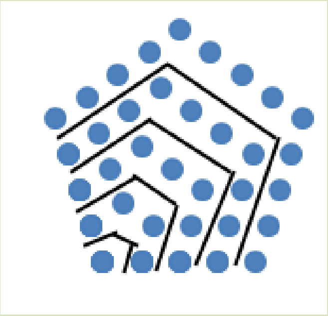
Números poligonales



Edición 2023

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Esta es la edición 2023 de esta publicación, y en ella ya se incluyen todos los tipos de los poligonales clásicos. Algunos otros pueden no estar presentes, pero son de poco interés, aunque no se descarta añadirlos en otras ediciones.

En esta publicación se usan herramientas propias, como la calculadora Calcupol o el Buscador de Naturales, que están enlazados debidamente.

Esperamos que las orientaciones prácticas y operativas con las que se desarrollan los temas hagan atractiva esta publicación. Siempre que sea oportuno, añadiremos estudios algebraicos y gráficos.

En nuestra publicación “Números y formas” están contenidas curiosidades sobre poligonales, y en especial sobre triangulares, oblongos y cuadrados, que no ha parecido oportuno incluir aquí, pera preservar la unidad de la publicación,

Tabla de contenido

Números poligonales en general

Estos números son, en realidad, una curiosidad histórica, y manantial de propiedades y coincidencias con otras ramas de las Matemáticas, y por eso se mantiene su estudio. Para la definición y características generales de estos números remitimos a algunas páginas que los tratan:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number

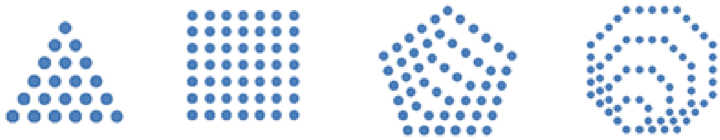
https://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html

http://oeis.org/wiki/Polygonal_numbers

DEFINICIÓN

Los números poligonales se forman mediante los contornos de polígonos regulares con lados de 1 a k puntos, con la condición de que compartan un vértice y sus dos lados contiguos.

Se entiende mejor con imágenes. Las páginas enlazadas más arriba las contienen con muy buen diseño. Aquí incluiremos unas más imperfectas, pero generadas de forma automática con Excel:



Triangular k=6 Cuadrado k=7 Pentagonal k=6 Octogonal k=8

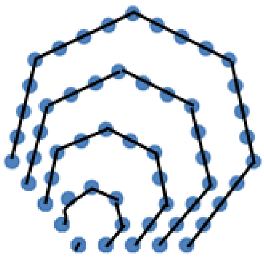
El objeto de estas y otras imágenes similares es aclarar que los poligonales no están formados por polígonos concéntricos (sería otro tipo de poligonales), sino adosados a un vértice y dos lados adyacentes.

FORMAS DE ENCONTRAR SU FÓRMULA

Para entender mejor la estructura interna de los números poligonales presentaremos varias formas de descomponerlos, y de cada una deduciremos la misma fórmula.

Polígonos adosados

En la definición hemos aludido a polígonos semejantes adosados y con lados crecientes. Para contar unidades, los hemos convertido en capas con forma de línea quebrada, con una estructura como de cebolla:



Aunque la idea de capas es sencilla, presenta el inconveniente de que cada polígono comparte unidades con el anterior y no se puede contar completo su perímetro. Lo explicamos con la imagen de arriba:

La primera capa es la unidad, por definición. En la segunda hay 7 unidades, ya que tiene forma de heptágono, pero comparte una con la anterior, luego la capa tendrá 7-1=6 unidades. La tercera está formada por 14, pero comparte 3 con las anteriores, se quedará en 2*7-3=11. De la misma forma, la cuarta tendrá 3*7-5=16 y la quinta 4*7-7=21. En total se contarán 1+6+11+16+21=55, que corresponde al valor de un número poligonal de 7 lados e índice 5.

De este esquema podemos deducir la fórmula de los números poligonales, que también deduciremos más adelante con otros esquemas. Llamaremos **tipo n** al número de lados y **orden (o lado) k** a las unidades de cada lado. Al poligonal lo representaremos por **P(n,k)** o $\mathbf{P_{n,k}}$.

Según el razonamiento anterior, habrá que sumar:

1+n-1+2n-3+3n-5+4n-7+…+(k-1)n-(2(k-1)-1)

Aplicamos la fórmula de la suma de una progresión aritmética (en este caso dos progresiones)

$S_n=(a_1+a_n)*n/2$

Nos quedará, distinguiendo bien las dos progresiones n, 2n, 3n,…(k-1)n y 1, 3, 5, 7,…2(k-1)-1

P(n,k)=1 + (n+(k-1)n)*(k-1)/2 - (1+2(k-1)-1)*(k-1)/2

=1+(k-1)/2(kn-(2k-2))

Desarrollando esto nos queda

P(n,k)=k^2*(n-2)-k(n-4))/2

Es costumbre sacar factor común k, con lo queda la conocida fórmula para poligonales, que aparecerá muchas veces aquí:

$$P_{n,k} = \frac{k(k(n-2)-(n-4))}{2}$$

En el ejemplo del que hemos partido se daría el valor 55:

P(7,5)=5*(5*(7-2)-(7-4))/2=5*(25-3)/2=5*22/2=55

Hemos complicado un poco el cálculo para llegar a la fórmula general, pero las capas siguen una progresión aritmética: 1, 6, 11, 16, 21,…de diferencia 5. Podemos generalizar y considerar que si el número de lados es **n**, la diferencia será **n-2**, con lo que la suma será

P(n,k)=1+1+n-2+1+2(n-2)+1+3(n-2)+…

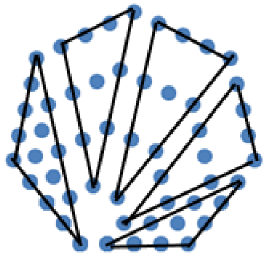
=(1+1+(k-1)(n-2))k/2=k/2(k(n-2)-(n-4))

y llegamos a la misma fórmula. Así que

El número poligonal P(n,k) equivale a la suma de k términos de una progresión aritmética con diferencia n-2, desde 1 hasta 1+(k-1)(n-2)

Un triángulo de lado k y n-3 triángulos de lados k-1

En el mismo heptágono del apartado anterior podemos contar unidades separándolas en forma de triángulos. El primero vemos que tienen 5 unidades de lado, y después se pueden adosar cuatro con 4 unidades por lado.



En general, P(n,k) será igual a **un triángulo de lado k y n-3 triángulos de lado k-1**.

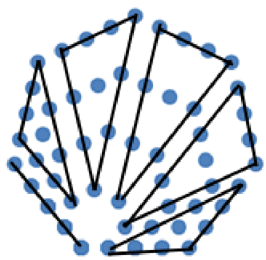
Recordemos que la fórmula de un número triangular de lado k es T(k)=k(k+1)/2. Con estas aclaraciones, podemos iniciar la cuenta:

POL(n,k)=T(k)+(n-3)T(k-1)=k(k+1)/2+(n-3)*k(k-1)/2=k(k+1+(n-3)(k-1))/2=**k(k(n-2)-(n-4))/2**

Llegamos a la misma fórmula general.

Un lado y n-2 triángulos

Es fácil ver que si sumamos un lado de longitud k y n-2 triángulos de lado k-1, también se forma el poligonal:



Procedemos a sumar como en los casos anteriores:

POL(n,k)=k+(n-2)k(k-1)/2=k(2+(n-2)(k-1))/2=**k(k(n-2)-(n-4))/2**

O bien **POL(n)=((n-2)k^2-(n-4)k)/2**

CARACTERIZACIÓN DE LOS POLIGONALES

En la fórmula general $POL(n,k)=((n-2)k^2-(n-4)k)/2$ podemos despejar la variable **k** en función del valor P del número poligonal y del tipo o número de lados **n**:

$(n-2)k^2-(n-4)k-2P=0$

El discriminante $D=b^2-4ac$ de esta ecuación ha de ser un cuadrado, a fin de que k sea entero, es decir, que deberá ser cuadrada la expresión

$\mathbf{(n-4)^2+8P(n-2)}$

Por ejemplo, deseamos saber si el número 81 es heptagonal, o poligonal de 7 lados.

Aplicaremos $D=(7-4)^2+8*81(7-2)=9+8*81*5=3249=57^2$

Como es cuadrado, podemos continuar. Para despejar k volvemos a la ecuación de segundo grado, y quedará **k=(n-4+RAIZ(D))/(2(n-2)**

En nuestro ejemplo, k=(3+57)/(2*5)=6

Luego 81 es un número heptagonal de lado 6.

Este proceso se puede plasmar en una función de hoja de cálculo. La hemos llamado QUEPOLIGONAL, para averiguar si un número es un poligonal concreto:

Function quepoligonal(n, k) Los parámetros son el número n y el tipo de poligonal

Dim d

d = Sqr((k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2)) ‘Raíz cuadrada del discriminante

‘Si la raíz es entera, el número es poligonal del tipo dado y se despeja

If d <> Int(d) Then quepoligonal = 0 Else quepoligonal = (k - 4 + d) / (2 * k - 4)

End Function

USO DEL BUSCADOR DE NATURALES

En las últimas mejoras de esta herramienta hemos añadido la condición de POLIGONAL, lo que facilitará su uso en esta publicación. Se puede descargar desde nuestra página hojamat.es:

	buscador_2.xlsm
	buscador_2.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador

La primera utilidad que podemos aprovechar es la construir rápidamente listados condicionados de poligonales. Vemos algunos ejemplos:

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	1	
2	21	
3	65	
4	133	
5	225	
6	341	
7	481	
8	645	
9	833	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1000

Con estas propiedades:

POLIGONAL 8
NO PAR

Se observa en la imagen que se han buscado octogonales impares. Es bastante rápido el proceso.

En este otro ejemplo se buscan números triangulares que son también hexagonales, y que resulan ser los de orden impar.

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	1	
2	6	
3	15	
4	28	
5	45	
6	66	
7	91	
8	120	
9	153	
10	190	
11	231	
12	276	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	300

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
POLIGONAL 6

Por último, en el siguiente ejemplo buscamos decagonales que terminen en la cifra 5:

Resultado de la búsqueda Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	85	
2	175	
3	855	
4	1105	
5		
6		
7		

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	2000

Con estas propiedades:

POLIGONAL 10
TERMINA EN 5

Ya iremos acudiendo a este Buscador cuando lo consideremos útil, pero integrado su uso en los apartados generales de la publicación, sin dedicarle uno específico.

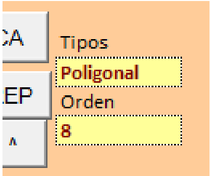
USO DE LA CALCULADORA “CALCUPOL”

Esta calculadora es una hoja de cálculo (En Excel o Calc) que puedes descargar desde la misma página web:

	calcupol.xlsm
	calcupol.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/calcupol.xlsm

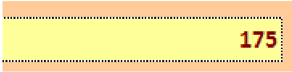
Esta herramienta está diseñada para varios tipos de números figurados, como los piramidales, oblongos o centrados. Para usar la calculadora, por ejemplo, para números pentagonales, hay que comenzar eligiendo el tipo **Poligonal** y después el **número de lados**. No es necesario para algunos cálculos, pero sí es conveniente tenerlo fijado. Por ejemplo, para estudiar los octógonos elegiríamos **Poligonal** de **orden 8**.



Las operaciones fundamentales que puedes efectuar con esta calculadora son:

Cálculo directo: Basta señalar los botones (recuerda que todo va con el ratón, no con el teclado) N POL K = , siendo N el orden y K el índice. Por ejemplo, para encontrar el decágono de lado 7 señalaríamos 1 0 POL 7 = con el resultado de 175, que es correcto, como puedes comprobar en http://oeis.org/A001107

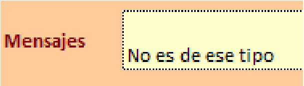
El resultado se te ofrece en la pantalla superior de la calculadora:



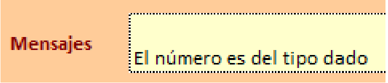
No olvides el signo =. Los resultados se borran con el botón CA.

Identificación: Dado un número cualquiera, puedes usar la tecla ES para saber si ese número es poligonal de algún tipo. Concreta como Orden 9 e intenta averiguar si el número 2291 es un eneágono. Escribirías CA 2 2 9 1 ES

Como hemos elegido el número al azar, lo más probable es que no sea eneágono. Efectivamente, nos responde:



Si hubiéramos escrito el 2301, cercano al anterior, la respuesta hubiera sido positiva:



Además, en la pantalla superior aparecería su orden o lado:

Así que hemos comprobado que 2301 es eneagonal de índice 26. Consulta http://oeis.org/A001106

Próximo y anterior

¿Cómo hemos llegado al número 2301? Como teníamos en pantalla el número a probar 2291, bastó usar el botón PROX para que nos devolviera el siguiente eneágono al de prueba:

Con las teclas PROX y ANT podemos recorrer todos los números poligonales de un índice dado. Si tienes en pantalla 1 y usas PROX de forma reiterada, recorrerás la sucesión de poligonales que desees.

El resto de prestaciones lo tienes explicado en las Instrucciones que acompañan a la calculadora en su misma hoja. No le pidas la misma versatilidad que a las comerciales. Algunos cálculos combinados no serán correctos.

RECURRENCIAS

El estudio por capas que emprendimos en apartados anteriores nos llevó a

El número poligonal P(n,k) equivale a la suma de k términos de diferencia n-2, desde 1 hasta 1+(k-1)(n-2)

Por tanto, el siguiente término de la progresión será 1+k(n-2). Esto nos lleva a una relación recurrente:

P(n,k+1)=P(n,k)+k(n-2)+1

Por ejemplo, los primeros números hexagonales son 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66 , 91,…Por tanto 91 es el hexagonal de índice 7. A partir de él podemos encontrar el número 8 con esta relación de recurrencia:

H(8)=H(7)+7*(6-2)+1=91+28+1=120, que , en efecto es el siguiente hexagonal.

Esta recurrencia la usaremos como tabla y como función.

Como tabla, basta crear los primeros términos mentalmente y después seguir aplicando la recurrencia. Probamos con octogonales, en los que los primeros serán 1 y 8. Después, al octogonal de índice k habrá que sumarle, según hemos visto, k(8-2)+1=6k+1 (es como la fórmula de una nueva capa), y quedará esta tabla:

K	Octogonal	
1	1	
2	8	
3	21	*OCT(k+1)=OCT(k)+6k+1*
4	40	
5	65	
6	96	
7	133	
8	176	
9	225	
10	280	
11	341	
12	408	

En efecto, la segunda columna contiene los primeros octogonales, creados a partir de 1 y 8 junto con sus índices, mediante ***OCT(k+1)=OCT(k)+6k+1***

Lo puedes comprobar en http://oeis.org/A000567

Como función, podemos acudir a la recursividad que admite Excel y otras hojas de cálculo, que permiten que una función se llame a sí misma, dentro de unos límites.

Si lo intentas con números grandes te puede fallar. Este código usa la recursividad:

Public Function polig_rec(n, k)

If k = 1 Then
polig_rec = 1 ‘El primer poligonal es 1
ElseIf k = 2 Then
polig_rec = n ‘El segundo es ***n***
Else
polig_rec = polig_rec(n, k - 1) + (n - 2) * (k - 1) + 1 ‘Recursividad
End If
End Function

Lo hemos probado con los hexagonales, que se generan con la fórmula n(2n-1), y hemos comprobado la coincidencia entre ambas técnicas:

N	N(2N-1)	Recursivo
1	1	1
2	6	6
3	15	15
4	28	28
5	45	45
6	66	66
7	91	91
8	120	120
9	153	153
10	190	190

Recurrencia en función de n

Si fijamos el valor de k, es posible deducir el valor de P(n,k) en función de P(n-1,k). Es una recurrencia que se basa en las descomposiciones en triangulares vistas más arriba, y consiste en sumarle un triangular de lado k-1:

P(n+1,k)=P(n,k)+T(k-1)=P(n,k)+k(k-1)/2

Lo demostramos:

$P(n,k)+T(k)=k(k*(n-2)-(n-4))/2+k(k-1)/2=(nk^2-2k^2-nk+4k+k^2-k)/2=$

((n+1-2)k2-(n+1-4)k)/2=P(n+1,k)

Por ejemplo, Pol(8,5)=65, Pol(7,5)=55 y T(4)=10 y se cumple 65=55+10

Con esta recurrencia podemos generar todos los poligonales que comparten índice. Por ejemplo, los de índice 4 se formarán sumando 4*3/2=6 al anterior:

En la imagen puedes comprobar que esos poligonales con k=4 presentan diferencias de 6.

Orden	k=4
Triangular	10
Cuadrado	16
Pentagonal	22
Hexagonal	28
Heptagonal	34
Octogonal	40

Una recurrencia de tercer orden

Es posible construir una recurrencia entre poligonales sin implicar el orden.

En http://oeis.org/wiki/Polygonal_numbers hemos encontrado la siguiente:

P(n,k)=3P(n,k-1)-3P(n,k-2)+P(n,k-3)

No es difícil justificarlo. Escribimos las fórmulas generales como polinomios en k y al desarrollar se comprueba la igualdad:

Desarrollamos el segundo miembro:

$3((k-1)^2*(n-2)-(k-1)(n-4))/2-3((k-2)^2*(n-2)-(k-2)(n-4))/2+((k-3)^2*(n-2)-(k-3)k(n-4))/2$

Como los cuadrados dependientes de k^2 y los de k son los mismos en los tres sumandos, bastará comprobar la equivalencia pare ellos solos:

Con cuadrados:

$3(k-1)^2-3(k-2)^2+(k-3)^2=3k2-6k+3-3k2+12k-12+k2-6k+9=k^2$

$3(k-1)-3(k-2)+k-3=3k-3-3k+6+k-3=k$

Luego en la recurrencia se construyen tanto k^2 como k y, por tanto, es válida.

Para estudiar la recurrencia incorporaremos el 0 como primer término de los poligonales. El segundo sería 1 y el siguiente, como ya hemos visto, n. Los coeficientes de la recurrencia son, según hemos visto, 3, -3 y 1.

Acudimos a nuestra hoja de cálculo para recurrencias lineales:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Probamos la recurrencia para poligonales de 13 lados. Las condiciones iniciales serán 0, 1, 13 y los coeficientes los ya conocidos 3, -3 y 1:

Coeficientes					
A	3	**B**	-3	**C**	1
Valores iniciales					
X0	0	**x1**	1	**x2**	13

Pulsamos el botón de “Ver sucesión” y obtendremos:

0
1
13
36
70
115
171
238
316
405
505
616
738

Estos son los primeros poligonales de índice 13. Lo puedes comprobar en http://oeis.org/A051865

Hemos conseguido generar estos poligonales mediante recurrencia lineal sobre los tres primeros (incluido el 0 por comodidad)

UNA PROPIEDAD TRANSVERSAL

2*P(n,k)=P(n-h,k)+P(n+h,k)

Esta igualdad expresa que cada número poligonal es el promedio entre otros dos de su mismo índice y con los órdenes simétricos respecto al suyo.

Por ejemplo, el hexagonal de índice 6 es 66, y el cuadrado y el octogonal de ese índice son, respectivamente, 36 y 96, con lo que se cumple que $66=(36+96)/2$

Su demostración es muy sencilla, pues partiendo de la fórmula general aplicada a $P(n-h,k)$ y $P(n+h,k)$ basta sacar factor común un 2:

$$k(k(n-h-2)-(n-h-4))/2+k(k(n+h-2)-(n+h-4))/2=k(k(2(h-2)-2(n-4))/2=2*P(n,k)$$

Esto permite, si disponemos de los primeros poligonales, como son los triangulares y cuadrados, generar los siguientes. Si en la identidad anterior hacemos $h=1$ y despejamos $P(n+h,k)$ tendremos:

$$P(n+1,k)=2*P(n,k)-P(n-1,k)$$

Se puede ordenar en forma de tabla de Excel:

Índice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonales	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonales	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Eneagonales	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonales	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

En ella, las dos primeras filas se han escrito manualmente, y por eso están destacadas en rojo. Las siguientes se han formado restando el doble del elemento de la fila anterior con el de dos filas más arriba. Puedes comprobar que el resultado es correcto. Por ejemplo, el octogonal tercero, 21, se ha formado mediante 2*18-15=36-15=21.

Otra propiedad

*Stuart M. Ellerstein, en http://oeis.org/A057145, afirma que **P(2n+4.n)=n^3**.*

No parece complicado demostrarlo. Sustituimos n por 3n+4 y k por n en la fórmula general:

$P(2n+4,n)=n(n*(2n+4-2)-(2n+4-4))/2=n(2n^2+2n-2n)/2=n^3$

Por ejemplo, un decágono (n=2*3+4) de índice 3 equivale a $3^3=27$

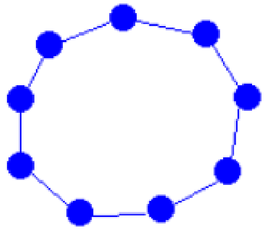
En efecto, escribimos en la calculadora *calcupol* $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{POL}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ y nos resulta 27.

¿ERES UN POLIGONAL?

Pedimos prestado este título de una entrada de nuestro blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/06/eres-un-poligonal.html

En ella nos planteábamos si un número dado no puede ser poligonal de ningún tipo, sin contar con el que tiene el mismo número de lados que él mismo:



Así, el número 9 es un eneágono.

Lo que sigue complementa otra entrada del blog dedicada al tema

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/01/multipoligonal.html

En la imagen también se descubre que el máximo número de lados de un número poligonal coincide con él mismo. Esto nos posibilita buscar qué poligonales pueden coincidir con N buscando entre 3 y N mediante un bucle. Como disponemos de la función *quepoligonal*, bastará analizarla en ese rango. Así se efectúa en esta función, que devuelve "NO" si un número no es poligonal salvo con su mismo número de lados, o bien la colección de tipos de poligonales si existen.

Function mpolig$(n)
Dim i, p
Dim s$

If n < 3 Then mpolig = "NO": Exit Function ‘Si es menos que 3 no puede ser poligonal
s$ = ""
For i = 3 To n – 1 ‘Llegamos hasta ***n-1***, porque ***n*** no nos vale
p = quepoligonal(n, i) ‘Preguntamos si es poligonal
If p > 0 And p = Int(p) Then s$ = s$ + " #" + Str$(i) + ", " + Str$(p) ‘Si lo es, devolvemos los tipos
Next i
mpolig = s
End Function

Con esta función descubrimos los números N que pueden ser poligonales para un índice menor que N. Son los verdaderos poligonales, por lo que se les denomina como *poligonales regulares*.

En la imagen puedes consultar los primeros, que vienen acompañados por los distintos tipos que admiten:

N	Tipos de poligonal
6	# 3, 3
9	# 4, 3
10	# 3, 4
12	# 5, 3
15	# 3, 5 # 6, 3
16	# 4, 4
18	# 7, 3
21	# 3, 6 # 8, 3
22	# 5, 4
24	# 9, 3
25	# 4, 5
27	# 10, 3
28	# 3, 7 # 6, 4
30	# 11, 3
33	# 12, 3
34	# 7, 4
35	# 5, 5
36	# 3, 8 # 4, 6 # 13, 3

La lista termina con el 36, que es, como ves, poligonal de tres tipos: triangular de lado 8, cuadrado de lado 6 y poligonal de 13 lados de medida 3.

En nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html

y siguiente, se estudia el caso de los triangulares cuadrados, entre ellos el 36, con el uso de la ecuación de Pell.

Estos poligonales regulares están publicados en http://oeis.org/A090466

Cambiando ligeramente las condiciones de búsqueda obtendremos aquellos números que no pueden ser poligonales salvo con el tipo trivial.

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 17, 19, 20, 23, 26, 29, 31, 32, 37, 38, 41, 43, 44, 47, 50, 53, 56…

Están publicados en http://oeis.org/A090467

Entre ellos figuran los números primos. Los que son compuestos, como 4, 8 y 14, los tienes en http://oeis.org/A176949

Se puede razonar esta presencia. Para que un número poligonal sea primo deberá ocurrir que

P=k(k(n-2)-(n-4))/2, con P primo.

El número k es mayor que 2 en los poligonales regulares, luego k/2 no puede valer 1. Por tanto, si queremos que P sea primo, deberemos considerar que el paréntesis valga 2, es decir:

Será k(n-2)-n+4=2, kn-2k-n+2=0, (k-1)(n-2)=0

Esto nos lleva o a k=1 o a n=2, en cuyo caso P sería negativo. No hay posibilidad de que P sea primo.

Caso de los múltiplos de 3

Los números que sí figuran todos entre los poligonales regulares son los múltiplos de 3 mayores que 3. Sigue la sucesión http://oeis.org/A090466 y verás que no falta ninguno. Esto es así por dos razones:

a) En el criterio para saber si un número es poligonal que sea un cuadrado la expresión **$(n-4)^2+8P(n-2)$** hacemos **$P=3(n-1)$**, con lo que representa a todos los múltiplos de 3 a partir de 6 (recordemos que b>2). Unos cambios en la expresión nos llevarán a un cuadrado:

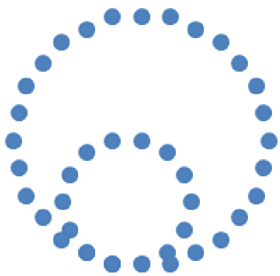
$(n-4)^2+8P(n-2) = n^2-8n+16+24(n-1)(n-2) = n^2-8n+16+24n^2-72n+48 = (1+24)n^2-(8+72)n+16+48 = 25n^2-80n+64 = (5n-8)^2$

Esto demuestra que los números múltiplos de 3 son poligonales. Su número de lados se obtendrá despejando n en P=3(n-1) y nos queda n=P/3+1. Como veremos más adelante, esta no sería la única solución. Muchos de ellos son también triangulares.

Un ejemplo: 39 es múltiplo de 3. Encuentro n tal como se explicó en el párrafo anterior: n=39/3+1)=14. Por tanto 39 se puede expresar como un polígono de 14 lados. Encontramos su índice, despejando en $39=k(k*(14-2)-(14-4))/2 = 6k^2-5k$

Resolvemos $6k^2$-5k-39=0 y nos da k=3 como solución entera positiva.

Luego el poligonal pedido es



Está formado por la suma (ver primera parte de este estudio) 1+(14-1)+(14*2-3)=1+13+25=39

b) Existe otra razón para justificar que todos los múltiplos de 3 a partir de 6 sean poligonales. Basta para ello fijar k en 3. Si k=3 queda:

P=3*(3*(n-2)-(n-4))/2=(9n-18-3n+12)/2)=(6n-6)/2=3n-3, que es un múltiplo de 3.

Todos los poligonales de índice 3 son múltiplos de 3

NÚMERO DE TIPOS DE POLIGONAL PARA UN NÚMERO

Si modificamos la función *mpolig* para que devuelva un número en lugar de una cadena de texto, podremos clasificar los números naturales según el número de tipos distintos de poligonal (no trivial) que admitan.

Los que acabamos de estudiar tendrán un resultado de 0, pues solo admiten el poligonal trivial. Hemos visto que otros admiten un poligonal nada más. Con la función *mpolig* modificada se descubren los primeros:

Un tipo: 6, 9, 10, 12, 16, 18, 22, 24, 25, 27, 30, 33, 34, 35, 39, 40, 42, 46, 48, 49, 52, 54, 57, 58, 60,…

Están publicados en http://oeis.org/A177029. Allí se catalogan como que presentan dos tipos de poligonales, porque cuentan el caso trivial.

Dos tipos: 15, 21, 28, 51, 55, 64, 70, 75, 78, 91, 96, 100, 111, 112, 117, 126, 135, 136, 141, 144, 145, 148, 154, 156,…

Por ejemplo, 111 puede ser un eneágono de lado 6 (111=6*(6*(9-2)-(9-4))/2=3*37=111) y también un poligonal de 38 lados de medida 3 (111=3*(3*(38-2)-(38-4))/2=3*37=111)

Tres tipos: 36, 45, 66, 81, 105, 120, 153, 171, 190, 196, 210, 261, 280, 351, 378, 396, 400, 405, 406, 456, 465, 477,…

Comienza con el 36, que hemos indicado, es un triangular cuadrado. Además, vimos que podía ser un poligonal de 13 lados.

Los demás poligonales regulares presentarán más de tres tipos (cuatro contando el trivial). Los primeros son:

225, 231, 276, 325, 435, 441, 540, 561, 595, 616, 651, 820, 861, 936, 946,1035,1089,1128,1225,…

1128, por ejemplo, puede ser triangular, hexagonal, poligonal de 42 lados o de 377.

Con esta cuestión finalizamos el estudio general de los números poligonales. En otros apartados que siguen se van estudiando los casos particulares.

Como los poligonales de índice pequeño son los más populares, existen varias sucesiones con dos de esos casos simultáneos. Algunas de ellas son:

Triangulares y cuadrados

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, 63955431761796,… http://oeis.org/A001110

Les dimos unas vueltas en las entradas de mi blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/11/damos-vueltas-los-triangulares.html

En ellas se acude a la ecuación de Pell, a recurrencias y fórmulas generales para estos números. Se añade una función generatriz y algunas curosidades.

Triangulares y hexagonales

Es fácil ver que todo número hexagonal de índice k equivale a un triangular de índice 2k-1. Puedes consultar el capítulo de números hexagonales. En mi blog hemos estudiado el caso contrario, el de triangulares que no pueden ser hexagonales por tener lado par.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/09/triangulares-de-lado-par.html

Cuadrados y pentagonales

Son más raros. Los primeros están publicados http://oeis.org/A036353

1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001, 83314021887196947001, 799981229484128697805801,…

Cuadrados y hexagonales

También escasean: 1, 1225, 1413721, 1631432881, 1882672131025, 2172602007770041, 2507180834294496361, 2893284510173841030625, http://oeis.org/A046177

No merece la pena seguir.

TEOREMA DE FERMAT PARA POLIGONALES

El teorema del número poligonal de Fermat afirma que cada número natural es suma de a lo máximo n números poligonales. Omitimos su historia, que puedes consultar fácilmente. Aquí nos interesa su comprobación mediante nuestra herramienta Cartesius http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Esta herramienta, diseñada en Excel y Calc, no es muy potente, y solo es útil para comprobaciones con números pequeños.

Explicaremos su uso con un ejemplo, como sería encontrar todas las descomposiciones del número 100 en suma de cinco pentagonales o menos. Para conseguirlo hemos usado esta programación en Cartesius:

xtotal=5
xt=1..10
xt=suc((3*(n-1)^2-(n-1))/2)
suma=100
creciente

Con ella hemos conseguido estas descomposiciones:

X1	X2	X3	X4	X5
0	5	22	22	51
1	1	1	5	92
1	1	12	35	51
1	5	12	12	70
12	22	22	22	22

Observamos que 100 admite una descomposición en suma de cuatro pentagonales y otras cuatro con cinco pentagonales. Puedes comprobar en http://oeis.org/A000326 que, efectivamente, todos los sumandos son pentagonales.

Explicamos línea por línea el planteo:

xtotal=5

Como buscamos sumandos pentagonales, según el Teorema de Fermat, debemos exigir que sean 5. Se entiende que eso es lo que indica *xtotal=5*

xt=1..10

Esta línea indica el rango de búsqueda de los sumandos. Suele estar indicado elegir la raíz cuadrada del número que se estudia, en este caso el 100. Si no se tiene seguridad, basta consultar las columnas de sumandos. En este caso:

X1
0
1
5
12
22
35
51
70
92
117

Como llega a 100 y se pasa, hemos elegido bien el rango.

xt=suc((3*(n-1)^2-(n-1))/2)

Esta es la fórmula para pentagonales, pero la hemos aplicado a **n-1** en lugar de a **n**, para permitir la entrada del 0 en los sumandos.

suma=100

No necesita explicación. Exige que la suma sea 100

creciente

Esta orden no es necesaria, pero, al exigir sumandos crecientes, simplifica bastante la presentación final.

Al pulsar sobre el botón **Iniciar**, obtendremos todas las descomposiciones que hemos incluido más arriba.

Si el rango elevado al número de sumandos se acerca a números de cinco cifras, el proceso se hace muy lento y hay que dejar al ordenador que trabaje él solo durante bastantes minutos. Es una "explosión combinatoria". Lo bueno es que consigues todos los datos posibles.

Otro ejemplo sería descomponer 80 en números hexagonales:

xtotal=6
xt=1..9
xt=suc((n-1)*(2*(n-1)-1))
suma=80
creciente

Resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	1	6	28	45
0	1	1	6	6	66
1	6	15	15	15	28
6	6	6	6	28	28

Casos triviales con el Buscador

Esta herramienta es elemental, y su utilidad es restringida, pero con ella es fácil encontrar soluciones a la descomposición de un número en triangulares o cuadrados. La condición SUMA T T T descompone un número en suma de triangulares. En la imagen comprobamos que todos los números entre 100 y 110 se descomponen en tres triángulos:

Solución	Detalles
100	1 + 21 + 78
101	1 + 45 + 55
102	1 + 10 + 91
103	1 + 36 + 66
104	3 + 10 + 91
105	3 + 36 + 66
106	6 + 45 + 55
107	1 + 1 + 105
108	6 + 36 + 66
109	1 + 3 + 105
110	10 + 45 + 55

Buscamos desde el número	100
Hasta el número	110

Con estas propiedades:

SUMA T T T

Con la condición SUMA C C C C descomponemos en cuatro cuadrados:

Solución	Detalles
200	0 + 0 + 4 + 196
201	0 + 1 + 4 + 196
202	0 + 0 + 81 + 121
203	0 + 1 + 81 + 121
204	0 + 4 + 4 + 196
205	0 + 0 + 9 + 196
206	0 + 1 + 9 + 196
207	1 + 1 + 9 + 196
208	0 + 0 + 64 + 144
209	0 + 1 + 64 + 144
210	0 + 16 + 25 + 169

Buscamos desde el número	200
Hasta el número	210

Con estas propiedades:

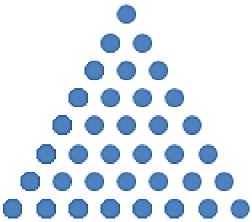
SUMA C C C C

Dejamos aquí las propiedades generales de los poligonales.

NÚMEROS TRIANGULARES

DEFINICIONES Y GENERACIÓN

Un número triangular es aquel cuyas unidades se pueden situar en forma de triángulo:



En la imagen puedes observar que estas unidades se cuentan por diagonales:
1+2+3+4+5+6+7+8=36

Por tanto, 36 es un número triangular. La misma imagen te sugiere la primera definición de un número triangular, como la suma de los primeros números naturales:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

Los primeros números triangulares son:

1, 3, 6, 10, 15, 21,…

El 1 se define como triangular por convenio, ya que no tiene esa forma, pero cumple la definición de más arriba y otra que veremos más adelante.

Puedes consultar la sucesión de números triangulares en https://oeis.org/A000217

En esa página OEIS también incluyen el 0, pero no lo consideraremos aquí.

Con el Buscador de Naturales puedes usar dos condiciones, TRIANGULAR o POLIGONAL 3. Por ejemplo, en la imagen hemos obtenido los primeros triangulares de cuatro cifras.

Solución	Detalles
1035	45
1081	46
1128	47
1176	48
1225	49
1275	50
1326	51
1378	52
1431	53
1485	54

Buscamos desde el número	1000
Hasta el número	1500

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
EVALUAR INT(RAIZ(8*N+1)-1)/2

Como curiosidad, le hemos añadido la orden de EVALUAR con la fórmula para calcular los índices de esos triangulares, que, evidentemente, son consecutivos.

Generación mediante una hoja de cálculo

Es muy fácil acumular los primeros números naturales para crear una lista de números triangulares. En la siguiente figura lo tienes explicado:

1	1	1	
2	2	3	Generación como s
3	3	6	
4	4	10	Columna A
5	5	15	
6	6	21	A1=1
7	7	28	An=An-1+1
8	8	36	
9	9	45	Columna B
10	10	55	
11	11	66	B1=A1
12	12	78	Bn=An+Bn-1
13	13	91	
14	14	105	
15	15	120	
16	16	136	
17	17	153	
18	18	171	
19	19	190	
20	20	210	

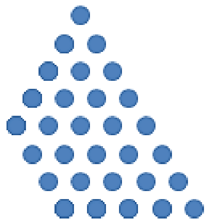
En la columna A se han escrito los números naturales. Tal como se explica en la imagen, se declara A1=1 y en el resto de la columna, se define cada elemento como el anterior más una unidad: $A_n=A_{n-1}+1$.

Siguiendo la explicación de la imagen, en la columna B definimos B1 como igual a A1, lo que constituye la primera suma, y, por tanto, el primer número triangular. Después, cada triangular se forma sumando el elemento de su izquierda con el de arriba, es decir: $B_n=A_n+B_{n-1}$.

En todo el documento tendrás a tu disposición hojas de cálculo descargables. La imagen anterior está tomada del archivo *triangulos1.xlsm*, descargable desde

http://www.hojamat.es/blog/triangulos1.xlsm

Esta generación de triangulares tiene una consecuencia que el autor usa a menudo en otro tipo de publicaciones, y es que cualquier suma de números consecutivos equivale a la diferencia entre dos números triangulares. Es como si truncáramos el triángulo eliminándole un triángulo menor, hasta dejar un trapecio:



En esta imagen vemos representada la suma 4+5+6+7+8, que, con un poco de imaginación podemos interpretar como la diferencia entre el triángulo de lado 8 y el de lado 3:

4+5+6+7+8 = 30 = 8*9/2-3*4/2 = 36-6 = 30

Un número triangular es la suma de una progresión aritmética, luego podemos aplicar la fórmula general de las progresiones a este caso particular

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aquí viene bien recordar la anécdota de Gauss niño. La tienes en

(https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

Esta fórmula, n(n+1)/2, es la más popular y más usada para el cálculo de los números triangulares. En la hoja *triangulos1.xlsm* la tienes implementada como TRIANGULAR

En realidad, esta fórmula se corresponde con la del número combinatorio C(N+1; 2). Por tanto, también nos servirá la expresión en Excel =COMBINAT(N+1;2), que es la segunda implementada en la hoja *triángulos1.xlsm*.

Funciones definidas para triangulares	
Directa	
TRIANGULAR(N)	78
Cominatoria	
COMBINAT(N+1;2)	78

Esto significa que los números triangulares constituyen la tercera diagonal del triángulo de Pascal. Lo vemos en Excel:

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Definición por recurrencia

Esta es una mera curiosidad, porque en Excel, aunque las recurrencias funcionan, pueden presentar problemas para números grandes. La idea es definir un número triangular de esta forma:

Si N=1, TRIANGULAR(N)=1
Si N>1, TRIANGULAR(N)=N+TRIANGULAR(N-1)

Simplemente definimos un número triangular como el resultado de sumar el número de orden al triangular anterior. Para nosotros será un entretenimiento. Este sería el listado de la función recurrente, a la que hemos rotulado como TRIANGULAR_R:

Public Function triangular_r(n)
If n = 1 Then
triangular_r = 1
Else
triangular_r = n + triangular_r(n - 1)
End If
End Function

No necesita explicación, ya que reproduce la definición por recurrencia. La tienes implementada en la misma hoja de definiciones:

Funciones definidas para triangulares	
Directa	
TRIANGULAR(N)	405450
Cominatoria	
COMBINAT(N+1;2)	405450
Recurrencia	
TRIANGULAR_R(N)	405450

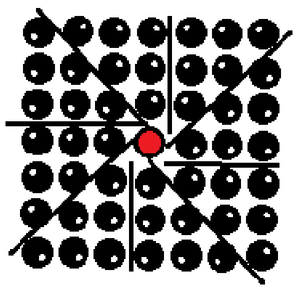
Esta definición por recurrencia nos sirve también para demostrar la fórmula general mediante inducción completa:

$T(1)=1$

$T(n+1) = T(n)+n+1 = n(n+1)/2+n+1 =$
$(n(n+1)+2(n+1))/2=(n+1)(n+2)/2$

Reconocimiento de los números triangulares

Existe una propiedad sencilla para saber si un número es triangular o no. La idea es que si adosamos de forma conveniente un triangular consigo mismo ocho veces, se forma un cuadrado al que le falta una unidad.



En la imagen vemos el número triangular 6 adosado ocho veces y dejando el hueco central vacío. Por tanto, si le sumamos esa unidad, se convertirá en un cuadrado: $6*8+1=49=7^2$

Este es un buen criterio para reconocer un número triangular T, que 8T+1 sea un cuadrado. Se puede confirmar de forma algebraica:

$$8\frac{n(n+1)}{2}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

En la imagen, n=3, y el lado del cuadrado es 2*3+1=7

Este criterio nos permite crear la función ESTRIANGULAR en Excel o Calc:

Function estriangular(n) As Boolean
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function

En PARI, el código es más compacto:

istriangular(n)=issquare(8*n+1)

Si en el cuadrado formado despejamos la variable n, obtendremos el orden de ese número triangular:

Public Function ordentriang(n)
Dim k
If estriangular(n) Then k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
Else k = 0
ordentriang = k
End Function

Le hemos asignado un cero a los números que no son triangulares. Con estas funciones podemos encontrar el triangular más próximo a un lado u otro de un número. Usaremos estas funciones:

El mayor número triangular menor o igual que N:

Public Function prevtriang(n)
Dim k
k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
prevtriang = k * (k + 1) / 2
End Function

El menor triangular mayor que N

Public Function proxtriang(n)
Dim k
k = ordentriang(prevtriang(n))
proxtriang = (k + 1) * (k + 2) / 2
End Function

En la hoja de referencia
http://www.hojamat.es/blog/triangulos1.xlsm lo hemos implementado.

¿Es triangular este número?			10000
			NO
		Orden	
Triangular anterior			9870
Triangular posterior			10011

Si el número del rectángulo amarillo es triangular, nos devuelve su orden y, en caso contrario, el triangular anterior y posterior.

Una curiosidad

Si en lugar de buscar 8T+1 para obtener un cuadrado, lo intentamos con 9T+1, resultará un triangular. Si T es de orden **n**, 9T+1 será de orden **3n+1**. Basta ver esta equivalencia:

$$9\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{9n^2+9n+2}{2}$$

$$\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}=\frac{9n^2+9n+2}{2}$$

Por ejemplo, T(10)=55, 9T(10)+1=496=T(31)=T(3*10+1)

Primeras propiedades y significados varios

Continuamos el tema de los números triangulares con propiedades sencillas y algún significado. No se tratarán de forma exhaustiva, sino que se elegirán las que mejor se adapten a las técnicas que usamos.

PROPIEDADES ELEMENTALES

Los números triangulares terminan en 0, 1, 3, 5, 6 u 8.

Aquí tienes los desarrollos en todos los casos posibles según la última cifra:

1*2/2=1, 2*3/2=3, 3*4/2=6, 4*5/2=10, 5*6/2=15, 6*7/2=21, 7*8/2=28, 8*9/2=36, 9*10/2=45

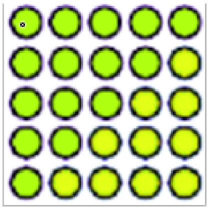
Las terminaciones son las previstas.

La suma de Tn y Tn-1 es un cuadrado perfecto o, si se quiere usar la terminología pitagórica, un número cuadrado.

Lo vemos con la fórmula:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2}{2}=n^2$$

Ahora lo entenderemos mejor con una imagen:



Estos dos triangulares son consecutivos, uno de lado 4 y otro de lado 5, y adosados forman un cuadrado.

Inserción de paréntesis

Un número triangular, al ser también un número combinatorio, se puede interpretar como el número de formas de insertar un par de paréntesis entre varias letras. Por ejemplo, entre tres letras XYZ se pueden insertar así: (X)YZ (XY)Z (XYZ) X(Y)Z X(YZ) XY(Z), que son seis, al igual que el número triangular T(4)=4*3/2.

En general, si tenemos k letras, los paréntesis se pueden situar en k+1 huecos y como han de ir de dos en dos, serán combinaciones de k+1 objetos sobre 2. Son combinaciones porque los símbolos "(" y ")" no se pueden intercambiar.

Relación con un cubo

Todo cubo equivale a la diferencia entre los cuadrados de dos triangulares consecutivos.

Por ejemplo, 8 es la diferencia entre 3^2 y 1^2, los primeros triangulares.
No es difícil demostrarlo. Aquí tienes el desarrollo:

$T(n+1)^2-T(n)^2= (n+1)^2(n+2)^2/4-(n+1)^2n^2/4 =$
$(n+1)^2(4n+4)/4 = (n+1)^3$

Apretones de manos

Por ser un número combinatorio, los triangulares resuelven el problema del número de apretones de manos distintos que se pueden dar en una reunión. Si asisten N personas, se podrán dar la mano de N(N-1)/2 formas, lo que equivale a T(n-1).

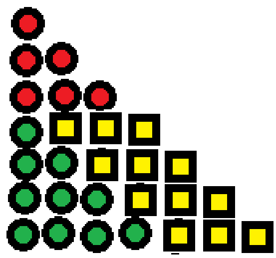
Equivalencias entre triangulares

T(a+b)=T(a)+T(b)+ab

Algebraicamente se deduce con facilidad:

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}-\frac{a(a+1)}{2}-\frac{b(b+1)}{2}=\frac{2ab}{2}=ab$$

En la imagen, el triángulo total equivale a T(7)=21, Los círculos rojos, T(3)=6, los verdes, T(4)=10, y los cuadrados, 3*4=12. Se cumple esta igualdad: T(3+4)=T(3)+T(4)+3*4



Triangular del producto

*T(ab)=T(a)*T(b)+T(a-1)*T(b-1)*

Lo demostramos algebraicamente:

Restamos los primeros productos y comprobamos que la diferencia coincide con el tercer producto:

$T(ab)-T(a)*T(b)=ab*(ab+1)/2-a(a+1)/2*b(b+1)/2=(2a^2b^2+2ab-(a^2+a)(b^2+b))/4=(2a^2b^2+2ab-a^2b^2-a^2b-ab^2-ab)/2=(a^2b^2-a^2b-ab^2+ab)/4=ab(a-1)(b-1)/4=T(a-1)*T(b-1)$

Por ejemplo:

T(3)=6, T(4)=10, T(3*4)=T(12)=12*13/2=78

T(3)*T(4)=6*10=60, T(3-1)=T(2)=3, T(4-1)=T(3)=6, luego 78=6*10+3*6=60+18=78.

Triangulares que son cuadrados

Hay triangulares, como 1 y 36, que son también cuadrados. Los primeros son:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… (http://oeis.org/A001110)

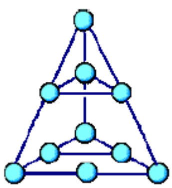
Puedes profundizar este concepto en mi entrada de blog
https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html
y en su siguiente.

En ellas se deducen varias recurrencias basadas en una ecuación de Pell. La más popular, que coincide con Wikipedia, es A(n)=34A(n-1)-A(n-2)+2. Con ella es fácil obtener todos los triangulares cuadrados a partir del o y el 1. Se puede construir con hoja de cálculo.

0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881

Suma de los primeros números triangulares

La suma de los n primeros números triangulares es también conocida como número tetraédrico, así el enésimo número tetraédrico es la suma de los primeros n números triangulares.



Su expresión es:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Si escribimos un número triangular como $(n^2+n)/2$, podemos separar la suma de triangulares en la mitad de la de los cuadrados y de los enteros. Para cada uno le aplicamos la fórmula correspondiente:

$S(n)=(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.n^2+1+2+3+4+\ldots n)/2=n(n+1)(2n+1)/12+n(n+1)/4=n(n+1)(2n+1+3)/12=n(n+1)(n+2)/6$

Es fácil ver que esta suma coincide con un número combinatorio:

$$S(n)=\binom{n+2}{3}$$

Por ejemplo, 1+3+6+10+15+21=56, que es el número combinatorio de 8 sobre 3 (se puede comprobar en Excel con COMBINAT(8;3)

En esta captura de pantalla hemos creado números tetraédricos (en la segunda columna) a partir de los triangulares, con el Buscador:

Solución	Detalles
1	1
3	4
6	10
10	20
15	35
21	56
28	84
36	120
45	165
55	220
66	286
78	364
91	455

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	100

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
EVALUAR TOTALES

Límite de la suma de inversos

Otro resultado muy interesante es el de que la suma de los inversos de los números triangulares tiende a 2. Si quieres desarrollarlo basta que pienses que 1/3 = (2/2 - 2/3), 1/6 = (2/3 - 2/4) y así sucesivamente. Desarrolla la suma y verás anularse términos.

Los triangulares en la suma de cubos

*La suma de los **n** primeros cubos equivale al cuadrado del triangular de orden **n***

Es fácil demostrarlo por inducción. Se cumple en los primeros casos

$1=1^2$
$1+8=3^2$
$1+8+27=6^2$

Para completar la inducción a $T(n)^2$ le sumamos otro cubo y se convierte en $T(n+1)^2$. Esta equivalencia se puede comprobar con la calculadora Wiris:

$$(n^2+n)^2/4+(n+1)^3 \quad = \quad \frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{3}{2}\cdot n^3+\frac{13}{4}\cdot n^2+3\cdot n+1 \quad \text{Calc}$$

$$\frac{((n+1)^2+n+1)^2}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{3}{2}\cdot n^3+\frac{13}{4}\cdot n^2+3\cdot n+1 \quad \text{Calc}$$

OTRAS PROPIEDADES

Teorema de Gauss

En la página de Wikipedia en español dedicada a los números triangulares, https://bit.ly/2Y2p6qc, puedes leer la historia del descubrimiento de Gauss de que todo número es suma de tres triangulares, si admitimos el 0 y la existencia de repetidos.

Por ejemplo, elegido al azar el número 23761, se puede comprobar que, entre otros muchos casos, equivale a la suma T(67)+T(92)+T(185). Con cualquier calculadora se verifica que
67*68/2+92*93/2+185*186/2=23761.

Lo interesante es que, en general, existen muchas sumas de este tipo para un mismo número. En el de nuestro ejemplo, 23761, más de cien. En la imagen hemos recortado parte de ellas:

```
15, 741, 23005
15, 11026, 12720
21, 8515, 15225
28, 5778, 17955
45, 496, 23220
45, 11781, 11935
55, 1128, 22578
55, 4005, 19701
```

Es interesante destacar que también pueden existir sumas de dos triangulares, o, lo que es igual, que uno de los tres sea 0. Aquí tienes un ejemplo para 23761:

23761=25*26/2+216*217/2

Con el siguiente programa en PARI puedes descomponer un número en todas las ternas posibles de triangulares:

u=23761;for(i=0,sqrt(2*u+1),p=i*(i+1)/2;for(j=i,u-p/2,q=j*(j+1)/2;v=u-p-q;if(issquare(8*v+1),if(v>=p&&v>=q,print(p,",   ",q,", ",v)))))

Para otro número cualquiera basta sustituir u=23761 por el valor adecuado. Por ejemplo, para u=73 quedaría:

```
0, 28, 45
1, 6, 66
1, 36, 36
3, 15, 55
```

El listado ha sido recortado al probar el algoritmo para el 73 en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html

También aquí hay una solución con dos triangulares (y el cero).

Toda cuarta potencia es suma de dos triangulares de dos formas distintas

La primera forma se desprende de una propiedad vista con anterioridad, y es que todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos. Si lo adaptamos a una cuarta potencia quedará:

$$n^4 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} = T(n^2) + T(n^2-1)$$

Por ejemplo,
3^4=81=9(9+1)/2+9(9-1)/2=45+36=T(9)+T(8)

La segunda forma se basa en una identidad algebraica. Descompone la cuarta potencia en el triangular de orden n^2-n-1 y el de orden n^2+n-1, es decir:

$n^4=(n^2-1-n)(n^2-1-n+1)/2+(n^2-1+n)(n^2-1+n+1)/2$

Hemos comprobado esta identidad con la calculadora Wiris (que usa la variable X en lugar de N):

$$((x^2-x-1)(x^2-x)+(x^2+x-1)(x^2+x))/2 \quad = \quad x^4$$

Así, por ejemplo, se cumple:

54=625=T(19)+T(29)=19*20/2+29*30/2=190+435=625

La suma de los cuadrados de dos triangulares consecutivos es otro triangular

Por ejemplo, $T(3)^2+T(4)^2=6^2+10^2=136=T(4^2)$

En este ejemplo resulta el triangular cuyo orden es el cuadrado del mayor orden de los sumandos. Se puede demostrar sin problemas:

$$\begin{aligned} T(n)^2+T(n+1)^2 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= (n+1)^2\frac{((n+1)^2+1)^2}{2} = T((n+1)^2) \end{aligned}$$

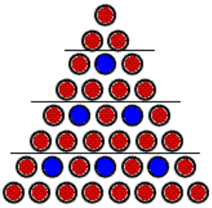
Dejamos aquí las propiedades generales de los números triangulares.

TRIANGULARES DE LADO PAR

Los números triangulares 3, 10, 21, 36,…son aquellos cuyo número de orden es par: 3=T(2)=2*3/2; 10=T(4)=4*5/2; 21=T(6)=6*7/2,…Si aplicamos la expresión algebraica de un número triangular, la de estos será

$T(2n)=2n(2n+1)/2=n(2n+1)=2n^2+n$

Los podemos representar como formados por filas de triángulos de 3 elementos separados por otros elementos aislados. En la imagen hemos representado el 36, es decir T(8)



Observa que está formado por 10 triángulos de tres elementos y 6 puntos aislados. Nos sugiere que un número triangular de orden par equivale a triangular de orden mitad multiplicado por 3 más su triangular anterior, es decir:

T(2n)=3T(n)+T(n-1)

Es fácil demostrarlo por inducción:

T(2)=3*T(1)+T(0)=3*1+0=3;
T(4)=3*T(2)+T(1)=3*3+1=10…

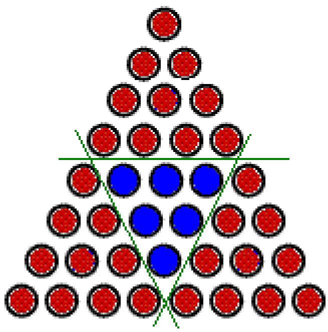
Probemos con T(2(n+1))=T(2n)+(2n+1)+(2n+2) por definición de número triangular. Si aceptamos la hipótesis para n, tendremos:

T(2(n+1))=3*T(n)+T(n-1)+(n+1+n+1+n+1)+n=3*T(n)+3*(n+1)+T(n-1)+n=3*T(n+1)+T(n), luego la hipótesis se cumple para n+1.

La fórmula T(2n)=3T(n)+T(n-1) es válida

Adaptamos una demostración visual contenida en

http://math.berkeley.edu/~rbayer/09su-55/handouts/ProofByPicture-printable.pdf



Así se ve mejor la relación.

En realidad, estos números **son los triangulares que no pueden ser hexagonales**. Se sabe que todo hexagonal es triangular, porque su expresión es H(n)=n(2n-1)=2n(2n-1)/2=T(2n-1), pero el número de orden del triangular es 2n-1, impar, luego los que no son hexagonales formarán la sucesión que estamos estudiando: 3, 10, 21, 36,…, que está contenida en http://oeis.org/A014105

Expresión como resta entre una suma de pares y otra de impares

En la página OEIS enlazada se destacan estas relaciones:

3=4-1
10=6+8-1-3
21=8+10+12-1-3-5
36=10+12+14+16-1-3-5-7

No se justifican, y esto es una invitación a que lo hagamos nosotros. En primer lugar generalizamos. Llamamos a nuestra sucesión TT(n)

TT(n)=T(2n)=SP(2(n+1),n)-SI(1,n)

Con **SP(2(n+1),n)** deseamos expresar que se toman **n** números pares a partir de **2(n+1)** y con **SI(1,n)** que se suman los primeros **n** impares. Lo intentamos demostrar por inducción:

TT(n+1)=TT(n)+2n+1+2n+2, como ya sabemos por los párrafos anteriores. Si usamos la hipótesis para n queda:

TT(n+1)=2(n+1)+2(n+2)+…+2(2n)-1-3-5-7…- (2n-1)+2n+1+2n+2

Para construir la nueva suma de pares hay que añadir 2(2n+1)+2(2n+2) y eliminar 2(n+1). La diferencia es 4n+2+4n+4-2n-2=6n+4, que ha de salir de los nuevos sumandos 2n+1+2n+2=4n+3, que equivalen a 6n+4-(2n+1), siendo el paréntesis el nuevo impar que habría que restar, luego la estructura de la fórmula se mantiene y es correcta.

Usamos el álgebra

TT(n)=T(2n)=n(2n+1)=$2n^2$+n

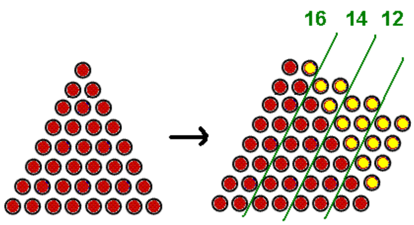
SP(2(n+1),n)=(2(n+1)+2(2n))*n/2=$3n^2$+n

$SI(1,n)=n^2$ como es sabido.

Por tanto, se verifica la diferencia.

Demostración visual

Ahí te la dejamos para el caso de 36. Analízala e intenta reproducirla para otros casos:



Esta construcción sólo es posible porque el triángulo es de orden par.

Otros desarrollos

Se cumple que **TT(n)=T(2n)=3+7+11+15+…(4n-1)**, es decir, que es la suma de impares tomados de 4 en 4 a partir de 3. Si sabes verlo, en la anterior imagen se muestra esa suma con claridad. Puedes justificarlo algebraicamente:

3+7+11+15+…(4n-1)=(3+4n-1)*n/2=(4n+2)*n/2=n(2n+1)=TT(n)

Este desarrollo se puede escribir así: **TT(n)=$2^2-1^2+4^2-3^2+6^2-5^2+8^2-7^2$…,** que es una forma elegante de terminar este tema..

NÚMEROS DOBLEMENTE TRIANGULARES

Se llaman así a aquellos números triangulares cuyo lado es también triangular. Los designaremos como DT. Si un número triangular de orden N se define como N(N+1)/2, en estos números, N también es triangular, por ejemplo m(m+1)/2, con lo que, sustituyendo queda:

$$DT(m)=(m(m+1)/2)(m(m+1)/2+1)/2=m(m+1)(m^2+m+2)/8$$

Esta es la fórmula utilizada en su publicación en OEIS:

A002817 Doubly triangular numbers: a(n) = n*(n+1)*(n^2+n+2)/8. 67
(Formerly M4141 N1718)

0, 1, 6, 21, 55, 120, 231, 406, 666, 1035, 1540, 2211, 3081, 4186, 5565, 7260, 9316, 11781, 14706, 18145, 22155, 26796, 32131, 38226, 45150, 52975, 61776, 71631, 82621, 94830, 108345, 123256, 139656, 157641, 177310, 198765, 222111, 247456, 274911, 304590 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Como un número triangular es suma de los primeros números consecutivos, estos doblemente triangulares han de equivaler a una suma de ese tipo en el que el número de sumandos sea triangular. Esto se visualiza muy bien en el triángulo de Floyd:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15

Si se van sumando los números fila a fila nos resultarán, 1, 6, 21, 55, 120,…los doblemente triangulares.

Para generarlos con hoja de cálculo basta crear una columna con los primeros números naturales, otra paralela con los triangulares y, por último, copiar la fórmula de la segunda en otra tercera:

N	N(N+1)/2	N(N+1)/2*(N/N+1)/2+1)/2
1	1	1
2	3	6
3	6	21
4	10	55
5	15	120
6	21	231
7	28	406
8	36	666
9	45	1035
10	55	1540
11	66	2211
12	78	3081
13	91	4186
14	105	5565
15	120	7260

La última fórmula se incluye para aclarar, pero en la hoja coincide con la segunda con órdenes distintos. Así:

N	N(N+1)/2	N(N+1)/2*(N/N+1)/2+1)/2
1	=C3*(C3+1)/2	=D3*(D3+1)/2
2	=C4*(C4+1)/2	=D4*(D4+1)/2
3	=C5*(C5+1)/2	=D5*(D5+1)/2
4	=C6*(C6+1)/2	=D6*(D6+1)/2
5	=C7*(C7+1)/2	=D7*(D7+1)/2
6	=C8*(C8+1)/2	=D8*(D8+1)/2

Se observa que las dos columnas poseen la misma fórmula. Por eso estos números son doblemente triangulares.

Relación con números combinatorios

Como también los números triangulares de orden N equivalen al número combinatorio C(N+1,2), que cuenta el número de pares de elementos de un conjunto de cardinal N+1, sin repetición, el número doblemente triangular contará el "número de pares de pares". Así, se puede expresar también como

$$DT(n) = \binom{\binom{n+1}{2}+1}{2}$$

En lenguaje de hoja de cálculo tendríamos:

DT(N)=COMBINAT(COMBINAT(N+1;2)+1;2)

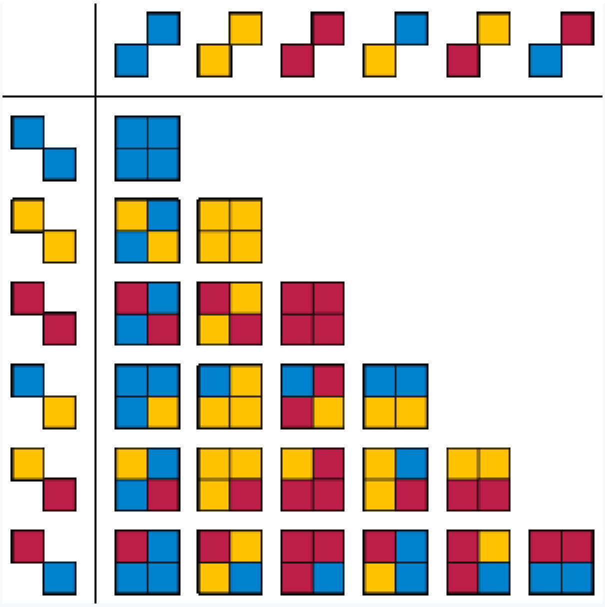
Escribe en una hoja

=COMBINAT(COMBINAT(12;2)+1;2)

y te resultará 2211, el número doblemente triangular de orden 11.

Colores en un cuadrado

Esta idea de "pares de pares" la visualiza Wikipedia en las formas de colorear las diagonales de un cuadrado si se consideran iguales las que surgen de rotaciones o simetrías. En la imagen figuran los pares de colores arriba y a la izquierda, mientras los “pares de pares” figuran en el centro:



Fuente:
https://en.wikipedia.org/wiki/Doubly_triangular_number

Este esquema de colores se puede reproducir con nuestra herramienta ***Cartesius***,

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

si representamos las combinaciones de colores con números de dos cifras. El planteo puede ser el siguiente:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=2
xt=11,12,22,13,23,33
creciente

Combinamos pares de pares, representando los colores por 11, 12,…33 y exigiendo que sea creciente cada arreglo para que no se repitan los pares (de pares). El resultado es:

X1	X2
11	11
11	12
11	22
11	13
11	23
11	33
12	12
12	22
12	13
12	23
12	33
22	22
22	23
22	33
13	22
13	13
13	23
13	33
23	23
23	33
33	33

En la parte derecha de la hoja se reflejará el total, el número doblemente triangular 21.

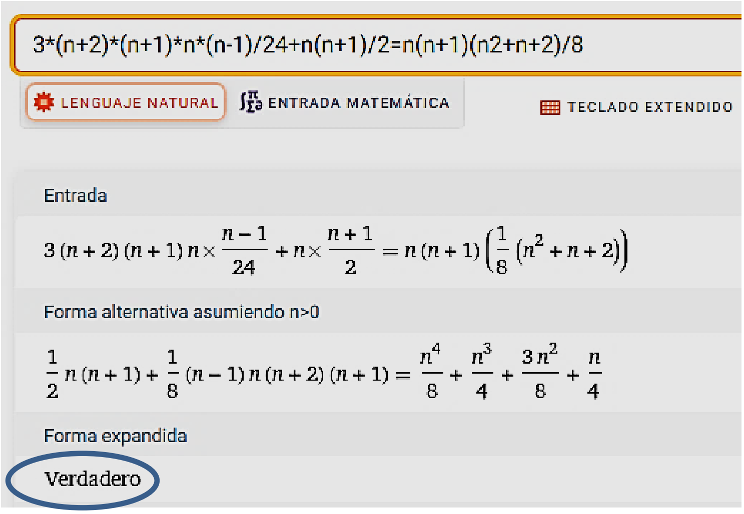
Total
21

En OEIS se propone esta otra fórmula con números combinatorios:

$$DT(n) = 3\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2}$$

DT(n)=3*(n+2)*(n+1)*n*(n-1)/24+n(n+1)/2=n(n+1)(n^2+n+2)/8

Esta igualdad se verifica muy bien en WolframAlpha:



https://www.wolframalpha.com/

También Mitch Harris, Oct 17 2006 y Bruce J. Nicholson proponen esta otra expresión con números combinatorios:

$$DT(n) = \binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4} + \binom{n+3}{4}$$

También se puede verificar algebraicamente. Antes hemos sustituido los números combinatorios por su expresión respecto a **n**:

$$\frac{1}{24}((n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)+(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)+(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,n) = n\,(n+1)\left(\frac{1}{8}\,(n^2+n+2)\right)$$

Forma alternativa asumiendo n>0

Aumentar | Datos

$$\frac{1}{24}\,(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)+\frac{1}{24}\,(n-1)\,n\,(n+2)\,(n+1)+\frac{1}{24}\,n\,(n+2)\,(n+3)\,(n+1)=\frac{n^4}{8}+\frac{n^3}{4}+\frac{3\,n^2}{8}+\frac{n}{4}$$

Forma expandida

Verdadero

https://www.wolframalpha.com/

Aportación nuestra

Para n>=2, a(n) es la suma de dos números triangulares de esta forma:

DT(n)=T(n(n+1)/2)=T(n)+T((n^2+n-2)/2)

Esto es debido a la identidad:

n*(n+1)*(n^2+n+2)/8=n*(n+1)/2+(n^2+n-2)*(n^2+n)/8)

También la hemos verificado en

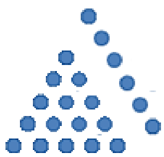
https://www.wolframalpha.com/

La idea nos surgió al descubrir las coincidencias con la sucesión de números triangulares que son suma de triangulares. Puedes consultar nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/04/sumandos-con-el-mismo-caracter-que-la.html

Así, por ejemplo, 21=6+15, 55=10+45, 120=15+105,…

En realidad, no es necesario acudir al Álgebra. La siguiente imagen representa muy bien esta descomposición:



En ella observamos que el triangular 21, de orden 6 (también triangular) se convierte en otro triangular al separarle el lado. Por tanto, 21 es la suma de dos triangulares, su lado, que es 6 y el triangular residual, 15.

Con sus fórmulas:

6*7/2=3*4/2+5*6/2

Los números cuadrados

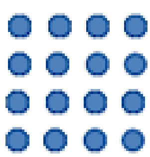
PRIMERAS DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Incluimos aquí el estudio de los números cuadrados, considerándolos prioritariamente como números poligonales, y dejando como complementarias las cuestiones derivadas de su naturaleza como producto n*n.

Cuadrado como n*n

La primera idea que se tiene de los números cuadrados es que son el resultado de multiplicar un número entero por sí mismo: C=n*n (por eso, a la operación n^2 se le ha dado el nombre de *elevar al cuadrado*).

Se les llama también cuadrados perfectos. Este producto se puede representar como una matriz cuadrada de puntos.



Es conveniente disponer de un criterio para saber si un número es cuadrado. El más fiable es el de descomponer el número en factores primos y observar si todos los exponentes son pares. Esto es así porque si un número primo *p* divide a un cuadrado, p^2 también lo divide.

Así se evitan los decimales que aparecen en otros criterios. El inconveniente radica en la programación de la extracción de factores. En el otro extremo de la definición encontramos los *números libres de cuadrados*, en los que todos los exponentes son impares.

Un criterio menos fiable es el de sacar la raíz cuadrada, tomar su redondeo a un número natural o su parte entera (llamada raíz cuadrada entera) y ver si al elevarla al cuadrado reconstruye el número inicial. Así se procede en esta función:

```
Public Function escuad(n) As Boolean


If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad
= False
End If
End Function
```

En lenguajes avanzados de programación se dispone ya de una función *issquare* o similar.

Esta definición permite considerar que un número cuadrado puede terminar solo con las cifras 0, 1, 4, 5, 6 o 9 en el sistema de numeración decimal. Es fácil comprobarlo multiplicando números por sí mismos. Así que un número que termine en 2, 3, 7, 8 no será cuadrado.

Esta definición de cuadrado también nos lleva **a que tendrá un número impar de divisores**. Si todos los exponentes de factores primos son pares, el número de divisores será un producto de impares, y por tanto impar. Puedes revisar esta idea en nuestro documento http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/teoria/teordivi.pdf

Aquí tienes un volcado del párrafo en el que se desarrolla la fórmula correspondiente:

NÚMERO DE DIVISORES

Para obtener todos los divisores de un número cuya descomposición es $n = p_1^{a1}.p_2^{a2}.p_3^{a3\ldots}$ basta considerar que son los términos del producto

$$(1 + p_1 + p_1^2+\ldots p_1^{a1})(1 + p_2 + p_2^2+\ldots p_2^{a2})(1 + p_3 + p_3^2+\ldots p_3^{a3})$$

Este sería un buen criterio para detectar si un número es cuadrado, pero resulta largo y lento.

Cuadrado como número poligonal

La construcción de un cuadrado siguiendo los procedimientos generales de construcción de poligonales nos llevaría a un esquema como el de la imagen:

En ella observamos sin dificultad que el número cuadrado n^2 es la suma de los primeros números impares: $1+3+5+7+9=25=5^2$

Una comprobación elemental consiste en crear una lista de impares con el Buscador de Naturales y evaluar sus sumas acumuladas, que serán cuadrados:

Solución	Detalles
1	1
3	4
5	9
7	16
9	25
11	36
13	49
15	64
17	81
19	100

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	20

Con estas propiedades:

NO PAR
EVALUAR TOTALES

El caso general se demuestra por inducción completa:

Si n^2 equivale a la suma

(2*0+1)+(2*1+1)+(2*2+1)+(2*3+1)+…+(2*(n-1)+1),

el siguiente cuadrado, $(n+1)^2$ es igual a n^2+(2*n+1), lo que completa la suma de impares.

Así que se cumple

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

Sumas de números impares consecutivos

Una consecuencia de esta propiedad es la de que cualquier suma de números impares consecutivos equivale a la diferencia entre dos cuadrados. Por ejemplo, la suma 55+57+59+…+87+89+91 se puede calcular como la diferencia entre estas dos sumas:

(1+3+5+7+…+91)-(1+3+5+7+53)=46^2-27^2

El 46 y el 27 se obtienen teniendo en cuenta, según la fórmula anterior, que los sumandos tienen la forma 2k+1.

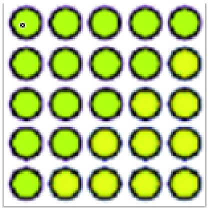
Si se toman dos sumandos impares consecutivos, el resultado será un cuadrado par 2n*2n=$4n^2$, pues

$$4n^2 = (2n^2 - 1) + (2n^2 + 1)$$

Si multiplicamos dos números pares (o impares) consecutivos y añadimos una unidad obtenemos también un cuadrado, pues $n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Cuadrado como suma de dos triangulares

Otra generación de cuadrados viene dada, tal como vimos en el tema correspondiente, como suma de dos triangulares consecutivos. En la imagen se observa que el cuadrado 25 es la suma de los triangulares 10 y 15.



Como un triangular es un número combinatorio, esta propiedad se puede expresar como (elegimos el símbolo C(n) para representar el cuadrado de orden n):

$$C(n) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2}$$

Desde el punto de vista de los cuadrados esta relación no tiene más interés.

Cuadrado como suma de OBLONGO(N)+N+1

Otra relación que se queda en simple curiosidad es que si a un oblongo le añadimos su lado mayor, se convierte en un cuadrado.

En efecto, los oblongos vienen dados por la expresión $n(n+1)$, y si le sumamos $n+1$ se convierte en $n(n+1)+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

Esta propiedad es más sugestiva si se expresa al revés: si a un conjunto cuadrado le eliminas un lado, se convierte en oblongo.

Si al cuadrado 64 le quitamos un lado (8) nos queda 56, que es oblongo, por ser 7*8.

Una curiosidad

Copiamos un texto publicado por Amarnath Murthy, Mar 24 2004en la página de OEIS:

Begin with n, add the next number, subtract the previous number and so on ending with subtracting a 1: a(n) = n + (n+1) - (n-1) + (n+2) - (n-2) + (n+3) - (n-3) + ... + (2n-1) - 1 = n^2.

Como invitación a demostrarlo, insertamos ese proceso aplicado al número 12:

12		
13	11	2
14	10	4
15	9	6
16	8	8
17	7	10
18	6	12
19	5	14
20	4	16
21	3	18
22	2	20
23	1	22
210	66	**144**

$12+(2+4+6+...+18+10+22)=12+(2+22)*11/2=12+12*11=12^2$

En la primera columna se sitúan los números consecutivos a 12 y en la segunda los anteriores. Se suman y se restan unos de otros, resultando al final $144=12^2$.

RECURRENCIAS

Hay varios métodos recursivos para calcular números cuadrados. Ninguno es especialmente útil, y se presentan aquí como una curiosidad.

Suma de un impar

Es consecuencia de la definición como suma de impares, y es que al cuadrado anterior le sumamos el doble de su lado incrementado en una unidad. Por ejemplo, $7^2+2*7+1=64=8^2$

Se puede plasmar en esta función recursiva de Excel:

```
Public Function cuadrado_r(n)

If n = 1 Then
cuadrado_r = 1
Else
cuadrado_r = 2 * n - 1 + cuadrado_r(n - 1)
End If
End Function
```

Funciona bien para números no muy grandes, pero puede fallar, por lo que la dejamos como una curiosidad.

Mediante los dos anteriores

C(n)=2C(n-1)-C(n-2)+2

Es fácil de demostrar: $n^2=2(n-1)^2-(n-2)^2+2=2n^2-4n+2-n^2+4n-4+2=n^2$

Así, de C(1)=1 y C(2)=4 obtenemos C(3)=2*4-1+2=9, C(4)=2*9-4+2=16,…

Recurrencia general para poligonales

Todos los números poligonales siguen la fórmula P(n,k)=3P(n,k-1)-3P(n,k-2)+P(n,k-3), que en nuestro caso quedaría como

C(n)=3C(n-1)-3C(n-2)+C(n-3)

Su ventaja radicaría en que usa cuadrados nada más, y no números aislados. Esto la convierte en una recurrencia de tercer orden homogénea, y la podemos tratar con nuestra hoja correspondiente:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Bastará dar como coeficiente 3, -3, 1 y como elementos iniciales 0, 1, 4:

Recurrencias lineales de tercer orden					
Coeficientes					
A	3	**B**	-3	**C**	1
Valores iniciales					
X0	0	**x1**	1	**x2**	4

Pulsando sobre el botón de “Ver sucesión” crearemos una columna de cuadrados,

0
1
4
9
16
25
36
49
64
81
100
121
144

SUMAS

La suma de los primeros números cuadrados viene dada por una de las fórmulas de Faulhaber.

(ver https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber)

La correspondiente a los números cuadrados es la siguiente:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es sencillo demostrarla por inducción completa. Aquí lo haremos restando la expresión correspondiente a **n** y la de **n-1**, para ver que el resultado es el nuevo cuadrado añadido. Así se ve en la calculadora Wiris:

$$n\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+1)}{6}-(n-1)\cdot n\cdot\frac{(2n-1)}{6} \quad = \quad n^2$$

Como curiosidad, aplicaremos nuestra herramienta de interpolación de Newton a las primeras sumas de cuadrados, 1, 5, 14, 30, 55…Es un tema complementario, que se puede ignorar:

Interpolación

Descargamos la hoja de interpolación desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Escribimos las sumas en las celdas correspondientes:

Valor natural	1	2	3	4	5
Valores función	1	5	14	30	55
Dif1		4	9	16	25
Dif2			5	7	9
Dif3				2	2
Dif4					0

Observamos que las diferencias de tercer orden son iguales (y la de cuarto es nula), lo que indica una función polinómica.

Leemos los coeficientes del polinomio:

Coeficientes (en forma de fracción)			0	2	5	4	1
	720	120	24	6	2	1	1

Escribimos el polinomio con esos coeficientes, tal como se efectúa en la interpolación de Newton:

1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3)

Como esta forma es poco legible, la simplificamos y factorizamos con Wiris:

$$1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3) \quad = \quad \frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X$$

$$\text{factorizar}\left(\frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X\right) \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot X\cdot(X+1)\cdot(2\cdot X+1) \quad \text{Calc}$$

Obtenemos la misma fórmula de Faulhaber. Aunque sea una mera curiosidad, es gratificante la coincidencia.

Teorema de los cuatro cuadrados

El teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange establece que cualquier número entero positivo se puede escribir como la suma de cuatro o menos cuadrados perfectos. Tres cuadrados son suficientes para todos los enteros positivos salvo para números de la forma $4^k(8m+7)$.

Un entero positivo se puede representar como una suma de dos cuadrados precisamente si su factorización prima no contiene potencias impares de primos de la forma $4k + 3$ (Fermat-Gauss).

También se puede expresar todo cuadrado como suma de tres cuadrados con signo. Por ejemplo, 201221 se puede expresar con estas sumas:

201221 = 11^2+685^2-518^2

201221 = 9^2+679^2-510^2

201221 = 13^2+667^2-494^2

201221 = 5^2+589^2-382^2

La cercanía entre las bases de estos cuatro ejemplos sugiere que son un subconjunto de otro mucho más amplio.

Conseguir los cuatro cuadrados (o menos) en los que se descompone cualquier entero positivo requiere algoritmos que se ralentizan cuando ese entero es grande. Un algoritmo sencillo para Excel o Calc sería el de la siguiente función, que devuelve una solución, que no tiene que ser la óptima, pero que consta de cuatro cuadrados:

```
Function cuatrocuad$(n)

Dim i, j, k, l
Dim s$
Dim novale As Boolean

s$ = ""
novale = True
i = 0
```

While i <= n And novale ‘Primera base de cuadrado
j = 0
While j <= i And novale ‘Segunda base
k = 0
While k <= j And novale ‘Tercera base
l = n - i ^ 2 - j ^ 2 - k ^ 2 ‘Posible cuarta base
If l >= 0 And l <= k Then
If escuad(l) Then novale = False: s = s + Str$(i) + Str$(j) + Str$(k) + Str$(l) ‘Es una solución
End If
k = k + 1
Wend
j = j + 1
Wend
i = i + 1
Wend
If s = "" Then s = "NO"
cuatrocuad = s
End Function

Hay que insistir en que no devuelve la mejor solución, sino la que tiene las bases menores. Así, para 9, que es cuadrado, da la solución 2^2+2^2+1^2+0^2.

Hemos elegido un intervalo de enteros positivos al azar para una sencilla comprobación del teorema:

Número	Cuatro cuadrados o menos
3458	36 36 29 25
3459	39 31 31 16
3460	37 35 29 25
3461	39 32 30 16
3462	38 35 28 9
3463	38 37 25 25
3464	38 38 24 0
3465	37 36 28 16
3466	38 34 29 25
3467	37 37 27 0
3468	34 34 34 0
3469	34 34 34 1

Observamos que tres números sólo necesitan tres cuadrados.

IDENTIDADES

Cuadrado de suma o diferencia

Aunque son de carácter elemental, no podemos olvidar aquí los cuadrados de sumas y diferencias:

$$(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

Cercana a ellas es la *identidad babilónica*, fácil de deducir:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Identidad de Brahmagupta

En el apartado de sumas de cuadrados no puede faltar esta identidad, muy usada en cuestiones numéricas, y que se demuestra con un simple desarrollo algebraico:

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&\qquad = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2+(ac+bd)^2\\
&\qquad + (ad-bc)^2
\end{aligned}
$$

En cualquier texto de Teoría de Números se puede encontrar un uso de esta identidad.

Identidad de Euler

Euler amplió esta idea a ocho cuadrados, según podemos observar en esta imagen tomada de la página de Wikipedia

https://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_de_los_cuatro_cuadrados_de_Euler

$$
\begin{gathered}
(a^2+b^2+c^2+d^2)(w^2+x^2+y^2+z^2)=\\
(-aw+bx+cy+dz)^2+(ax+bw+cz-dy)^2+\\
(ay-bz+cw+dx)^2+(az+by-cx+dw)^2
\end{gathered}
$$

NÚMEROS PENTAGONALES

INTRODUCCIÓN

Dentro del repaso sistemático de los números poligonales que haremos en este documento, les toca el turno hoy a los pentagonales, poligonales de cinco lados. Además de las propiedades generales que comparten todos los tipos de poligonales, estos presentan algunas propiedades interesantes propias, como algún teorema muy conocido. Las recorremos.

DEFINICIÓN E INSERCIÓN

Los números poligonales se forman mediante los contornos de polígonos regulares con lados de 1 a **n** puntos, con la condición de que compartan un vértice y sus dos lados contiguos. En nuestro caso se trata de pentágonos, pero ya conocerás los números triangulares, cuadrados o hexagonales, que presentan el mismo proceso de formación.

Quienes estudian estos números por primera vez tienen dificultades en entender este esquema, pues lo confunden con pentágonos concéntricos. La figura anterior la hemos construido con Excel, por lo que no presenta la regularidad en su diseño propia de programas de dibujo e imágenes.

Fórmula

Todos los números poligonales se pueden calcular con la siguiente fórmula (ver mi publicación "Números y formas"
http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf):

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

En ella **k** es el números de lados y **l** la longitud de cada lado. En nuestro caso de pentagonales haremos **k=5** y al lado le llamaremos **n**. Quedará:

$$p_n = \frac{n(n \cdot (5-2) - (5-4))}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$$

Con esta fórmula puedes obtener los primeros números pentagonales:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 852, 925, 1001, 1080, 1162, 1247, 1335, 1426, 1520, 1617, 1717, 1820, 1926, 2035, 2147,…

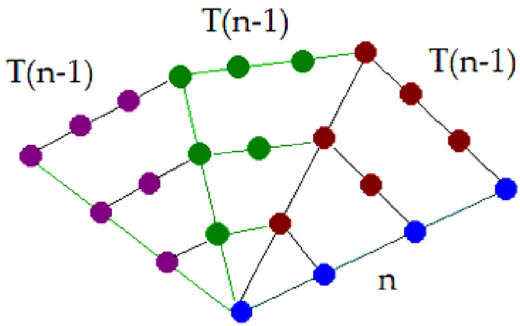
Los tienes publicados en http://oeis.org/A000326

Con la fórmula y una hoja de cálculo puedes obtener fácilmente una tabla:

N	Pentagonal N
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92
9	117
10	145

Otra forma de deducir la fórmula

Según la propiedad general de los poligonales, los pentagonales serán equivalentes a tres triangulares de una unidad menos más la longitud del lado. En la imagen, los triangulares están dibujados con distintos colores y el lado final en azul.

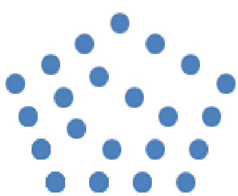


Luego

$$p_n = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{3n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

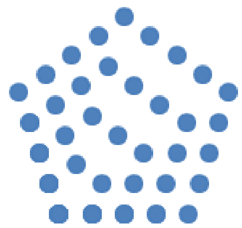
Puedes contar las unidades de los primeros pentagonales en las siguientes imágenes, creadas con Excel:

N=4



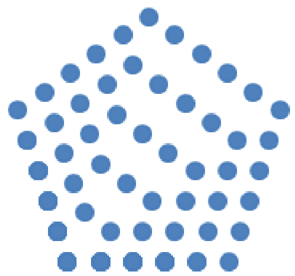
Puedes contar a ojo que son 22 unidades, tal como predice la fórmula.

N=5



Son 35 unidades.

N=6



Los números pentagonales no deben confundirse con los números pentagonales centrados, que puedes estudiar en mi publicación enlazada más arriba.

Fórmula recursiva

Hemos copiado esta fórmula de OEIS:

a(0) = 0, a(1) = 1; for n >= 2, a(n) = 2*a(n-1) - a(n-2) + 3. - Miklos Kristof, Mar 09 2005

Si sustituimos cada término por la fórmula basta simplificar para obtener a(n). En la siguiente captura de pantalla (calculadora WIRIS) se puede observar la simplificación:

$$2*(n-1)*(3*(n-1)-1)/2-(n-2)*(3*(n-2)-1)/2+3 \quad = \quad \frac{3}{2}\cdot n^2-\frac{1}{2}\cdot n$$

Como simple curiosidad, con esta función usaríamos la recurrencia explicada. No tiene utilidad, pero sirve para buscar rutas alternativas en casos similares:

```
Public Function penta2(n)
If n = 1 Then
penta2 = 1
ElseIf n = 2 Then
penta2 = 5
Else
penta2 = 2 * penta2(n - 1) - penta2(n - 2) + 3
End If
End Function
```

No necesita explicación, ya que asigna el valor 1 al primer pentagonal, el 5 al segundo y al resto la recurrencia. Con ella podemos construir una tabla de valores, que coincida con lo ya explicado:

N	Pentagonal (recurrencia)
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92

CRITERIO PARA RECONOCER PENTAGONALES

En nuestro blog hemos usado con frecuencia las funciones ESCUAD y ESTRIANGULAR para saber si un número es de ese tipo (cuadrado o triangular) o no. No es difícil construir una similar para los pentagonales. Basta seguir estos cálculos algebraicos. Sea P el posible número pentagonal y llamemos n a su orden. Entonces

$P=n*(3n-1)/2$; $2P=3n^2-n$; $3n^2-n-2P=0$

Al resolver esta ecuación de segundo grado vemos que el discriminante es 1+24P, luego debe ser un cuadrado perfecto. Ya tenemos un criterio, pues serán pentagonales los números que cumplan que 1+24P sea un cuadrado. Si esto se cumple, al resolver la ecuación obtendremos su orden.

Esta función devuelve un cero si el número no es pentagonal y si lo es, dará el valor de su orden:

Public Function ordenpentagonal(n)
Dim a, b

b = 0 ‘Iniciamos el orden con un cero, por si no es pentagonal

a = 1 + 24 * n ‘Discriminante

If escuad(a) Then b = (1 + Sqr(a)) / 6 ’ Si el discriminante es cuadrado, resolvemos

If b = Int(b) Then ordenpentagonal = b ‘Si ***b*** es entero, ese será el orden

End Function

En la siguiente tabla puedes ver una lista de números consecutivos de los que solo 12 y 22 son pentagonales:

N	Orden
10	0
11	0
12	3
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	4

Con esta función puedes buscar directamente números pentagonales mayores. Por ejemplo, 1001 es el pentagonal 26 y 10045 es el número 82.

El promedio de los primeros números pentagonales es un número triangular

Antes de sumar los números pentagonales hay que recordar estas dos igualdades:

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con estas dos fórmulas podemos sumar pentagonales:

$$\sum_{1}^{n} P_i = \sum_{1}^{n} \frac{3i^2 - i}{2} = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}$$

Con unas pocas simplificaciones llegamos a

$$\sum_{1}^{n} P_i = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

De esta igualdad sacamos dos consecuencias:

La expresión de la suma de los primeros números pentagonales coincide con la fórmula de los piramidales pentagonales. Esto es consecuencia de su definición. Puedes comprobarlo en mi publicación "Números piramidales"

(http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf)

Tal como hemos afirmado, si dividimos la expresión obtenida entre n obtendremos el promedio de los primeros pentagonales y, en efecto, resulta un número triangular:

$$\frac{n^3+n^2}{2n}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Por tanto, el promedio es triangular.

Números pentagonales como suma de números consecutivos

Según Jon Perry, podemos interpretar el pentagonal de orden **n** como la suma de **n** números enteros consecutivos que comienzan en **n**. Es decir:

$$P_n=\sum_{i=n}^{2n-1} i$$

Por ejemplo, P_4=4+5+6+7=22, P_5=5+6+7+8+9=35.

Si recordamos que los números triangulares, de fórmula n(n+1)/2, son suma de números consecutivos, tendríamos, para P_5:

P_5=5+6+7+8+9=9(9+1)/2-4*(4+1)/2=45-10=35.

En general, según esta propiedad:

P_n =T(2n-1)-T(n-1)=(2n-1)*2n/2-(n-1)*n/2=(4n^2-2n-n^2+n)/2=(3n^2-n)/2=n(3n-1)/2

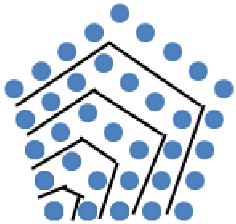
Por tanto, coincide con la fórmula de los números pentagonales.

Hemos comprobado de paso que todo número pentagonal es diferencia entre dos triangulares.

Números pentagonales como suma de una progresión aritmética:

También Jon Perry interpreta un número pentagonal como una suma parcial en la progresión aritmética de diferencia 3: 1, 4, 7, 10, 13,…

Antes de demostrarlo algebraicamente, podemos visualizar esta propiedad fácilmente. Basta considerar las líneas poligonales que hemos añadido al esquema gráfico de estos números:



Aunque las líneas están trazadas a mano alzada, se perciben bien los sumandos 1, 4, 7, 10 y 13.

Si recordamos la fórmula de la suma de una progresión aritmética, podremos justificarlo algebraicamente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(1 + 1 + 3(n-1)\big)n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}$$

Esta propiedad nos permite calcular cualquier número pentagonal por recursión. Basta darse cuenta de que $\mathbf{P_{n+1}=P_n+3n+1}$.

Así, P_1=1, P_2=1+3+1=5, P_3=5+3*2+1=12, P_4=12+3*3+1=22,…

Un número pentagonal es suma de un combinatorio y un cuadrado

En efecto:

$$\binom{n}{2} + n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Un número pentagonal es un tercio de otro triangular

Es fácil demostrar que si el orden del pentagonal es k, el del triangular es 3k-1:

$$3P_k = 3\frac{k(3k-1)}{2} = \frac{(3k-1)(3k)}{2} = T(3k-1)$$

Pentagonales multipoligonales

Los números pentagonales pueden ser también cuadrados, triangulares o hexagonales. Los cuadrados los puedes consultar en

http://oeis.org/A036353

0, 1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001, 83314021887196947001, 799981229484128697805801, 7681419682192581869134354401, 73756990988431941623299373152801

Disponemos de la función *doblepolig*, que nos indica si un número pertenece a dos tipos concretos de número poligonal. Puedes consultarla en

https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=multipoligonal

Con esta función es trivial reproducir la lista de más arriba,ya que basta exigir *doblepolig(5,4)*.El problema radica en que Excel no puede llegar a estos números enormes, pero sí detecta el 9801:

9801 # 4, 99 # 5, 81 # 180, 11 # 274, 9 # 655, 6 # 3268, 3 # 9801, 2

Se observa que 9801 es cuadrado y pentagonal, además de poligonal de 180, 274, 655, 3268 y 9801 lados.

Con esta función podemos encontrar los primeros pentagonales que son poligonales de otros tipos. Incluimos algunos (no tenemos en cuenta el 1):

Pentagonal y triangular: 210 y40755

Pentagonal y hexagonal: 40755

Pentagonal y heptagonal: 4347

Y así podríamos seguir.

TEOREMA DE FERMAT PARA PENTAGONALES

Fermat afirmó, y se demostró posteriormente, que todo número natural es suma de a lo más n números poligonales. En el caso de los pentagonales se deduce que todo natural es suma de como máximo cinco pentagonales.

La comprobación práctica de esta propiedad puede resultar algo complicada de seguir. No es difícil conseguirlo con nuestro programa de Excel y Calc *Cartesius*

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

En la captura de pantalla siguiente se presentan todas posibilidades de descomposición en pentagonales del número 121. Observamos que puede obtenerse con dos, tres, cuatro o cinco sumandos pentaonales. El papel del cero e importante. Sin él, sólo obtendríamos sumas de cinco sumandos pentagonales.

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	51	70
0	0	35	35	51
0	5	12	12	92
1	1	1	1	117
1	1	5	22	92
1	12	22	35	51
5	12	12	22	70

El planteo adecuado para conseguir esto es similar al siguiente:

xtotal=5
xt=1..10
xt=suc((n-1)*(3*(n-1)-1)/2)
suma=121
creciente
Explicamos línea por línea:

xtotal=5: Indica que el número de sumandos es 5

xt=1..10: Este es el rango de búsqueda de los índices de los pentagonales que se van a sumar. Es deseable que abarque hasta el índice del número que se va a probar o algo más. En nuestro caso, para 121 está bien un rango de 10.

xt=suc((n-1)*(3*(n-1)-1)/2): Esta es la instrucción fundamental. Indica que se construya el pentagonal de índice n-1, para que así contemos con el cero como sumando

suma=121: Escribe el total que deben dar los sumandos. En este caso, 121.

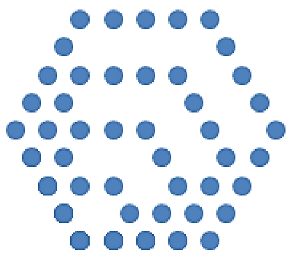
Creciente: Se incluye para eliminar casos repetidos.

Con esto finaliza nuestro repaso de los números pentagonales. Podíamos pasar a los generalizados, pero no entra dentro de los objetivos de esta publicación.

NÚMEROS HEXAGONALES

DEFINICIÓN E INSERCIÓN

Los números hexagonales se generan, como todos los poligonales, alineando los elementos en estructuras de este tipo adosadas en orden creciente, y compartiendo dos lados cada una con la anterior, como se puede ver en este esquema construido con Excel:



Se corresponde con el número hexagonal de índice 5, ya que se han adosado cuatro estructuras hexagonales además de la inicial de un solo elemento. Estos esquemas se conservan por su carácter histórico, pero varias de las propiedades que veremos más adelante podrían servir como definición además de la clásica.

Todos los números poligonales se pueden calcular con la siguiente fórmula (ver mi publicación "Números y formas" http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf):

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

En nuestro caso k=6, lo que simplifica bastante la fórmula, que queda como

$$hx_l = p_{6,l} = \frac{l(l \cdot 4 - 2)}{2} = l(2l-1)$$

Nombraremos en todo el tema el hexagonal de índice l como $\mathbf{hx_l}$. Como estamos acostumbrados a escribir los índices como **n**, la fórmula quedaría:

$$hx_n = n(2n-1)$$

Un sencillo cambio nos indica que un hexagonal coincide con un número triangular de índice impar:

$$hx_n = \frac{2n(2n-1)}{2} = T_{2n-1}$$

Todo número hexagonal coincide pues con un triangular de índice 2n-1, es decir, impar. Los de índice par no pueden ser hexagonales.

Hace tiempo publicamos en nuestro blog una entrada dedicada a estos triangulares de índice par. Por su interés, la enlazamos:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/09/triangulares-de-lado-par.html

Los primeros números hexagonales son 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66 , 91 , 120 , 153 , 190 , 231, 276, 325, 378, 435, 496 , 561 , 630, 703, 780, 861, 946 ...Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A000384

Sencillos cálculos revelan que todos son triangulares. Por ejemplo, 561=33*34/2.

Esta lista es fácilmente reproducible con hoja de cálculo, gracias a la sencillez de la fórmula n(2n-1):

Índice	Hexagonal
1	1
2	6
3	15
4	28
5	45
6	66
7	91
8	120
9	153
10	190

Entre ellos figuran dos números perfectos, 6 y 28. En realidad, todos los perfectos son hexagonales, debido a su fórmula, que es del tipo n(2n-1):

$P=2^{k-1}(2^k-1) = 2^{k-1}(2*2^{k-1}-1)$

Otras expresiones de los números hexagonales

*a(n) = binomial(n+1,2) + 3*binomial(n,2).*

No es difícil comprobar esta identidad, que usa números combinatorios:

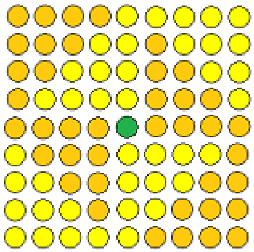
$$hx_n = \binom{n+1}{2} + 3\binom{n}{2}$$

$$hx_n = \binom{n+1}{2} + 3\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n(2n-1)$$

CRITERIO PARA RECONOCER HEXAGONALES

Si un hexagonal es un triangular de lado impar, nos servirá el criterio para triangulares, que es que **ocho veces un triangular más la unidad ha de ser un cuadrado**.

En esta imagen puedes comprobar que ocho triángulos de lado 4 (y diez elementos) se adosan dejando un hueco (el círculo verde):



Por tanto 8T+1 siempre es un cuadrado si T es triangular. Así que en un hexagonal también se tiene que cumplir con 8H+1. Si sumamos una unidad al lado del cuadrado de la imagen nos resulta 2n+2. Y si n ha de ser impar, tendremos 2(2k+1)+2=4k+4, que será entero si lo dividimos entre 4. En resumen, ha de ser un entero esta expresión:

$$\frac{\sqrt{8H+1}+1}{4}$$

Con esta expresión y nuestra función ESCUAD, (es cuadrado) obtenemos la función que caracteriza si un número es hexagonal y además nos devuelve su índice:

Function ordenhexagonal(n)

Dim a, b

b = 0
a = 8 * n + 1
If escuad(a) Then ‘Criterio del 8H+1
b = (Sqr(a) + 1) / 4 ‘Búsqueda del lado
If b <> Int(b) Then b = 0

End If
ordenhexagonal = b ‘Si no es hexagonal dará cero.
End Function

Con esta función puedes detectar hexagonales en cualquier intervalo. Por ejemplo, entre los últimos 20 años, 2016 fue el único hexagonal, con orden 32. En esta captura de Excel lo puedes comprobar:

2010	0
2011	0
2012	0
2013	0
2014	0
2015	0
2016	32
2017	0
2018	0
2019	0
2020	0

DEFINICIONES POR RECURRENCIA

Mediante sumas acumuladas

Si un número hexagonal coincide con un triangular determinado, valdrán las recurrencias para estos números. Sabemos que $Hx_n=T_{2n-1}$. Por tanto, si el triangular T_{n-1} se convierte en el siguiente T_n sumándole su índice **n-1**, al hexagonal habrá que sumarle dos índices, 2n-2 y 2n-1, es decir, **4n-3**. En efecto, si

Hx_3=15, Hx_4=15+4*4-3=15+13=28, como bien podemos comprobar.

En esta tabla hemos escrito el primer 1 y después hemos ido añadiendo 4n-3:

N	HEX(N)	
1	1	
2	6	Se añade 4*n-3
3	15	
4	28	
5	45	
6	66	
7	91	
8	120	
9	153	
10	190	

Mediante recurrencia lineal

Jaume Oliver Lafont propone la siguiente en OEIS (adaptamos la escritura):

Hx(n) = 3*Hx(n-1) - 3*Hx(n-2) + Hx(n-3), Hx(0)=0, Hx(1)=1, Hx(2)=6.

La comprobaremos con nuestra hoja dedicada a las recurrencias lineales, en este caso de tercer orden (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

Abrimos la hoja correspondiente al tercer orden y rellenamos los coeficientes 3, -3, 1 y los términos iniciales 0, 1, 6:

Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	0	x1	1	x2	6

Pulsamos el botón de "*Ver sucesión*" y obtenemos una columna con los números hexagonales incluido el cero:

0
1
6
15
28
45
66
91
120
153
190
231
276
325

Es una simple curiosidad.

PROPIEDADES

Los números hexagonales son el resultado de sumar los números del tipo 4k+1 a partir del 1.

En efecto:

H_1=1, H_2=1+5=6, H_3=1+5+9=15,…

En general, aplicando la fórmula para sumar progresiones aritméticas:

$$S_n = \frac{(1 + 4n + 1) \cdot n}{2} = n(2n + 1) = H_n$$

Los números hexagonales coinciden con el semiperímetro en las ternas pitagóricas primitivas en las que la hipotenusa es consecutiva con el cateto mayor.

(Ver http://oeis.org/A000384, comentario de Lekraj Beedassy)

En efecto, estas ternas se pueden representar como

(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2,).

El primer lado y la hipotenusa no pueden ser consecutivos, pues su diferencia es al menos de dos unidades, luego si los hay son los dos últimos:

Si $m^2+n^2-2mn=1$, será $(m-n)^2=1$ y m-n=1, n=m-1, porque n<m.

El perímetro es 2m(m+n) y el semiperímetro m(m+n)=m(2m-1), que es un número hexagonal.

Por ejemplo, en la terna (9, 40, 41) son consecutivos 40 y 41, el perímetro vale 90 y su mitad, 45, es un número hexagonal.

Descomposición en suma de cuatro hexagonales

Salvo unos pocos números (5, 10, 11, 20, 25, 26, 38, 39, 54, 65, 70, 114 y 130. Ver https://oeis.org/A007527), todos los demás se pueden expresar como suma de cuatro números hexagonales.

Lo comprobamos con nuestra herramienta Cartesius para el intervalo (100,110):

B	C	D	E		M	N
						Total
X1	X2	X3	X4	X5	X12	19
0	6	28	66			100
0	28	28	45			101
1	6	28	66			101
1	28	28	45			102
6	6	45	45			102
6	15	15	66			102
0	6	6	91			103
15	15	28	45			103
1	6	6	91			104
0	15	45	45			105
0	0	15	91			106
1	15	45	45			106
6	6	28	66			106
0	1	15	91			107
6	28	28	45			107
1	1	15	91			108
0	15	28	66			109
6	6	6	91			109
1	15	28	66			110

Hemos manipulado algo la imagen de Cartesius para eliminar columnas en blanco. Se ha añadido la opción del 0 para destacar los números que sólo necesitan dos o tres hexagonales, como el 106. Los demás necesitan cuatro hexagonales. Observamos en la columna de la derecha que varios números aparecen como resultado de sumas distintas. El 106, por ejemplo equivale a tres sumas distintas.

Incluimos el planteo. Aunque no hayas manejado esta herramienta lo entenderás:

xvar=100&110 ‘Recorremos desde 100 a 110
xtotal=4 ‘Son cuatro los sumandos
xt=1..9 ‘Cada sumando actúa sobre el intervalo (1,9)
xt=suc((n-1)*(2*n-3)) ‘Número hexagonal n-1 (para abarcar el cero)
suma=vx ‘La suma también va del 100 al 110
creciente ‘Para evitar repeticiones

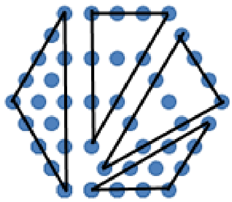
Según MathWorld, Legendre demostró que todo número mayor que 1791 es una suma de cuatro números hexagonales, y Duke y Schulze-Pillot mejoraron esto a tres números hexagonales por cada entero suficientemente grande

(https://mathworld.wolfram.com/HexagonalNumber.html)

Un número hexagonal equivale a la suma de un triangular con el mismo índice sumado con el triple del triangular anterior.

Es decir: $Hx_n=T_n+3T_{n-1}$

Dejamos como ejercicio la demostración algebraica, porque la imagen siguiente es bastante clarificadora. El primer triángulo tiene índice 5 y los otros tres, 4.



Si en la imagen separamos el lado de la izquierda, de cinco elementos, obtenemos esta otra equivalencia (Lekraj Beedassy)

$Hx_n=n+4T_{n-1}$

También es fácil de demostrar algebraicamente.

Los números hexagonales son permutaciones con repetición de 2n elementos {0,1} en las que el 1 figure repetido dos veces.

Lo que estamos afirmando es la validez de esta fórmula (permutaciones con repetición o número binomial):

$$Hx_n = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \binom{2n}{2}$$

Con nuestra herramienta ***Combimaq*** hemos creado las permutaciones correspondientes al valor 15 del tercer hexagonal:

SU1	SU2	SU3	SU4	SU5	SU6
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0

La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#combimaq

Hemos usado estas condiciones:

Condiciones
TOTAL 6
PARCIAL 6
ORDEN SI
REPETIR SI
CUENTA SI
SIMBOLOS

Símbolos	Cuentas
0	4
1	2

Es fácil su demostración algebraica:

$$\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = Hx_n$$

La suma de los inversos de los números hexagonales equivale al doble del logaritmo neperiano de 2 (Vaclav Kotesovec, Apr 27 2016)

Finalizamos este recorrido por las propiedades de los números hexagonales aproximando la suma de sus inversos mediante hoja de cálculo. Se puede comprobar creando una columna con los números hexagonales, adosando junto a ella una columna de inversos y usando después la suma. Si deseas avanzar a miles de términos, es preferible la siguiente función:

```
Public Function sum_inv_hex(n)

Dim i, s
s = 0
For i = 1 To n
s = s + 1 / (i * (2 * i - 1))
Next i
sum_inv_hex = s
End Function
```

Su código se entiende fácilmente. Te puedes crear un esquema en el que escribas el número de términos y le apliques la función para comparar el resultado con 2LOG(2):

Número de términos	2000
Suma inversos	1,386044392
2LOG(2)	1,386294361

Una forma sencilla para comprobar esto se basa en nuestra hoja de cálculo "Visor de sucesiones"

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#visor)

Le escribimos la fórmula del inverso de un número hexagonal

Fórmula	
Usa N como variable y no escribas el signo =)	
1/(N*(2*N-1))	

Activamos el Visor y nos devuelve una aproximación a la suma:

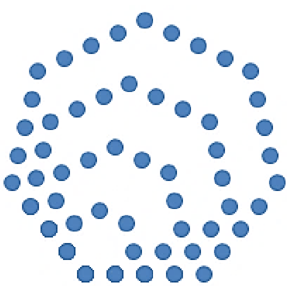
Estadísticas	
Suma A(N)	**1,383797**
Máximo A(N)	**1**
Suma Función	**0**

Con esto finalizamos el tema.

NÚMEROS HEPTAGONALES

DEFINICIÓN

Los números heptagonales se generan, como todos los poligonales, alineando los elementos en estructuras de este tipo adosadas en orden creciente, y compartiendo dos lados cada una con la anterior, como se puede ver en este esquema construido con Excel:



Observamos que se ha construido adosando cuatro heptágonos con tamaño creciente. Como se cuenta también la unidad inicial, este número heptagonal tendría índice 5.

Si estás siguiendo esta serie sabrás ya que todos los números poligonales se calculan con la fórmula

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

Tal como procedimos con otros poligonales, si hacemos k=7 obtendremos la fórmula adecuada para los heptagonales, que representaremos como Hp:

$$Hp_n = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Con una hoja de cálculo se crea rápidamente una columna de heptagonales aplicando esta fórmula:

N	HEP(N)
1	1
2	7
3	18
4	34
5	55
6	81
7	112
8	148
9	189
10	235

Los primeros números heptagonales son:

1 , 7 , 18 , 34 , 55 , 81 , 112 , 148 , 189 , 235 , 286, 342, 403, 469, 540, 616 , 697, 783, 874, 970, 1071, 1177, 1288, 1404, 1525, 1651, 1782,…

(http://oeis.org/A000566)

CARACTERIZACIÓN

Si multiplicamos un heptagonal por 5 y añadimos una unidad, obtenemos un número triangular. En efecto:

$$5 \cdot Hp_n + 1 = \frac{25n^2 - 15n + 2}{2} = \frac{(5n-1)(5n-2)}{2}$$
$$= T_{5n-1}$$

El criterio para saber si un número es triangular es que 8T+1 sea cuadrado, luego, en el caso del heptagonal deberá ser cuadrado C^2=8(5Hp+1)+1=40Hp+9

Por ejemplo, ¿Es heptagonal 783?

Aplico el criterio: C=40*783+9=31329=177^2, luego es un cuadrado y 783 es heptagonal.

La raíz cuadrada siempre terminará en 7. Si sustituimos el número a probar por la fórmula de un heptagonal, queda:

$$40Hp + 9 = 40\frac{n(5n-3)}{2} + 9 = 100n^2 - 60n + 9$$
$$= (10n-3)^2$$

Claramente, la expresión 10n-3 termina en 7 en el sistema decimal de numeración.

Si se cumple el criterio, podemos encontrar el orden del heptagonal:

Igualamos la fórmula del heptagonal a su valor llegamos a la ecuación

$5n^2-3n-2H=0$

Escribiendo la solución en función de C llegamos a una relación muy simple: n=(C+3)/10.

Todo esto se puede resumir en una función:

```
Function ordenheptagonal(n)
Dim a, b

b = 0 'Comenzamos haciendo cero el posible orden
a = 40 * n + 9 'Buscamos el cuadrado
If escuad(a) Then 'Si es cuadrado, n es heptagonal
b = (Sqr(a) + 3) / 10 'Calculamos su orden
End If
ordenheptagonal = b
End Function
```

De esta forma podemos identificar si un número es heptagonal o no.

En la tabla siguiente hemos buscado el primer heptagonal a partir de 400:

N	Orden
400	0
401	0
402	0
403	13
404	0
405	0
406	0
407	0
408	0
409	0
410	0

Vemos que sólo 403 es heptagonal de orden 13, porque 403=13*(5*13-3)/2

OTRAS FORMAS DE EXPRESIÓN

Paul Barry da en OEIS este desarrollo: a(n) = Sum_{k = 1..n} (4*n - 3*k).

Traducimos a nuestra notación:

$$Hp_n = \sum_{k=1}^{n} (4n - 3k)$$

Es fácil de comprobar, ya que el sumatorio de 4n será $4n^2$, y el de 3k es el triple de un número triangular, quedando

Hp(n)=4n^2-3n(n+1)/2=n(5n-3)/2, que es la fórmula del heptagonal.

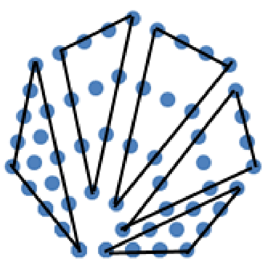
Por ejemplo, para n=6

N=6	
k	4N-3K
1	21
2	18
3	15
4	12
5	9
6	6
SUMA	**81**

Viendo este ejemplo te puedes preguntar si existen más heptagonales que sean cuadrados. La respuesta es afirmativa y los tienes publicados en http://oeis.org/A036354

Los números heptagonales equivalen a un número triangular de su mismo lado sumado con cuatro veces su anterior.

Lo podemos comprobar con la siguiente imagen



También es sencilla la justificación algebraica:

Es n(n+1))/2+4(n-1)n/2=n(5n-3)/2=Hp(n)

Es válida para heptagonales la descomposición **Hp(n)=n+5T(n-1)**, como suma de un lado y cinco triangulares de lado n-1

En efecto, n+5n(n-1)/2=n(5n-3)/2=Hp(n)

RECURRENCIAS

Todos los poligonales siguen esta sencilla recurrencia **P(n,k)=P(n,k-1)+(k-1)(n-2)+1**. En el caso de los heptagonales hacemos n=5 y queda Hp(k)=Hp(k-1)+5(k-1)+1

Hp(k)=Hp(k-1)+5(k-1)+1=Hp(k-1)+5(k-1)+1

Así, nos queda esta tabla:

k	5k+1	Hp(k)
1	6	1
2	11	7
3	16	18
4	21	34
5	26	55
6	31	81
7	36	112
8	41	148

La primera columna contiene índices, la segunda los incrementos 5k+1 y la tercera las sumas, que se convierten en los heptagonales. Hemos destacado que 55=21+34

En OEIS proponen varias recurrencias. Comprobamos la de Jaume Oliver Lafont:

a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3), a(0) = 0, a(1) = 1, a(2) = 7.

Lo intentamos con nuestra herramienta de sucesiones recurrentes lineales http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Abrimos la hoja “Tercer orden” y rellenamos datos:

Coeficientes							
A	3		**B**	-3		**C**	1
Valores iniciales							
X0	0		**x1**	1		**x2**	7

Los coeficientes son 3, -3 y 1, y como iniciales hemos elegido 0, 1, 7. Pulsamos el botón “Ver sucesión” y obtenemos los primeros heptagonales.

0
1
7
18
34
55
81
112
148
189
235
286

NÚMEROS OCTOGONALES

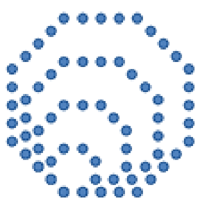
INTRODUCCIÓN

Con los poligonales de ocho lados (octogonales) finalizamos la serie de estudios individualizados de cada tipo. Posteriormente se incluirán referencias rápidas de otros poligonales.

Como en casos anteriores, se recomienda visitar algún tipo de los ya estudiados, como los hexagonales o heptagonales.

Definición e inserción con los poligonales en general

La formación de un número octogonal sigue el mismo procedimiento que en los casos anteriores. El simple estudio de esta imagen lo aclara:



Vemos en ella cuatro octógonos que se forman sobre un mismo vértice y sus dos lados adyacentes, con un número de unidades por lado creciente. Su índice es 5, porque lo forman cuatro polígonos más la unidad del principio que también se cuenta. Así que este esquema representa un poligonal de orden 8 con índice 5.

Par calcular su número de unidades partimos, como en toda la serie, de la fórmula general:

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

Basta sustituir k por 8 para obtener la fórmula adecuada para los octogonales, que representaremos como Oc(n):

$$Oc_n = \frac{n(n(8-2) - (8-4))}{2} = 3n^2 - 2n$$

Así, el número de unidades del octogonal de la imagen de arriba será:

$$Oc_5 = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 65$$

Con esta expresión es fácil crear una columna de octogonales en una hoja de cálculo:

N	OC(N)
1	1
2	8
3	21
4	40
5	65
6	96
7	133
8	176
9	225
10	280

Estos son los primeros octogonales:

1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936,… (http://oeis.org/A000567)

DESCOMPOSICIONES DIVERSAS

Los números octogonales participan de las descomposiciones generales de todos los poligonales. Las repasamos para este caso:

Suma de una progresión aritmética de diferencia 6 partiendo de 1

1+7=8

1+7+13=21

1+7+13+19=40

Basta ver en la imagen anterior que en cada capa nueva de octógonos el incremento es 6 unidades mayor que el anterior. Algebraicamente:

$$\begin{aligned} Oc_{n+1} - Oc_n &= 3(n+1)^2 - 2(n+1) - 3n^2 + 2n \\ &= 6n + 1 \end{aligned}$$

Un triángulo de lado k y 5 triángulos de lados k-1

Por ejemplo, 176 es el octogonal de orden 8 y equivale a un triangular de ese índice y cinco del anterior:

176=8*9/2+5*7*8/2=36+5*28=36+140=176

Gráficamente:

Algebraicamente: $n(n+1)/2+5n(n-1)/2 = (n^2+n+5n^2-5n)/2 = 3n^2-2n$

Un lado de longitud k y 6 triángulos de índice k-1

Una propiedad similar se demostró en tipos anteriores, por lo que omitimos su justificación. Es tan sencilla como la anterior.

Lo aplicamos al octogonal de índice 9, 225:

225=9+6*8*9/2=9+6*36=9+216=225

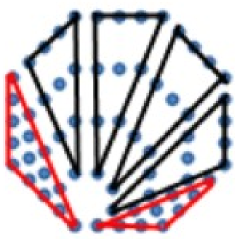
Un cuadrado y cuatro triángulos de una unidad menos

Esta descomposición es propia de los octogonales. Se deduce de su fórmula:

$$Oc_n = 3n^2 - 2n = n^2 + 2(n^2 - n) = n^2 + 4n(n-1)/2$$

Lo aplicamos al 133, que tiene lado 7:

$133=7^2+4*6*7/2=49+4*21=49+84=133$



En la imagen reconocemos los cuatro cuadrados (contornos en negro) y dos triangulares consecutivos (índices 4 y 5, los de contorno rojo) que adosados forman un cuadrado de lado 5.

Del desarrollo efectuado anteriormente también se deduce la siguiente descomposición:

Un octogonal equivale a la suma de un cuadrado con el doble de un oblongo

Los números oblongos son los del tipo N(N+1) o N(N-1). Así que también lo hemos deducido sin saberlo:

$$Oc_n = 3n^2 - 2n = n^2 + 2(n^2 - n) = n^2 + 2n(n-1)$$

El octogonal 280 se puede descomponer así:

$280=10^2+2*10*9=100+180=280$

Criterio para reconocer octogonales

Como en otros casos, para que N sea octogonal, ha de tener solución entera positiva la ecuación $N=3n^2-2n$, o **$3n^2-2n-N=0$**

Resolviendo:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+3N}}{3}$$

Si la solución es entera positiva, N será octogonal. Lo podemos plasmar con la función:

```
Function ordenoctogonal(n)
Dim a, b

b = 0
a = 3 * n + 1 'Debe ser un cuadrado
If escuad(a) Then
b = (1 + Sqr(a)) / 3 'Solución de la ecuación
If b <> Int(b) Then b = 0 'Ha de ser entera
End If
```

ordenoctogonal = b
End Function

Con esta función podemos comprobar, por ejemplo, que en el rango 300-310 no existe ningún octogonal:

Rango	Es octogonal
300	0
301	0
302	0
303	0
304	0
305	0
306	0
307	0
308	0
309	0
310	0

Si hubiéramos buscado en el rango 400-410 habríamos encontrado que 408 es el octogonal número 12:

407	0
408	12
409	0

Los números octogonales alternan la paridad .

Con índice par 2k:

$Oc(2k)=3(2k)^2-2(2k)=12k^2-4k$, que es claramente par.

Con impar 2k+1:

$Oc(2k+1)=3(2k+1)^2-2(2k+1)=12k^2+12k+3-4k-2=12k^2+12k-4k+1$, que es impar.

Esta alternancia se comprueba en su listado:

1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560,…

Una propiedad atractiva

Amarnath Murthy propone en http://oeis.org/A000567 la siguiente propiedad:

$Oc(n) = (3n-2)(3n-1)(3n)/((3n-1) + (3n-2) + (3n))$

En efecto: $(3n-2)(3n-1)(3n)/(3*(3n-1)) = n(3n-2) = 3n^2-n=Oc(n)$

Traduciendo a lenguaje ordinario, los octogonales equivalen al producto de tres números naturales consecutivos adecuados dividido entre su suma. Por ejemplo, el 408 equivale a 34*35*36/(34+35+36).

Número de divisores

J. Lowell propone en esa misma página que el octogonal de índice **n** equivale al número de divisores de 24^(n-1). En realidad, no es necesario usar el número 24, pues valdría para esta propiedad cualquier número con dos divisores y exponentes 3 y 1 respectivamente. En efecto, en este caso la función TAU que cuenta divisores valdría:

$TAU=(1+3(n-1))(1+n-1)=(3n-2)*n=3n^2-2n$

En la página indicada de OEIS se presentan más propiedades, pero con las que hemos publicado ya basta por ahora.

OTROS POLIGONALES

Existen infinitos tipos de números poligonales. Hemos llegado hasta ahora hasta los octogonales, y a partir de ellos los temas se repiten demasiado. En esta última parte nos limitaremos a publicar su fórmula, algún enlace interesante y alguna propiedad. Para todos ellos es válida nuestra calculadora *Calcupol*

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados)

NÚMEROS NONAGONALES

Son aquellos formados por polígonos de nueve lados adosados como es habitual en los poligonales. En la imagen figura el nonagonal de orden 4, que contiene 46 unidades.

Fórmula

Aplicamos la fórmula general de los poligonales para k=9 y llamamos N(n) al nonagonal de orden n:

$$N(n)=\frac{n(n*(9-2)-(9-4))}{2}=\frac{n(7n-5)}{2}$$

Siguiendo nuestro objetivo, solo destacaremos lo más importante.

Alguna propiedad

Un nonagonal se relaciona con los triangulares mediante esta equivalencia:

7*N(n)+3=T(7n-3)

Es fácil verlo

$$\begin{aligned}7N(n)+3&=\frac{7n(7n-5)}{2}+3=\frac{49n^2-35n+6}{2}\\&=\frac{(7n-3)(7n-2)}{2}=T(7n-3)\end{aligned}$$

Por ejemplo, 111 es el nonagonal de orden 6, y se cumple:

7*111+3=780=T(39)=T(7*6-3), luego es equivalente 7*111+3 al triangular número 39, es decir 7*6-3.

Criterio para reconocerlos

Según la propiedad anterior, 8*(7N+3)+1 ha de ser un cuadrado (criterio de los triangulares)

Luego debe serlo 56N+25. Si se cumple que esta expresión es cuadrada, y tiene raíz cuadrada R entera, N será nonagonal. Sustituyo N por su expresión y queda $56n(7n-5)/2+25=R^2$; $4*49n^2-5*4*7n+25=R^2$;

$(14n^2-5)^2=R^2$; luego $14n^2-5=R$, y queda

$$n = \frac{\sqrt{56N + 25} + 5}{14}$$

Un ejemplo:¿Es nonagonal 2301?

Formamos 56*2301+25 y resulta 128881, que es cuadrado perfecto de raíz 359. Usamos la fórmula anterior y obtenemos n=(359+5)/14=26. Como es entero, la respuesta es afirmativa, 2301 es el nonagonal de orden 26.

Listado

Los primeros nonagonales están publicados en http://oeis.org/A001106

0, 1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, 396, 474, 559, 651, 750, 856, 969, 1089, 1216, 1350, 1491, 1639, 1794, 1956, 2125, 2301, 2484, 2674, 2871, 3075, 3286, 3504, 3729, 3961, 4200, 4446, 4699, 4959, 5226, 5500, 5781, 6069,…

Como es costumbre en esa página, se incluye el 0.

Recurrencia

Sólo destacaremos una última propiedad, y es que se generan con una recurrencia lineal de tercer orden y coeficientes (3, -3, 1)

Volcamos la imagen de nuestra hoja
http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Recurrencias lineales de tercer orden					
Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	0	x1	1	x2	9

Hemos considerado también el cero como elemento inicial. Con el botón de “*Ver sucesión*” nos resulta el listado de nonagonales:

0
1
9
24
46
75
111
154
204
261
325
396
474
559
651
750

Con esto terminamos para dar paso a los decagonales.

NÚMEROS DECAGONALES

Un número decagonal cuenta decágonos anidados, al igual que ocurrió en los tipos anteriores con sus polígonos correspondientes.

En la imagen podemos distinguir cuatro decágonos anidados más el correspondiente a un punto, por lo que se tratará de un decagonal de orden 5, número que coincide con las unidades contenidas en cada lado.

Fórmula

Repetimos el trabajo efectuado en ocasiones anteriores, sin explicación ya. Nombraremos el número decagonal como D(n):

$$D(n) = \frac{n(n*(10-2)-(10-4))}{2} = \frac{n(8n-6)}{2}$$
$$= 4n^2 - 3n$$

Por ejemplo, el decagonal de la imagen anterior equivale a

D(5)=4*25-3*5=100-15=85

Si tienes paciencia, puedes contarlos.

Con esta fórmula podemos encontrar los primeros decagonales. Están publicados en http://oeis.org/A001107

1 , 10 , 27 , 52 , 85 , 126 , 175 , 232, 297, 370, 451, 540, 637, 742, 855, 976, 1105, 1242, 1387, 1540,… (hemos omitido el 0)

La fórmula obtenida se puede interpretar de otra forma:

D(n) = $4n^2$-3n = n^2+3n(n-1), lo que se puede ver como la suma de un cuadrado con el triple de un número oblongo. No tiene mucho interés, salvo que, como los oblongos son todos pares y su triple también, los números decagonales tienen la misma paridad que su número de orden. Se puede comprobar en el listado.

Alguna propiedad

El decagonal de orden n equivale a la suma de **2n** enteros consecutivos a partir de **n-1** (Bruno Berselli, Jan 16 2018)

La demostración se basa en la fórmula de las progresiones aritméticas. En este caso el último término es 3n-2, luego queda:

$$S = \frac{(a_1 + a_{2n})}{2} 2n = (n - 1 + 3n - 2)n = 4n^2 - 3n$$

Efectivamente, obtenemos un decagonal.

Lo comprobamos con el decagonal de orden 3, que es el 27. Deberemos sumar 6 enteros consecutivos a partir del 2: 2+3+4+5+6+7=27, que era lo esperado.

Suma de impares con resto 1 módulo 8

Esta propiedad es una adaptación de otra más general, pero su sencillez hace que merezca su inclusión. Por ejemplo, 85 es el decagonal número 5, y debe ser equivalente a la suma 1+9+17+25+33, y así es.

Un homenaje a Ramanujan

Neven Juric incluye este desarrollo en http://oeis.org/A001107

1^3 + 3^3*(n-1)/(n+1) + 5^3*((n-1)*(n-2))/((n+1)*(n+2)) + 7^3*((n-1)*(n-2)*(n-3))/((n+1)*(n+2)*(n+3)) + ...

Merece la pena comprobarlo, por ejemplo para n=4, cuyo decagonal es 52:

1^3+3^3*3/5+5^3*(3*2)/(5*6)+7^3*(3*2*1)/(5*6*7)

Lo hemos calculado con Wiris (https://calcme.com/a):

$$1^3+3^3*3/5+5^3*(3*2)/(5*6)+7^3*(3*2*1)/(5*6*7) \quad = \quad 52$$

Valga como homenaje al genio.

Una recurrencia

Finalizamos con una recurrencia y nuestra herramienta para ellas, ya usada en los nonagonales:

*a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3) for n>2, a(0)=0, a(1)=1, a(2)=10. - Jaume Oliver Lafont, Dec 02 2008*

Aplicamos los datos a nuestra hoja de cálculo http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Coeficientes							
A	3		B	-3		C	1
Valores iniciales							
X0	0		x1	1		x2	10

Usamos el botón para ver sucesión y, en efecto, obtenemos los primeros decagonales (con el 0):

0
1
10
27
52
85
126
175
232
297
370
451
540

NÚMEROS UNDECAGONALES

A los poligonales de 11 lados les prestaremos menos atención. Dejamos el estudio en pocos detalles:

Fórmula

Es fácil ver que es la siguiente:

$$U(n) = \frac{(9n^2 - 7n)}{2}$$

Con ella podemos construir una columna en hoja de cálculo con los primeros undecagonales:

n	U(n)
1	1
2	11
3	30
4	58
5	95
6	141
7	196
8	260
9	333

Están publicados en http://oeis.org/A051682

NÚMEROS DODECAGONALES

Finalizamos este estudio con otro tipo de poligonales, y también nos limitaremos a dos o tres propiedades.

Imagen

A partir de estos lados los polígonos se van redondeando, adquiriendo la apariencia de circunferencias:

Este es el dodecagonal de orden 4, que contiene 64 unidades. Ya es difícil contarlas porque unos lados se confunden con otros.

Fórmula

Es sencillo demostrar que es $D(n)=5n^2-4n$

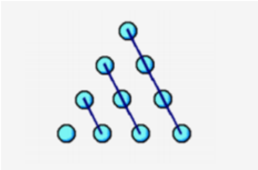
Con esta fórmula generamos los primeros números dodecagonales:

1, 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, 460, 561, 672, 793, 924, 1065, 1216, 1377, 1548, 1729,… http://oeis.org/A051624

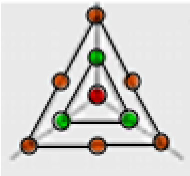
Para no repetir cuestiones, dejamos el tema aquí. En los enlaces contenidos en esta publicación podrás leer más propiedades.

POLIGONALES CENTRADOS

Los números poligonales ordinarios se engendran acumulando distintos polígonos a partir de un vértice, como podemos ver en la figura



Los poligonales centrados son similares, pero los polígonos se acumulan alrededor de un centro, con sus lados paralelos



Todos los poligonales de esta clase se pueden pues generar mediante sumas de números naturales que representen los contornos de los polígonos. En el caso de los triángulos serían 1+3+6+9+12+…

Efectuando sumas parciales obtendríamos la sucesión 1, 4, 10, 19, 31,.., a la que nombraremos como “números triangulares centrados”.

En el caso de cuadrados se formaría la suma 1+4+8+12+16+…, y las sumas formarían la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números “cuadrados centrados”.

Con el mismo método resultarían los “pentagonales centrados”, a partir de la suma 1+5+10+15+20…, que serían 1, 6, 16, 31, 51,…

En general, los polígonos de orden n y lado k, al sumarse formarían:

1+n+2n+3n+4n+...+kn=1+n*(1+2+3+4+5+...+k)=1+n*k*(k+1)/2

Si contamos el 1 como primer elemento, la suma del paréntesis tendría un elemento menos, y daría la expresión, si llamamos POLC al poligonal centrado:

$POLC(n,k)=1+n*k*(k-1)/2=(n*k^2-n*k+2)/2$

Es decir:

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

En ella n representa el tipo de poligonal y k el lado.

Así, POLC(5,4)=(5*16-5*4+2)/2=62/2=31, tal como vimos en el listado de pentagonales.

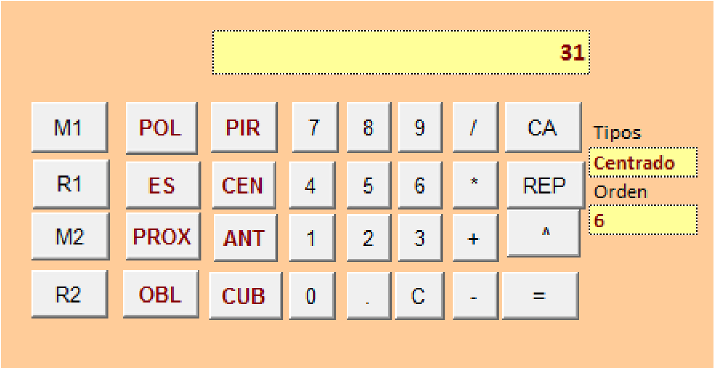
POLC(3,5)=(3*25-3*5+2)/2=62/2=31, que sería el quinto triangular que obtuvimos más arriba.

Calculadora CALCUPOL

Estos cálculos se pueden evitar con nuestra calculadora de números figurados, “Calcupol”. Esta calculadora Se descarga desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Con la tecla CEN (de centrado) y la secuencia de teclas **3 CEN 5 =** obtendríamos el triangular centrado de lado 5, que ya sabemos vale 31.



Usaremos esta calculadora varias veces en este tema.

Relación con los poligonales ordinarios

Si recordamos la fórmula de los números poligonales

k((n-2)*k-(n-4))/2

y la comparamos con la de los centrados

$(n*k^2-n*k+2)/2$

resulta:

$(n*k^2-n*k+2)/2-(k^2*(n-2)-k*(n-4)/2 =$

$=(n*k^2-n*k+2-n*k^2+2k^2+n*k-4k)/2 =$

$= (2+2k^2-4k)/2=(k-1)^2$

Así que si conocemos un poligonal ordinario, bastará sumarle **el cuadrado del lado después de restarle una unidad**. Lo vemos con Calcupol. El número poligonal de orden 7 (heptagonal) de lado 10 tiene un valor de 235 (secuencia de teclas **7 POL 10 =**) y si le añadimos $(10-1)^2$, obtenemos 235+81=316, que es el poligonal centrado del mismo orden y lado. Puedes comprobarlo con la secuencia **7 CEN 10** =

Relación con los triangulares ordinarios

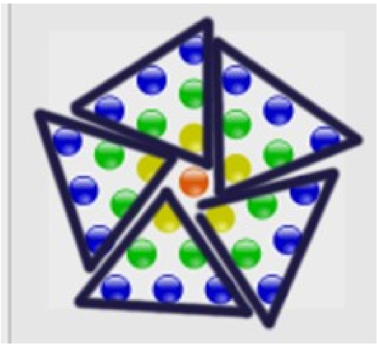
La expresión

$$POLC(n,k) = \frac{nk^2 - nk + 2}{2}$$

Se puede escribir así:

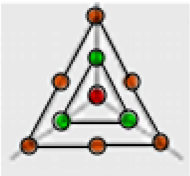
$$POLC(n,k) = n\frac{k(k-1)}{2} + 1 = nT(k-1) + 1$$

Esto nos indica que un poligonal centrado se forma añadiendo a 1 n números triangulares de lado n-1. En el caso, por ejemplo, del pentagonal de lado 4, se podrá descomponer en cinco triángulos de lado 3 y una unidad. La siguiente imagen, adaptación de otra de la Wikipedia, nos muestra claramente los triángulos:



TRIANGULARES CENTRADOS

Comenzamos el estudio particularizado para cada orden, siendo n=3 el caso de menos lados. Ya se comentó más arriba que los triangulares centrados se forman mediante triángulos concéntricos como los de la imagen:



Se considera la unidad como primer triángulo.

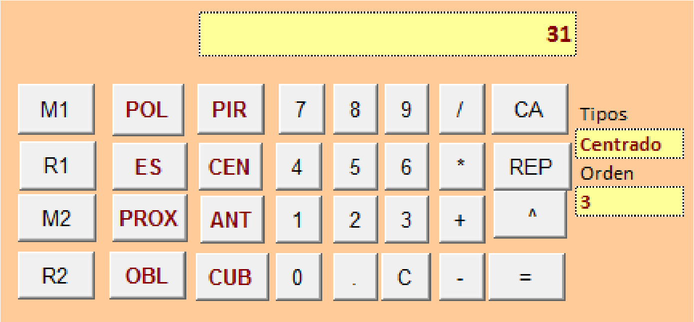
Ya se vio que se forman mediante la suma 1+3+6+9+12+...+3k, que da lugar a la expresión 1+3*k(k-1)/2, con lo que los primeros triangulares centrados serán; 1, 1+3, 1+3+6, 1+3+6+9,….es decir: 1, 4, 10, 19,…

Completamos la sucesión con más términos:

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, 235, 274, 316, 361, 409, 460, 514, 571, 631, 694, 760, 829, 901,… Están publicados en http://oeis.org/A005448

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno.

Fijas en la parte derecha **"Centrado" y orden 3**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1. Después, cada vez que pulses **PROX**, aparecerán los siguientes términos: 4, 10, 19, 31,...



Es interesante deducir la expresión del término general, que ya conocemos, mediante nuestro interpolador lineal para números naturales

(lo puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton)

Si la aplicamos a los números 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64 descubrimos que sus diferencias de tercer orden son nulas, y que esto los convierte en valores de un polinomio de segundo grado.

1	2	3	4	5	6	7
1	4	10	19	31	46	64
	3	6	9	12	15	18
		3	3	3	3	3
			0	0	0	0
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	0	3	3	1
720	120	24	6	2	1	1

La herramienta de interpolación nos proporciona también los coeficientes en las filas inferiores.

Si conoces la interpolación de Newton entenderás que el polinomio buscado es

1/1+3/1(x-1)+3/2(x-1)(x-2)=1+3x(x-1)/2

Esto comprueba lo indicado más arriba.

Propiedades

(1) A partir del 10, todos los triangulares centrados son suma de tres triangulares consecutivos.

TC(n)=T(n)+T(n-1)+T(n-2)

Es una cuestión de Álgebra:

$T(x-2)+T(x-1)+T(x)=(x-2)(x-1)/2+(x-1)x/2+x(x+1)/2=(x^2-3x+2+x^2-x+x^2+x)/2=(3x^2-3x+2)/2=1+3x(x-1)/2= TC(x)$

Por inducción

Se cumple para TC(4)=10=1+3+6=T(1)+T(2)+T(3)

Si se cumple para x, será TC(x)=T(x-2)+T(x-1)+T(x). Si añadimos 3x, se convertirá en TC(x+1), y bastará demostrar que T(x-2) se convierte en T(x+1)

En efecto:

$(x-2)(x-1)/2+3x=(x^2-3x+2+6x)/2=(x^2+3x+2)/2=T(x+1)$

Piénsalo bien, sólo hay que convertir T(x-2) en T(x+1)

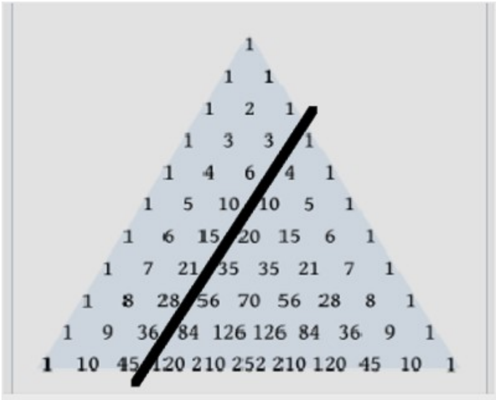
(2) Relación con números combinatorios

TC(n+1) = C(n+3, 3)-C(n, 3)

Otra cuestión de Álgebra:

C(n+3, 3)-C(n, 3)=((n+3)(n+2)(n+1)-n(n-1)(n-2))/6

$(n^3+6n^2+11n+6-n^3+3n^2-2n)/6=(9n^2+9n+6)/6=1+3n(n+1)/2=TC(n+1)$



Puedes ir restando números combinatorios situados debajo de la línea continua, con un salto de tres lugares, e irán resultando los triangulares centrados:

20-1=19; 35-4=31; 56-10=46; 84-20=64; 120-35=85…

(3) Triangulares centrados primos

Entre los triangulares de este tipo existen algunos que son primos. Sólo es una curiosidad. Los primeros son:

19, 31, 109, 199, 409, … https://oeis.org/A125602

(4) Recurrencia

Todas las sucesiones de números figurados admiten recurrencias, por ser fórmulas polinómicas. Los triangulares centrados también poseen una generación por recurrencia, además de la contenida en la definición, de añadir 3n al término anterior:

Elegimos esta:

TC(n) = 3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3), TC(1)=1, TC(2)=4, TC(3)=10.

Se cumple para el 19=3*10-3*4+1=30-12+1=19

Otro término lo cumplirá por simples cálculos algebraicos.

3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3)=3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Si no te apetece simplificar acude a cualquier CAS. Nosotros hemos usado Wolfram Alpha

WolframAlpha computational knowledge engine.

3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Hemos obtenido la expresión

Expanded form:

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$$

que coincide con 1+3n(n-1)/2, expresión de TC(n)

Existen otras recurrencias, que puedes intentar demostrar:

a(n) = a(n-1) + 3*n-3. - (Vincenzo Librandi) a(n) = 2*a(n-1) - a(n-2) + 3. - (Ant King)

CUADRADOS CENTRADOS

Vimos en los primeros párrafos que la suma 1+4+8+12+16+…, que se forma añadiendo 4 unidades a cada sumando, forma, con sus sumas parciales, la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números "cuadrados centrados".

Los primeros términos son:

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381,...y están publicados en http://oeis.org/A001844

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno. La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Fijas en la parte derecha **"Centrado" y orden 4**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1

Como en el caso de los triangulares, con cada pulsación de la tecla PROX irás obteniendo los siguientes cuadrados centrados: 5, 13, 25,...

Si en la expresión de los poligonales centrados

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

sustituimos n por 4 nos resultará la expresión de los cuadrados centrados:

$$CC(k)=2k^2-2k+1$$

Por ejemplo CC(4)=2*16-2*4-1=32-8+1=25

Esta fórmula presenta una interpretación sencilla, pues equivale **a la suma de dos cuadrados consecutivos**. Así, 25=16+9, o 13=9+4. Si recordamos que los cuadrados son sumas de impares, con esta propiedad podemos engendrar los cuadrados centrados como una suma creciente y decreciente de impares. Lo vemos con el 61:

61=1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1

Con un poco de Álgebra es fácil ver que es válida también esta otra expresión:

$$CC(k)=\frac{(2k-1)^2+1}{2}$$

Así, el término 5 equivaldrá a (81+1)/2=41, como puedes comprobar en el listado. También 41 es suma de cuadrados: 41=26+16

Lo podemos expresar también como que el **doble de un cuadrangular menos una unidad es un cuadrado perfecto**. Esto convierte a un cuadrado centrado N en **la hipotenusa de un triangulo rectángulo** con un cateto igual a N-1. En efecto, $N^2-(N-1)^2=2N-1$ es un cuadrado. Por ejemplo:

$41^2 - 40^2 = 1681 – 1600 = 81 = 9^2$

PENTAGONALES CENTRADOS

Al igual que en los casos anteriores, partimos de la sucesión formada por el 1 y los múltiplos de 5, ya que en un pentagonal centrado se van añadiendo polígonos de cinco lados aumentando una unidad en cada caso: 1+5+10+15+20. Las sumas parciales formarán los pentagonales centrados (PC(n)):

1, 6, 16, 31, 51,…

Los primeros pentagonales centrados son:

1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, 276, 331, 391, 456, 526, 601, 681, 766, 856, 951, 1051, 1156, 1266, 1381, 1501, 1626, 1756, 1891, 2031, 2176, 2326, 2481, 2641, 2806, 2976,…

Están publicados en http://oeis.org/A005891

Para conseguir su expresión podemos acudir a la interpolación polinómica. Como ya la hemos usado en casos anteriores, sólo insertaremos una captura de pantalla:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	6	16	31	51	76	106
Dif1		5	10	15	20	25	30
Dif2			5	5	5	5	5
Dif3				0	0	0	0
Dif4					0	0	0
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	0	0	5	5	1
	720	120	24	6	2	1	1

Vemos que dará lugar a un polinomio de segundo grado. Leemos los coeficientes:

P(x)=1+5*(x-1)+5/2*(x-1)(x-2)=(5n^2+5n+2)/2

Así que

$$PC(n)=\frac{5n^2+5n+2}{2}$$

Basta observar la fórmula para darse cuenta de que todos estos números son congruentes con la unidad módulo 5. Así 16=5*3+1, 76=5*15+1,...Ya sabemos que sus diferencias son múltiplos de 5.

También es sencillo comprobar que los coeficientes del 5 en la anterior expresión son todos números triangulares, ya que PC(n)=5n(n+1)/2+1.

HEXAGONALES CENTRADOS

La definición de estos números coincide con la de los anteriores, pero añadiendo a cada uno de ellos un hexágono nuevo (o múltiplo de 6)

Dejamos como ejercicio comprobar que su expresión es

$HC(n)=(n+1)^3-n^3$

Con ella podemos desarrollar la sucesión de hexagonales centrados:

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2611, 2791, 2977, 3169, 3367, 3571, 3781, 3997

(http://oeis.org/A003215)

La expresión obtenida equivale claramente a una diferencia de cubos consecutivos. En efecto, $7=2^3-1^3$, $19=3^3-2^3=27-8$, $37=4^3-3^3=64-27$

Propiedad combinatoria

Sumas iguales a cero

Benoit Cloitre propone en la página OEIS citada que los números de la sucesión se corresponden con el número de tripletes ordenados de enteros (a,b,c),con -n <= a,b,c <= n, tales que a+b+c=0. Esta propiedad está expresada si el primer índice de la sucesión es cero, por lo que debemos aplicarla a n-1.

Por ejemplo, en el caso de n=3, HC(3)=19 coincidirá con el número de sumas de tres sumandos comprendidos entre -2 y 2 cuya suma sea 0.

Podemos comprobar esta propiedad con nuestra hoja Cartesius

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

El planteo sería muy simple:

xtotal=3
Xt=-2..2
Suma=0

Aunque no hayas usado nunca esta hoja Cartesius, entenderás que se fija un número de sumandos igual a 3, comprendidos entre -2 y 2 y cuya suma sea 0.

Introducimos este planteo en la hoja

Escribe a partir de la siguiente fila.
(no dejes filas en blanco)
xtotal=3
Xt=-2..2
Suma=0

Pulsamos el botón **Iniciar** y obtenemos las 19 sumas esperadas:

B	C	D
-2	0	2
-2	1	1
-2	2	0
-1	-1	2
-1	0	1
-1	1	0
-1	2	-1
0	-2	2
0	-1	1
0	0	0
0	1	-1
0	2	-2
1	-2	1
1	-1	0
1	0	-1
1	1	-2
2	-2	0
2	-1	-1
2	0	-2

Esta propiedad se puede demostrar por inducción. Ya hemos comprobado para n=3. Para n=2 basta con que recorras el listado de sumas y te quedes con las que tienen máximo 1. Las contamos y resultan 7, y es trivial que para el caso n=1 sólo obtenemos un caso. Con esto se comprueba para los casos 1, 2 y 3.

Para el caso n, podemos pasar al caso n+1, con lo que hay que añadir los elementos -(n+1) y n+1. Las nuevas sumas pueden ser de tres clases:

Si contienen -(n+1) y n+1, el tercer sumando será 0, y reordenando nos resultan 6 sumas nuevas.

Si sólo contiene el sumando -(n+1), deberá estar acompañado por todos los sumandos positivos entre 1 y n que sumen n+1. Existen n sumas ordenadas de ese tipo, y el sumando -(n+1) se puede situar en 3 posiciones, luego aparecerán 3n sumas nuevas.

El tercer caso también abarcará 3n sumas. Reunimos los tres casos y nos resulta 3n+3n+6=6(n+1), luego efectivamente, se añadirá un múltiplo de 6 al término anterior, lo que lo convierte en el siguiente hexagonal centrado.

Una propiedad aritmética

Las medias parciales de los k primeros términos coinciden con k^2.

Está basada en un inicio para n=0, por lo que usaremos n en lugar de n+1 en la demostración.

Esta propiedad se verifica en los primeros términos:

$(1+7)/2 = 4 = 2^2$

$(1+7+19)/3 = 9 = 3^2$

Si lo suponemos cierto para n, deberemos demostrar que la siguiente media coincide con $(n+1)^2$. Usaremos la expresión general aplicada al término n.

$M(n+1)=S(n+1)/(n+1)=(S(n)+3n^2+3n+1)/(n+1)=(n*n^2+3n^2+3n+1)/(n+1) = (n+1)^3/(n+1) = (n+1)^2$.

Es evidente que hemos demostrado de paso que las sumas parciales coinciden con n^3

Aquí dejamos los poligonales centrados.

Con esta muestra podrás investigar más sobre el tema.

CURIOSIDADES

POLIGORIALES

Los números poligoriales se definen de forma similar a los factoriales, pero en lugar de multiplicar números naturales consecutivos, lo hacen con los números poligonales.

Un número poligorial de orden k equivale al producto de los primeros números poligonales de orden k. Por ejemplo, 180 es poligorial de orden 3, porque es el producto de los cuatro primeros números triangulares: 180=1*3*6*10. 518400 lo es de orden 4, porque equivale al producto de los cuadrados 1, 4, 9, 16, 25 y 36.

En el caso de los factoriales los factores son números naturales, y no hay que calcularlos previamente al producto, pero en el caso de los poligoriales, cada factor posee su propia fórmula, que hay que evaluar. Como trabajamos con números poligonales, es útil usar la misma fórmula en todos los órdenes, aunque luego exista la posibilidad de simplificación en cada caso. Es la siguiente:

$$P_{n,k} = \frac{n\big(n(k-2) - (k-4)\big)}{2}$$

En ella **k** es el orden y **n** la longitud de un lado, que es la variable que se recorre al plantear el producto.

Con esta fórmula no es difícil encontrar una función que devuelva el valor de un poligorial de parámetros n y k:

Public Function poligorial(n, k)
Dim i, j, p

If k < 2 Then poligorial = 1: Exit Function ‘No se definen poligonales de dos lados
p = 1 ‘Inicio del producto de poligonales
For i = 1 To n
p = p * i * (i * (k - 2) - k + 4) / 2 ‘Cada factor se evalúa con la fórmula para poligonales
Next i
poligorial = p
End Function

Casos particulares

A continuación recorreremos algunos órdenes, obteniendo el listado de los primeros términos y alguna propiedad o curiosidad. Comenzamos por los triangulares. Con la función de arriba, es fácil obtener esa lista de los primeros números poligoriales triangulares:

Número	Poligorial triangular
1	1
2	3
3	18
4	180
5	2700
6	56700
7	1587600
8	57153600
9	2571912000
10	141455160000

Un listado más completo lo tienes en http://oeis.org/A006472. Como en esa página figuran casi todos los casos, nos limitaremos a incluir el enlace en cada caso.

No es difícil encontrar una fórmula para el poligorial triangular:

$$P(n,3)=\prod_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n!\,(n+1)!}{2^n}$$

Se puede expresar de otra forma, pero así es fácil calcularla con hoja de cálculo:

Si, por ejemplo, N figura en la celda I4, su poligorial triangular sería ***=FACT(I4)*FACT(I4+1)/2^I4***. Puedes probarlo con cualquier elemento de la tabla:

FACT(7)*FACT(7+1)/2^7=1587600

En la dirección enlazada puedes consultar propiedades combinatorias cuya naturaleza no las hace aptas para ser tratadas con una simple hoja de cálculo.

En esa página figura una aproximación para estos poligoriales:

a(n) ~ 4*Pi*n^(2*n)/(2^n*exp(2*n)).

No es muy buena, como puedes comprobar en la siguiente tabla de comparación:

Poligorial triangular	4*Pi*n^(2*n)/(2^n*exp(2*n)).
3	3
18	17
180	174
2700	2626
56700	55367
1587600	1554884
57153600	56105366
2571912000	2529416046

Poligoriales cuadrados

Este orden es mucho más simple en su generación que el anterior, ya que cada elemento es un producto de cuadrados consecutivos, luego es, en sí mismo, otro cuadrado, que coincide con el cuadrado de un factorial. Lo ves en la tabla:

Número	Poligorial cuadrado	Raíz (factorial)
1	1	1
2	4	2
3	36	6
4	576	24
5	14400	120
6	518400	720
7	25401600	5040
8	1625702400	40320
9	131681894400	362880
10	13168189440000	3628800

Por tanto, su fórmula será:

$$P(n,4) = \prod_{i=1}^{n} n^2 = n!^2$$

El listado de los primeros junto con muchas propiedades combinatorias lo puedes consultar en http://oeis.org/A001044

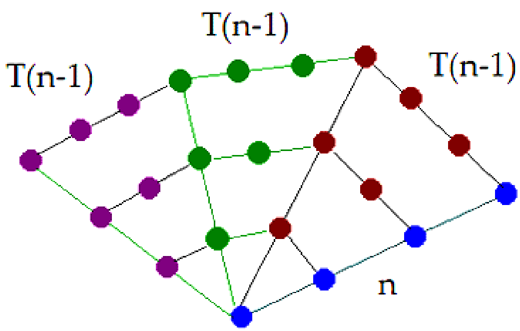
Fórmula general en PARI

Ha llegado el momento de pensar en los poligoriales como productos de sumas, ya que los poligonales equivalen a sumas cuyos elementos tienen la expresión **1+(k-2)*(i-1).** En efecto, los triangulares suman números enteros i, como 10=1+2+3+4, por lo que para k=3 suman 1+(3-2)*(i-1)=1+i-1=i. Los cuadrados suman impares: 1+3+5+7+9=25=5^2, con lo que para k=4 queda 1+(4-2)*(i-1)=1+2i-2=2i-1

Según estas consideraciones, que se basan en que todo poligonal equivale a k-2 números triangulares sumados con su índice (ver mi publicación “Números y formas”

http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf),

estos sumandos **1+(k-2)*(i-1)** se pueden extender a todos los poligoriales. En nuestra figura lo puedes entender mejor:



En ella se observa que en cada especie de arco están incluidas (k-2)*(i-1)+1 unidades: 3*0+1, 3*1+1, 3*2+1, 3*3+1…

Según esto, la función en PARI que devuelve el poligorial(n,k) puede ser:

polygorial(n,k)={my(i,j);prod(i=1,n,sum(j=1,i,1+(k-2)*(j-1)))}

Expresa muy bien la idea de que el poligorial es un producto de sumas.

Puedes comprobar, por ejemplo:

Polygorial(6,4)=518400

Polygorial(9,3)=2571912000

Poligoriales pentagonales

Con la fórmula en PARI (que tiene traducción sencilla para VBASIC) ya podemos encontrar poligoriales de cualquier orden. Si hacemos k=5 obtendremos los de orden pentagonal (o pentagoriales):

1, 5, 60, 1320, 46200, 2356200, 164934000, 15173928000, 1775349576000, 257425688520000,…

Su listado y propiedades los encontrarás en http://oeis.org/A084939

Resto de poligoriales

Una vez conseguido un procedimiento general de obtención de términos, el resto es casuística o propiedades combinatorias no abordables con hoja de cálculo. Un texto sencillo para ampliar el tema es

https://web.archive.org/web/20140617132401/http://danieldockery.com/res/math/polygorials.pdf

En la página OEIS están incluidos más órdenes de poligoriales. A continuación se insertan algunos listados conseguidos de forma personal con nuestra función poligorial seguidos de su comprobación en OEIS:

Hexagonales

Hemos usado el código PARI

polygorial(n,k)={my(i,j);prod(i=1,n,sum(j=1,i,1+(k-2)*(j-1)))}

for(i=1,10,print1(polygorial(i,6),", "))

1, 6, 90, 2520, 113400, 7484400, 681080400, 81729648000, 12504636144000, 2375880867360000,…

Esta sucesión está incluida en http://oeis.org/A000680, sin destacar que se trata de poligoriales hexagonales hasta el apartado de fórmulas.

Una forma de obtener estos números es mediante la expresión

$$P(n,6)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2n(2n-1)}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}$$

Igualmente, es fácil encontrarlos mediante la recursión a(n)=a(n-1)*C(2n,2), siendo C el número de combinaciones o un binomial (en Excel, COMBINAT).

En la siguiente tabla generamos estos números mediante fórmula directa y por recursión (anterior por las combinaciones de 2n sobre 2):

Número	Poligorial hex. (2n)!/2^n	Por recursión (por C(2n,2))
1	1	1
2	6	6
3	90	90
4	2520	2520
5	113400	113400
6	7484400	7484400
7	681080400	681080400
8	81729648000	81729648000
9	12504636144000	12504636144000
10	2375880867360000	2375880867360000

Con las herramientas presentadas podríamos seguir creando poligoriales.

Heptagoriales:

1, 7, 126, 4284, 235620, 19085220, 2137544640, 316356606720, 59791398670080, 14050978687468800,… http://oeis.org/A084940

Octogoriales:

1, 8, 168, 6720, 436800, 41932800, 5577062400, 981562982400, 220851671040000, 61838467891200000,… http://oeis.org/A084941

Y así se puede seguir hasta el orden deseado. Todos tienen propiedades combinatorias interesantes, que no tienen cabida aquí.

CUADRADOS VECINOS DE TRIANGULARES

Sabemos que hay números que son triangulares y cuadrados a la vez: 1, 36, 1225, 41616,…, pero, ¿existirán pares de números consecutivos tales que uno sea triangular y el otro cuadrado?

Dejamos como propuesta encontrar pares de números consecutivos tales que uno sea triangular y el otro cuadrado mediante el método de formar una columna de triangulares en una hoja de cálculo, y junto a esa columna formar otra sumando o restando una unidad a los anteriores, y finalmente analizando que resulte un cuadrado perfecto. Como este método lo hemos desarrollado varias veces en este blog lo dejamos así, como propuesta.

Si sabes escribir código de macros en Calc o en Excel, puedes usar estas dos funciones y una macro de búsqueda (son válidas para ambas hojas de cálculo)

Public Function escuadrado(n) As Boolean
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuadrado = True Else escuadrado = False
End Function

```
Public Function estriangular(n) As Boolean
If 8 * n + 1 = Int(Sqr(8 * n + 1)) ^ 2 Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function

Sub busqueda()
For i = 1 To 1000000
If escuadrado(i) And estriangular(i + 1) Then MsgBox (i)
Next i
End Sub
```

Tal como está escrito el código, encontrará números cuadrados tales que al sumarles una unidad se convierten en triangulares. Una búsqueda del 1 a 1000000 obtendríamos los pares:

Cuadrado más uno igual a triangular

10	9
325	324
11026	11025
374545	374544

Para comprobar consulta http://oeis.org/A164055

Con el Buscador de Naturales

Basta leer las condiciones de la siguiente captura de pantalla para comprender su sentido.

Solución	Detalles
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	5000

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
ES CUADRADO(N+1)
EVALUAR N+1

En lenguaje PARI:

Lo usaremos si se desean resultados de más cifras.

```
isinteger(n)=(n==truncate(n))
isquare(n)= { local(f,m,p=0); if(n==1,p=1,f=factor(n);
m=gcd(f[, 2]); if(isinteger(m/2),p=1));return(p) }
{ for (n=2, 100, a=n*n;for(k=1,a/2,if (isquare(a-k) &&
isquare(a-2*k), write("final.txt",a," ",a-k," ",a-2*k)))) }
{istriang(n)=isquare(8*n+1)}
{for(n=2,10^7,if(isquare(n)&&istriang(n+1),print1(n,"
"))) }
```

Si sustituimos la expresión i+1 en el código por i-1, obtendremos:

Triangulares más uno cuadrados

0	1
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096
17955	17956
139128	139129
609960	609961

Como el 0 no es triangular, desechamos la primera solución. Consulta http://oeis.org/A006454

Pero esto es fiarse demasiado de la máquina. Para encontrar triangulares y cuadrados consecutivos podemos intentar usar las técnicas algebraicas.

Acudimos a la fórmula de los números triangulares para plantear la igualdad pedida

$$\frac{n(n+1)}{2} \pm 1 = k^2$$

en la que el doble signo de 1 se justifica porque el triangular puede ser mayor o menor que el cuadrado. Si desarrollamos y exigimos que el discriminante de la ecuación sea cuadrado perfecto, llegaremos a la ecuación de Pell $x^2-8y^2=-7$ en el primer caso y a la $x^2-8y^2=9$ en el segundo (intenta desarrollarlo así y te resultarán esas dos ecuaciones)

Podemos llegar a las mismas ecuaciones recordando que un número triangular multiplicado por 8 y añadiéndole una unidad se convierte en cuadrado perfecto. De esta forma llegamos a la ecuación de Pell de forma mucho más rápida.

$$\frac{m^2-1}{8} \pm 1 = k^2$$

Con el signo + del 1 llegamos a $m^2-8k^2 = -7$ y con el menos a
$m^2-8k^2 = 9$

Así que el problema desemboca en la resolución de las ecuaciones $x^2-8y^2=-7$; $x^2-8y^2=9$

No todas las ecuaciones de Pell tienen solución. Estas dos sí las tienen, como se puede ver por tanteo: $5^2-8*2^2=-7$; $9^2-8*3^2=9$, que nos dan las primeras soluciones del problema:

Si x=5 y=4 obtenemos el número triangular 3 y el cuadrado 4 que son consecutivos

Si x=9 y=3 aparecerán el triangular 10 y el cuadrado 9, consecutivos, pero con el triangular mayor.

Estas soluciones coinciden con las primeras obtenidas con la hoja de cálculo.

Pero ¿y las demás soluciones?

Si la ecuación de Pell hubiera sido $x^2-8y^2=1$, una solución trivial sería $X_0=3$, $Y_0=1$. Nos podemos aprovechar de esto de la siguiente forma:

La identidad $3^2-8*1^2 = 1$ la podemos escribir como un producto en el anillo Q(√8):

$$\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)=1$$

Igualmente, la ecuación $x^2-8y^2=-7$ la podemos escribir como

$$\left(x+y\sqrt{8}\right)\left(x-y\sqrt{8}\right)=-7$$

Si ahora multiplicamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)\left(x+y\sqrt{8}\right)\left(x-y\sqrt{8}\right)=-7 \quad \textbf{(1)}$$

y agrupando términos

$$\left(3x+8y+(x+3y)\sqrt{8}\right)\left(3x+8y-(x+3y)\sqrt{8}\right)=-7$$

o bien

$$(3x+8y)^2-8(x+3y)^2=-7$$

De esta forma hemos obtenido una fórmula de recurrencia para las siguientes soluciones:

$x_n = 3x_{n-1}+8y_{n-1}$ $y_n=x_{n-1}+3y_{n-1}$

Esta fórmula valdría igualmente para el caso x^2-$8y^2$=9

Lo hemos desarrollado en una hoja de cálculo:

Para el primer caso:

3	1		
X	Y	Triangular	Cuadrado
5	2	3	4
31	11	120	121
181	64	4095	4096
1055	373	139128	139129
6149	2174	4726275	4726276
35839	12671	160554240	160554241
208885	73852	5454117903	5454117904
1217471	430441	185279454480	185279454481

Para el segundo:

3	1		
X	Y	Triangular	Cuadrado
9	3	10	9
51	18	325	324
297	105	11026	11025
1731	612	374545	374544
10089	3567	12723490	12723489
58803	20790	432224101	432224100
342729	121173	14682895930	14682895929
1997571	706248	498786237505	498786237504

Esta segunda tabla coincide con la obtenida con hoja de cálculo anteriormente:

10	9
325	324
11026	11025
374545	374544

pero en el primer caso ¡sólo hemos obtenido la mitad!

Con la hoja salían más:

0	1
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096
17955	17956
139128	139129
609960	609961

La causa de que no hayamos obtenido todas las soluciones está en la agrupación de términos que efectuamos:

Igualmente, la ecuación $x^2-8y^2=-7$ la podemos escribir como

$$\left(x+y\sqrt{8}\right)\left(x-y\sqrt{8}\right)=-7$$

Si ahora multiplicamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)\left(x+y\sqrt{8}\right)\left(x-y\sqrt{8}\right)=-7 \quad \textbf{(1)}$$

y agrupando términos

$$\left(3x+8y+(x+3y)\sqrt{8}\right)\left(3x+8y-(x+3y)\sqrt{8}\right)=-7$$

$$(3x+8y)^2-8(x+3y)^2=-7$$

En esta agrupación de la ecuación (1) habíamos multiplicado el primer factor por el tercero y el segundo por el cuarto para que nos diera la suma por diferencia igual a la diferencia de cuadrados, pero si llegamos a multiplicar primero por cuarto y segundo por tercero, habríamos llegado a

$$(3x-8y)^2-8(x-3y)^2=-7$$

y de ahí obtendríamos las soluciones que faltan. En el segundo caso coincidían las dos posibilidades y por eso no echamos a faltar ninguna solución.

Enseñanza: Hay que agotar todas las posibilidades y no alegrarnos demasiado con el éxito obtenido.

LOS TRIANGULARES CUADRADOS

Generación de la sucesión

Dos entradas del blog de John D. Cook

(http://www.johndcook.com/blog/2015/08/20/when-is-a-triangle-a-square/ y siguiente) me han animado a volver a tomar el tipo de cuestión al que llamé “dar vueltas” a un tema o concepto. Lo haré sobre estos números:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… (http://oeis.org/A001110)

Evidentemente, estos números tienen en común el ser triangulares y cuadrados a la vez. Puedes leer un desarrollo sencillo y claro en este documento:

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_IV_num_1/jue_mat_num_triang.pdf

Me he dado cuenta de que es un concepto sencillo pero que da lugar a bastantes reflexiones, algoritmos y repasos de teoría.

Nosotros seguiremos en parte este documento para iniciar el tema.

Búsqueda de números triangulares cuadrados

De forma directa se obtienen con el Buscador de Naturales, usando las condiciones TRIANGULAR y CUADRADO simultáneamente:

Solución	Detalles
1	
36	
1225	
41616	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	50000

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
CUADRADO

Como es una herramienta elemental, resulta lenta la búsqueda.

Estudio algebraico

Un número triangular tiene por fórmula n(n+1)/2 y un cuadrado m^2. Aquellos números que participen de las dos características tendrán que cumplir la igualdad

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

De esta igualdad deducimos esta otra mucho más práctica:

$$n^2 + n + \frac{1}{4} - 2m^2 - 1/4 = (n + \frac{1}{2})^2 - 2m^2 - 1/4 = 0$$

O bien

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Con cambio de variable se convierte en una ecuación de Pell:

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Esta ecuación la tenemos muy estudiada

http://hojamat.es/parra/pell.pdf (documento de Rafael Parra)

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html

Disponemos además de una hoja de cálculo para ayudar a resolverla:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

Usamos esta herramienta para el coeficiente 8 y el segundo miembro 1 y nos dan las primeras soluciones:

cuadrado perfecto)				8										
mbro, +1 ó -1				1										
	2	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	2	3	14	17	82	99	478	577	2786	3363	16238	19601	94642	114243
0	1	1	5	6	29	35	169	204	985	1189	5741	6930	33461	40391
	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1
		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución

(1,0) (3,1) (17,6) (99,35) (577,204) (3363,1189) (19601,6930) (114243, 40391),…

Por recurrencia:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Según la teoría de la ecuación de Pell, las soluciones aparecen con las recurrencias (en este caso) $x_n=3*x_{n-1}+8*y_{n-1}$ $y_n=3*y_{n-1}+1*x_{n-1}$. Por ejemplo, 99=3*17+8*6, 35=3*6+1*17.

Ahora sólo nos queda elevar al cuadrado las soluciones de **y** (que equivalen a la variable **m** de la primera igualdad que planteamos) y nos resultarán los triangulares cuadrados:

$0^2=0$, $1^2=1$, $6^2=36$, $35^2=1225$, $204^2=41616$, $1189^2=1413721$,…

Primer algoritmo

El estudio que acabamos de desarrollar nos da una pista para la generación de términos triangulares cuadrados: Iniciamos dos variables X=1, Y=0, y en cada paso del algoritmo convertimos X en 3X+8Y y la Y en 3Y+X. Terminado el cálculo presentamos el valor de Y^2 como siguiente triangular cuadrado. En el Basic de las hojas de cálculo quedaría así:

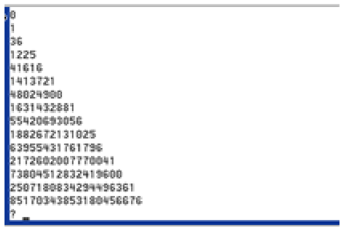
```
Sub triangcuad()
Dim x, y, x1, y1, i, t, fila

x = 1: y = 0 'Valores de inicio
fila = 3 'Fila inicial
Cells(fila, 4).Value = 0 'El primer valor es un cero
For i = 1 To 8 'Calculamos sólo ocho
x1 = 3 * x + 8 * y 'Iteración para x
y1 = 3 * y + x 'Iteración para y
x = x1
y = y1
t = y * y 'Número triangular cuadrado
fila = fila + 1
Cells(fila, 4).Value = t 'Se presenta el resultado
Next i
End Sub
```

Obtendríamos:

0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
5,5421E+10

El que el último se nos ofrezca en coma flotante nos da idea de las limitaciones de la hoja para cálculos con enteros de muchas cifras. Si acudimos a PARI no nos encontraremos con esas limitaciones. Prueba este código:

{x=1;y=0;print(0);while(x<10^10,x1=3*x+8*y;y1=3*y+x;x=x1;y=y1;t=y^2;print(t))}



En pocos segundos te presenta los triangulares cuadrados menores que 10^10.

Relación de recurrencia con una sola variable

Por la naturaleza de su definición podemos esperar que estos números sigan una relación de recurrencia de segundo orden. Para encontrar su expresión, que será del tipo

$A_n=aA_{n-1}+bA_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 36, 1225, 41616 para plantear:

36=a*1+b*0+c
1225=a*36+b*1+c
41616=a*1225+b*36+c

Resolvemos
1189=35a+b

40391=1189a+35b

1224=36a y a=34, b=-1 y c=2

Según los cálculos anteriores, la relación de recurrencia será

$A_n=34A_{n-1}-A_{n-2}+2$

Es la misma que propone John D. Cook en su blog.

En este blog no olvidamos la hoja de cálculo. Intenta una resolución como la de la imagen usando cálculo matricial:

B	C	D	E	F
1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616

A partir de esta escritura matricial del sistema de ecuaciones, creamos debajo la matriz inversa de los coeficientes con MINVERSA, y a su derecha su producto por los términos independientes con MMULT:

1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616
-0,97222222	1	-0,02777778		34
33,0277778	-34	0,97222222		-1
1,97222222	-1	0,02777778		2

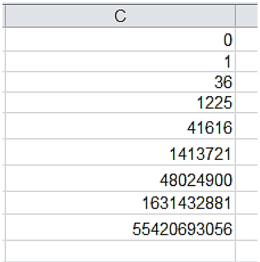
Conseguimos así la misma solución 34, -1, 2

Segundo algoritmo

La relación de recurrencia nos permite un segundo algoritmo para encontrar los triangulares cuadrados. El que describimos a continuación presenta los nueve primeros (después existen problemas de coma flotante)

```
Sub triancuad1()
Dim m, n, p, k, fila
m = 0: n = 1 'Valores iniciales
fila = 3
Cells(1, 3).Value = m 'presenta los dos primeros términos
Cells(2, 3).Value = n
For k = 1 To 7
p = 34 * n - m + 2 'relación de recurrencia
Cells(fila, 3).Value = p: fila = fila + 1 'presenta los siguientes términos
m = n: n = p 'cada término se convierte en el anterior
Next k
End Sub
```

Los términos rellenarán una columna de hoja de cálculo:



C
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056

Siguiendo nuestra costumbre, lo traducimos a PARI para conseguir más términos:

{x=0;y=1;print(0);print(1);for (k=1, 20, z=34*y-x+2;print(z);x=y;y=z)}

```
gp-readline-2-7-1
  ***
? \r ini.txt
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056
1882672131025
63955431761796
2172602007770041
73804512832419600
2507180834294496361
85170343853180456676
2893284510173841030625
98286503002057414584576
3338847817559778254844961
113422539294030403250144100
3853027488179473932250054441
130889512058808083293251706896
4446390382511295358038307980025
?
```

No resistimos la tentación, al igual que propone J.C. Cook, de intentar una versión recursiva en forma de función. Funciona muy bien en hoja de cálculo:

Public Function ftriangcuad(n)
If n < 2 Then
ftriangcuad = n
Else

ftriangcuad = 34 * ftriangcuad(n - 1) - ftriangcuad(n - 2) + 2
End If
End Function

No necesita explicación. La tabla siguiente se forma con gran rapidez de cálculo:

N	Ftriangcuad(N)
0	0
1	1
2	36
3	1225
4	41616
5	1413721
6	48024900
7	1631432881
8	55420693056

Fórmula directa

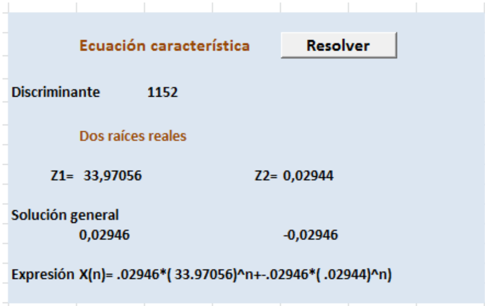
Si lees el capítulo sobre sucesiones recurrentes en nuestra publicación ***Sucesiones***

(http://www.hojamat.es/publicaciones/sucesiones.pdf) entenderás que a partir de la fórmula de recurrencia es posible encontrar la expresión directa de cada término (fórmula del término general). Sólo insertamos la captura de pantalla de nuestra hoja de cálculo

Recurrencias

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

en la parte homogénea de la recurrencia:



Con un ligero retoque y la interpretación de los decimales llegamos a la propuesta por John D. Cook:

$$A(n) = \frac{\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^n + \left(17 - 12\sqrt{2}\right)^n - 2}{32}$$

El uso de la raíz cuadrada de 2 le quita utilidad en nuestro trabajo, por lo que intentaremos prescindir de ella. Para ver la influencia del formato de coma flotante, la implementamos en hoja de cálculo, y el resultado es similar al de los algoritmos anteriores:

A=	17+12√2	33,97056275	
B=	17-12√2	0,029437252	
	n	Fórmula directa	(A^n+B^n-2)/32
	0	0	
	1	1	
	2	36	
	3	1225	
	4	41616	
	5	1413721	
	6	48024900	
	7	1631432881	
	8	55420693056	
	9	1,88267E+12	

Función generatriz

Para quien no lo sepa, diremos que la función generatriz de una sucesión, si se desarrolla como una serie de potencias, poseerá como coeficientes de esas potencias de x los términos de la sucesión.

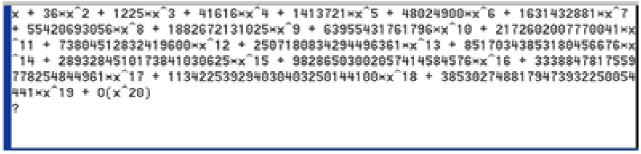
En el caso de los números triangulares cuadrados la función generatriz es

$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-34x+x^2)}$$

(ver http://oeis.org/A001110)

Con esta sencilla orden de PARI podemos comprobar su desarrollo.

print(taylor(x*(1+x)/((1-x)*(1-34*x+x^2)),x,20))



```
x + 36*x^2 + 1225*x^3 + 41616*x^4 + 1413721*x^5 + 48024900*x^6 + 1631432881*x^7
+ 55420693056*x^8 + 1882672131025*x^9 + 63955431761796*x^10 + 2172602007770041*x
^11 + 73804512832419600*x^12 + 2507180834294496361*x^13 + 85170343853180456676*x
^14 + 2893284510173841030625*x^15 + 98286503002057414584576*x^16 + 3338847817559
778254844961*x^17 + 113422539294030403250144100*x^18 + 385302748817947393225005
4441*x^19 + O(x^20)
?
```

Tercer algoritmo

Finalizamos con la presentación de un algoritmo de los que llamamos “ingenuos”, que no usan la teoría para simplificar los cálculos, pero sí la fuerza bruta de la velocidad de proceso. En este caso obligaremos a los números naturales a ir creciendo hasta alcanzar un cuadrado, y después a la inversa, que los cuadrados avancen hasta alcanzar un triangular. Cuando se llegue a una igualdad se imprime el resultado. A pesar de su simplicidad, no resulta lento. Es éste:

```
Sub triancuad2()
Dim i, j, m, n, k, fila
m = 3: n = 4: i = 2: j = 3 ‘Se inician las variables
k = 10 ^ 7
fila = 3
Cells(fila, 3).Value = 1: fila = fila + 1
While m < k ‘Busca soluciones menores que k
While m <= n ‘Los triangulares crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1 ‘Hay igualdad
i = i + 1: m = m + i
Wend
```

While n <= m ‘Los cuadrados crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1‘Hay igualdad
j = j + 2: n = n + j
Wend
Wend
End Sub

Dejamos a los lectores el estudio de por qué funciona este algoritmo para descubrir los triangulares cuadrados. Como los anteriores, llega a los mismos resultados, en este caso hasta 10^7:

C
1
36
1225
41616
1413721

Otra recurrencia

Según un comentario incluido en

http://oeis.org/A001110, podemos tener en cuenta otra recurrencia a partir de n=3:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_{n-1}}$$

En efecto, $1225=(36-1)^2/1$, $41616=(1225-1)^2/36$, … O con hoja de cálculo:

A(n)	(A(n)-1)^2/A(n-1)
0	
1	
36	1225
1225	41616
41616	1413721
1413721	48024900
48024900	1631432881
1631432881	55420693056

Intenta averiguar cómo crear esta tabla siguiendo la recurrencia. La podemos expresar también como que la media geométrica entre el anterior y el siguiente a un término coincide con el cuadrado de ese término al que se le ha restado una unidad.

Una propiedad similar es que la media geométrica entre un término y el siguiente es también un número triangular. Lo tienes en esta tabla. Escribe los triangulares cuadrados e intenta después reproducirla:

A(n)	RAIZ(A(n)*A(n+1))	Orden como triangular
0		
1		
36	6	3
1225	210	20
41616	7140	119
1413721	242556	696
48024900	8239770	4059
1631432881	279909630	23660

En http://oeis.org/A029549 tienes estudiadas esas medias geométricas y puedes descubrir que estos números son oblongos y también su conexión con ciertas ternas pitagóricas. A partir de esta sucesión se abren tantos caminos que es mejor parar aquí.

Por otra parte, por ser cuadrados, los términos son suma de dos triangulares consecutivos, luego los triangulares cuadrados son "triangulares suma de dos triangulares consecutivos"

Raíz cuadrada

Ya que tratamos con cuadrados, sería interesante estudiar sus raíces cuadradas, que son estas:

0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860,…

(http://oeis.org/A001109)

Estos números no nos son desconocidos, pues son soluciones de la incógnita Y en la ecuación de Pell que usamos para encontrar sus cuadrados

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Insertamos de nuevo la tabla que obtuvimos:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Más adelante veremos alores relacionados con la variable X.

Recurrencia entre las raíces

Al igual que sus cuadrados, estos números se pueden generar mediante una recurrencia de segundo grado. Para descubrirla operamos como en el apartado anterior.

$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 6, 35, 204 para plantear:

6=a*1+b*0+c
35=a*6+b*1+c
204=a*35+b*6+c

Resolvemos

29=5a+b
169=29a+5b
169-5*29=169-145=24=4a   a=6, b=-1, c=0

Luego $\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}}$, que es la recursión que figura en A001109

Esta recurrencia la podemos comprobar con nuestra hoja de cálculo dedicada a ellas

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Escribimos los coeficientes 6 y -1

Recurrencias lineales de segundo orden			
Coeficientes			
A	6	B	-1
Valores iniciales			
X0	0	x1	1

Y obtenemos la sucesión

Sucesión	0
	1
	6
	35
	204
	1189
	6930
	40391
	235416
	1372105
	7997214
	46611179

Orden como triangulares

Al igual que hemos estudiado las raíces cuadradas de los triangulares cuadrados, también podemos fijar la atención en su orden como triangulares.

Para ello planteamos k(k+1)/2=A(n), siendo A(n) un término de la sucesión de triangulares cuadrados. Es fácil ver que la solución será

$$k = \frac{\sqrt{8A(n)+1}-1}{2}$$

Se generará esta otra sucesión:

1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449, 11309768, 65918161, 384199200,…
(http://oeis.org/A001108)

También estos números están relacionados con la ecuación de Pell del anterior apartado.

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Basta recordar que llamamos x a 2n+1. Deshaciendo el cambio en la tabla:

(3-1)/2=1, (17-1)/2=8, (99-1)/2=49, (577-1)/2=288,… y así resultarán todos.

Según OEIS, su fórmula recursiva es idéntica a la de los anteriores, pero con término independiente igual a 2:

$\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}+2}$

Para no cansar a los lectores nos limitamos a comprobarla.

8=6*1-0+2, 49=6*8-1+2, 288=6*49-8+2,…

Diferencias entre términos

Si restamos cada dos términos consecutivos, el resultado coincide con las raíces cuadradas de los términos de orden impar. Es una propiedad muy curiosa, pero no he encontrado ninguna demostración elemental de la misma.

N	Triangulares cuadrados	Diferencias	Diferencias al cuadrado
0	0	0	
1	1	1	1
2	36	35	1225
3	1225	1189	1413721
4	41616	40391	1631432881
5	1413721	1372105	1,88267E+12
6	48024900	46611179	2,1726E+15
7	1631432881	1583407981	2,50718E+18
8	55420693056	53789260175	2,89328E+21

En la tabla, si elevamos las diferencias al cuadrado nos resultan los términos de orden impar. Son los de color rojo enlazados con flechas. Si, además, encontráramos su orden como triangulares, sería un cuadrado (compruébalo), y ellos mismos, además de triangulares serían ***hexagonales***. Bastante curioso, como ves.

Recurrencia directa

Lekraj Beedassy, en http://oeis.org/A001110, propone la siguiente recurrencia no lineal que sólo depende del término anterior:

$$a_{n+1} = 1 + 17a_n + 6\sqrt{a_n + 8{a_n}^2}$$

Esta propiedad permite engendrar de nuevo los números triangulares cuadrados en una hoja de cálculo directamente, sin macros, y con gran rapidez, con una fórmula similar a **=1+17*I5+6*RAIZ(I5+8*I5^2)**, donde puedes sustituir I5 por el término anterior de la sucesión.

NÚMEROS DOBLE DE UN CUADRADO

Hoy haremos un ejercicio de "dar vueltas" a un tema, técnica muy usada en los primeros tiempos de este blog y que hemos ido abandonando a lo largo de sus temporadas. Consiste en tomar un concepto y buscarle propiedades desde varios puntos de vista.

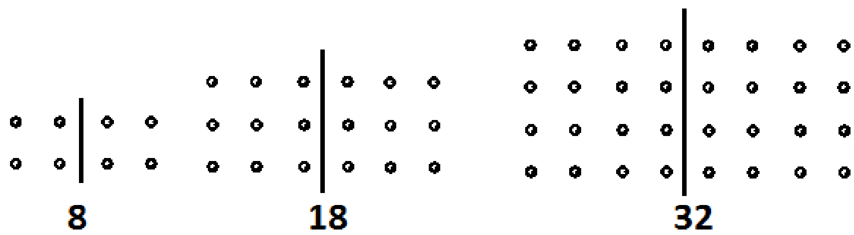
Hoy daremos vueltas a los números que son el doble de un cuadrado, como 2, 8, 72 o 288. Su expresión es, evidentemente, $D(n)=2n^2$, donde los hemos representado con la D de doble. Simultáneamente, son mitad de otro cuadrado, ya que $2n^2=(2n)^2/2$, lo que los convierte en el área de un triángulo isósceles de lado 2n, o de un cuadrado de diagonal 2n.

Es una expresión muy simple, pero que nos puede llevar a varios territorios muy diferentes entre sí.

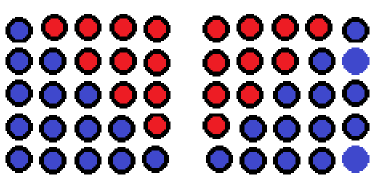
Están publicados en http://oeis.org/A001105, y de esa página extraeeremos algunas ideas.

Relación con números figurados

Es evidente que estos números son también figurados (representables con una figura geométrica), como los triangulares o pentagonales, pero especiales, no pertenecientes a la categoría general de números poligonales. Simplemente están formados por dos cuadrados adosados, tal como se ve en la siguiente imagen.



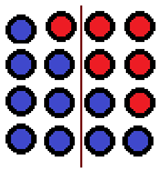
Como todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos, los dobles de cuadrados que estamos estudiando se podrán formar adosando cuatro triangulares:



En la imagen se han usado los triangulares T(4) y T(5) para formar el número

$50=2*5^2=2(T(4)+T(5))=2(10+15)=50$

Por tanto, además de ser dobles de cuadrados, estos números son suma de dobles de triangulares, como era de esperar. Al contrario, también son mitad de una suma de triangulares consecutivos, según la figura siguiente:



Algebraicamente, podemos expresar:

Todo doble de cuadrado es el promedio de dos números triangulares consecutivos:

$2n^2=(T(2n-1)+T(2n))/2=(2n(2n-1)+2n(2n+1)/4=2n*4n/4=2n^2$

Es decir **D(n)=(T(2n-1)+T(2n))/2**

Así: 2=(1+3)/2, 8=(6+10)/2, 18=(15+21)/2

Como los números triangulares, multiplicados por 8 y aumentados en una unidad se convierten en cuadrados ($8T(n)+1=(2n+1)^2$), como ocurre, por ejemplo, en $8*15+1=121=11^2$, la propiedad anterior nos indica que si efectuamos la misma operación con los dobles de cuadrados, resultará el promedio de dos cuadrados:

$8D(n)+1=(8T(2n-1)+1+8T(2n)+1)/2=((4n-1)^2+(4n+1)^2)/2$

Ejemplo: $8*D(4)+1=8*32+1=257$

$(15^2+17^2)/2=(225+289)/2=514/2=257$

Si a un doble de cuadrado lo multiplicamos por 8 y le añadimos una unidad, resulta el promedio de dos cuadrados diferenciados en dos unidades.

La anterior operación desemboca en un cuadrado más la unidad, ya que $8D(n)+1=16n^2+1=(4n)^2+1$. Así ha ocurrido en el ejemplo anterior.

El cuadrado de un número múltiplo de 4 más la unidad es el promedio de dos cuadrados m^2 y $(m+2)^2$.

Por ejemplo, $1024+1=1025=(31^2+33^2)/2$

Con esto finalizamos la “vuelta” a este tipo de números figurados y sus propiedades algebraicas.

Relación con sumas

D(n) es el resultado de sumar todas las particiones de 2n en exactamente dos partes(Wesley Ivan Hurt, Jun 01 2013).

Es sencillo demostrarlo, pues en cada paréntesis de los siguientes figura una partición de 2n:

$(1+2n-1)+(2+2n-2)+\ldots(n+n)=n*2n=2n^2=D(n)$

La suma de enteros consecutivos entre D(n) y D(n+1)-1, ambos inclusive, es un cubo (Patrick J. McNab, Dec 24 2016).

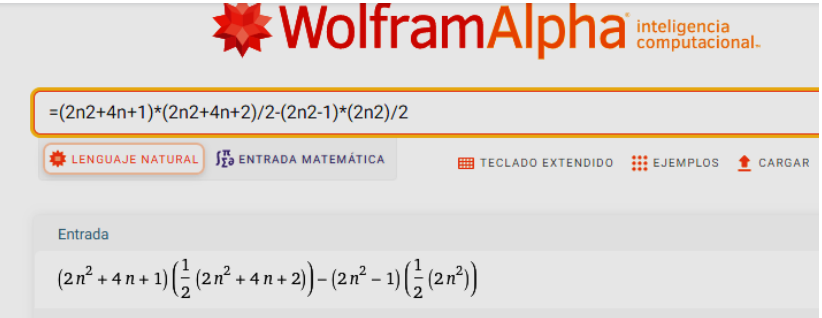
En efecto, entre 8 y 32, por ejemplo, esa suma es 8+9+10+11+…30+31, y es igual a $343=7^3$. En general:

Los primeros números consecutivos suman un triangular, luego esa suma será igual a S=T(D(n+1)-1)-T(D(n)-1). Desarrollando:

$S=T(2(n+1)^2-1)-T(2n^2-1)=T(2n^2+4n+1)-T(2n^2-1)$ que es igual a

$S=(2n^2+4n+1)*(2n^2+4n+2)/2-(2n^2-1)*(2n^2)/2.$

Le damos este dato a Wolfram Alfha



Nos devuelve la expresión simplificada:

$$\frac{1}{2}(2n^2+4n+1)(2n^2+4n+2)-n^2(2n^2-1)$$

Formas alternativas

$$(2n+1)^3$$

En efecto, es un cubo, $(2n+1)^3$. Hemos programado estas sumas y se comprueba su carácter de cubo:

D(n)	2	8	18	32	50
Suma	27	125	343	729	1331

Recurrencias

Vincenzo Librandi propone la siguiente, en la que se mezcla a(n-1) con la variable n

a(n) = 4*n + a(n-1) – 2

No es difícil comprobarla con hoja de cálculo. Basta crear una columna con los valores 1, 2, 3, …y comenzar con a(1)=2, para después ir aplicando la relación hacia abajo:

n	4n+a(n-1)-2
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50
6	72
7	98
8	128
9	162
10	200

Algebraicamente: $4n+2(n-1)^2-2 = 4n+2n2-4n+2-2=2n^2$

Es preferible una recurrencia lineal homogénea, en la que a(n) depende de los términos anteriores sin implicar al número de orden. Muchos números figurados siguen una relación de recurrencia con los coeficientes 1, -3, 3, y en este caso es válida. Para demostrarlo hemos acudido a nuestra herramienta *ecurecurre,xlsm*, accesible desde la página

http://www.hojamat.es/sindecimales/otros.htm

En el listado sobre el blog que contiene hay que buscar *ecurecurre.xlsm*

Con ella se comprueba que los propuestos son los coeficientes válidos:

Sucesión	2	8	18	32
3,875	-5,5	2,125		
-5,5	7	-2,5		
2,125	-2,5	0,875		

Filas	3	Columnas		3

Resultado: Producto

1
-3
3

Para confirmarlo hemos acudido a otra de nuestras herramientas, la que estudia relaciones de recurrencia de segundo orden:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

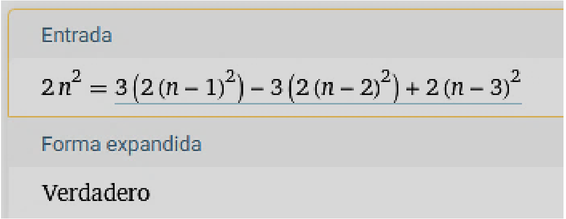
Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	2	x1	8	x2	18

Al pedir la sucesión observamos que se reproduce la sucesión D(n):

2
8
18
32
50
72
98
128

$2n^2 = 3(2(n-1)^2))-3(2(n-2)^2))+2(n-3)^2$

Volvemos a acudir a Wolfram Alfha y nos da la igualdad como verdadera.



Caso de base prima

Con nuestro Buscador de naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) es sencillo crear la subsucesión de D(n) formadas por aquellos términos de base prima.

Resultado de la búsqueda

Fin

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

PRIMO
EVALUAR 2*N^2

lúm.	Solución	Detalles
1	2	8
2	3	18
3	5	50
4	7	98
5	11	242
6	13	338
7	17	578
8	19	722
9	23	1058
10	29	1682
11	31	1922
12	37	2738
13	41	3362

Forman la sucesión 8, 18, 50, 98, 242, 338, 578, 722, 1058, 1682, 1922, 2738, 3362, 3698, 4418,…

Está publicada en http://oeis.org/A079704

Los podemos representar como $\mathbf{2p^2}$

En ellos, la falta de pautas en la sucesión de primos hace inviables las recurrencias lineales, pero presentan algunas curiosidades.

Funciones TAU, SIGMA y PHI

TAU (número de divisores) tiene le valor de 6 en todos los términos, porque depende solo de los exponentes, y según su fórmula, $TAU(2p^2)=(1+1)(1+2)=6$

SIGMA (suma de divisores) posee un desarrollo parecido: ***SIGMA(2p^2)=(1+2)(1+p+p^2)***

Por ejemplo,

SIGMA(242)=SIGMA(2*11^2)=(1+2)(1+11+11^2)=3*133=399

PHI (cuenta coprimos con N y menores que él), según también su fórmula usual, tendría en este caso la siguiente:

PHI(2p^2)= 2p^2(1-1/2)(1-1/p)=p(p-1)

En el caso de 98=2*7^2, se cumplirá PHI(98)=7*6=42

Podríamos seguir:

OMEGA(2p^2)=2, BIGOMEGA(2p^2)=3, …