se observa que no existe relación aparente entre la media prima y los valores y diferencias entre los cuatro primos consecutivos. Era de esperar.

¿Existen *arolmar* equilibrados?

Llamaremos *arolmar* equilibrados a aquellos que son media de otros consecutivos con ellos y de la misma clase (también *arolmar*).

Sí existen, y son estos:

ANTERIOR	EQUILIBRADO	POSTERIOR
493	505	517
1221	1239	1257
1257	1265	1273
1333	1345	1357
2245	2255	2265
3417	3435	3453
3597	3615	3633
3805	3817	3829
4713	4715	4717
4873	4885	4897
5965	5989	6013
6099	6117	6135
6313	6349	6385
8585	8593	8601
9169	9177	9185
9177	9185	9193
9213	9231	9249

En ellos el número *arolmar* del centro es media entre los dos extremos, que también son *arolmar*. Vemos, por ejemplo, la terna 2245, 2255 y 2265. Es evidente que el central es media de los otros dos. En la siguiente tabla los analizamos:

Terna	Factores	Media prima	Es primo
2245	[5,1][449,1]	227	VERDADERO
2255	[5,1][11,1][41,1]	19	VERDADERO
2265	[3,1][5,1][151,1]	53	VERDADERO

Los tres son compuestos, libres de cuadrados y media prima, luego 2255 es un arolmar equilibrado. Como en curiosidades anteriores, la media prima resultante no ha de tener ninguna relación aparente con la terna que elijamos.

Entre ellos figurarán las ternas de gemelos, cousin o sexy.

Arolmar abundantes

Al ser los *arolmar* números libres de cuadrados parece que no habrá muchos entre ellos que sean abundantes, es decir, que sus divisores propios presenten una suma mayor que el número dado, o bien que sigma(n)>2n

(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_abundante)

Efectivamente, hasta el 33495 no aparece ningún *arolmar* abundante. En la siguiente tabla están contenidos los primeros, junto con su descomposición factorial, el cociente sigma(n)/n y la media prima:

AROLMAR	Factores	Sigma(n)/n	Media prima
33495	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]	2,063592	11
41055	[3,1][5,1][7,1][17,1][23,1]	2,020314	11
50505	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]	2,022453	13
68145	[3,1][5,1][7,1][11,1][59,1]	2,028615	17
102795	[3,1][5,1][7,1][11,1][89,1]	2,017219	23
206745	[3,1][5,1][7,1][11,1][179,1]	2,005949	41
276045	[3,1][5,1][7,1][11,1][239,1]	2,003152	53
310695	[3,1][5,1][7,1][11,1][269,1]	2,002221	59
451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]	2,203979	11
770385	[3,1][5,1][7,1][11,1][23,1][29,1]	2,153313	13
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]	2,139741	13

Llama la atención que todos contienen como factores 3, 5, 7 y 11 o 13, y que, por tanto, la media prima sea también relativamente pequeña. Parece ser que la existencia de primos pequeños propicia que existan más divisores y su suma aumente hasta sobrepasar 2n. Dejamos esta cuestión para otro momento.

Podríamos seguir buscando coincidencias con otros tipos de números, pero parece quedar claro que rara es la propiedad que no está presente en algún término de nuestra sucesión.

Una cuestión que ya estudiamos en otro lugar respecto a los números primos, la aplicamos hoy a los números *arolmar*. Deseamos saber qué hay entre dos *arolmar* consecutivos, por ejemplo si hay primos, cuadrados, triangulares y otros. La frecuencia de nuestros números es similar a la de los números primos, por lo que los resultados mostrarán similitudes. Comenzamos con los cuadrados.

Cuadrados entre dos arolmar

Definimos anteriormente la función ***esarolmar***, tanto para Basic VBA como para PARI. Ahora necesitaremos la función ***proxarolmar***, que devuelve el primer *arolmar* que sigue a cualquier número:

Function proxarol(a) As Long (Versión para VBA)
Dim p, prim As Long
Dim sale As Boolean

p = a + 1: sale = False: prim = 0
While Not sale
If esarolmar(p) Then prim = p: sale = True
p = p + 1
Wend

proxarol = prim
End Function

No necesita mucha explicación para entender el proceso: va avanzando en los números siguientes al dado hasta encontrar el primer *arolmar*.

La función en PARI, basada en la ya definida ***esarolmar***, quedaría así:

proxarol(n)={local(p=0,k);k=n+1;while(p==0,if(esarolmar(k),p=k);k+=1);p}

Con esta función podemos investigar qué tipo de números se puede encontrar entre dos *arolmar* consecutivos. Comenzamos con los cuadrados. En Basic se puede programar así:

Function num_entrearol(n, tipo)
Dim nm, p, i
nm = 0

If esarolmar(n) Then
p = proxarol(n)
For i = n + 1 To p - 1
Select Case tipo
Case 1: If escuad(i) Then nm = nm + 1

```
Case 2: If estriangular(i) Then nm = nm + 1
End Select
Next i
End If
num_entrearol = nm
End Function
```

Está preparada para contar cuadrados, triangulares u otros según el tipo. En el listado nos hemos limitado a los casos cuadrado o triangular. También se adapta a PARI, pero no lo incluimos por no alargar.

Al recorrer esta función para cuadrados en todos los números *arolmar* nos llevamos una sorpresa: *entre dos arolmar consecutivos aparecen como mucho dos cuadrados*. En efecto, aquí tienes el listado para los primeros:

Arolmar	Cuadrados entre dos
21	1
33	2
57	1
69	1
85	0
93	1
105	1
129	0
133	1
145	1
177	0
195	1
205	0
213	0
217	1
231	0
237	0

De hecho, el valor de 2 sólo se alcanza en el 33 y el 309. En el resto sólo se han encontrado o un cuadrado o ninguno. Una causa probabilística de esto es que los cuadrados se van espaciando, para cada N en un incremento de 2N+1, mientras que los *arolmar* siguen un crecimiento aproximadamente lineal con incrementos próximos a 17. Hemos probado hasta 10^7 sin encontrar dos arolmar consecutivos entre los que existan tres cuadrados. La cota se queda en 2 para los casos citados. El 309 lo volveremos a encontrar más adelante, ya que presenta una diferencia grande con el siguiente *arolmar*.

Expresamos la conjetura:

Entre dos números arolmar consecutivos mayores que 309, existe a lo más un cuadrado.

Triangulares comprendidos

Esperamos aquí un fenómeno similar, ya que los triangulares crecen con incrementos también crecientes. Acudimos al programa en Basic y nos queda:

21	1
33	3
57	1
69	1
85	1
93	0
105	1
129	0
133	1
145	2
177	1
195	0
205	1
213	0
217	0
231	0

Descubrimos un 3, lo que es lógico, ya que los triangulares dejan intervalos entre ellos más pequeños que los cuadrados. Con el valor 3 aparecen los mismos números que en el caso de los cuadrados: el 33, que está seguido por los triangulares 36, 45 y 55 antes de llegar al siguiente *arolmar* 57, y el 309, seguido de 325, 351 y 378.

Esto nos hizo sospechar que nunca se daría el valor 4. Hemos adaptado nuestro código en PARI y, en efecto, para n<10^7 no se presenta ningún 4. Lo damos por bueno, como conjetura:

Entre dos números arolmar consecutivos mayores que 309, existen a lo más tres triangulares.

¿Ocurrirá algo parecido con los oblongos, dobles de triangulares o los poligonales?

Así es: sólo en los valores 33, 265 y 309 se intercalan 2 oblongos. Hemos buscado el valor 3 y no aparece. Con los pentagonales sólo poseen el valor 2 los ya sabidos 33 y 309. Prueba con otros tipos, pero por nuestra parte ya está bien. Hemos descubierto de paso que estos números 33 y 309 presentan un comportamiento especial.

Primos intercalados

Vimos en entradas anteriores que el ritmo de aparición de primos y de números *arolmar* es parecido. Por eso no debe extrañar que se den muchos valores distintos al contar primos entre dos *arolmar* consecutivos. Desde 0 hasta 30 aparecen para números inferiores a un millón. Aquí tienes los primeros:

Arolmar	Primos intercalados
21	3
33	5
57	3
69	4
85	1
93	3
105	4
129	1
133	2
145	6
177	4
195	2
205	1
213	0

Llama la atención que de nuevo el 309 destaca, en este caso por tener 14 primos intercalados hasta el siguiente arolmar 393. No es nada extraordinario, pues un par que está distanciado entre sí.

Potencias de primo.

Si en lugar de contar primos contamos sus potencias no triviales (de exponente mayor que 1), el número de intercalados disminuye bastante:

Arolmar	Potencias de primo intercaladas
21	3
33	1
57	1
69	1
85	0
93	0
105	3
129	0
133	0
145	1
177	0
195	0
205	0
213	0
217	0
231	0
237	1
249	0
253	1
265	1
309	2

Entre 21 y 33 aparecen 5^2, 3^3 y 2^5, y entre 105 y 129, 11^2, 5^3 y 2^7. Detrás de estos hay que saltar al 2173 y no aparecen más, al menos hasta 10^7. Consideraciones probabilísticas nos llevan a pensar que no hay más casos.

Como resumen destacamos que el comportamiento de los intervalos entre *arolmar* es bastante parecido al comprendido entre primos, pero con las frecuencias de aparición un poco mayores.

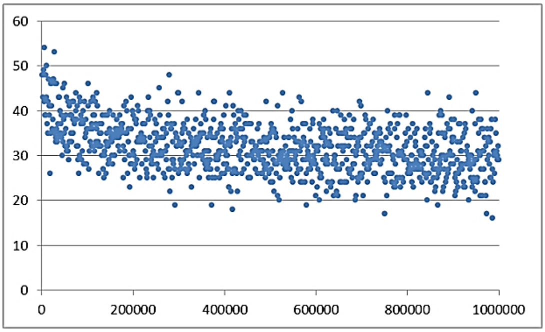
Función arolmarentre

Puede resultar interesante una función que cuente los números *arolmar* existentes entre dos números, o los inferiores a uno dado, tal como se efectúa con los números primos y la función ***prime(N).*** Una vez tenemos definida la función *esarolmar*, bastará crear un bucle desde M hasta N y contar los *arolmar* que aparecen.

Hemos recorrido los enteros de 1000 en 1000 y contado los de tipo *arolmar* que aparecen en ellos. Cuando estudiamos los resultados observamos que existe bastante regularidad si se prescinde de pequeñas oscilaciones. Lo puedes observar en esta tabla, que llega hasta el 20000:

Enteros	Arolmar que aparecen
1000	48
2000	43
3000	48
4000	49
5000	54
6000	42
7000	39
8000	39
9000	48
10000	50
11000	43
12000	37
13000	35
14000	42
15000	47
16000	41
17000	39
18000	26
19000	35
20000	46

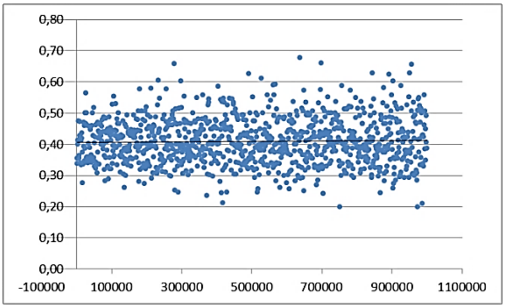
Hemos prolongado el estudio hasta 100000 con hoja de cálculo, resultando un incremento medio de unas 32 apariciones en cada millar, con un coeficiente de variación del 17%, bastante alto e indicativo del grado de oscilación que presentan los datos. Gráficamente:



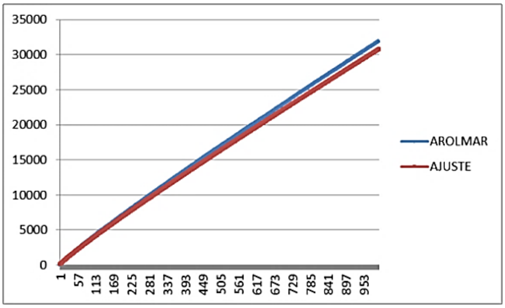
Resulta interesante comparar estos datos con los que nos devuelve la función ***primo(n)***, que calcula los números primos existentes hasta **n**, o, en nuestro caso, entre dos enteros. Al compararlos advertimos un gran paralelismo, tanto que el cociente entre los números *arolmar* de cada intervalo y los números primos existentes en ellos muestra siempre valores cercanos a un promedio de 0,41, por lo que ambos fenómenos van a la par, como hemos comprobado para valores inferiores a 10^6:

Enteros	arolmarentre(n)/primoentre(ı	
1000	0,36	
2000	0,34	
3000	0,40	
4000	0,41	
5000	0,47	
6000	0,36	
7000	0,36	
8000	0,35	
9000	0,43	
10000	0,47	
11000	0,42	
12000	0,34	
13000	0,33	
14000	0,41	
15000	0,44	
16000	0,42	
17000	0,38	
18000	0,28	
19000	0,34	
20000	0,47	

Y gráficamente:



Estos resultados nos animan a relacionar la distribución de números *arolmar* con el teorema de los números primos, y ajustar a la expresión 0,42N/ln(N) (hemos aumentado el coeficiente para lograr un mejor ajuste). Lo hemos efectuado y resulta un coeficiente impresionante de R^2=0,99999275. En la gráfica lo vemos:



SEMIPRIMOS *AROLMAR*

En este apartado nos dedicaremos a estudiar los términos de la sucesión que son semiprimos. Hemos descubierto que son bastante interesantes, ya que dan lugar a propiedades curiosas.

Caso de dos factores primos

En esta sucesión de números *arolmar* https://oeis.org/A187073 es fácil encontrar los términos que son semiprimos:

21, 33, 57, 69, 85, 93, 129, 133, 145, 177, 205, 213, 217, 237, 249, 253, 265, 309, 393, 417, 445, 469, 489, 493, 505, 517, 553, 565, 573,…

21	[3,1][7,1]
33	[3,1][11,1]
57	[3,1][19,1]
69	[3,1][23,1]
85	[5,1][17,1]
93	[3,1][31,1]
129	[3,1][43,1]
133	[7,1][19,1]
145	[5,1][29,1]
177	[3,1][59,1]
205	[5,1][41,1]
213	[3,1][71,1]
217	[7,1][31,1]
237	[3,1][79,1]
249	[3,1][83,1]
253	[11,1][23,1]
265	[5,1][53,1]
309	[3,1][103,1]
393	[3,1][131,1]
417	[3,1][139,1]
445	[5,1][89,1]
469	[7,1][67,1]

Vemos en el listado que todos se descomponen en dos factores primos distintos (el 1 que les acompaña es el exponente). En ellos la suma de sus dos factores primos es evidente que equivale al doble de otro primo. Consecuencia inmediata es que en estos números la suma de sus factores primos presenta al menos dos soluciones para lo exigido por la conjetura de Goldbach. Por ejemplo, 205=5*41, y 46=5+41=23+23=2*23

Ambos primos han de ser del tipo 4k+3 o del tipo 4k+1, pues si fueran de tipos distintos, su suma sería equivalente a 4k+1+4p+3=4(k+p+1), un múltiplo de 4 que no puede ser doble de un primo. Por ejemplo, en 133=7*19, 7=4*1+3 y 19=4*4+3, y en 445=5*89, 5=4*1+1 y 89=4*22+1, ambos del mismo tipo. Sin embargo, respecto al 6, los factores admiten todas las variantes, como puedes comprobar fácilmente.

Por otra parte, los dos factores de un *semiprimo arolmar* no pueden ser primos consecutivos, ya que la media de ambos está intercalada entre ellos.

Así que a cada número de esta lista le corresponderá un número primo, la mitad de la suma de sus factores. Esta relación no tiene que ser biyectiva. Por ejemplo, los términos 93, 145 y 253 se corresponden con el 17. Compruébalo con sus factores primos:

93	[3,1][31,1]	17
145	[5,1][29,1]	17
253	[11,1][23,1]	17

Número *arolmar* correspondiente a un primo

Se puede ver la correspondencia desde el punto de vista opuesto. Podemos tomar un número primo, calcular su doble y descomponerlo en todas las soluciones posibles como suma de primos diferentes. Cada una de ellas, multiplicando ambos primos, producirá un *arolmar*.

(Ver en el documento de Rafael Parra http://www.hojamat.es/parra/arolmar.pdf la explicación de este proceso con el estudio de varios casos)

Por ejemplo, tomemos el 23. Su doble, 46, se puede descomponer como suma de dos primos diferentes así: 46=3+43=5+41=17+29. Si ahora multiplicamos los dos factores de cada descomposición, nos resultarán tres números *arolmar*: 129, 205 y 493.

La correspondencia entre números primos y números *arolmar* semiprimos no es biyectiva.

En el documento de Rafael Parra se consideran todos los casos similares, se descompongan en dos o en más sumandos primos. Ahora nos limitaremos al caso de dos factores.

Número *arolmar* mínimo y asociados para un primo dado.

Siguiendo las ideas del documento citado de Rafael Parra, si de todos los números *arolmar* que se corresponden con un primo dado eligiéramos el mínimo (en el ejemplo anterior el 129) sí podríamos establecer la correspondencia biyectiva. Es fácil ver, como sugiere Rafael Parra, que basta elegir el que posea el número primo menor en una descomposición en dos factores, en el ejemplo 129=3*43.

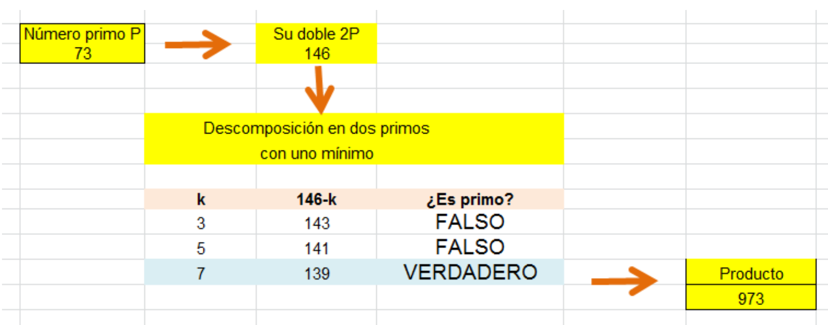
Con un poco de álgebra es fácil demostrarlo: llamemos P a ese factor primo mínimo (será P<N/2) y N al doble del primo dado. El número *arolmar* generado será entonces P(N-P), mientras que todo otro número de ese tipo tendrá la expresión (P+k)(N-P-k) con 0<P+k<N/2 (si

suponemos los factores ordenados). Restamos ambas expresiones:

(P+k)(N-P-k)- P(N-P)= PN-PP-Pk+kN-kP-kk-PN+PP=k(N-P-P-k)=k(N/2-P+N/2-(P+k))>0

Luego (P+k)(N-P-k) es siempre mayor que P(N-P). Si aumentamos el número de factores, el número *arolmar* correspondiente sería aún mayor, luego este semiprimo con un primo mínimo es el menor posible.

Así que el número *arolmar* mínimo asociado a cualquier número primo es el que contiene el factor primo menor posible en una descomposición con dos factores. Podemos resumir el proceso mediante este esquema:



Tomamos el primo 73, le calculamos el doble 146, ensayamos sumas de primos para él y nos quedamos con la que presente el menor primo. En este caso 7+139. Multiplicamos ambos y nos resulta 973.

Dado un primo P y su número *arolmar* asociado R, se tendrá, si sólo posee dos factores, que R=(P+K)(P-K), siendo ambos paréntesis primos, es decir P^2-K^2 con un K adecuado, siempre par. Por tanto R estará siempre acotado por P^2.

Rafael Parra ha llamado a estos números mínimos "primos *arolmar*", y al resto, no minimales, "asociados". En la secuencia publicada por él (http://oeis.org/A191683) figuran todas las soluciones para cada primo mayor que 3 y para cada número de sumandos:

21, 33, 57, 69, 93, 105, 129, 177, 195, 213, 217, 237, 249, 265, 309, 393, 417, 445, 465, 483, 489, 565, 573, 597, 633, 645, 669,…

Es evidente que es una subsecuencia de la sucesión A187073. Como nos hemos comprometido aquí a un desarrollo limitado a los semiprimos, seguimos con esa condición. Veremos lo siguiente:

A cada número primo le corresponde un único "primo *arolmar*" semiprimo

Esto es fácil de entender, pero la característica de ser únicos convierten a estos números en ***imágenes de una función***. Podemos definir PRIMAROL a la función que hace corresponder a cada número primo el semiprimo ya definido.

Un ejemplo:

Elegimos el número primo 103. Su doble, 206, admite estas descomposiciones de dos sumandos primos (recuerda que nos limitamos a este caso, pero podrían ser 3 o más)

7	199	1393
13	193	2509
43	163	7009
67	139	9313
79	127	10033
97	109	10573

Elegimos el mínimo, 1393, y lo definiremos como primarol(103)=1393.

La formación de PRIMAROL queda clara con el esquema incluido más arriba. No está definida ni para el 2 ni para el 3. La razón es que detrás de todo esto está la conjetura de Goldbach. Esta correspondencia biyectiva nos demuestra que los conjuntos de números ***arolmar*** y ***primos arolmar*** es infinito, hecho que se podía adivinar observando su evolución.

Implementación en una hoja de cálculo

No es difícil implementar esta función en Basic si cuentas con la función ESPRIMO

Public Function primarol(a)
Dim i, p, k, n
Dim novale As Boolean

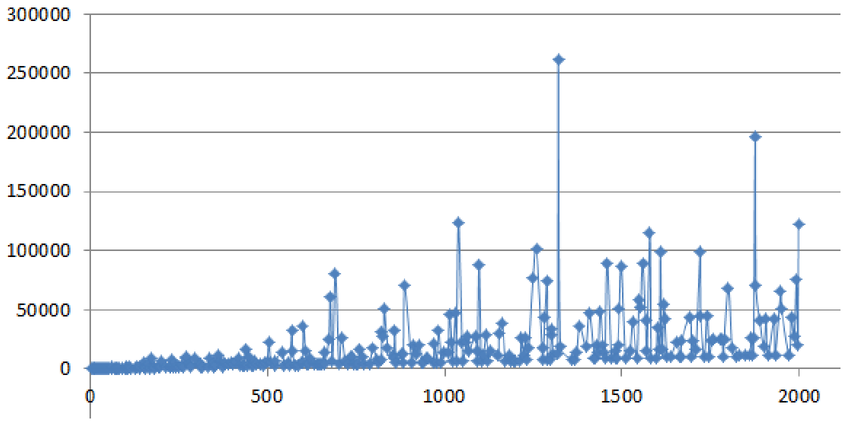
k = 2: p = 0: n = a * 2
novale = True
While novale And k < n / 2 ‘Buscamos la primera suma de primos
If esprimo(k) And esprimo(n - k) Then
p = k * (n - k) ‘Hemos encontrado la suma. Como sólo queremos el mínimo, paramos.
novale = False ‘Señal de parada

End If
k = k + 1
Wend
primarol = p ‘La función recoge el producto más pequeño
End Function

Esta función no conserva el orden, pues a mayor número primo no le corresponde una imagen también mayor. Por ejemplo, el 217 aparece como imagen de 19 y más adelante el 129 como imagen de 23

La función primarol no es creciente.

Lo puedes comprobar con este gráfico de dispersión:



El máximo que destaca corresponde al primo 1321, cuyo doble 2642 se descompone en la suma 2642=103+2539, que da el semiprimo minimal 261517=103*2539

Estudio con PARI

Para quien tenga una cierta experiencia en el tema, no es difícil traducir el código de ***primarol*** a PARI:

primarol(a)={local(k=2,p=0,n=a*2,v=1); while(v>0&&k<n/2, if(isprime(k)&&isprime(n-k),p=k*(n-k);v=0);k+=1);p}

Con esta definición podemos, por ejemplo encontrar la imagen del primer primo de 7 cifras:
Primarol(1000003)=6000009=3*2000003

Relación con ternas de primos en progresión

Es evidente, según lo tratado hasta ahora, que los números *arolmar* semiprimos se basan en una progresión aritmética formada por una terna de números primos, pues en ese caso el primo central será la media aritmética de los otros dos. Así por ejemplo, 3, 13 y 23 forman el número ***arolmar*** semiprimo 3*23=69 y, al contrario, cualquier otro elemento de la sucesión, como 669=3*223, da lugar a la progresión 3, 113, 223. Así que, de paso, hemos comprobado que existen infinitas ternas de primos en progresión aritmética.

Un caso especialmente llamativo es el de los primos equilibrados: 5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977 (http://oeis.org/A006562)

En ellos los integrantes de la terna son el anterior y posterior primo al central y darán, según consideraciones que hemos visto en párrafos anteriores, el mayor número *arolmar* correspondiente al primo central. Formamos una tabla:

Primo	Arolmar
5	21
53	2773
157	24613
173	29893
211	44377
257	66013
263	69133
373	139093
563	316933
593	351613
607	368413
653	426373
733	537253
947	896773
977	954493
1103	1216573
1123	1261093
1187	1408933
1223	1495693
1367	1868653
1511	2282977
1747	3051973
1753	3072973
1907	3636613

En ella vemos el rápido crecimiento, por ser maximales los números generados por este procedimiento.

SEMIPRIMOS *AROLMAR* ENLAZADOS

Vimos anteriormente que cada *semiprimo arolmar* está determinado por un par de primos cuya media es otro primo. Podíamos intentar enlazar el tercer primo de la terna con un cuarto primo (el menor posible) que también formara un *arolmar* con el tercero. Según la tabla de semiprimos *arolmar*

21	[3,1][7,1]
33	[3,1][11,1]
57	[3,1][19,1]
69	[3,1][23,1]
85	[5,1][17,1]
93	[3,1][31,1]
129	[3,1][43,1]
133	[7,1][19,1]
145	[5,1][29,1]
177	[3,1][59,1]
205	[5,1][41,1]
213	[3,1][71,1]
217	[7,1][31,1]
237	[3,1][79,1]
249	[3,1][83,1]
253	[11,1][23,1]
265	[5,1][53,1]
309	[3,1][103,1]
393	[3,1][131,1]
417	[3,1][139,1]
445	[5,1][89,1]
469	[7,1][67,1]

21=3*7 está enlazado con 133=7*19, con lo que los tres primos 3, 7 y 19 están enlazados con sus medias 5 y 11 y sus números arolmar 21 y 133. El 33=3*11 está enlazado con 253=11*23.

Igual que conjeturamos que a cada primo P le correspondía un *arolmar* semiprimo cuyos factores primos sumaran 2P, ahora podemos intentar que dado un primo P, encontrar otro primo cuya media con el primero también sea prima. Así, las cadenas de semiprimos *arolmar* enlazados alcanzarían una longitud infinita.

Hemos implementado esta búsqueda de un segundo primo en hoja de cálculo, con lo que podemos crear cadenas de primos enlazados con media prima entre cada dos consecutivos. Su código es el siguiente:

Public Function proxprimrol(p)
Dim pr, prox
Dim es As Boolean

If Not esprimo(p) Then proxprimrol = 0: Exit Function ‘Si no es primo se devuelve un cero
pr = p + 1 ‘La variable **pr** busca el siguiente primo válido
es = True ‘Control del WHILE
prox = 0
While es
pr = primprox(pr) ‘Busca los primos siguientes
If esprimo((p + pr) / 2) Then prox = pr: es = False ‘Si la media es prima, lo hemos encontrado
Wend
proxprimrol = prox
End Function

En esta función nos hemos arriesgado a que se entre en un bucle sin fin si no se encuentra el siguiente primo, pero confiamos en la conjetura de que todo primo encontrará su pareja.

En una primera exploración podemos observar que todos los primos se encadenan con otros mayores, y que se forman cadenas que al principio son independientes, pero que al final aparecen términos comunes. En la siguiente tabla están ordenados por columnas:

Primos encadenados arolmar

3	5	11	13	31	37	41
7	17	23	61	43	97	53
19	29	59	73	79	109	89
43	53	83	181	127	193	113
79	89	131	241	151	229	149
127	113	167	313	163	313	197
151	149	179	349	199	349	257
163	197	347	397	223	397	269
199	257	359	421	331	421	293
223	269	419	457	367	457	401
331	293	443	541	379	541	461
367	401	479	601	439	601	521
379	461	503	613	487	613	593
439	521	683	673	607	673	641
487	593	719	709	619	709	653
607	641	827	757	643	757	701
619	653	887	997	739	997	821

Calcula mentalmente la media entre dos consecutivos de una misma columna y verás que el resultado es primo: (61+73)/2=67, (109+193/2=151…

Observamos que los primos 3, 5, 11, 13, 31, 37 y 41 inician cadenas independientes (al principio), pero algunas de ellas desembocan en un elemento común. Por ejemplo. El 53 tiene como antecesores el 29 y el 41, ya que (29+53)/2=41, primo, y (41+53)/2=47, también primo. No se incluye el 2 porque su carácter par lo invalida para esta operación.

Otros primos, como el 7, tienen antecedentes, y no inician cadena (ya que (3+7)/2=5, primo).

Elementos primarios

¿Qué números primos no tienen antecedentes? Conocemos por la tabla que parecen no tener el 3, 5, 11 y 13 (luego veremos que no es cierto, pues el 11 sí tiene antecedente 3). A aquellos que no provienen de otros en la cadena les llamaremos *primarios*. Un número primo será de este tipo si no forma media prima con ninguno de los primos menores que él. Como siempre, resolveremos esta cuestión con una función, que recorra los primos menores que el dado y busque si forman media prima con él. Puede ser esta:

Public Function esprimario(p) As Boolean
Dim prev
Dim espr As Boolean

If Not esprimo(p) Then esprimario = False: Exit Function
prev = primant(p) ‘comenzamos la búsqueda con el primo anterior
espr = True
While espr And prev > 0
If esprimo((prev + p) / 2) Then espr = False ‘Si aparece media prima, no es primario
prev = primant(prev) ‘seguimos descendiendo en la lista de primos
Wend
esprimario = espr
End Function

Al aplicar esta función nos llevamos una sorpresa: los únicos primarios que resultan son 3, 5, 13 y 37. Hemos buscado en números mayores sin encontrar ningún otro. Los demás poseen un antecedente en la cadena. Si no aparecen claramente en la tabla anterior es porque se construyó con primos de este tipo consecutivos, y no han de serlo. Por ejemplo, un antecedente de 11 es el 3, porque (11+3)/2=7 es primo.

Si modificamos ligeramente la función anterior, podemos construir una tabla de antecedentes mayores, los más próximos al primo dado:

Primo	Antecedente mayor	Media prima
3	0	
5	0	
7	3	5
11	3	7
13	0	
17	5	11
19	7	13
23	11	17
29	17	23
31	7	19
37	0	
41	17	29
43	31	37
47	11	29
53	41	47
59	47	53
61	13	37
67	19	43
71	47	59
73	61	67
79	67	73
83	59	71
89	53	71
97	61	79
101	41	71
103	43	73
107	71	89
109	97	103
113	101	107
127	79	103

Figuran con un cero los elementos primarios. Para quienes se interesen por la programación, adjuntamos su código:

```
Public Function antec(p)
Dim prev, espr

If Not esprimo(p) Then antec = 0: Exit Function
prev = primant(p)
espr = 0
While espr = 0 And prev > 0
If esprimo((prev + p) / 2) Then espr = prev
prev = primant(prev)
Wend
antec = espr
End Function
```

Al recorrer la tabla descubrimos algo muy interesante, y es que si formamos cadenas descendentes con cada primo y su antecedente mayor, al final desembocaremos en 3, 5, 13 o 37. Por ejemplo, elegimos un elemento de la tabla, sea el 109. Buscando en la misma iremos descendiendo mediante antecedentes: 109 – 97 – 61 – 13. Otro: 101 – 41 – 17 – 5.

Conjetura: Si se forma una cadena a partir de un número primo insertando en cada tramo el máximo primo que forma media prima con el anterior, el proceso terminará en 3, 5, 13 o 37.

Esta propiedad divide a los números primos en cuatro clases, según sea el final de su cadena de antecedentes. Estas clases son disjuntas, porque el final es único, y abarcan todos los números primos salvo 3, 5, 13 o 37 o bien otro mayor que se descubra algún día como contraejemplo de la conjetura. Aquí las tienes:

3	7	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103	107
5	17	29	41	53	89	101	113	137	149	173	197	233	257	269
13	61	73	97	109	157	181	193	229	241	277	313	337	349	373
37														

La primera está formada por todos los primos que se encadenan hasta el 3, y son todos del tipo 4K+3. Las dos siguientes desembocan en 5 y 13 respectivamente. Su tipo es 4K+1. La cuarta clase, sorprendentemente, sólo está formada por el número 37. Ningún primo superior parece terminar su serie de antecedentes en el 37

Como observación empírica, destacamos que las diferencias entre términos en la primera clase son menores (en promedio) que las de la segunda y las de esta con la tercera.

Si a cada elemento de estas cuatro clases le calculamos la media con su antecedente, no aparecen regularidades en los tipos 4K+1 y 4K+3.

Semiprimos *arolmar* maximales

Si en las clases anteriores multiplicamos cada primo con su antecedente, resultan números *arolmar* semiprimos maximales, es decir, los mayores engendrados por una media prima.

21	33	133	253	217	1333	517	2773	1273	3337	5293
85	493	697	2173	4717	4141	11413	12193	16837	17473	29353
793	4453	5917	10573	15229	17557	21037	44197	43621	50137	75433

La cuarta clase no puede producir semiprimos. En la tabla tienes los primeros en las tres primeras clases. Comprobarás que no están todos los *arolmar* semiprimos.

Al igual que los primos *arolmar* presentaban una correspondencia biyectiva con los números primos (ver entrada anterior), y eran elementos minimales, esto no se da con los maximales, pues no todo doble de un número primo se puede descomponer en un primo sumado con su antecedente.

Grado de equilibrio en un número arolmar

Las ideas que hemos estado manejando, de primos *arolmar* y semiprimos maximales podrían concretarse en un índice entre 0 y 1 que midiera el grado de equilibrio existente entre los dos primos constituyentes de un semiprimo *arolmar*. El cálculo que nos parece más adecuado es el del cociente entre el primo menor y el mayor. Así, los semiprimos maximales tendrán un índice cercano a 1, y los primos *arolmar* presentarán un valor pequeño. Aquí tienes los índices de los primeros semiprimos arolmar:

AROLMAR	FACTORES	ÍNDICE
21	[3,1][7,1]	0,429
33	[3,1][11,1]	0,273
57	[3,1][19,1]	0,158
69	[3,1][23,1]	0,130
85	[5,1][17,1]	0,294
93	[3,1][31,1]	0,097
129	[3,1][43,1]	0,070
133	[7,1][19,1]	0,368
145	[5,1][29,1]	0,172
177	[3,1][59,1]	0,051
205	[5,1][41,1]	0,122
213	[3,1][71,1]	0,042
217	[7,1][31,1]	0,226
237	[3,1][79,1]	0,038
249	[3,1][83,1]	0,036
253	[11,1][23,1]	0,478
265	[5,1][53,1]	0,094
309	[3,1][103,1]	0,029

Entre los semiprimos arolmar menores que 10000 el más equilibrado (maximal en su clase de suma de factores 146) es el 5293=67*79, con una media prima de 73 y el más desequilibrado 9993=3*3331, de media prima 1667.

NÚMEROS "*AROLMAR*" CON MÁS DE DOS FACTORES

Los números *arolmar semiprimos* nos dieron bastante juego en apartados anteriores. Probaremos ahora con los que son producto de tres factores primos distintos (recuerda que son números libres de cuadrados).

Esfénicos "arolmar"

Nuestros números AROLMAR (http://oeis.org/A187073) son libres de cuadrados y el promedio de sus divisores primos es también primo. Nada se opone a que sean además esfénicos, si tienen tres divisores primos. Los primeros son estos

105, 195, 231, 465, 483, 609, 627, 645, 663, 861, 897, 915, 935, 969, 987, 1185, 1221, 1239, 1265, 1419, 1545, 1581, 1599, 1653, 1729, 1743, 1887

Por ejemplo, 1419=3*11*43 y (3+11+43)/3=19, que es primo.

Con PARI

```
sopf(n)= {my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }
is(n)=bigomega(n)==3&&omega(n)==3&&sopf(n)%3==0&&isprime(sopf(n)/3)
for(i=2,2000,if(is(i),print(i)))
```

Exige que OMEGA Y BIGOMEGA valgan 3, que el promedio de los primos sea entero y que sea primo.

El resultado es:

```
? sopf(n)= {mi(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }
is(n)=bigomeg(n)==3&&omega(n)==3&&sopf(n)%3==0&&isprime(sopf(n)/3)
for(i=2,2000,if(is(i) ,imprimir(i)))
105
195
231
465
483
609
627
645
663
861
897
915
935
```

Esfénicos con factores consecutivos

Los factores de un esfénico pueden ser primos consecutivos. Es muy fácil encontrarlos, pues basta realizar un listado con

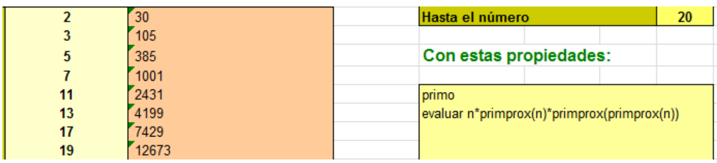
prime(k)*prime(k+1)*prime(k+2)

Estos serían los primeros:

30	[2,1][3,1][5,1]
105	[3,1][5,1][7,1]
385	[5,1][7,1][11,1]
1001	[7,1][11,1][13,1]
2431	[11,1][13,1][17,1]
4199	[13,1][17,1][19,1]
7429	[17,1][19,1][23,1]
12673	[19,1][23,1][29,1]
20677	[23,1][29,1][31,1]
33263	[29,1][31,1][37,1]

Si los tres primos forman progresión aritmética, serán también de tipo AROLMAR.

En la imagen puedes observar su generación mediante el Buscador. Oberva la complicación en el ***Evaluar***:



Aquí el listado cae a la derecha.

Ya presentamos anteriormente la función ESAROLMAR

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/12/volvemos-los-numeros-arolmar-1-historia.html

que determina si un entero positivo es de tipo arolmar o no. La usaremos de nuevo en esta entrada para seguir descubriendo curiosidades.

Número arolmar r-p correspondiente a un primo dado

Siguiendo las ideas aportadas por Rafael Parra en el documento citado (http://www.hojamat.es/parra/arolmar.pdf), dado un primo P, si descomponemos 2P en todas las sumas de primos posibles y nos quedamos con la que presente el producto mínimo (o los factores más pequeños) encontraremos el *primo arolmar* correspondiente a P, que será precisamente ese producto, y los demás números *arolmar* asociados que no tendrán ese carácter minimal. Este procedimiento se aplica a cualquier número de factores, sustituyendo 2P por 3P, 4P,…por lo que dará lugar a números *arolmar* producto de un número cualquiera de factores.

Por ejemplo, deseamos encontrar el primo arolmar correspondiente al primo 11, con cuatro factores. Bastará encontrar todas las descomposiciones de 4*11=44 en sumas de cuatro primos y con media prima.

X1	X2	X3	X4	Promedio	Producto
3	5	7	29	11	3045
3	5	13	23	11	4485
3	5	17	19	11	4845
3	7	11	23	11	5313
3	11	13	17	11	7293
5	7	13	19	11	8645

El mínimo 3045 será el primo *arolmar* que puede constituir una función del primo 11 y del número 4 de factores.

Aumento de factores a partir un número *arolmar* dado

Un caso interesante es el de aquellos números *arolmar* de tres factores que provienen de un arolmar semiprimo al que multiplicamos por la media de sus factores, que será prima:

Semiprimo	Factores	3-casiprimo	Factores
21	[3,1][7,1]	105	[3,1][5,1][7,1]
33	[3,1][11,1]	231	[3,1][7,1][11,1]
57	[3,1][19,1]	627	[3,1][11,1][19,1]
69	[3,1][23,1]	897	[3,1][13,1][23,1]
85	[5,1][17,1]	935	[5,1][11,1][17,1]
93	[3,1][31,1]	1581	[3,1][17,1][31,1]
129	[3,1][43,1]	2967	[3,1][23,1][43,1]
133	[7,1][19,1]	1729	[7,1][13,1][19,1]
145	[5,1][29,1]	2465	[5,1][17,1][29,1]
177	[3,1][59,1]	5487	[3,1][31,1][59,1]
205	[5,1][41,1]	4715	[5,1][23,1][41,1]
213	[3,1][71,1]	7881	[3,1][37,1][71,1]
217	[7,1][31,1]	4123	[7,1][19,1][31,1]
237	[3,1][79,1]	9717	[3,1][41,1][79,1]
249	[3,1][83,1]	10707	[3,1][43,1][83,1]
253	[11,1][23,1]	4301	[11,1][17,1][23,1]
265	[5,1][53,1]	7685	[5,1][29,1][53,1]
309	[3,1][103,1]	16377	[3,1][53,1][103,1]
393	[3,1][131,1]	26331	[3,1][67,1][131,1]
417	[3,1][139,1]	29607	[3,1][71,1][139,1]
445	[5,1][89,1]	20915	[5,1][47,1][89,1]
469	[7,1][67,1]	17353	[7,1][37,1][67,1]
489	[3,1][163,1]	40587	[3,1][83,1][163,1]
493	[17,1][29,1]	11339	[17,1][23,1][29,1]
505	[5,1][101,1]	26765	[5,1][53,1][101,1]
517	[11,1][47,1]	14993	[11,1][29,1][47,1]
553	[7,1][79,1]	23779	[7,1][43,1][79,1]
565	[5,1][113,1]	33335	[5,1][59,1][113,1]
573	[3,1][191,1]	55581	[3,1][97,1][191,1]
597	[3,1][199,1]	60297	[3,1][101,1][199,1]
633	[3,1][211,1]	67731	[3,1][107,1][211,1]
669	[3,1][223,1]	75597	[3,1][113,1][223,1]
685	[5,1][137,1]	48635	[5,1][71,1][137,1]
697	[17,1][41,1]	20213	[17,1][29,1][41,1]
753	[3,1][251,1]	95631	[3,1][127,1][251,1]
781	[11,1][71,1]	32021	[11,1][41,1][71,1]
793	[13,1][61,1]	29341	[13,1][37,1][61,1]
813	[3,1][271,1]	111381	[3,1][137,1][271,1]
817	[19,1][43,1]	25327	[19,1][31,1][43,1]
865	[5,1][173,1]	76985	[5,1][89,1][173,1]
889	[7,1][127,1]	59563	[7,1][67,1][127,1]
913	[11,1][83,1]	42911	[11,1][47,1][83,1]
933	[3,1][311,1]	146481	[3,1][157,1][311,1]
949	[13,1][73,1]	40807	[13,1][43,1][73,1]
973	[7,1][139,1]	71029	[7,1][73,1][139,1]
985	[5,1][197,1]	99485	[5,1][101,1][197,1]
993	[3,1][331,1]	165831	[3,1][167,1][331,1]

Vemos en ellos que el segundo tiene los mismos factores que el primero, con el añadido de su media aritmética que también es prima. Los tres forman una progresión aritmética:

Si en una terna de primos en progresion aritmética multiplicamos los dos extremos obtenemos un arolmar semiprimo y si multiplicamos los tres, un arolmar de 3 factores. Coinciden las dos generaciones paralelas.

Arolmar semiprimo	Factor nuevo	Arolmar 3-casiprimo
21	11	231
33	19	627
57	17	969
69	7	483
85	29	2465
93	5	465
129	5	645
133	31	4123
145	23	3335
177	7	1239
205	11	2255
213	13	2769
217	13	2821
237	5	1185
249	7	1743
253	5	1265
265	11	2915
309	5	1545
393	7	2751
417	17	7089
445	17	7565
469	13	6097
489	11	5379
493	5	2465
505	17	8585
517	53	27401
553	37	20461
565	11	6215
573	7	4011

Esta operación nos plantea una pregunta: ¿es el número primo media entre los dos factores el único que convierte un *arolmar* semiprimo en otro de tres factores, o existen más?¿Es posible en todos los casos encontrar esos otros primos, o existen casos en los que no es posible?

Conjeturamos que la respuesta es afirmativa, ya que esta operación equivale a resolver el problema diofántico siguiente: La suma de los dos factores de un arolmar semiprimo es un número par, doble de primo. Si le añadimos otro primo, para que al multiplicar resulte otro arolmar, la suma debe ser el triple de otro primo, es decir, se debe encontrar solución a la ecuación 3X-Y=2P, con X,Y primos. Las soluciones de una ecuación diofántica se expresan como términos de una progresión aritmética, luego por el Teorema de Dirichlet podemos confiar en que existan entre ellas números primos.

Hemos preparado un algoritmo (algo complejo, por lo que no lo incluimos) para encontrar el menor primo que convierta un arolmar semiprimo en otro de tres factores, sin acudir a la media. Incluimos los primeros resultados:

Conjetura: Todo arolmar semiprimo se puede convertir en un arolmar de tres factores primos si se multiplica por un factor primo adecuado, distinto de la media prima.

Podemos expresar estas operaciones desde el punto de vista de la divisibilidad: hemos conseguido que **todo arolmar semiprimo posea un múltiplo con tres divisores primos**. La operación inversa no tiene por qué tener éxito: encontrar un número arolmar que sea divisor de otro.

Números arolmar con más factores

A continuación incluimos el listado de los primeros números arolmar con 4, 5 o 6 divisores primos distintos:

Con 4 factores

En la tabla figura el número, su descomposición factorial y la media prima de sus factores. Te puedes ejercitar en comprobar esas medias. Por ejemplo: 5565 es arolmar porque la media de sus factores 3, 5, 7 y 53 es (3+5+7+53)/4=17, número primo.

1365	7	[3,1][5,1][7,1][13,1]
3045	11	[3,1][5,1][7,1][29,1]
3885	13	[3,1][5,1][7,1][37,1]
4485	11	[3,1][5,1][13,1][23,1]
4845	11	[3,1][5,1][17,1][19,1]
5313	11	[3,1][7,1][11,1][23,1]
5565	17	[3,1][5,1][7,1][53,1]
6045	13	[3,1][5,1][13,1][31,1]
6405	19	[3,1][5,1][7,1][61,1]
7161	13	[3,1][7,1][11,1][31,1]

Con cinco factores

33495	11	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]
41055	11	[3,1][5,1][7,1][17,1][23,1]
49335	11	[3,1][5,1][11,1][13,1][23,1]
50505	13	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]

Con seis

451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]
770385	[3,1][5,1][7,1][11,1][23,1][29,1]
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]

NÚMEROS “SUPERAROLMAR”

Con este título de *superarolmar* identificamos los números *arolmar* en los que la media prima de sus factores primos **es también divisor del número**. Por ejemplo, el número 20915 tiene como factores 5, 47 y 89, cuya media es precisamente el 47, primo y divisor de 20915. Aunque sin ese nombre, están contenidos en la sucesión http://oeis.org/A229094 ya publicada:

105, 231, 627, 897, 935, 1365, 1581, 1729, 2465, 2967, 4123, 4301, 4715, 5313, 5487, 6045, 7293, 7685, 7881, 7917, 9717, 10707, 10965, 11339, 12597, 14637, 14993, 16377, 16445, 17353, 18753, 20213, 20757, 20915, 21045, 23779, 25327, 26331, 26765, 26961,…

Es evidente que forman una subsucesión de nuestros *arolmar* (https://oeis.org/A187073), y como tales, han de ser todos impares, compuestos y libres de cuadrados. Según la nomenclatura del primer apartado, estos números se pueden rotular como **ARM+1**.

Podemos encontrarlos con hoja de cálculo y una rutina similar a la siguiente (la hemos simplificado un poco):

```
For i = j To l
If esarolmar(i) Then
a = sopf(i) / f_omega(i)
If esmultiplo(i, a) Then msgbox(i)
End If
End If
Next i
```

En PARI

```
prevcond(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)
sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }
averg(n)={my(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}
esarolmar(n)={my(a=averg(n),s);s=prevcond(n)&&a==truncate(a)&&isprime(a); s}
{for(i=2,10^5,if(esarolmar(i),p=averg(i);if(i/p==truncate(i\p),print1(i,", ")))))}
```

Estos números han sido estudiados por Florian Luca y Francesco Pappalardi en un documento que puedes descargar en esta dirección:

http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/papers/LucaPap_16_10_06.pdf

Al factorizar estos números nos hemos dado cuenta de que casi todos tienen tres factores, por lo que los destacamos aparte:

Caso de tres factores

Los primeros *superarolmar* con tres factores son estos:

105, 231, 627, 897, 935, 1581, 1729, 2465, 2967, 4123, 4301, 4715, 5487, 7685, 7881, 9717, 10707, 11339, 14993, 16377, 17353, 20213, 20915, 23779, 25327, 26331, 26765, 29341, 29607, 32021, 33335, 40587, 40807, 42911, 48635, 49321, 54739, 55581, 55637, 59563, 60297, 63017,…

Sorprendentemente, no estaban publicados en OEIS, y los hemos añadido en la sucesión

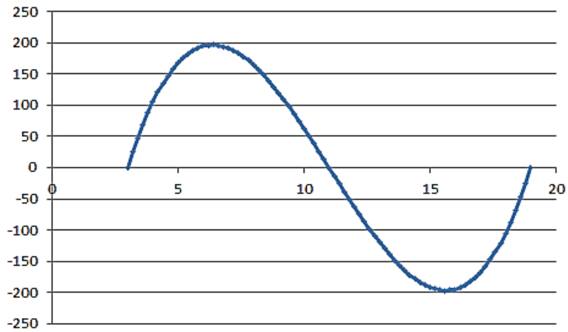
http://oeis.org/A262723

Según la definición, los tres factores primos formarán una progresión aritmética, y el del centro será la media prima de los tres (o de los otros dos). Por ejemplo, 627 tiene como factores primos 3, 11 y 19, siendo 11 la media prima de todos y también un factor primo de 627. Por tanto, en estos casos, el número dado se forma mediante la media (11 en este caso) y la descomposición de su doble (22 en el ejemplo, 22=3+19) en suma de dos factores primos. Como ves, Goldbach no nos abandona.

Otro ejemplo: 5487=3*31*59, con lo que 5487 es el producto de 31 por dos primos que suman su doble (62=3+59), y es obvio que los tres 3, 31 y 59 forman una progresión aritmética. Hemos investigado la diferencia en esa progresión y puede ser cualquier número par, múltiplo de 4 si los primos son los tres del mismo tipo (4k+1 o 4k+3).

Otra consecuencia de la definición es que si suprimimos en el producto de factores el que equivale a la media de los tres, el producto de los otros dos forma un *semiprimo arolmar*, que en el ejemplo sería 3*59=177. Tenemos pues la misma situación de entradas anteriores, que si multiplicamos los factores de un *semiprimo arolmar* por su media, resulta otro *arolmar*, que es *superarolmar* con tres factores.

También pertenecen a la sucesión http://oeis.org/A203614, formada por aquellos números N en los que, si se forma el polinomio $(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_k)$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ con todos los divisores primos de N, su integral definida entre el menor p_1 y el mayor p_k, es nula. Es una simple curiosidad derivada de la simetría del polinomio entre los dos primos extremos:



La gráfica se ha construido a partir del número 627 y sus factores 3, 11 y 19. Se percibe su simetría y, por tanto, la anulación de la integral.

Si uno de los divisores primos es el 3, el número dado será divisible entre la suma de los tres divisores primos, ya que ésta equivale a $3p_2$, y el cociente entre ambas será p_3. Esto ocurre en estos términos:

105, 231, 627, 897, 1581, 2967, 5487, 7881, 9717, 10707,…

Por ejemplo, 9717=3*41*79 y la suma de los tres factores, 123, siendo el cociente 9717/123 igual a 79, el mayor divisor primo. Por tener esta propiedad, estos términos pertenecen a http://oeis.org/A131647

Con más de tres factores

Con cuatro factores aparecen muchos menos:

1365, 5313, 6045, 7293, 7917, 10965, 12597, 14637, 16445, 18753, 20757, 21045, 26961, 28101, 28497, 30381, 34365, 35853, 40641, 42845, 47541, 47957,…

Un ejemplo: 7917=3*7*13*29, con suma de primos 52 y media 13, que lo es también de 3, 7 y 29, cuyo producto, como en el caso anterior, también es un número arolmar: 3*7*29=609, con media prima el ya sabido 13.

En una mayoría de casos la media se corresponde con el tercer divisor primo (en orden creciente), pero también se da el caso de que sea el segundo, como en 7293= 3*11*13*17, en el que la media es 11, el segundo factor primo.

Estos son los primeros con cinco factores que hemos encontrado:

Número	Factores	Divisor media prima
33495	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]	11
49335	[3,1][5,1][11,1][13,1][23,1]	11
50505	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]	13
53295	[3,1][5,1][11,1][17,1][19,1]	11
93093	[3,1][7,1][11,1][13,1][31,1]	13
94605	[3,1][5,1][7,1][17,1][53,1]	17
95095	[5,1][7,1][11,1][13,1][19,1]	11

Los que tienen como factor 5, según un razonamiento similar al caso de tres, serán divisibles entre la suma de los divisores primos. Así tenemos que 49335=3*5*7*13*37, y la suma de los cinco factores es 55, y se cumple que 49335=55*897=55*3*13*23. El cociente 897 también pertenece al tipo de números que estamos estudiando, pero no seguiremos por ahí.

Sólo a título de curiosidad, hemos encontrado, con seis, estos dos ejemplos:

Número	Factores	Divisor media prima
451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]	11
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]	13

Y, por último, con siete:

Número	Factores	Divisor media prima
10015005	[3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][23,1][29,1]	13
15935205	[3,1][5,1][11,1][13,1][17,1][19,1][23,1]	13

Lo dejamos, pues no parece que se vayan a descubrir más propiedades interesantes.

Si exigimos a los números arolmar que la media prima de factores primos sea también divisor del número, aparecerían los números "superarolmar" ya presentados:

sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{forcomposite(i=4,10000,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);c=i/m;if(m==truncate(m)&&isprime(m)&&c==truncate(c),print1(i,", "))))}

Aquí exigimos que m sea divisor de i, mediante ***c==truncate(c)***

```
105, 231, 627, 897, 935, 1365, 1581, 1729, 2465, 2967, 4123, 4301, 4715, 5313, 5
487, 6045, 7293, 7685, 7881, 7917, 9717,
? _
```

Dentro de la jerarquía también entrarían los ***primos arolmar*** introducidos por Rafael Parra y otras variantes introducidas en la anterior entrada, pero los elementos principales ya están presentados.

NÚMEROS AROLMAR CUADRÁTICOS

Terminamos el capítulo dedicado a los números *arolmar* y similares con los *arolmar cuadráticos*, que son aquellos compuestos libres de cuadrados en los que la media cuadrática de sus factores primos es otro primo.

De forma similar al desarrollo de los arolmar lineales, comenzaremos por aquellos números cuya media cuadrática de factores primos con repetición **sea al menos entera**. Después pasaremos a otras exigencias hasta llegar a los *arolmar cuadráticos*. Estos números con media entera ya están publicados en http://oeis.org/A134600

4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 119, 121, 125, 128, 161, 169, 243, 256, 289, 343, 351, 361, 378, 455, 512, 527, 529, 595, 625, 721, 729, 841, 845, 918, 959, 961, 1024, 1045, 1081,…

Es fácil ver que entre ellos están las potencias de primos. Es trivial la razón. Otros son de comportamiento más complejo, como el 351, cuyos factores son 3*3*3*13, con media cuadrática

RAIZ((3^2+3^2+3^2+13^2)/4)=7, número entero tal como se pedía.

Con PARI se encuentran así:

mean2(n)= my(f, s=0,t=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, for(j=1,f[i,2],s+=f[i, 1]^2;t+=1)); sqrt(s/t)
{forcomposite (n=2, 2*10^3, m=mean2(n);if(m==truncate(m), print1(n, ", ")))}

En primer lugar se define ***mean2*** como media cuadrática y en la segunda línea se exige que sea entera ***m==truncate(m)***, con el resultado esperado:

```
4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 119, 121, 125, 128, 161, 169, 243, 256, 289
, 343, 351, 361, 378, 455, 512, 527, 529, 595, 625, 721, 729, 841, 845, 918, 959
, 961, 1024, 1045, 1081, 1241, 1265, 1323, 1331, 1369, 1375, 1547, 1615, 1681, 1
792, 1849, 1855,
?
```

El siguiente paso sería la exigencia de que los números sean libres de cuadrados, para evitar la repetición de factores. Nos resultaría esta subsucesión de la anterior:

119, 161, 455, 527, 595, 721, 959, 1045, 1081, 1241, 1265, 1547, 1615, 1855, 2047, 2145, 2345, 2665, 2737, 3281, 3367, 3713, 3835, 3995, 4207, 4305, 4633, 4681, 5117, 5795, 6061, 6545, 6643, 6887, 6965, 7055, 7327, 7505, 7685, 7705, 8785, 9641,

La hemos obtenido con el código PARI siguiente:

mean2(n)= my(f, s=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, s+=f[i, 1]^2); sqrt(s/m)

forcomposite (n=2, 10^4, if(issquarefree(n),m=mean2(n);if(m==truncate(m), print1(n, ", "))))

Para generarlos con hoja de cálculo hemos introducido la función SOPF_k en lugar de SOPF. Esta suma de factores primos sin repetición, mientras que SOPF_K los suma elevados a un exponente K. Bastaría entonces dividir esa suma entre el número de factores y exigir que el resultado sea entero y cuadrado.

Por ejemplo, en el caso de 119 los cálculos serían =RAIZ(sopf_k(119;2)/f_omega(119))=RAIZ((7^2+17^2)/2), con el resultado de 13, número entero.

Si has llegado hasta aquí en la lectura entenderás que los números *arolmar cuadráticos* se extraerán de estos exigiendo que la raíz sea

prima además de entera. Con estas condiciones aparecen estos números:

119, 161, 595, 721, 959, 1045, 1081, 1241, 1547, 1855, 2737, 3281, 3367, 3995, 4681, 5795, 6545, 6643, 7505, 7705, 11845, 11935, 12319, 12455, 13585, 14147, 16999, 19199, 19873, 20735, 22591, 23345, 26605, 27265, 29555, 32219, 32239, 32795, 33787, 34255, 34505, 35105, 35929, 37241, 38213, 38335, 38645, 39923, 39997,…

Podíamos llamarles números ***2_arolmar o arolmar de segundo orden***. Repasamos la definición con un ejemplo: 1045 pertenece a la sucesión porque su descomposición factorial es 5*11*19, compuesto libre de cuadrados y la media cuadrática de sus factores es RAIZ((5^2+11^2+19^2)/3) = 13, entero y primo, tal como se exige en la definición.

Con hoja de cálculo hemos organizado la búsqueda en filas y columnas. Si deseas un listado más amplio puedes usar este código PARI

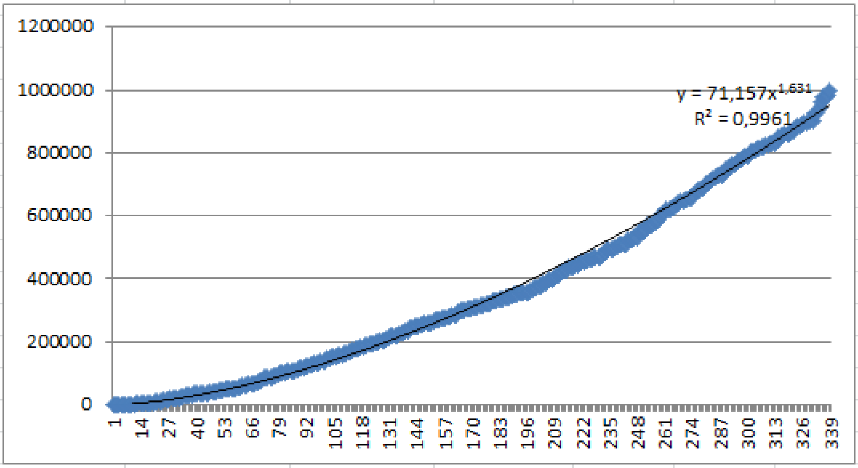
mean2(n)= my(f, s=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, s+=f[i, 1]^2); sqrt(s/m)

{forcomposite (n=2, 4*10^4, if(issquarefree(n),m=mean2(n);if(m==truncate(m),if(isprime(truncate(m)), print1(n, ", "))))))}

Llama la atención que estos números, además de ser impares, por la misma razón que los *arolmar* normales, ninguno de ellos es múltiplo de 3. La razón tiene que ver con las congruencias módulo 3. En efecto, todo primo mayor que 3 es de la forma 3k+1 o 3k+2. En ambos casos su cuadrado es del tipo 3m+1, congruente con 1 módulo 3. Si el número N se descompone en factores primos como $3*p_1*p_2*\ldots p_{k-1}$, la suma de los cuadrados será congruente con k-1, pues cada sumando es congruente con 1. Si esa suma produce una media cuadrática prima, deberá ser igual a kp_0, con p_0 primo, por lo que kp_0 será congruente con k y no con k-1. No pueden ser expresiones iguales.

Todos los números 2_arolmar son impares y no múltiplos de 3.

Su tendencia no es lineal como la de los arolmar de grado 1. Si representamos el conjunto de los primeros, obtenemos una gráfica que se parece más a una parábola



Después de probar varias alternativas, el mejor ajuste que hemos conseguido es el de la función potencial $y=71{,}157x^{1{,}631}$.

Función esarolmar(n;k)

Para estudiar mejor los números arolmar de orden superior basta añadir un parámetro a la función esarolmar primitiva y elevar los factores primos a k en la condición. Puede ser esta:

Public Function esarolmar(n, k)
Dim es As Boolean
Dim b

es = False
If Not esprimo(n) And partecuad(n) = 1 Then

b = sopf_k(n, k) / f_omega(n) ‘calcula la media de las potencias

If esentero(b) And esprimpot(b) = k Then es = True ‘comprueba que resulta primo^k

End If

esarolmar = es

End Function

Con ella y un bucle generamos fácilmente los *arolmar* de cualquier orden. Capturamos la hoja que genera *2_arolmar*:

Generador de sucesiones			
		2000	2
	119		
	161		
	595		
	721		
	959		
	1045		
	1081		
	1241		
	1547		
	1855		

Caso particular, el de los semiprimos

Como en el caso de los de primer orden, los 2_arolmar semiprimos presentan bastante interés. Los primeros son estos:

119, 161, 721, 959, 1081, 1241, 3281, 4681, 12319, 16999, 19199, 32239, 37241, 44801, 50279, 52319, 60119, 89239, 135001, 136441, 152401, 156479, 157601, 173639, 227959, 305959, 315439, 330881, 335239, 350479, 356921, 368519, 373319, 393119, 418801, 497681, 526921, 650879, 775799, 789559, 887321, 926999,…

Por ejemplo, 721=7*103, y se cumple que RAIZ($(7^2+103^2)/2$)=73, que es un número primo.

Todos ellos tienen la forma N=pq con p<q, ambos primos e impares y $p^2+q^2=2r^2$, siendo r un número primo. Si llamamos X=(p-q)/2, e Y=(p+q)/2, ambos X e Y serán enteros, y se cumplirá: $X^2+Y^2=(2p^2+2q^2)=4r^2=(2r)^2$, luego X e Y son catetos de una terna pitagórica. Si restamos sus cuadrados en lugar de sumarlos, obtenemos: $Y^2-X^2=pq=N$, luego N es diferencia de cuadrados de los catetos de una terna pitagórica. Como p,q y r son primos (por tanto también entre sí), la terna será primitiva.

Los números 2_arolmar semiprimos equivalen a la diferencia de los cuadrados de dos catetos de una terna pitagórica.

Vemos esta propiedad con el 161: 161=7*23, su media cuadrática es RAIZ($(7^2+23^2)/2$)=17, que es primo. En este caso, X=8, Y=15, catetos de la terna (8,15,17), y se cumple que $161=15^2-8^2= 225-64=161$

Por tener esta propiedad, los 2_arolmar semiprimos pertenecen también a la sucesión

7, 41, 119, 161, 239, 527, 721, 959, 1081, 1241, 1393, 1519, 2047, 3281, 3479, 3713, 4207, 4633, 4681, 4879, 5593, 6647, 6887, 7327, 8119, 9401, 9641, 10199, 11753, 12121, 12319, 12593, 16999, 19159, 19199, 19873, 20447, 22393, 23359, 24521, 24521,…, publicada en http://oeis.org/A127923

La descomposición factorial de los primeros es esta:

2_esarolmar semiprimo	Factores	Media cuadrática prima
119	[7,1][17,1]	13
161	[7,1][23,1]	17
721	[7,1][103,1]	73
959	[7,1][137,1]	97
1081	[23,1][47,1]	37
1241	[17,1][73,1]	53
3281	[17,1][193,1]	137
4681	[31,1][151,1]	109
12319	[97,1][127,1]	113
16999	[89,1][191,1]	149
19199	[73,1][263,1]	193
32239	[103,1][313,1]	233
37241	[167,1][223,1]	197
44801	[71,1][631,1]	449
50279	[137,1][367,1]	277
52319	[113,1][463,1]	337
60119	[79,1][761,1]	541
89239	[233,1][383,1]	317
135001	[127,1][1063,1]	757
136441	[47,1][2903,1]	2053

Ninguno es múltiplo de 2, 3 o 5. Las dos primeras condiciones ya están estudiadas. Veremos más adelante por qué no puede ser múltiplo de 5 ni de otros primos.

En los 2_arolmar semiprimos N=P*Q se cumplirá P^2+Q^2=2R^2 (P<Q) con R primo, lo que equivale a que R^2-P^2=Q^2-R^2; (R+P)(R-P)=(Q+R)(Q-R). Por ejemplo, en el número 4681=31*151, con media cuadrática 109 se cumple que

(151+109)(151-109)=(109-31)(109+31)=260*42=78*140=10920

Esta misma igualdad P^2+Q^2=2R^2 hace que P(o Q) deba ser un número primo en el que 2 sea un resto cuadrático módulo P, ya que Q^2 debería ser congruente con 2R^2 módulo P, y esto no es posible si el 2 es no resto cuadrático. Esto restringe los números primos que pueden ser factores de un *2_arolmar semiprimo*. Si recorres las descomposiciones factoriales de los mismos en la tabla de más arriba habrás echado de menos los factores 5, 11 o 13. Su ausencia se debe a que en ellos el 2 no es resto cuadrático. Sí lo es en el 7, en el 17 o el 23, por ejemplo, y estos sí figuran en las descomposiciones factoriales.

Según la teoría de restos cuadráticos el 2 es resto cuadrático respecto a los primos del tipo 8k+1 y 8k+7. Así que sólo pueden ser esos primos los factores de un

semiprimo arolmar de segundo orden. Los tienes en rojo en la tabla:

Número primo	Resto módulo 8
3	3
5	5
7	7
11	3
13	5
17	1
19	3
23	7
29	5
31	7
37	5
41	1
43	3
47	7

Múltiplos de 2_arolmar

El semiprimo 2_arolmar 119=7*17, si se multiplica por 5 da lugar al arolmar de tres factores 595=5*7*17, e igual ocurre con 161=7*23, que se convierte en 2737 al multiplicarlo por 17. Podemos buscar todos los casos similares, en los que un 2_arolmar se convierta en otro del mismo tipo al multiplicarlo por un primo adecuado. Eliminamos la condición de que sea semiprimo y nos resulta esta tabla

2_arolmar	Factor primo	2_arolmar producto
119	5	595
161	17	2737
595	11	6545
721	53	38213
959	43	41237
1045	13	13585
1081	37	39997
1241	53	65773
1547	83	128401
1855	31	57505
3281	137	449497
3367	23	77441
3995	29	115855
4681	109	510229
5795	37	214415
6545	19	124355
6643	43	285649
7505	47	352735
7705	41	315905

En algún caso se da una cadena de múltiplos: 119 por 5 da 595, y éste por 11, 6545, que a su vez se puede convertir en 124355. Si seguimos resulta esta cadena:

2_arolmar	119	595	6545	124355	1616615
Factor primo nuevo	5	11	19	13	
Media cuadrática	13	11	11	13	13

Números arolmar de orden superior

No hemos encontrado 3_arolmar menores que 10^7, por lo que si existen serán rarezas aisladas. Igual nos ha ocurrido con órdenes superiores.

Números arolmar y 2_arolmar

Terminamos la publicación con los números que son arolmar tanto para la media aritmética como para la cuadrática:

3367, 3995, 6643, 32219, 35929, 52633, 57293, 59563, 105821, 109745, 116171, 162899, 190385, 263177, 278545, 306017, 310177, 312193, 468785, 474031, 510229, 623555, 623645, 627095, 644453, 650845, 733663, 763895, 793169, 804895, 814465, 820493, …