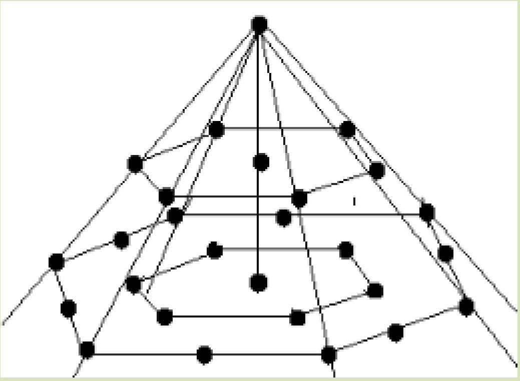
Números piramidales



Edición 2018

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

Presentación

Después de varios años de estudio de los números figurados (triangulares, cuadrados, poligonales en general…), en el curso 2017-18 publiqué en mi blog "Números y hoja de cálculo" (http://hojaynumeros.blogspot.com/) un estudio bastante completo sobre los números piramidales.

Una vez terminado el recorrido por dichos números, y especialmente al tratar los piramidales de cuatro dimensiones, es fácil notar que sus propiedades más notables provienen de fórmulas polinómicas y de su carácter de sumas acumuladas de otros números figurados. Así, su carácter "geométrico", que nos llega desde los griegos, se desdibuja, siendo sustiuido por otras propiedades.

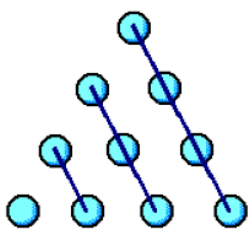
En todos los tipos de números piramidales se ha ido seleccionando los aspectos más importantes, llegando en el estudio a los órdenes 6 o 7, para evitar el cansancio de quienes lean este documento. La repetición de técnicas conlleva ese peligro, del cual deseo disculparme.

TABLA DE CONTENIDO

NÚMEROS PIRAMIDALES DE TRES DIMENSIONES

REPASO DE LOS NÚMEROS POLIGONALES

Los números piramidales son una extensión natural de los poligonales, por lo que puede ser adecuado comenzar con un repaso de estos. Lo más importante que hay que recordar ahora es su formación recurrente. Por ejemplo, los triangulares se forman añadiendo un lado nuevo a los ya formados en el anterior triangular, como queda claro en la imagen:



Es decir, que

t1 = 1 = 1

t2 = 1+2 = 3

t3 = 1+2+3 = 6

t4 = 1+2+3+4 = 10

En general, Tn+1=Tn+n, lo que convierte a los triangulares en sumas de números consecutivos. Por eso Tn=1+2+3+…+n=n(n+1)/2.

Hemos preparado una hoja de cálculo con ***Calcupol***, una calculadora especializada en números figurados, que puedes descargar desde

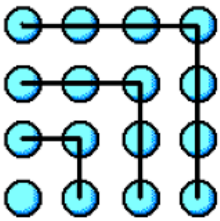
http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

En ella, con la tecla POL puedes encontrar el k-ésimo número triangular. Por ejemplo, con la secuencia de teclas **3 POL 12 =** encontrarás el triangular número 12, que resulta ser 78, como se ve en la imagen:

El presentar la calculadora en este momento se justifica porque la vamos a usar en toda la publicación. Otra utilidad que tiene es la de identificar si un número es de un tipo dado o no. Observa la celda Tipos. Si fijas el tipo en Triangular (usa la lista desplegable) podrás averiguar si el número que escribas en pantalla es o no triangular, con la tecla ES, o bien encontrar el próximo o el anterior con PROX y ANT.

Ya las iremos viendo. Fija el tipo en triangular, escribe 75 y pulsa la tecla ES. Te responderá que no es de ese tipo y en pantalla aparecerá un cero. Si hubieras escrito 78, te devolvería 12, que es su número de orden, o lado.

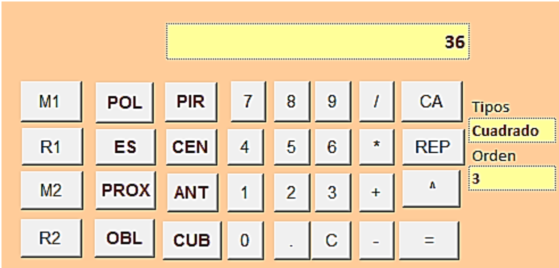
De igual forma se definen los números cuadrados, pero ahora, a cada elemento le añadimos dos lados, formando lo que se llama un gnomon, de fórmula 2n+1:



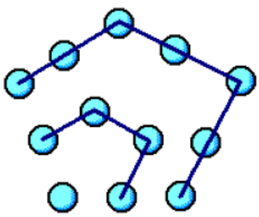
En la figura se observa la generación de cada número cuadrado:

C1 = 1 = 1
C2 = 1+3 = 4
C3 = 1+3+5 = 9
C4 = 1+3+5+7 = 16

Los primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25,… como bien sabemos, y, según se acaba de ver, son suma de impares consecutivos. Fija la calculadora en el tipo Cuadrado. Escribe un 1 en pantalla y ve pulsando reiteradamente la tecla PROX. Obtendrás esa secuancia 1, 4, 9, 16, 25,… En la imagen se había llegado al 36:



El resto de poligonales se define de la misma forma que los cuadrados y los triangulares, como números que forman pentágonos, hexágonos, o de más lados. Basta ir añadiendo n-2 lados nuevos, 3 para los pentagonales, 4 para los hexagonales, y así con los demás.



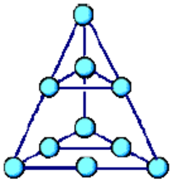
Escribe en la calculadora que el tipo es Poligonal y el orden 5 y podrás analizar los pentagonales. Con la tecla PROX (o la ANT) puedes recorrerlos. Comprueba que los primeros pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92,… En la imagen se ha llegado, con la tecla PROX, al siguiente a 92, que es el 117

Con este repaso ya estamos en condiciones de comenzar el estudio de los números piramidales.

NÚMEROS PIRAMIDALES EN GENERAL

Al igual que los poligonales se generan añadiendo a cada uno de ellos lados nuevos, los piramidales se forman mediante números poligonales nuevos que van haciendo el papel de bases de una pirámide.

Tomemos, por ejemplo, los números triangulares, 1, 3, 6, 10,… Imaginemos que comenzamos por 1 (siempre se comienza con él), que hará el papel de vértice, y después le adosamos como base el siguiente triangular, 3, y después el siguiente, 6, y así hasta que obtengamos el orden deseado. Lo puedes ver en la imagen.

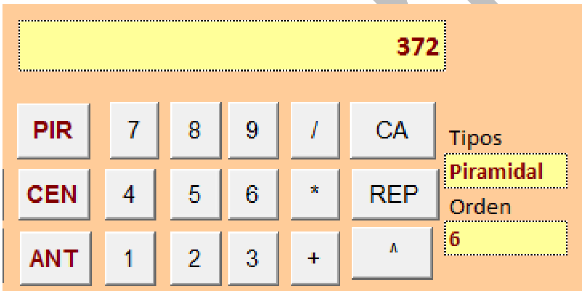


Para ver otras imágenes similares para los casos de cuadrados, pentagonales o hexagonales entra en Mathword:

http://mathworld.wolfram.com/PyramidalNumber.html

A los números poligonales de orden 3 (triangulares) les llamaremos tetraédricos, a los de orden 4, piramidales cuadrados, y al resto, pentagonales, hexagonales, y así hasta el orden que deseemos. Usamos la palabra orden para no crear confusión con la calculadora que ofrecemos. Llamaremos lado al número de poligonales que se acumulan.

Con nuestra calculadora calcupol podemos seguir cualquiera de estas sucesiones. Por ejemplo, para ver los piramidales hexagonales, fijamos el tipo en Piramidal y el orden en 6. Escribimos un 1 en pantalla y vamos pulsando la tecla PROX. Aparecerán los piramidales 1, 7, 22, 50,…En la imagen hemos llegado hasta 372:



Puedes comprobar los resultados obtenidos en la dirección http://oeis.org/A002412

Si tienes un piramidal en pantalla, como puede ser el hexagonal 715, de lado 10, con la secuencia de teclas **– ANT =** puedes restarle el anterior, de lado 9, y te dará 190, que es precisamente el poligonal de tipo 6 y lado 10. Para comprobarlo usa la secuencia de teclas **6 POL 10**, y te resultará 190.

Ya estamos en condiciones de sintetizar la generación de los números piramidales:

El número piramidal de orden k y lado n equivale a la suma del piramidal de idéntico orden y un lado menos y el poligonal de mismo orden y lado.

Si nombramos los piramidales como PIR y los poligonales como POL, se podría expresar así:

PIR(N,K)=PIR(N-1,K)+POL(N,K)

Por ejemplo (lo puedes ir calculando con Calcupol): El octavo piramidal hexagonal es 372, y el poligonal hexagonal de lado nueve es 153. Si los sumamos obtenemos el noveno piramidal hexagonal, ya que 372+153=525, que es el piramidal esperado.

Fórmula

Existe una expresión general para calcular PIR(N,K). De todas las versiones publicadas nos quedamos con la siguiente:

$$\mathrm{PIR}(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Es un polinomio de tercer grado, al igual que los poligonales se expresan con uno de segundo

(ver http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/teoria/teorarit.pdf)

Tienes una demostración en http://oeis.org/wiki/Pyramidal_numbers

Lo comprobamos con 372, pirámide hexagonal de lado 8:

PIR(8,6)=(3*64+512*4-8*1)/6=2232/6=372

Con un poco de Álgebra, se puede extraer de esta fórmula el factor n(n+1)/2, que es, precisamente, el número triangular del mismo lado que el piramidal que estamos calculando. La fórmula quedaría entonces así:

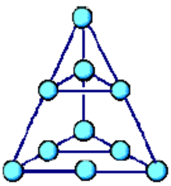
$$\mathrm{PIR}(\mathrm{n},\mathrm{k})=\mathrm{T_n}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{r}-2)-(\mathrm{r}-5)}{3}$$

Lo comprobamos: El vigésimo piramidal octogonal, según Calcupol, es 8190. El triangular del mismo lado 20, 210. Aplicamos la fórmula:

8190=210*(20*6-3)/3=210*117/3=24570/3=8190

TETRAEDROS.

A los números piramidales triangulares se les conoce también como tetraédricos, o simplemente tetraedros (abreviado, TET), en recuerdo del primer poliedro regular. Todos ellos se forman a partir del 1 adosando los distintos números triangulares, 3, 6, 10, 15, 21, 28… por lo que también podemos decir que los tetraédricos equivalen a las sumas parciales de los triangulares.



TET(1)=1
TET(2)=1+3=4
TET(3)=4+6=1+3+6=10
TET(4)=10+10)1+3+6+10=20
…

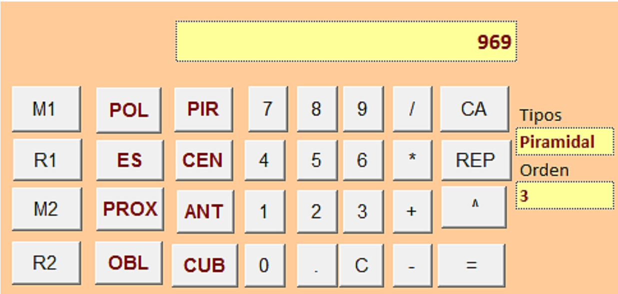
La lista de los primeros será, pues:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, 1140, 1330, 1540, 1771, 2024, 2300, 2600, 2925,… http://oeis.org/A000292

La puedes reproducir con la calculadora Calcupol que presentamos anteriormente.

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Basta fijar el tipo en Piramidal, el orden en 3, y escribir en pantalla 1. Con esto, cada vez que pulses en la Tecla PROX se formará un nuevo piramidal tetragonal. En la imagen llegamos hasta 969:



La formula para estos números se simplifica mucho. Recordamos la expresión general para todos los piramidales:

$$\mathrm{PIR}(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Hacemos k=3 y queda:

$$\mathrm{TET}(n) = \mathrm{PIR}(n,3) = \frac{3n^2 + n^3 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Esta expresión nos suena familiar, y es que equivale al número combinatorio n+2 sobre 3:

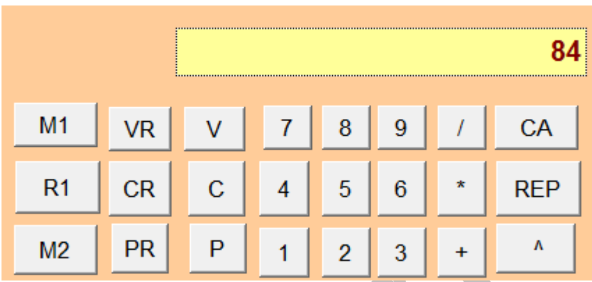
$$\mathrm{TET}(n) = \binom{n+2}{3}$$

Por ejemplo, el tetragonal de orden 7 es 84, y equivale a (7*8*9)/6=504/6=84

Puedes usar la expresión de hoja de cálculo COMBINAT, para calcular el número combinatorio:

COMBINAT(9;3)	84

Y ya, por repasar más detalles, con nuestra calculadora combinatoria puedes usar las teclas **9 C 3**:



La tienes en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#calcucomb

Por ser números combinatorios de orden 3, los tetraedros se situarán en la cuarta fila del triángulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

(Imagen adaptada de otra contenida en Wikipedia.es)

Por cierto, y como era de esperar, los números triangulares se presentan en la anterior paralela.

Curiosidades

Al igual que hicimos con cuestiones similares, desarrollaremos a continuación algunas propiedades, muchas de ellas tomadas de http://oeis.org/A000292

Suma de diferencias

Si, como es costumbre en oeis.org, comenzamos la sucesión por el 0, resulta que cada número tetragonal de orden n es suma de todas las diferencias b-a que se pueden formar entre los números 1, 2, 3, … n entre sí, si b>=a (Amarnath Murthy, May 29 2003). Lo vemos mejor con un esquema de esas diferencias. La imagen contiene el desarrollo para el tetragonal 20:

	1	2	3	4	5	Por filas
1	0	1	2	3	4	10
2		0	1	2	3	6
3			0	1	2	3
4				0	1	1
5					0	0
					20	

Las cabeceras de filas y columnas están formadas por los números del 1 al 5. En el centro figuran las diferencias entre ellos sin contar las negativas, y a la derecha figuran sus sumas por filas. El número 20 resulta como suma de todas las diferencias del interior. Como ese número, por definición, es suma de triangulares, se formará a partir de 10+6+3+1, que son triangulares porque cada uno es suma de enteros consecutivos 1, 2,… k.

Suma de productos

El mismo autor, Amarnath Murthy, nos propone otra igualdad interesante, y es proceder a multiplicar todos los sumandos posibles p y q cuya suma es n+1, y todos los productos también sumarán un número tetragonal. En este caso es más una curiosidad algebraica que aritmética, pues se justifica así:

Suma de productos p*q con p+q=n+1:

1(n+1-1)+2(n+1-2)+3(n+1-3)+…+n(n+1-n)=n(n+1)(n+1)/2-1^2-2^2-…n^2

Pero la suma de cuadrados es n(n+1)(2n+1)/6

Restamos y queda n(n+1)(n+1)/2- n(n+1)(2n+1)/6 =n(n+1)(3n+3-2n+1)/6=n(n+1)(n+2)/6

Como es la expresión del tetragonal de orden n, ya lo tenemos demostrado. Un esquema con hoja de cálculo aclara bastante el proceso. En este caso no se considera el 0 como inicio de la sucesión:

N =	12	
p	q=N+1-p	p*q
1	12	12
2	11	22
3	10	30
4	9	36
5	8	40
6	7	42
7	6	42
8	5	40
9	4	36
10	3	30
11	2	22
12	1	12
	Suma	364
	Tetragonal núm. 12	

Suma de cuadrados

Un número tetragonal, si tiene lado par n, coincide con la suma de los cuadrados de todos los números pares comprendidos entre 1 y n/2. Por ejemplo:

El tetragonal 56=TET(6) equivale a la suma 2^2+4^2+6^2=4+16+36=56.

Basta aplicar la suma de cuadrados consecutivos, ((n(n + 1)(2n + 1)) / 6), al caso n/2 y después multiplicar por el factor común 2^2=4. En cuanto desarrollemos obtenemos TET(n)= n(n+1)(n+2)/6:

Suma cuadrados pares es

4(n/2)(n/2+1)(n+1)/6=n(n+1)(n+2)/6

Si es impar, bastará sumar el mismo número de cuadrados impares. Como 35=1^2+3^2+5^2=1+9+25

Basta ver que la suma de ambos daría la de todos los cuadrados, en este caso, 56+35=91, que coincide con (6*7*(2*6+1))/6=7*13=91, luego es válida la posibilidad de sumar cuadrados impares.

Fórmula de recurrencia

Al tener expresión algebraica sencilla, los números tetragonales permiten fácilmente una expresión recurrente. En concreto es:

TET(n) = n + 2*TET(n-1) - TET(n-2)

La demostración es inmediata: n + 2*TET(n-1) - TET(n-2)=n+2*(n-1)*n*(n+1)/6-(n-2)(n-1)n/6 y simplificando llegamos a n(n+1)(n+2)/6=TET(n)

Si disponemos estos números en columna, podemos aplicar a cada dos de ellos esta fórmula de recurrencia:

n	TET(n)		n+2*TET(n-1)-TET(n-2)
1	1		
2	4		
3	10		10
4	20		20
5	35		35
6	56		56
7	84		84
8	120		120
9	165		165
10	220		220
11	286		286

Las líneas nos indican que 35 depende de los dos anteriores, 10 y 20, y de su número de orden 5, mediante la opeación 35 = 5+2*20-10 = 35

Equivalencia con un triangular

Una cuestión interesante es estudiar la posibilidad de reducir un número tetraédrico a un triangular puro, como si "aplanáramos" la pirámide hasta convertirla en un número triangular con un lado distinto. Basta aplicar el criterio para que m sea triangular, y es que 8m+1 sea cuadrado. Pues bien. Aplicando ese criterio, sólo se han encontrado cinco números tetraédricos que sean también triangulares: 1, 10, 120, 1540 y 7140. Si aplicamos el criterio al cuarto, nos queda:

8*1540+1 = 12321 = 111^2

Por cierto, la equivalencia con un cuadrado aún es más escasa: sólo son cuadrados los tetraédricos 1, 4 y 19600.

PIRAMIDALES CUADRADOS

Nos dedicaremos ahora al estudio de los números piramidales cuadrangulares, o "pirámides cuadradas", que se forman al apilar números cuadrados consecutivos.´Puedes hacerte una idea con las imágenes y definiciones contenidas en

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_piramidal_cuadrado)

Los primeros números piramidales cuadrados son:

0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525, 6201, 6930, 7714, 8555, 9455,…

(http://oeis.org/A000330)

Según su definición, cada piramidal cuadrado será equivalente a la suma 1+4+9+16+…, pero se conoce, y es muy popular, la fórmula de la suma de los n primeros cuadrados, que es igual a n*(n+1)*(2*n+1)/6, luego, si llamamos PCUAD(n) al enésimo piramidal cuadrado tendremos:

$$\mathrm{PCUAD(n)} = \frac{\mathrm{n(n+1)(2n+1)}}{6}$$

Si descomponemos 2n+1 en (n+2)+(n-1) resulta

$$\mathrm{PCUAD(n)} = \binom{\mathrm{n}+2}{3} + \binom{\mathrm{n}+1}{3}$$

Al igual que un cuadrado se descompone en dos triángulos consecutivos, aquí serían dos tetraedros: Todo número piramidal cuadrado es suma de dos piramidales triangulares consecutivos.

Lo podemos comprobar con nuestra calculadora especializada calcupol, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Elegimos n=9 y con la calculadora vamos obteniendo:

Secuencia de teclas: 4 PIR 9 =, y nos da el piramidal cuadrado 285

Con la secuencia 3 PIR 9 = obtenemos la pirámide triangular 165, y con 3 PIR 8 =, la anterior, 120, y se verifica que 165+120=285.

Si recordamos que los piramidales triangulares (tetraedros) son suma de triangulares y los piramidales cuadrados suma de cuadrados, en hoja de cálculo queda

Triangular(n)	Triangular(n-1)	Cuadrado(n)
1	0	1
3	1	4
6	3	9
10	6	16
15	10	25
21	15	36
28	21	49
36	28	64
45	36	81
55	45	100
220	165	385
Tetraedro(10)	Tetraedro(9)	Cuadrangular(10)

Aquí vemos que los números triangulares engendran las pirámides triangulares, que si sumamos por filas, cada dos triangulares forman un cuadrado, y su suma el piramidal pedido. Al final, dos pirámides triangulares consecutivas suman la cuadrangular correspondiente. Merece la pena estudiar con detalle el esquema de cálculo.

Otra forma de generar piramidales cuadrados a partir de los triangulares es el cálculo mediante esta fórmula:

$$\mathrm{PCUAD(n)} = \frac{1}{4}\binom{2\mathrm{n}+2}{3}$$

Basta desarrollar:

((2n+2)(2n+1)2n)/(6*4)=n(n+1)(2n+1)/6, que es la fórmula usual, según vimos más arriba.

En este tipo de propiedades se basa esta otra generación de piramidales cuadrados (ver http://oeis.org/A000330). Formamos un triángulo como el del esquema, que está construido sobre n=5. Se entiende fácilmente:

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4
1 2 3
1 2
1

Hemos situado un 1 en una base de 2*5-1 elementos, un 2, en la siguiente de 2*5-3, después un 3 2*5-5 veces, y así hasta llegar a un 5. Lo que propone este esquema es que

$$\mathrm{PCUAD(n)} = \sum_{1}^{n} k(2n - 2k + 1)$$

Se puede demostrar por inducción recorriendo el esquema:

PCUAD(1)=1, PCUAD(2)=1+1+1+2=5=1+4,
PCUAD(3)=1+1+1+1+1+2+2+2+3=14=1+4+9

Se generan así 1, 5 y 14, los primeros piramidales. Para demostarlo para n+1 suponiéndolo correcto para n, bastará considerar, por definición, que los sumandos nuevos al ampliar el esquema de n a n+1 son:

1+(1+2)+(2+3)+(3+4)+(4+5)+…(n+n+1)=1+3+5+7+…2n +1=(n+1)^2, luego si se incrementa en un cuadrado, dará lugar al siguiente piramidal cuadrado, lo que completa la demostración.

Se puede dar otra interpretación a esta fórmula, y es que representa la suma de la función MÍNIMO a todos los pares formados por el conjunto 1..n consigo mismo. Para entenderlo lo construimos para n=5

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5
Sumas	1	5	14	30	55

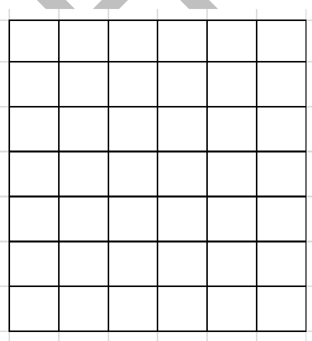
En el esquema se han situado los mínimos de cada par fila-columna en la celda correspondiente, y hemos reproducido el esquema de más arriba: el 1 se repite 9 veces, el 2, 7 veces, el 3, 5…y así hasta el último 5 que se repite una vez. Coincide, por tanto, con la fórmula explicada. Por eso, en la última fila aparecen los piramidales cuadrados (Enrique Pérez Herrero, Jan 15 2013)

Esta generación la usaremos más adelante.

Curiosidades

Cuadrados que se ven en una cuadrícula.

Un acertijo muy popular consiste en saber ver todos los cuadrados contenidos en una cuadrícula también cuadrada.



Para n=1 se ve 1 cuadrado, para n=2, 5 cuadrados, para n=3, 14, luego son números piramidales cuadrangulares. Lo vemos: En la cuadrícula de la imagen hay 36 cuadrados de una unidad, y de 2 unidades ha de haber 25, ya que se puede duplicar o copiar de cinco formas distintas por filas o por columnas, y así, el de tres unidades se copia 3*3=9 veces, hasta que llegamos al total del que sólo existe una copia, luego S=36+25+16+9+4+1=91, que es la sexta pirámide cuadrangular.

Permutaciones con el tercer elemento mayor o igual

Los números piramidales cuadrados coinciden también con las variaciones de n elementos tomados de 3 en 3 con repetición, considerando tan solo aquellas en las que el tercer elemento es mayor o igual que los anteriores. En efecto, basta descomponer las variaciones binarias en conjuntos según el máximo valor de sus elementos. Lo aclaramos con un ejemplo. Imagina las variaciones binarias de 6 elementos, 36 en total:

1	1	**1**
1	2	**2**
1	3	**3**
1	4	**4**
1	5	**5**
2	1	**2**
2	2	**2**
2	3	**3**
2	4	**4**
2	5	**5**
3	1	**3**
3	2	**3**
3	3	**3**
3	4	**4**
3	5	**5**
4	1	**4**
4	2	**4**
4	3	**4**
4	4	**4**
4	5	**5**
5	1	**5**
5	2	**5**
5	3	**5**
5	4	**5**
5	5	**5**

A cada una le hemos adosado el máximo valor que presenta. Tenemos 9 con el máximo 5, a las que solo podemos adosar como tercer elemento otro 5. Después vemos 7 con máximo 4, que admiten una ampliación con 2 elementos, el 4 y el 5. Para el 3 como máximo se presentan 5 arreglos y se pueden ampliar con 3, 4 y 5. Resumiendo, los posibles arreglos de tres elementos en los que el tercero sea mayor o igual que los otros vendrán dados por este cálculo:

9*1+7*2+5*3+3*4+1*5=9+14+15+12+5=55=1+4+9+16+25.

Nos ha resultado PCUAD(5)

No hay nada sorprendente en esto, ya que hemos reproducido la fórmula que demostramos más arriba:

$$PCUAD(n) = \sum_{1}^{n} k(2n - 2k + 1)$$

Con nuestra hoja Cartesius puedes comprobarlo

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Basta escribir las condiciones (en el ejemplo para n=5)

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=3
xt=1..5
ES ((X3>X2)+(X3=X2))*((X3>X1)+(X3=X1))

Obtendrás 55 para n=5. Puedes ir cambiando xt=1..5 por otro intervalo y obtendrás el número piramidal correspondiente.

Suma de productos de cuadrados

Terminamos con otra propiedad curiosa, y es que el piramidal PCUAD(n) es la raíz cuadrada de la suma de todos los cuadrados (i*j)^2 en los que tanto i como j recorren los valores 1,2..n. Lo puedes estudiar en este esquema:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	9	16	25	36	49	64
2	4	16	36	64	100	144	196	256
3	9	36	81	144	225	324	441	576
4	16	64	144	256	400	576	784	1024
5	25	100	225	400	625	900	1225	1600
6	36	144	324	576	900	1296	1764	2304
7	49	196	441	784	1225	1764	2401	3136
8	64	256	576	1024	1600	2304	3136	4096
Sumas	1	25	196	900	3025	8281	19600	41616
Raíces cuadradas	1	5	14	30	55	91	140	204

En él hemos construido todos los cuadrados y hemos sumado los valores inferiores a cada n en la fila de abajo. Se destaca en color el caso n=5 para que lo sigas mejor. Al extraer la raíz cuadrada en la parte inferior resultan los primeros piramidales cuadrados.

No es difícil razonarlo. Recorre la primera columna de las sumas, por ejemplo la que tiene fondo de color. Sus sumandos 1+4+9+16+25 forman el piramidal cuadrado 55. La segunda equivale a la primera multiplicada por 4, luego su suma será 55*4, y las siguientes 55*9, 55*16 y 55*25. Si sacamos factor común en las sumas resultará 55(1+4+9+16+25)=55*55, luego su raíz cuadrada será el piramidal pedido.

De igual forma se puede razonar que si tomamos productos triples (i*j*k)^3, su raíz cúbica será también igual al piramidal cuadrado correspondiente.

Para terminar, una curiosidad: el único piramidal cuadrado que a su vez es un cuadrado es el 4900.

PIRAMIDALES PENTAGONALES

Desarrollaremos ahora los piramidales pentagonales, que se forman añadiendo a la unidad (el vértice de la pirámide) distintos números pentagonales como si fueran cortes poligonales de la pirámide. Para nosotros es preferible ver los piramidales como suma de pentagonales sucesivos. Así, si estos forman la sucesión 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,… http://oeis.org/A000326, los piramidales correspondientes coincidirán con sus sumas parciales: 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196,…

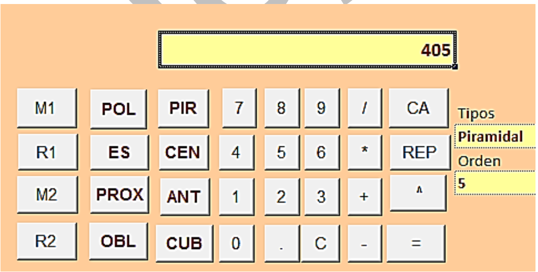
Los primeros piramidales pentagonales son:

1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, 726, 936, 1183, 1470, 1800, 2176, 2601, 3078, 3610, 4200, 4851, 5566, 6348, 7200, 8125, 9126, 10206, 11368, 12615, 13950, 15376, 16896, 18513, 20230, 22050, 23976, 26011, 28158, 30420, 32800, 35301, 37926, 40678,…

http://oeis.org/A002411

Para recorrer la sucesión basta fijar el tipo en Piramidal y el orden en 5. Después se escribe un 1 en pantalla y cada pulsación de la tecla PROX nos devolverá un térmiuno nuevo de la sucesión.

En la imagen hemos llegado a 405:



Con la tecla ANT puedes retroceder, y entre ambas recorrer el rango de términos que desees.

Fórmula

Los números piramidales pentagonales (PPENT) siguen una expresión polinómica muy sencilla:

$$\mathrm{PPENT}(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^3+n^2}{2}$$

Esta fórmula se obtiene particularizando para 5 la general de los piramidales:

$$\mathrm{PIR}(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

$$\mathrm{PPENT}(n) = \frac{3n^2 + n^3(5-2) - n(5-5)}{6} = \frac{3n^3+3n^2}{6}$$
$$= \frac{n^3+n^2}{2}$$

Por tanto, podemos afirmar que los piramidales pentagonales son los promedios entre el cuadrado y el cubo de un número. Por ejemplo:

405 es el piramidal pentagonal número 9, y se cumple que 405=(81+729)/2=810/2=405

Esto nos permite crear una tabla a partir de la sucesión de números naturales:

n	n^2	n^3	Promedio
1	1	1	1
2	4	8	6
3	9	27	18
4	16	64	40
5	25	125	75
6	36	216	126
7	49	343	196
8	64	512	288
9	81	729	405
10	100	1000	550

También la fórmula obtenida descubre que una pirámide pentagonal de lado k equivale a k veces el triangular del mismo lado. Por ejemplo, la pirámide de lado 6, 126, es seis veces mayor que 21, que es el triangular número 6.

Otra interpretación

El número piramidal pentagonal PPENT(n) equivale a la suma de los n+1 múltiplos menores de n. En efecto, esos múltiplos serán n*0, n*1, n*2,…n*n, y formarán progresión aritmética de diferencia n, luego su suma será (n*0+n*n)*(n+1)/2 = (n^3+n^2)/2, que es la expresión descubierta más arriba. Aquí tienes el esquema para PPENT(7)=196

	7
0	0
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
6	42
7	49
	196

Si extraemos factor común el 7, nos queda la suma 0+1+2+3+…que es un número triangular, tal como vimos unos párrafos más arriba. Esto nos descubre otra interpretación, y es que un número piramidal pentagonal equivale a un “prisma” triangular de la misma altura.

Expresado como sumatorio:

$$\mathrm{PPENT}(n) = n\sum_{i=0}^{n} i$$

Recurrencia

Estos números presentan tantas formas de generación que el procedimiento recurrente no es muy necesario. No obstante, existen varias fórmulas de recurrencia. La más simple es

ppent(n) = 3*ppent(n-1) - 3*ppent(n-2) + ppent(n-3) + 3.

Es una recurrencia de tercer orden no homogénea. Se puede demostrar con un simple desarrollo algebraico, si recordamos que ppent(n)=(n^3+n^2)/2. Desarrollamos:

Ppent(n)=3((n-1)^3+(n-1)^2)/2-3((n-2)^3+(n-2)^2)/2+((n-3)^3+(n-3)^2)/2+3

Si nos da pereza simplificar, podemos acudir a Wiris, wxMaxima u otro similar. Usamos el segundo y obtenemos:

```
(%i1) ratsimp(3*((n-1)^3+(n-1)^2)/2-3*((n-2)^3+(n-2)^2)/2+((n-3)^3+(n-3)^2)/2+3);
```

(%o1) $\frac{n^3+n^2}{2}$

Como el resultado es (n^3+n^2)/2, hemos demostrado la recurrencia. No es muy útil.

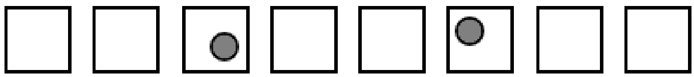
Cuestiones combinatorias

Es muy ilustrativo el estudio de algunas relaciones entre temas propios de números enteros con otros combinatorios. Muchas sucesiones poseen sentidos bastante simples si las estudiamos desde ese punto de vista. Los piramidales pentagonales también las admiten.

Bolas y cajas

Imagina que disponemos de n bolas que deseamos guardar en n cajas, pero con la caprichosa condición de que solo usaremos 2 de ellas, dejando vacías las demás. En ese caso, el número de formas de guardar esas bolas es PPENT(n-1)

Así que decidimos usar solamente dos cajas. En la imagen nos hemos decidido por la 3 y la 6:



Nos comprometemos a guardar las n bolas en esas dos cajas. Es evidente que tenemos n-1 posibilidades, si no deseamos que una quede vacía: 1+(n-1), 2+(n-2), 3+(n-3), …(n-1)+1

Por otra parte, la elección de las cajas, que en nuestro ejemplo eran la 3 y la 6, se puede efectuar de C(n,2) formas, combinaciones de n cajas tomadas de 2 en 2, es decir n(n-1)/2

Multiplicamos las formas de elegir dos cajas por las de rellenarlas, y tenemos:

$P= n(n-1)/2*(n-1)=(n^3-2n^2+n)/2$

Esta expresión coincide con $PPENT(n-1)=((n-1)^3+(n-1)^2)/2=(n^3-2n^2+n)/2$

Cadenas de caracteres

En esta cuestión imaginamos que formamos todas las palabras posibles de tres caracteres en un alfabeto de n caracteres, y consideramos iguales entre sí aquellas palabras que contienen los mismos caracteres, pero invertidos.

Por ejemplo, supongamos las cinco letras A, B, C, D, E agrupadas en palabras de tres AAA, ABC, CBD,… y consideramos idénticas las inversas entre sí, como CBD, que la considaremos equivalente a DBC.

Con estas condiciones, el número de palabras con un alfabeto de n caracteres será PPENT(n).

Tampoco es difícil de razonar: El número total de palabras será n*n*n, pero estas se dividen en dos grupos:

- Simétricas (capicúas o palindrómicas) que se contarán una vez. Su número es n*n=n^2 (el tercer elemento está obligado)
- No simétricas, cuyo número se ha dividir entre 2 para eliminar las palabras simétricas entre sí. Como su número es (n*n*n-n*n), al dividir entre 2 quedará (n*n*n-n*n)/2=n^2(n-1)/2

Sumamos ambos casos:

P=n^2+n^2(n-1)/2 = n^2(2+n-1)/2 = n^2(n+1)/2 = (n^3+n^2)/2=PPENT(n)

Así hemos demostrado la equivalencia. Lo vemos con el caso n=5:

Con un alfabeto de 5 caracteres se forman 5*5*5=125 palabras, de las que 5*5=25 son capicúas, y 125-

25=100, no capicúas. Estas segundas hay que contarlas una vez, luego dividimos entre 2, quedando 50. Sumamos ambos casos y obtenemos 50+25=75, que es el quinto número piramidal pentagonal.

PIRAMIDALES HEXAGONALES

Quienes sigáis esta serie sobre números piramidales adivinaréis que los de tipo hexagonal son suma de los primeros números poligonales hexagonales, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325,… Ve acumulando sumas y obtendrás los piramidales hexagonales (PHEX):

1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525, 715, 946, 1222, 1547, 1925, 2360, 2856, 3417, 4047, 4750, 5530, 6391, 7337, 8372,… http://oeis.org/A002412

Con nuestra calculadora Calcupol puedes también recorrerlos. Descárgala desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Fija el tipo en Piramidal de orden 6, escribe un 1 en pantalla y pulsa reiteradamente la tecla PROX. Así los obtendrás uno a uno. En la imagen hemos llegado hasta el 525.

Como todos los números piramidales, estos poseen una expresión polinómica que los genera. En este caso es

PHEX(n) = n(n + 1)(4n - 1)/6

Esta fórmula se obtiene particularizando para 6 la general de los piramidales:

$$PIR(n,k)=\frac{3n^2+n^3(k-2)-n(k-5)}{6}$$

$$PHEX(n)=\frac{3n^2+4n^3-n}{6}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Lo podemos comprobar, por ejemplo, para n=6, y nos queda:

PHEX(6)=6*7*23/6=161, como era de esperar.

Recurrencias

Estos números presentan varias formas de generación por recurrencia. La más práctica es la siguiente:

a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3) + 4.

Podemos organizarlo según esta tabla, que iniciamos con 1, 7, 22. En cada fila añadimos un elemento nuevo calculado mediante la recurrencia:

a(n-3)	a(n-2)	a(n-1)	3a(n-1)-3a(n-2)+a(n-3)+4
1	7	22	50
7	22	50	95
22	50	95	161
50	95	161	252
95	161	252	372
161	252	372	525
252	372	525	715
372	525	715	946

Como suma

De diferencias de cuadrados

La definición de los números figurados mediante acumulación de otros más simples hace que sean frecuentes las generaciones mediante sumas de elementos. En el caso de los piramidales hexagonales basta acumular diferencias de cuadrados entre un número natural N y todos los menores que él. Lo puedes ver en esta tabla:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	4	9	16	25	36	49
1			3	8	15	24	35	48
2				5	12	21	32	45
3					7	16	27	40
4						9	20	33
5							11	24
6								13
7								
	0	1	7	22	50	95	161	252

Por ejemplo, 50 es igual a 4^2-0^2+4^2-1^2+4^2-2^2+4^2-3^2

Se puede desarrollar algebraicamente, si recuerdas la fórmula para la suma de los primeros cuadrados:

$S = n^2-0^2+n^2-1^2+n^2-2^2+n^2-3^2+\ldots n^2-(n-1)^2 = n^3-n(n-1)(2n-1)/6 = n(n+1)(4n-1)/6$

Hemos desembocado en la fórmula de los piramidales hexagonales, lo que demuestra la propiedad.

De números naturales impares

Todos los números piramidales hexagonales son suma de triangulares impares. Así, el tercero a(3) = t(1)+t(3)+t(5) = 1+6+15 = 22

Algebraicamente:

1*2/2+3*4/2+5*6/2+…(2n-1)n, expresada como sumatorio queda:

$$\sum_{1}^{n}(2n-1)n = 2\sum_{1}^{n}n^2 - \sum_{1}^{n}n = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

Si desarrollas llegarás a la fórmula del piramidal hexagonal: PHEX(n)=n(n+1)(4n-1)/6

Relación con números combinatorios

El denominador 6 de la fórmula de los piramidales hexagonales sugiere su relación con números combinatorios de índice inferior igual a 3, y, en efecto, existen esas relaciones:

$$PHEX(n) = \binom{n+2}{3} + 3\binom{n+1}{3}$$

Lo desarrollamos:

C(n+2,3)+3C(n+1,3)=(n+2)(n+1)n/6+3(n+1)n(n-1)/6=n(n+1)/6*(n+2+3n-3)=n(n+1)(4n-1)/6

Es un simple identidad algebraica.

Otra relación:

$$PHEX(n) = (4n-1)\frac{\binom{n+1}{2}}{3}$$

Es también una identidad algebraica sencilla.

Fin de la serie

No podemos extender en demasía la exposición de números piramidales. Terminamos con una breve referencia a los octogonales.

Como todos los anteriores, los piramidales octogonales resultan de la suma de los poligonales del mismo número de lados. Por ejemplo, la pirámide octogonal de índice 5 resultará de la suma: 1+8+21+40+65=135

Los primeros octogonales son:

1, 9, 30, 70, 135, 231, 364, 540, 765, 1045, 1386, 1794, 2275, 2835, 3480, 4216, 5049, 5985, 7030, 8190, 9471, 10879,… http://oeis.org/A002414

Su fórmula: a(n)=n(n+1)(2n-1)/2

Por ejemplo, a(7)=7*8*13/2=28*13=364

NÚMEROS FIGURADOS E INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

Hasta ahora los distintos estudios contenían siempre una fórmula polinómica para expresar cada término de la sucesión. Por ello parece conveniente presentar un método general para la obtención de esas fórmulas. Disponemos para ello de la teoría de la interpolación polinómica, en la que elegiremos el método de Newton, y una hoja de cálculo que nos facilitará las cosas.

Teoría

Los conceptos y métodos de la interpolación polinómica los puedes encontrar en cualquier texto del primer ciclo de estudios universitarios. Todos se basan en el cálculo con diferencias sucesivas. En nuestro caso nos limitaremos a la suma de **funciones enteras definidas sobre los primeros números naturales**, lo que simplifica mucho los cálculos.

Por ejemplo, imaginemos que deseamos sumar los primeros números oblongos: 1*2, 2*3, 3*4, 4*5, 5*6,…o bien, 2, 6, 12, 20, 30,…Queremos obtener una expresión para 2+6+12+20+30+…

En las técnicas de interpolación que usaremos, la primera operación es la obtención de las diferencias sucesivas, es decir, diferencias entre los elementos, diferencias entre las diferencias, y así sucesivamente hasta (en el caso polinómico) que sean todas iguales. Lo intentamos con el ejemplo. En primer lugar encontramos las sumas parciales de oblongos: 2, 2+6=8, 2+6+12=20,…que serían 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, 240,…

Lo puedes organizar con una hoja de cálculo:

N	1	2	3	4	5	6	7	8
Oblongo	2	6	12	20	30	42	56	72
Suma parcial	2	8	20	40	70	112	168	240

La siguiente imagen, tomada de nuestra hoja ***newton.xls***, puedes entender muy bien el concepto de ***diferencias sucesivas***. En primer lugar hemos escrito nuestra sucesión: 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168,…Después hemos ido restando cada elemento con el siguiente: 6, 12, 20, 30, 42, 56,…(resultan ser los oblongos). A continuación hemos restado esas diferencias: 6, 8, 10, 12, 14,…entre sí, y al final en otra resta, hemos llegado a 2, 2, 2,…Esa es la señal de que esos números siguen una expresión polinómica, el que las diferencias se hagan iguales y las siguientes nulas.

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	168
Dif1		6	12	20	30	42	56
Dif2			6	8	10	12	14
Dif3				2	2	2	2
Dif4					0	0	0

Como aquí las diferencias constantes se alcanzan en tres pasos, la fórmula que buscamos será un polinomio de tercer grado. Lo repasamos en teoría:

Fórmula de interpolación de Newton

Cuando en un proceso se llega a diferencias constantes, sabemos que es posible expresar la sucesión dada mediante un polinomio dependiente del número de orden. La fórmula hallada por Newton es algo compleja en el caso general, en el que hay que usar diferencias divididas, pero se simplifica bastante en el caso de un polinomio aplicado al conjunto 1, 2, 3, 4,…Sería esta:

$$P(x) = a_0 + d_1(x-1) + \frac{d_2(x-1)(x-2)}{2!} + \frac{d_3(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} + \ldots$$

En ella a_0 es el primer término, d_1 la primera diferencia, d_2 la primera de las segundas diferencias, y así sucesivamente. En nuestro caso sería:

P(x)=2+6(x-1)+6(x-1)(x-2)/2!+2(x-1)(x-2)(x-3)/3!

Reduciendo a común denominador y simplificando:

$$P(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 4x}{6} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3}$$

Lo hemos comprobado con la hoja de cálculo. Observa la coincidencia de los valores en rojo:

N	1	2	3	4	5	6	7	8
Oblongo	2	6	12	20	30	42	56	72
Suma parcial	**2**	**8**	**20**	**40**	**70**	**112**	**168**	**240**
P(x)	**2**	**8**	**20**	**40**	**70**	**112**	**168**	**240**

Como ves, lo que es más complicado es la simplificación, pero el método es simple: encontrar diferencias sucesivas hasta que se estabilicen, y aplicar la fórmula de interpolación simplificada para los puntos de apoyo 1, 2, 3, 4,…

Todo esto puedes reproducirlo con nuestra hoja de cálculo ***newton***, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Recuerda que sólo te vale para **sumas definidas sobre los primeros naturales**. Basta escribir los valores de la sucesión en la segunda fila

Valor natural inicial	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Valores función	**2**	**8**	**20**	**40**	**70**	**112**	**168**

y leer los coeficientes (en forma de fracción) más abajo:

Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	0	2	6	6	2
	720	120	24	6	2	1	1
1	X	X	X	X	X	X	X
(X-1)	X	X	X	X	X	X	
(X-2)	X	X	X	X	X		
(X-3)	X	X	X	X			
(X-4)	X	X	X				
(X-5)	X	X					
(X-6)	X						

Es fácil de interpretar (de derecha a izquierda): 2/1 es el coeficiente de 1, 6/1 el de (x-1), 6/2 para (x-1)(x-2) y, finalmente, 2/6 para (x-1)(x-2)(x-3). Después vendría la simplificación, pero si quieres ahorrártela, la hoja dispone del cálculo para un valor concreto. Por ejemplo, ¿cuánto suman los diez primeros oblongos? Para ello dispones de las celdas adecuadas

¿En qué valor de N interpolamos?	
N=	10
P(N)=	440

La respuesta es 440. Hay que advertir que puede producir pequeños errores para índices grandes, por lo que se aconseja comprobar.

Si deseas evitarte la simplificación puedes acudir a un CAS. Nosotros hemos usado ***wxMaxima*** para obtener el resultado previsto:

```
-->   2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/3

(%i3) ratsimp(2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/3);
```
$$(\%o3)\quad \frac{x^3+3\,x^2+2\,x}{3}$$

Otro paso sería el intentar, si es posible, buscar una interpretación al resultado obtenido. En nuestro caso es fácil ver que, para x mayor o igual a 3, se reduce a

$$P(x) = 2\binom{n}{3}$$

Este proceso se puede repetir para números poligonales, piramidales o poligonales centrados (y otros similares que nos inventemos), porque todos se basan en sus definiciones en la acumulación de sumas, lo que garantiza que la fórmula buscada es de tipo poligonal.

Otro ejemplo

Sabemos que los números piramidales triangulares se construyen sumando los triangulares, y estos, a su vez, acumulando los naturales. Con un sencillo esquema los identificamos:

N	1	2	3	4	5	6	7
T(n)	1	3	6	10	15	21	28
PIR3(n)	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**

Luego los primeros piramidales son 1, 4, 10, 20,….Los volcamos en la hoja newton para descubrir sus diferencias y los coeficientes de interpolación:

1	4	10	20	35	56	84
	3	6	10	15	21	28
		3	4	5	6	7
			1	1	1	1
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	1	3	3	1
720	120	24	6	2	1	1

Las diferencias son 1, 3, 3 y 1, y con ellas se construyen los coeficientes 1/1, 3/1, 3/2 y 1/6. Rellenamos la fórmula de interpolación y queda:

P(x)=1+3(x-1)+3/2(x-1)(x-2)+1/6(x-1)(x-2)(x-3)

Simplificamos con wxMaxima:

```
ratsimp(1+3*(x-1)+3/2*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/6)
```

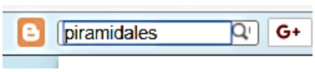
$$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$$

$$TET(n) = PIR(n,3) = \frac{3n^2+n^3+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Con lo aprendido hoy estamos preparados para saltar a la cuarta o quinta dimensión, y sumar números piramidales consecutivos.

TETRAEDROS DE CUATRO DIMENSIONES

Si has seguido los párrafos anteriores sobre números piramidales (escribe “piramidales” en la casilla de búsqueda) sabrás que estos números se generan mediante sumas parciales en una sucesión de dimensión inferior.



Así, los tetraedros se generan sumando números triangulares. Estos, a su vez, mediante números lineales. Las pirámides cuadradas se obtienen sumando cuadrados, y los de tipo poligonal sumando los de dos dimensiones del mismo número de lados.

Si sumamos números piramidales, obtendremos piramidales de cuatro dimensiones. Por ejemplo, los piramidales cuadrados son 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204 (ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-piramidales-3-cuadrados.html)

Formamos con ellos sumas parciales: 1, 1+5, 1+5+14, 1+5+14+30,… y obtenemos:

1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540,…

Estos será, pues, los piramidales cuadrados de cuatro dimensiones.

http://oeis.org/A002415

Tetraedros de cuatro dimensiones

Estudiamos anteriormente los tetraedros de tres dimensiones y vimos que la sucesión de los mismos comienza con

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220,…

Si procedemos a formar sumas parciales, obtendremos los tetraedros de cuatro dimensiones:

1, 1+4, 1+4+10, 1+4+10+20, 1+4+10+20+35,…. Es decir, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210,…

Los primeros términos de la sucesión de números de este tipo son:

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, 715, 1001, 1365, 1820, 2380, 3060, 3876, 4845, 5985, 7315, 8855,…, y están recogidos en http://oeis.org/A000332 con otra definición, coincidente, como veremos, salvo algunos ceros.

Los nombraremos como **PIR3_4(n)**, donde 3 es el número de lados, 4 la dimensión y n el número de orden. Así 210=PIR3_4(7).

Obtención de la fórmula polinomial

Ya estudiamos este procedimiento en una anteriormente y consiste en usar la fórmula de interpolación de Newton aplicada a los primeros números. En primer lugar escribimos los primeros términos 1, 5, 15, 35, 70,… y obtenemos sus diferencias sucesivas:

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	5	15	35	70	126	210
Dif1		4	10	20	35	56	84
Dif2			6	10	15	21	28
Dif3				4	5	6	7
Dif4					1	1	1
Dif5						0	0
Dif6							0

Observamos que son nulas las diferencias de orden 5, luego el polinomio que buscamos es de cuarto grado. Sus coeficientes los leemos más abajo:

0	0	1	4	6	4	1
720	120	24	6	2	1	1

Por tanto, el polinomio buscado será

1+4(x-1)+3(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3)/3+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)/24

Podemos acudir a wxMaxima para simplificar:

```
(%i2) ratsimp(1+4*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+2*(x-1)*(x-2)*(x-3)/3+(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)/24;
```

(%o2) $\frac{x^4+6x^3+11x^2+6x}{24}$

O bien con la web https://www.wolframalpha.com, obtenemos el mismo polinomio:

Expanded form:

$$\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{4}+\frac{11x^2}{24}+\frac{x}{4}$$

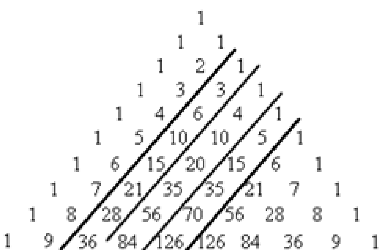
Con el comando ***factor*** de wxMaxima factorizamos:

$$\frac{x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}{24}$$

Esta es la fórmula más práctica para obtener los tetraedros de cuatro dimensiones, que, es fácil verlo, coincide con:

$$PIR3\_4(n) = \binom{n+3}{4}$$

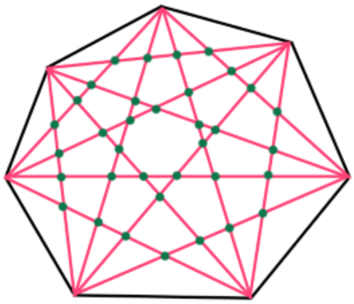
En toda esta serie nos aparecen números combinatorios, y es porque se pueden localizar los piramidales en el triángulo de Pascal



En la imagen están destacados los triangulares, los tetraedros de tres dimensiones y los de cuatro, que son suma de los anteriores.

Interpretaciones

Los tetraedros de cuatro dimensiones coinciden con las intersecciones de las diagonales de un polígono convexo, siempre que no concurran más de dos diagonales en el mismo punto. Por eso debemos elegir polígonos no regulares, como el de la figura



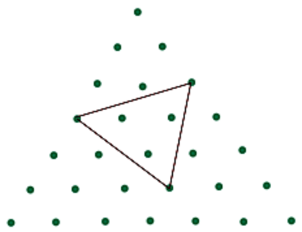
En él está representado el número 35, como las intersecciones (en color verde) en un heptágono. El 35 es el cuarto tetraedro de cuatro dimensiones, y le corresponde el polígono de tres lados más. Esto es por el n+3 que figura en la fórmula general.

He encontrado una explicación muy sencilla debida a Ignacio Larrosa @ilarrosac: Si el polígono es irregular, cada cuatro vértices formarán un cuadrilátero convexo distinto, y sus diagonales producen un único punto de intersección. Por tanto, el número de ellos coincidirá con el de combinaciones de n+3 lados tomados de 4 en 4. Muy elegante.

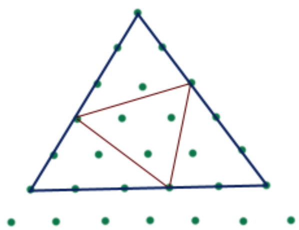
También se debe a Ignacio Larrosa la siguiente interpretación:

El número piramidal triangular de cuatro dimensiones de orden n coincide con todos los triángulos equiláteros que se pueden dibujar uniendo tres puntos de una matriz que rellena otro triángulo equilátero de lado n+1.

En la figura puedes ver uno de esos triángulos.



La idea de Ignacio Larrosa consiste en que cada triángulo tiene sus vértices en los lados de otro mayor que sigue la orientación de la matriz triangular, y que basta contar estos últimos y también todos los triángulos de cualquier orientación que se inscriben en ellos.



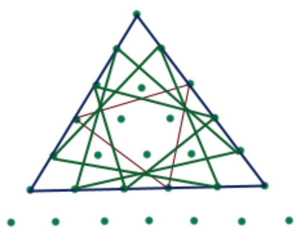
En la imagen hemos destacado en azul el equilátero orientado que contiene al elegido en primer lugar. Nos dedicamos a contar:

Número de triángulos orientados de lado k

Es un problema muy estudiado. En la imagen, el número de triángulos similares al dibujado es 1+2=3. Si tuviera una celda menos de lado su número sería 1+2+3=6, y así hasta los de lado 1, cuyo número sería 1+2+3+4+5+6=21, todos números triangulares. En general, el número de triángulos orientados de lado k en una matriz de lado n sería T(n-k+1), siendo T el triangular de ese orden.

Número de triángulos contenidos en un orientado

Basta deslizar el primer vértice (por ejemplo el que cae a la izquierda) a lo largo de su lado, y los demás se situarán en un punto fijado sin ambigüedad. En el ejemplo se podrían inscribir cuatro.



Es fácil ver que, en general, se pueden inscribir k-1 triángulos.

Con estos dos datos se pueden contar todos los equiláteros posibles mediante una suma de productos. Para n=6, caso del ejemplo sería:

S=1*5+3*4+6*3+10*2+15*1=5+12+18+20+15=70, que es el piramidal de orden 5.

Para un estudio general puedes consultar

http://people.missouristate.edu/lesreid/sol03_01.html

Recurrencia

Es fácil ver, según la fórmula general, que

PIR3_4(N)=PIR3_4(N-1)*(N+3)/(N-1)

En efecto:

$$PIR3\_4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

$$PIR3\_4(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$$

Luego basta multiplicar por n+3 y dividir entre n-1 para pasar de uno a otro.

Por ejemplo: 70*9/5=14*9=126

PIRÁMIDES CUADRANGULARES EN CUATRO DIMENSIONES

Pirámides cuadrangulares

De la misma forma, si tomamos la sucesión de números piramidales cuadrados de tres dimensiones (ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-piramidales-3-cuadrados.html), podemos ir obteniendo sus sumas parciales.

Estos son los números piramidales cuadrados:

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525, 6201, 6930, 7714, 8555, 9455,…

Formamos sus sumas parciales:

1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825, 1210, 1716, 2366, 3185, 4200, 5440, 6936, 8721, 10830, 13300, 16170, 19481, 23276, 27600,…

Se obtienen así: 1=1, 1+5=6, 1+5+14=20, 1+5+14+30=50,…

Esta será la sucesión de números piramidales cuadrados de cuatro dimensiones. Los nombraremos como PIR4_4(n)

Los tienes publicados en http://oeis.org/A002415

Obtención de la fórmula polinomial

Ya estudiamos este procedimiento anteriormente.

Consiste en usar la fórmula de interpolación de Newton aplicada a los primeros números naturales. En primer lugar escribimos los primeros términos 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336,… y obtenemos sus diferencias sucesivas de forma automática:

	1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540						
Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	6	20	50	105	196	336
Dif1		5	14	30	55	91	140
Dif2			9	16	25	36	49
Dif3				7	9	11	13
Dif4					2	2	2
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	2	7	9	5	1
	720	120	24	6	2	1	1

Como las quintas diferencias son nulas, el polinomio interpolador será de cuarto grado. Los coeficientes los tienes en la parte baja en forma de fracción. Así quedaría:

1+5(x-1)+9/2(x-1)(x-2)+7/6(x-1)(x-2)(x-3)+2/24(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)

Lo podemos simplificar con wxMaxima:

```
(%i1) factor(ratsimp(1+5*(x-1)+9/2*(x-1)*(x-2)+7/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+2/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)));
```

(%o1) $\frac{x(x+1)^2(x+2)}{12}$

O en la web de Wolfram Alpha, obteniendo el mismo resultado:

$$\frac{1}{12}x(x+1)^2(x+2)$$

Hay que tener en cuenta que esta expresión es válida si se comienza la sucesión en 1. Podrás encontrar otras distintas cuando el inicio contenga ceros.

La comprobamos, por ejemplo para n=5 y n=6:

PIR4_4(5)=5*6^2*7/12=105

PIR4_4(6)=6*7^2*8/12=4*49=196

Expresión con números combinatorios:

Todos los números figurados se pueden expresar mediante números combinatorios de una forma más o menos compleja. En este caso disponemos de dos expresiones

$$PIR4_{4(n)} = 2\binom{n+3}{4} - \binom{n+2}{3}$$

(n+3)(n+2)(n+1)n/12-
(n+2)(n+1)n/6=(n+2)(n+1)n((n+3)/12-
1/6)=n(n+2)(n+1)^2/12, que coincide con la fórmula obtenida más arriba. Podemos comprobarlo también con la función COMBINAT de las hojas de cálculo:

Para n=6 tendríamos =2*COMBINAT(9;4)-COMBINAT(8;3)=196

Coincide con el resultado obtenido anteriormente.

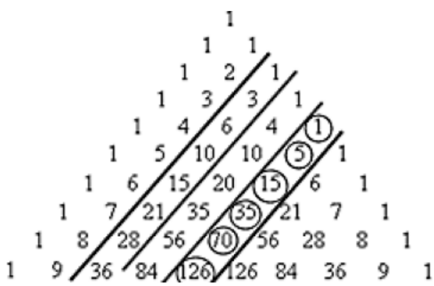
Puedes probar también con esta otra:

$$PIR4_{4(n)} = \binom{n+3}{4} + \binom{n+2}{4}$$

Así,
PIR4_4(7)=COMBINAT(10;4)+COMBINAT(9;4)=336,
que es su valor correcto.

No es difícil comprobar la equivalencia de ambas expresiones combinatorias.

En la siguiente imagen del triángulo de Pascal hemos rodeado de círculos estos números combinatorios que sirven de sumandos:

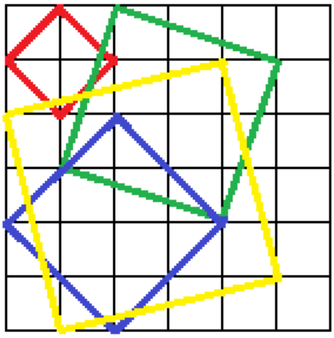


Podeos sumar cada uno con el siguiente y resultarán piramidales cuadrados de 4 dimensiones:

1+5=6; 5+15=20; 15+35=50; 35+70=105;

Interpretación geométrica

Al igual que ocurría con las pirámides triangulares y los triángulos, estos números pueden representar el número de cuadrados que se pueden dibujar en una rejilla cuadrada de n vértices, si sus lados no son paralelos a los de la rejilla. En la imagen hemos representado cuatro de ellos.



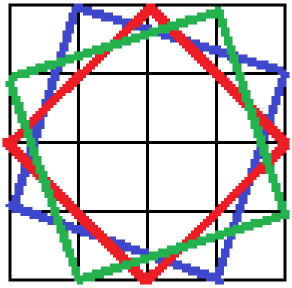
Podemos razonar de un modo similar al que usamos con triángulos.

En primer lugar contaremos los cuadrados que se pueden dibujar si sus lados han de ser paralelos a las líneas de la rejilla. Por ejemplo, en la imagen se pueden dibujar 36 cuadrados de lado 1, 25 de lado 2, 16 de 3, y así hasta el cuadrado total que sería uno solo. Por tanto, el número de cuadrados de lados paralelos sería 1+4+9+16+25+36=91.

Resulta ser equivalente a un número piramidal cuadrado de índice 6. En efecto, puedes repasar la definición y fórmulas en

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-piramidales-3-cuadrados.html

Dentro de cada cuadrado de lado k en posición paralela se pueden dibujar k-1 cuadrados de los que nos interesan



En el caso del lado seis, podemos acumular los cuadrados según el número de lados, y obtendríamos:

36*0+25*1+16*2+9*3+4*4+1*5=105=PIR4_4(5)

Con cinco lados obtendríamos un resultado similar:

25*0+16*1+9*2+4*3+1*4=50=PIR4_4(4)

La demostración general supone mucho cálculo algebraico que nos da pereza abordar.

PENTAGONALES Y HEXAGONALES

Generación directa

Partimos de los piramidales pentagonales de tres dimensiones:

1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, 726, 936, 1183, 1470, 1800, 2176, 2601, 3078, 3610, 4200, 4851, 5566, 6348, 7200, 8125,…

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/06/numeros-piramidales-4-pentagonos.html

Como en casos anteriores, construimos las sumas parciales: 1, 1+6=7, 1+6+18=25, 1+6+18+40=65,…y obtenemos:

1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, 750, 1155, 1705, 2431, 3367, 4550, 6020, 7820, 9996, 12597, 15675, 19285, 23485, 28336, 33902,…

Estos serán, pues los piramidales pentagonales de cuatro dimensiones. Los puedes estudiar en

http://oeis.org/A001296

Expresión algebraica

Lo que sigue lo hemos aplicado en bastantes números figurados, por lo que simplificaremos las explicaciones. En primer lugar, abrimos nuestro interpolador para números naturales

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Escribimos en él los primeros términos de la sucesión que hemos formado.

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	7	25	65	140	266	462
Dif1		6	18	40	75	126	196
Dif2			12	22	35	51	70
Dif3				10	13	16	19
Dif4					3	3	3
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	3	10	12	6	1
	720	120	24	6	2	1	1

Leemos los coeficientes de (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3),…y formamos el polinomio interpolador, que según la anulación de diferencias quintas, será de cuarto grado:

1+6*(x-1)+6*(x-1)*(x-2)+10/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+3/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)

Lo simplificamos en la página de WolframAlpha y obtenemos

$$\frac{1}{24}\, x\,(3\,x+1)\,(x+1)\,(x+2)$$

Expresión que coincide con una de las contenidas en https://oeis.org/A001296

Son números de Stirling

Los pentagonales que estamos estudiando son un caso particular de los números de Stirling de segunda clase para los índices (n+2,n), como puedes ver en los elementos subrayados de nuestra tabla

1	1	2				
1	3	1	5			
1	7	6	1	15		
1	15	25	10	1	52	
1	31	90	65	15	1	203
1	63	301	350	140	21	1
1	127	966	1701	1050	266	28
1	255	3025	7770	6951	2646	462
1	511	9330	34105	42525	22827	5880
1	1023	28501	145750	246730	179487	63987
1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396
1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5715424

(La tienes alojada en
http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#nume)

Si deseas conocer mejor estos números puedes acudir a

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_de_Stirling_de_segunda_especie

Relación con números triangulares

En https://oeis.org/A001296 figura una propiedad interesante, debida a Jon Perry, y es que cada número piramidal pentagonal de cuatro dimensiones es suma de números triangulares multiplicado cada uno por su número de orden, es decir:

$$PIR5\_4(n) = \sum_{j=1}^{n} j \times T(j)$$

Esto se cumple para los primeros términos. Si tomamos los triangulares 1, 3, 6, 10, 15,…y formamos las sumas 1*1=1, 1*1+2*3=7, 1*1+2*3+3*6=25, 1*1+2*3+3*6+4*10=65,…y comprobamos que se cumple para los primeros términos. Acudimos a la inducción completa.

Bastará demostrar que PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n) = (n+1)*T(n+1). En efecto, es cuestión de Álgebra:

PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n)=((n+1)(n+2)(n+3)(3(n+1)+1)-n(n+1)(n+2)(3n+1))/24

Simplificamos y queda:

PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n)=(n+1)(n+2)(12n+12)/24=(n+1)(n+1)(n+2)/2=(n+1)T(n+1)

Luego la propiedad es extensible a todos los términos.

En la misma página de OEIS, J. M. Bergot interpreta esta propiedad como la suma de todos los productos de dos elementos del conjunto {1, 2, …, n} tomados de todas las formas posibles, sin tener en cuenta el orden). Por ejemplo, 1*1 + 1*2 + 1*3 + 2*2 + 2*3 + 3*3 = 25.

Es sencillo de comprender, ya que si desarrollamos la suma de cada triangular por su número de orden, basta recordar que cada triangular es suma de números consecutivos, luego la suma queda:

1*T(1)+2*T(2)+3*T(3)+4*T(4) = 1*1+2(1+2)+3*(1+2+3)+4*(1+2+3+4)+…

Se ve que en la suma están contenidos todos los productos de cada número natural por sus precedentes, tal como afirma J. M. Bergot.

Es un buen ejercicio de hoja de cálculo construir una tabla que refleje este resultado. Hay que manejar bien las referencias absolutas y relativas. Un buen ejercicio de aprendizaje.

En la tabla que hemos construido se destaca el conjunto de sumandos que forman el piramidal pentagonal 140:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4	6	8	10	12	14	16	18	20
3			9	12	15	18	21	24	27	30
4				16	20	24	28	32	36	40
5					25	30	35	40	45	50
6						36	42	48	54	60
7							49	56	63	70
8								64	72	80
9									81	90
10										100
	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705

Piramidales hexagonales

Según nuestra política de no cansar con los temas, a los piramidales hexagonales les dedicaremos menos espacio y con ellos terminaremos el recorrido por los que tienen cuatro dimensiones.

Las operaciones que hay que realizar son:

(1) Acumulación de piramidales hexagonales de tres dimensiones

Partimos de los piramidales hexagonales de tres dimensiones:

1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525, 715, 946, 1222, 1547, 1925, 2360, 2856, 3417, 4047, 4750, 5530, 6391, 7337, 8372,…

(Ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/07/numeros-piramidales-5-hexagonos.html)

Los acumulamos en sumas parciales:

1, 1+7=8, 1+7+22=30, 1+7+22+50=80,…

Nos resultarán así los números piramidales hexagonales de cuatro dimensiones:

1, 8, 30, 80, 175, 336, 588, 960, 1485, 2200, 3146, 4368, 5915, 7840, 10200, 13056, 16473, 20520, 25270, 30800,…

Los tienes publicados en http://oeis.org/A002417

(2) Obtención de la fórmula algebraica

También para estos números usamos nuestro interpolador http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Como ya lo hemos desarrollado para otros tipos de números, sólo insertaremos el volcado de pantalla:

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	8	30	80	175	336	588
Dif1		7	22	50	95	161	252
Dif2			15	28	45	66	91
Dif3				13	17	21	25
Dif4					4	4	4
Dif5						0	0
Dif6							0
ntes (en fracción)	0	0	4	13	15	7	1
	720	120	24	6	2	1	1

Como en otras ocasiones, observamos la anulación de las diferencias quintas y copiamos los coeficientes del polinomio en la parte inferior.

1+7*(x-1)+15/2*(x-1)*(x-2)+13/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)

Simplificamos la expresión en la página de WolframAlpha y nos devuelve cuatro variantes:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6}x^2(x+2)(x+1)$$

$$\frac{1}{6}x^2(x^2+3x+2)$$

$$x^2\left(\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{3}\right)$$

Expanded form:

$$\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}$$

Aunque la cuarta es la más sintética a efectos de cálculo, nos quedamos con la primera, porque se puede interpretar en términos de número combinatorio:

$$PIR6_{4(n)} = n\binom{n+2}{3}$$

Una curiosa propiedad

Según un comentario de Floor van Lamoen en la página OEIS donde vienen publicados, se cumple que PIR6_4(n) es la suma de todos los números que **no pueden** expresarse de la forma t*(n+1) + u*(n+2) con t, u enteros no negativos. Desconocemos la demostración de este hecho, pero nos va a servir para repasar unos conceptos que desarrollamos en nuestro blog:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html

Según el vocabulario introducido en esa entrada, lo que afirma Floor van Lamoen es que los números que estamos estudiando son **suma de aquellos que no son representables respecto al conjunto {n+1,n+2}**. En la entrada citada llamábamos número de Frobenius al máximo número no representable para un conjunto. En el caso de dos números coprimos a y b, ese número equivale a **a*b-a-b**. Esto nos garantiza que la suma de no representables es finita, y que, por tanto, puede coincidir con un número de nuestra lista.

En este caso particular, el número de Frobenius para {n+1,n+2} será

$(n+1)*(n+2)-(n+1)-(n+2)=n^2+n-1$

En el caso de n=7, ese número será igual a 7^2+7-1=55. Quiere decir que los números no representables respecto al conjunto {8,9} serán no mayores que 55. En efecto, los hemos buscado con hoja de cálculo y resultan ser

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 46, 47, 55

Su suma es 588, que coincide con PIR6_4(7), como puedes comprobar en la lista de arriba.

Podemos repetir esta comprobación para cualquier otro valor. Para ello necesitamos una función que nos devuelva VERDADERO si un número n es representable respecto al conjunto {a,b}. Puede ser esta:

Function sumamult(n, a, b) As Boolean ‘Investiga si n=t*a+u*t
Dim i, p, q
Dim es As Boolean

es = False
i = 0 ‘Recorrerá los posibles múltiplos de a
While i <= n And Not es
p = i / a: q = (n - i) / b ‘Encuentra los posibles valores de t y u
If p = Int(p) And q = Int(q) Then ‘Si ambos t y u son enteros, es representable
es = True
End If
i = i + 1
Wend
sumamult = es
End Function

Con esta función no es difícil sumar los no representables para un número dado:

Function suma_no_repr(n)
Dim i, s
s = 0

For i = 1 To n * n + n – 1 ‘Busca hasta el número de Frobenius

If Not sumamult(i, n + 1, n + 2) Then s = s + i ‘Si no es representable, lo suma

Next i

suma_no_repr = s

End Function

Efectivamente, con ella se reproduce la lista de los piramidales hexagonales de cuatro dimensiones:

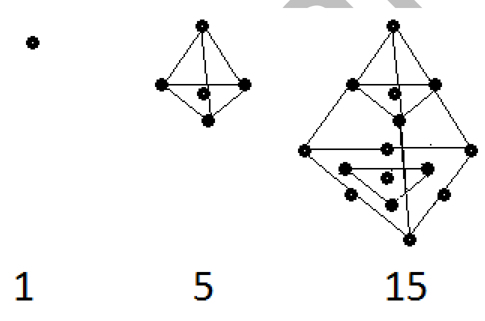
N	PIR6_4(N)
1	1
2	8
3	30
4	80
5	175
6	336
7	588
8	960
9	1485
10	2200
11	3146
12	4368

Esto ocurre a menudo en las pequeñas investigaciones matemáticas, que aparecen conexiones inesperadas, como nos ha ocurrido aquí. Era difícil imaginar una conexión de números piramidales con el número de Frobenius.

NÚMEROS PIRAMIDALES CENTRADOS

En este capítulo generaremos números piramidales a partir de los poligonales centrados.

Al igual que los números poligonales centrados se formaban acumulando contornos de polígonos o de múltiplos de un número, podríamos también acumular estos números poligonales centrados mediante sus sumas parciales. Estas sumas se pueden representar como niveles dentro de una pirámide centrada. Lo vemos en la imagen, que representa las pirámides centradas de tres lados que estudiaremos a continuación:



Son pirámides que contienen en el interior de sus bases los polígonos anteriores.

PIRÁMIDES TRIANGULARES CENTRADAS

Siguiendo un proceso similar al de casos anteriores, partimos de los números triangulares centrados

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, 235, 274, 316, 361, 409, 460, 514, 571, 631, 694, 760, 829, 901,…, ya estudiados en las entradas referidas y en http://oeis.org/A005448

Los acumulamos mediante sumas parciales:

1, 1+4=5, 1+4+10=15, 1+4+10+19=34,… y así hasta completar. De esta forma se generarán los piramidales triangulares centrados

1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505, 671, 870, 1105, 1379, 1695, 2056, 2465, 2925, 3439, 4010, 4641, 5335, 6095, 6924, 7825, 8801, 9855, 10990, 12209, 13515, 14911, 16400, 17985, 19669,…

http://oeis.org/A006003

Los tres primeros se corresponden con la imagen del primer párrafo.

En este caso también podemos usar el interpolador de Newton para los primeros números naturales, que puedes descargar desde http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Rellenamos los valores de la función con los primeros términos 1, 5, 15, 34, 65, 111, 175 y leemos los coeficientes en la parte inferior:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	5	15	34	65	111	175
Dif1		4	10	19	31	46	64
Dif2			6	9	12	15	18
Dif3				3	3	3	3
Dif4					0	0	0
Dif5						0	0
Dif6							0
ntes (en	0	0	0	3	6	4	1
fracción)	720	120	24	6	2	1	1

El polinomio interpolador será

1+4(x-1)+3(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-3)/2

Simplificamos mediante la web de Wolfram|Alpha y obtenemos

Alternate forms:

$$\frac{1}{2}x(x^2+1)$$

$$PIRC_3(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Este es un caso particular de la fórmula contenida en el libro Figurate Numbers, de Elena Deza y Michel Deza, que sólo incluimos como comprobación, ya que nos interesa la generación de cada caso particular. Es esta:

$$PIRC_m(n) = \frac{mn^3 + (6 - m)n}{6}$$

Particularizando para m=3 resulta la que hemos obtenido.

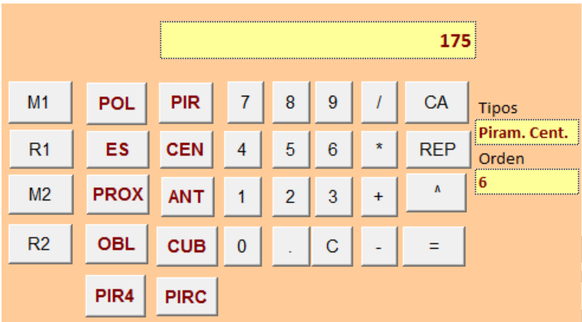
Por ejemplo, PIRC3(9)=9*82/2=369, que es el noveno término de nuestra lista de más arriba.

La expresión que hemos obtenido coincide con la que figura en http://oeis.org/A006003

Uso de Calcupol

Pasamos a usar nuestra calculadora Calcupol, (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados) cuyas prestaciones hemos ampliado con la inserción de una nueva tecla que gestiona estas pirámides centradas

Su funcionamiento es similar a las dedicadas a números poligonales y otros piramidales: escribimos el orden **m** (que en este caso valdría 3), después pulsamos la tecla **PIRC** con el ratón, escribimos el valor de **n**, por ejemplo 7, y terminamos con la tecla **=**. Nos resultaría, en este caso del 7, el valor de 175, que coincide con el séptimo término de la sucesión que estamos estudiando:



Propiedades

Desarrollamos a continuación algunas propiedades de estos números. Comenzamos con una de Felice Russo incluida en http://oeis.org/A006003

Se expresa así:

Si escribimos los números naturales en grupos de longitud progresiva desde el 1, es decir, formamos: 1; 2,3; 4,5,6; 7,8,9,10;… y sumamos cada grupo, obtenemos los piramidales que estamos estudiando:

1=1

2+3=5
4+5+6=15
7+8+9+10=34
11+12+13+14+15=65

…

No es difícil justificarlo. Basta observar que la suma de enteros consecutivos desde 1 hasta k es el número triangular k(k+1)/2, luego los grupos formados tendrán como suma la diferencia entre el triangular correspondiente al último término y el del anterior grupo. Así, 7+8+9+10=T(10)-T(6)=10*11/2-6*7/2=55-21=34, como era de esperar.

Sólo hay que advertir que los índices de esos triangulares son a su vez triangulares también, 10=4*5/2 y 6=3*4/2, y además consecutivos. Esto nos permite plantearlo con la variable x:

S(x)=T(x(x+1)/2)-T(x(x-1)/2) = (x(x+1)/2)*(x(x+1)/2+1)/2-(x(x-1)/2)*(x(x-1)/2+1)/2

Acudimos de nuevo a Wolfram|Alpha para simplificar y comprobamos:

$$\frac{1}{2}x\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(x^3+x\right)$$

$$x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

Nos resulta la fórmula esperada de estos piramidales centrados, luego la propiedad es cierta.

Propiedad combinatoria

Los piramidales centrados que estamos estudiando son suma de tres números combinatorios a partir del 15:

$$a(k) = \binom{n}{3} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}$$

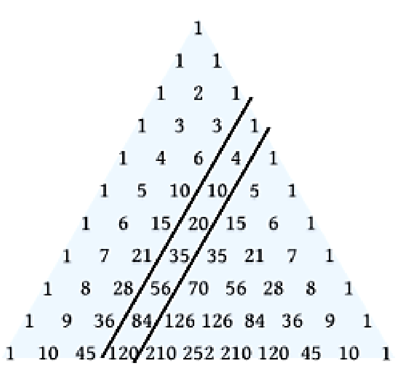
Basta desarrollar: ((n)(n-1)(n-2)+(n+1)(n)(n-1)+(n+2)(n+1)(n))/6=

$=n/6*(n^2-3n+2+n^2-1+n^2+3n+2)$

$=n/6*(3n^2+3)=$ $\mathbf{(n^3+n)/2}$

Significa que si recorremos la cuarta diagonal del triángulo aritmético y sumamos de tres en tres, resultarán los números que estamos estudiando:

En una imagen tomada de la Wikipedia hemos señalado los números que debemos sumar:



Así, 1+4+10=15, 4+10+20=34, 10+20+35=65,…

Relación con los triangulares

$$PIRC_3(n) = T(n) + nT(n-1)$$

(Bruno Berselli, Jun 07 2013)

Es claro su significado: Si a un número triangular le sumamos el anterior multiplicado por el número de orden del primero, resulta un piramidal triangular centrado.

Así 3+2*1=5, 6+3*3=15, 10+4*6=34…

En forma de tabla:

n	T(n)	T(n)+n*T(n-1)
1	1	
2	3	5
3	6	15
4	10	34
5	15	65
6	21	111
7	28	175
8	36	260

Se ha destacado en rojo el cálculo: multiplicar el anterior por el número de orden y sumar el actual triangular.

Se demuestra con un simple desarrollo:

$T(n)+nT(n-1)=n(n+1)/2+n*(n-1)*(n)/2=n/2*(n+1+n^2-n)=n/2(n^2+1)=\mathbf{(n^3+n)/2}$

Llegamos a la misma expresión ya conocida.

PIRAMIDALES CENTRADOS DE CUATRO LADOS

Como procedimos con los triangulares, partiremos de los números poligonales cuadrangulares centrados:

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381…http://oeis.org/A001844

Los puedes repasar en la siguiente entrada de este blog:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html

Realizamos la acostumbrada construcción de sumas parciales:

1, 1+5=6. 1+5+13=19, 1+5+13+25=44,…

Así conseguimos los números piramidales cuadrangulares centrados:

1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670, 891, 1156, 1469, 1834, 2255, 2736, 3281, 3894, 4579, 5340, 6181,… http://oeis.org/A005900

Como el uso del interpolador lineal ha sido ya explicado, sólo insertamos el esquema de cálculo:

1	2	3	4	5	6	7
1	6	19	44	85	146	231
	5	13	25	41	61	85
		8	12	16	20	24
			4	4	4	4
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	4	8	5	1
720	120	24	6	2	1	1

Resulta el polinomio

1+5(x-1)+4(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3)/3

Se simplifica mediante la web de Wolfram|Alpha y obtenemos:

Alternate forms:

$$\frac{1}{3}x(2x^2+1)$$

Es decir:

$$PIRC_4(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

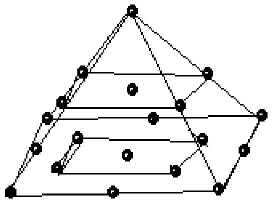
Podíamos haberlo deducido de la fórmula general de Elena Deza y Michel Deza:

$$PIRC_m(n) = \frac{mn^3+(6-m)n}{6}$$

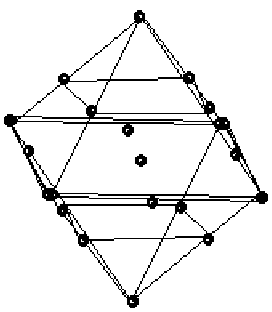
Para m=4 queda

$$PIRC_4(n) = \frac{4n^3+(6-4)n}{6} = \frac{2n^3+n}{3}$$

Estos números coinciden con los *octaédricos*, como puedes comprobar en http://oeis.org/A005900. Por tanto, las propiedades que siguen las comparten ambos tipos de números. Puedes encontrar la causa si comparas las dos figuras siguientes. La primera corresponde al número piramidal cuadrangular centrado de orden 3. Por tanto, estará formado por las capas 1+(1+4)+(1+4+8)=19, tal como vimos en la sucesión general.



En la segunda figura hemos desplazado capas hacia abajo, y colocado el centro en la mayor:



Así vemos perfectamente formado el octaedro, que se puede generar con la suma 1^2+2^2+3^2+2^2+1^2=19, como cabía esperar.

Este resultado se puede generalizar sin problemas al término n, lo que nos da la primera propiedad de estos números.

Propiedades

Suma de cuadrados

Los términos de la sucesión que estamos estudiando se pueden calcular mediante la expresión:

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Este desarrollo los identifica con los números octaédricos, como ya hemos visto.

Tomamos algún ejemplo:

85=1+4+9+16+25+16+9+4+1

231=1+4+9+16+25+36+49+36+25+16+9+4+1

Productos de sumandos impares

A continuación vemos una interesante propiedad debida a Jon Perry

*PIRC4(n) coincide con la suma de todos los productos posibles p*q con p y q impares tales que p+q=2n*

Es una consecuencia directa de la primera propiedad:

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Si recordamos que un cuadrado es suma de impares consecutivos, obtendremos sumas repetidas que se podrán agrupar en productos:

PIRC4(3)=19=1+1+3+1+3+5+1+3+1=1*5+3*3+5*1

PIRC4(4)=44=1+1+3+1+3+5+1+3+5+7+1+3+5+1+3+1= 1*7+3*5+5*3+7*1

Para el caso general no sería difícil ir agrupando los impares.

Como coeficiente de una potencia

Esta propiedad sólo la comprobaremos en algún caso concreto. Pues supone pesados cálculos algebraicos que no hay por qué abordar ahora. Lo dejamos para quién se atreva.

Estos números coinciden con el máximo coeficiente del desarrollo de (1+x+x^2+x^3+…x^k)^4

Lo comprobamos para el 44:

Escribimos (1+x+x^2+x^3)^4 en la página de WolframAlpha:

WolframAlpha

(1+x+x^2+x^3)^4

Leemos su desarrollo más abajo:

Expanded form:

$$x^{12}+4x^{11}+10x^{10}+20x^{9}+31x^{8}+40x^{7}+44x^{6}+40x^{5}+31x^{4}+20x^{3}+10x^{2}+4x+1$$

Comprobamos que el mayor coeficiente es 44.

A continuación insertamos un recorte de pantalla de wxMaxima en el que se comprueba la propiedad para exponente 5:

```
(%i2) ratsimp(1+x+x^2+x^3+x^4)^4;
```

(%o2) $\left(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1\right)^{4}$

```
(%i3) ratsimp(%);
```

(%o3) $x^{16}+4x^{15}+10x^{14}+20x^{13}+35x^{12}+52x^{11}+68x^{10}+80x^{9}+85x^{8}+80x^{7}$

También aquí el mayor coeficiente es 85, el siguiente elemento de la lista.

Propiedad combinatoria

El número piramidal cuadrangular centrado de orden n equivale al número de conjuntos ordenados (w,x,y,z) con todos sus términos en {1,...,n} tales que w+x=y+z. (Clark Kimberling, Jun 02 2012)

No es difícil razonarlo. Las posibles sumas w+x son 2, 3,…,2n. Sus posibilidades van creciendo al principio y disminuyendo al final. Así:

Suma 2 o suma 2n: w, x tiene 1 posibilidad , (1+1 o n+n); y+z otra: luego sale 1=1^2

Suma 3 o suma 2n-1: w, x tiene 2 posibilidades, (1+2, 2+1 o n-1+n. n+n-1); y+z otras 2, luego al combinar ambas posibilidades quedan 4= 2^2

Suma 4 o suma 2n-2: con un razonamiento similar llegaríamos a 3^2

Así seguiríamos, con lo que volvemos a la propiedad básica, y es que el total sería igual a

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Como no hay prisa por resolver las cuestiones, comprobamos esta propiedad con nuestra hoja Cartesius:

Con Cartesius

Descargamos la hoja desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Comprobamos la propiedad para el caso 6. Para ello planteamos:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
xtotal=4	
xt=1..6	
es x1+x2=x3+x4	

Estamos pidiendo que se combinen cuatro elementos (corresponden a w, x, y, z de la propiedad), que deberán estar contenidos en el rango 1..6 y que la suma de los dos primeros x1+x2 coincida con la de los segundos x3+x4.

Desarrollamos el planteo con el botón Iniciar y, efectivamente, resultan 146 casos

Total
146

Aunque no nos cabe en este documento, podemos, con la función **SI** seleccionar los resultados cuyos dos primeros elementos sumen, por ejemplo, 5. En el recorte de la imagen asignamos un 1 a los casos en los que w+x=5

1	3	1	3	0
1	3	2	2	0
1	3	3	1	0
1	4	1	4	1
1	4	2	3	1
1	4	3	2	1
1	4	4	1	1
1	5	1	5	0
1	5	2	4	0

Después bastaría contar los unos y nos resultarían 16=4^2, tal como razonamos más arriba.

PIRAMIDALES PENTAGONALES CENTRADOS

Formación

Lo explicamos de forma esquemática, pues es un procedimiento que hemos desarrollado anteriormente. Insertamos enlaces para una mejor comprensión. Procederemos de la misma forma en los siguientes tipos.

Tomamos los números poligonales pentagonales centrados:

1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, 276, 331, 391, 456, 526, 601, 681, 766, 856, 951, 1051, 1156, 1266, 1381, 1501, 1626, 1756, 1891, 2031, 2176, 2326, 2481, 2641, 2806, 2976,… http://oeis.org/A005891

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html

Sobre ellos acumulamos sumas parciales

1, 1+6=7, 1+6+16=23, 1+6+16+31=54,…

Y nos queda

1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835, 1111, 1442, 1833, 2289, 2815, 3416, 4097, 4863, 5719, 6670, 7721, 8877, 10143,…http://oeis.org/A004068

Extraemos la expresión genera con nuestro interpolador:

1	2	3	4	5	6	7
1	7	23	54	105	181	287
	6	16	31	51	76	106
		10	15	20	25	30
			5	5	5	5
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	5	10	6	1
720	120	24	6	2	1	1

Copiamos los coeficientes de abajo para obtener el polinomio interpolador, y resulta:

P(x)=1+6(x-1)+5(x-1)(x-2)+5(x-1)(x-2)(x-3)/6

Simplificamos en la página de WolframAlpha:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6}x(5x^2+1)$$

O bien

Expanded form:

$$\frac{5x^3}{6}+\frac{x}{6}$$

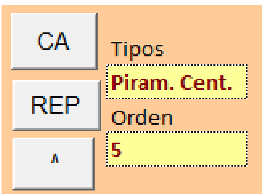
Es decir:

$$PIRC_5(n)=\frac{n(5n^2+1)}{6}$$

A partir de la fórmula de Deza también se obtiene:

$$PIRC_5(n) = \frac{5n^3 + (6-5)n}{6} = \frac{5n^3 + n}{6}$$

Puedes ir engendrando así los términos de la sucesión o usar nuestra calculadora Calcupol. Ahora cambiamos el método. Ábrela y concreta en su parte derecha que deseas usar piramidales centrados y marca 5 como orden:



Después escribe un 1 en pantalla y ve usando la tecla **PROX** paso a paso, y obtendrás la sucesión 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287,…Después, con la tecla **ANT** los puedes recorrer descendiendo hasta el 1. También puedes encontrar un término más alejado. Por ejemplo, con la secuencia de teclas **5 PIRC 30 =** obtendrás el término 30, que resulta ser 22505. Si ahora usas PROX y ANT puedes descubrir los términos más cercanos a él.

Propiedades de estos números

Si los piramidales cuadrados centrados los interpretamos como octaedros, estos pentagonales los podemos convertir en decaedros, es decir en poliedros de diez caras. Así lo interpreta la sucesión de OEIS A004068, como ves en su inicio:

A004068 Number of atoms in a decahedron with n shells.

0, 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835, 1111, 1442, 1833, 2289, 2815, 3416, 4097, 4863, 5719, 6670, 7721, 8877, 10143, 11524, 13025, 14651, 16407, 18298, 20329, 22505, 24831, 27312, 29953, 32759, 35735, 38886, 42217, 45733, 49439,…

Como es una cuestión geométrica y el sentido de la palabra decaedro es ambiguo, dejamos esta interpretación en este punto.

Otra interpretación de la fórmula

La expresión general del valor de estos números se puede escribir de otra forma:

$$PIRC_5(n) = \frac{5n^3+n}{6} = n^3 - \frac{n^3-n}{6}$$
$$= n^3 - \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Esta, a su vez equivale a

$$PIRC_5(n) = n^3 - \binom{n+1}{3}$$

Llegamos a algo interesante, y es que la fórmula se reduce a un cubo y a un número combinatorio.

Relación con la Combinatoria

La última expresión de la fórmula se puede interpretar como *una diferencia entre combinaciones con repetición de n elementos tomados de 3 en 3 y las combinaciones de n+1 elementos también de 3 en 3.*

Esta consideración nos lleva a una interpretación combinatoria similar a otra que descubrimos para los piramidales centrados de 4 lados.

a(n+1) equivale al número de tripletas (w,x,y) con términos comprendidos en {0,...,n} y tales que x+y>=w. Esta propiedad también es debida a Clark Kimberling.

Antes de razonar nada, lo desarrollaremos mediante nuestra herramienta Cartesius, que construye productos cartesianos condicionados

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Usaremos este planteo para el caso n=3:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=3
xt=0..3
es (x1<x2+x3)+(x1=x2+x3)

En la primera línea pedimos un producto de tres factores. Después, que pertenezcan al intervalo (0,..3) y, finalmente, que el primero sea menor o igual que la suma de los otros dos.

El resultado es igual a 54 casos, que es el cuarto término de la sucesión. Veamos en detalle los valores de x1:

El valor x1=0 aparece sin restricciones, ya que es menor o igual que cualquier otro elemento. En total 16 veces:

0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	0	3
0	1	0
0	1	1
0	1	2
0	1	3
0	2	0
0	2	1
0	2	2
0	2	3
0	3	0
0	3	1
0	3	2
0	3	3

El valor x1=1 ya tiene una restricción, que es (1, 0, 0), luego se presentará 16-1 veces:

1	0	1
1	0	2
1	0	3
1	1	0
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	0
1	2	1
1	2	2
1	2	3
1	3	0
1	3	1
1	3	2
1	3	3

De igual forma, x1=2 aparece 16-3=13 veces, donde 3 son las combinaciones que forman las excepciones: (2,0,0), (2,1,0) y (2,0,1)

2	0	2
2	0	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
2	2	0
2	2	1
2	2	2
2	2	3
2	3	0
2	3	1
2	3	2
2	3	3

Por último, el 3 sólo aparecerá en 16-6=10 casos

3	0	3
3	1	2
3	1	3
3	2	1
3	2	2
3	2	3
3	3	0
3	3	1
3	3	2
3	3	3

Se ve, y se puede generalizar fácilmente, que lo que se le va restando a cada 16 un número triangular:

16+16-1+16-3+16-6=64-1-3-6=54

Para n=4 obtendríamos:

5^3=125, luego la expresión que acabamos de obtener se convertiría en

25+25-1+25-3+25-6+25-10=125-(1+3+6+10)=105, como era de esperar. Los números triangulares representan las combinaciones de dos en dos que representan a las excepciones.

La suma de triangulares equivale al número piramidal triangular o tetraedro, tal como puedes comprobar en nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html

En ella vemos que equivale a un número combinatorio

$$TET(n) = \binom{n+2}{3}$$

Ajustando índices nos queda la expresión ya vista para los piramidales que estamos estudiando:

$$PIRC_5(n) = n^3 - \binom{n+1}{3}$$

Así que la propiedad es cierta.

Todo este estudio nos da otra interpretación geométrica para estos piramidales centrados de orden 5, y es que son la diferencia entre un número cúbico e lado n y un tetraedro de lado n-1.

Suma de valores de un polinomio

Traducimos una propuesta de Reinhard Zumkeller, Nov 11 2012:

Otra expresión para estos números es

$$PIRC_5(n) = \sum_{k=1}^{n} n^2 - nk + k^2$$

En efecto, si sumamos estos términos, obtenemos los piramidales centrados pentagonales:

1	1					
7	3	4				
23	7	7	9			
54	13	12	13	16		
105	21	19	19	21	25	
181	31	28	27	28	31	36

Para demostrarlo recordemos que la suma de n naturales es n(n+1)/2 y la de sus cuadrados n(n+1)(2n+1)/6. Por tanto, al sumar n^2+nk+k^2 obtendremos:

PIRC(5,n)=n(n+1)(2n+1)/6-n*n*(n+1)/2+n*n^2

Lo simplificamos en la página de WolframAlpha y nos queda comprobado:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6} n (5 n^2 + 1)$$

Volvemos a la expresión inicial.

OTROS NÚMEROS PIRAMIDALES CENTRADOS

Hexagonales

Con estos números, como veremos, el inicio del estudio seguirá un camino más simple:

Partimos de los poligonales hexagonales centrados:

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2611, 2791, 2977, 3169, 3367, 3571, 3781, 3997

(http://oeis.org/A003215 y

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html)

En esta entrada nuestra incluimos su expresión, que es una diferencia de cubos consecutivos

$HC(n)=(n+1)^3-n^3$

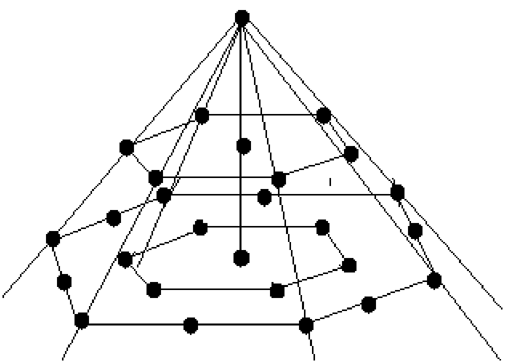
Por tanto, si para construir los piramidales debemos ir formando las sumas parciales, resultarán cubos. En efecto:

1, 1+7=8, 1+7+19=27, 1+7+19+37=64

Luego la sucesión será:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167,…

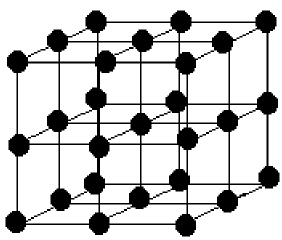
En el boceto siguiente está representado el número 27, que a su vez contiene el 7 y el 1, en sus tres capas, luego 27=1+1+6+1+6+12



Los términos de la sucesión claramente son cubos. No hay que usar interpolador para verlo. Si también acudimos a la fórmula de Deza lo comprobaremos, para n=6

$$PIRC_6(n) = \frac{6n^3 + (6-6)n}{6} = \frac{6n^3 + 0}{6} = n^3$$

Así que estos números, además de ser piramidales centrados, representarán una figura cúbica. Aclara mucho la equivalencia si vas tomando grupos de tres unidades en la imagen anterior y te los imaginas alineados en una trama cúbica:



Al coincidir estos números con los cubos, todas sus propiedades se desprenderán de ese carácter, lo que les quita interés.

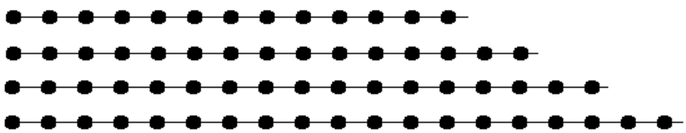
Suma de grupos de impares consecutivos

Añadimos esta propiedad porque se puede interpretar como un número trapezoidal. Cada número heptagonal centrado equivale a la suma de uno de estos grupos:

{1}, {3, 5},{7, 9, 11}, {13, 15, 17, 19},…

1=1
8=3+5
27=7+9+11
64=13+15+17+19

Las sumas se pueden representar mediante trapecios. Por ejemplo, la última formaría esta imagen:



Para comprobarlo algebraicamente, usaremos, como en casos anteriores, los números triangulares. Sabemos que la suma de impares equivale al cuadrado de su número, pero estos grupos se han ido eligiendo siguiendo los triangulares, por lo que su valor coincidirá con la diferencia de cuadrados de dos triangulares consecutivos. Así:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^3$$

Heptagonales

Partimos de los poligonales centrados de siete lados

1, 8, 22, 43, 71, 106, 148, 197,… http://oeis.org/A069099

Acumulamos:

1, 1+8=9, 9+22=31, 31+43=74,…y obtenemos:

1, 9, 31, 74, 145, 251, 399,…

Están publicados en http://oeis.org/A004126

Su expresión es fácil de obtener con la fórmula de Deza:

$$PIRC_7(n) = \frac{7n^3 + (6-7)n}{6} = \frac{7n^3 - n}{6}$$

Propiedades

Como suma de triangulares

Casi todos los números figurados presentan relaciones sencillas con los números triangulares. En este caso es:

El piramidal heptagonal centrado de orden n equivale a la suma de n triangulares comenzando por T(n)

Por ejemplo:

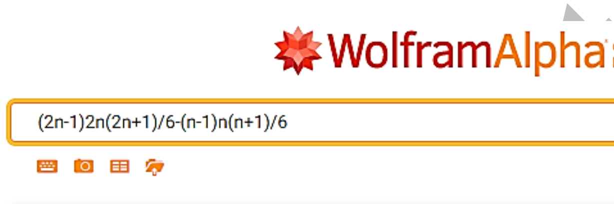
31=6+10+15

74=10+15+21+28

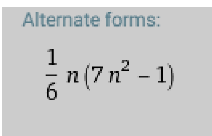
Para el caso n basta recordar que la suma de los primeros números triangulares equivale a n(n+1)(n+2)/6, luego la suma de sólo cuatro será la diferencia entre la suma de los 2n-1 primeros menos la suma de los n-1 primeros. Lo desarrollamos:

(2n-1)2n(2n+1)/6-(n-1)n(n+1)/6

Simplificando en Wolfran-Alpha:



Obtenemos:



Coincide con la expresión obtenida más arriba, luego la propiedad es verdadera.

Fórmula combinatoria

La propiedad anterior se puede expresar así:

$$PIRC_7(N) = \binom{2n-1}{3} - \binom{n-1}{3}$$

Octogonales

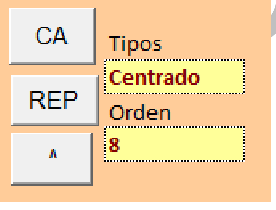
Los poligonales octogonales centrados, que no llegamos a estudiarlos en este blog, equivalen a los cuadrados de los números impares, como puedes ver en OEIS:

A016754 Odd squares: a(n) = (2n+1)^2. Also centered octagonal numbers.

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, 625, 729, 841, 961, 1089, 1225, 1369, 1521, 1681, 1849, 2025, 2209, 2401, 2601, 2809, 3025, 3249, 3481, 3721, 3969, 4225, 4489, 4761, 5041, 5329, 5625, 5929, 6241, 6561, 6889, 7225, 7569 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

También los puedes recorrer con nuestra calculadora Calcupol (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados)

Eliges el tipo *Centrado de orden 8*



Escribes un 1 en pantalla y vas pulsando la tecla PROX, con lo que aparecerán en pantalla los cuadrados de los impares.

Acumulamos esos cuadrados mediante sumas parciales

1+9=10
1+9+25=35
1+9+25+49=84

Obtendremos la sucesión

1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330, 1771, 2300, 2925, 3654, 4495, 5456, 6545, 7770, 9139, 10660, 12341,…(http://oeis.org/A000447)

Estos serán los piramidales octogonales centrados.

De la fórmula de Deza se deduce:

$$PIRC_8(n) = \frac{8n^3 + (6-8)n}{6} = \frac{8n^3 - 2n}{6} = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

También se puede escribir como

$$PIRC_8(n) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Se puede comprobar:

PIRC8(3)=3*5*7/3=35; PIRC8(4)=4*7*9/3=84

Coincidencia con tetraedros

Si aplicamos la fórmula obtenida a los números impares nos resultará:

$$PIRC_8(2n-1)=\frac{(2n-1)(4n-1)(4n-3)}{3}=\binom{4n-3}{3}$$

Los números combinatorios de orden 3 coinciden con los piramidales triangulares o tetraedros.

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html

Así que estos estos octogonales que estamos estudiando coinciden con los tetraedros en los lugares impares:

Piramidales octogonales centrados:

1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330, 1771, 2300, 2925, 3654, 4495, 5456, 6545, 7770,…

Piramidales triangulares:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, 1140, 1330, 1540, 1771, 2024, 2300, 2600, 2925,…

Cada dos de estos coinciden con los de arriba.

Este tema se ha alargado mucho. Es el momento de cortar y dejar el resto para investigar.