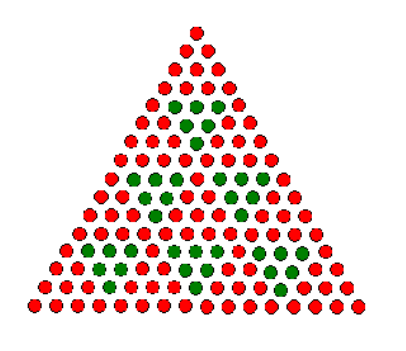
Números y formas



Edición 2023 Segunda

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Desde los pitagóricos hemos usado figuras poligonales para representar ciertos números, pero lo que comenzó siendo una nueva forma de percibirlos se convirtió pronto en un manantial de nuevas cuestiones. Puedes pensar en ellos sin tener en cuenta su origen geométrico. De hecho, muchas cuestiones actuales y futuras que se traten en nuestro blog se basarán más en sus definiciones aritméticas.

En las últimas ediciones hemos suprimido la parte de ***Números piramidales*** y no se han incluido los ***Poligonales*** en general. Se pueden estudiar en estas otras publicaciones:

http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf

http://www.hojamat.es/publicaciones/poligonales.pdf

Quedan, pues, en esta edición cuestiones curiosas, que no forman parte del estudio sistemático de los números figurados, que puede seguirse en los documentos enlazados, donde es más lógico que figuren.

TABLA DE CONTENIDO

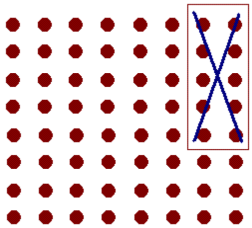
Cuadrados

La teoría de los números figurados es de las más antiguas de la Historia de las Matemáticas. En cualquier página web o manual de carácter general se puede consultar lo más importante.

Entre todos ellos, los cuadrados y triangulares son los más estudiados.

ELIMINAR BOLAS EN UN CUADRADO

Forma un cuadrado con bolas, situándolas en filas y columnas, las que quieras. Después elimina 10 bolas e



intenta reorganizar el resto hasta formar otro cuadrado más pequeño, y verás que resulta imposible, cualquiera que sea el lado del cuadrado que has formado.

Prueba entonces a quitar sólo 6 bolas, y observarás que tampoco puedes formar un cuadrado con las restantes. Con otros números sí se puede, dependiendo del lado del cuadrado.

¿Qué tienen de particular el 6 y el 10 para que ocurra esto?

Si 10 es la diferencia entre dos cuadrados n^2 y m^2, se tendrá que verificar que

$10=(m+n)(m-n)$

Pero m+n y m-n tienen la misma paridad. Esto obliga a que el número 10 también se descomponga en dos factores, ambos pares o ambos impares, pero eso es imposible, debido a que sólo se pueden considerar 10*1 y 5*2, que no tienen la misma paridad. Lo mismo ocurre con el 6.

En general, todos los números de la forma 2(2k+1) con k entero, no serán idóneos para ser diferencia de cuadrados. Expresado de otra forma, **son números múltiplos de 2 pero no de 4**.

Todos los números naturales podemos escribirlos como $N=2^m.a^{p1}.b^{p2}…z^{pn}$, siendo a,b…z primos y m eventualmente cero. El exponente m nos permite distinguir tres casos:

(a) m=1

El número N no se puede descomponer en dos factores ambos pares ni ambos impares. Es el caso de 2, 6, 10…que acabamos de estudiar

(b) m=0

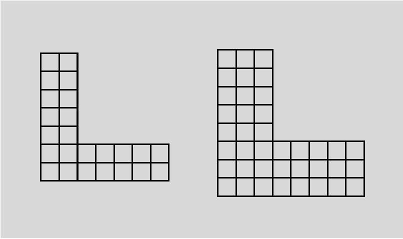
El número es impar, y presentará tantas soluciones como la mitad del su número de divisores. Por ejemplo $105=53^2-52^2=19^2-16^2=13^2-8^2=11^2-4^2$ que corresponden a los pares de divisores 105= 105*1=35*3=21*5=15*7. Si el número es primo admitirá una sola diferencia de cuadrados.

(c) m>1

2^m se puede descomponer en dos factores pares de tantas maneras como indique la parte entera de (N-1)/2. Así, si m=3 sólo se admite una descomposición, como $8 = 3^2-1^2$ y si m=7 $128= 33^2-31^2 = 33^2-31^2 = 18^2-14^2$. Combinando estos casos con los producidos por los factores impares obtendremos todas las soluciones.

Se ve, pues que el número de soluciones está relacionado de cierta forma con el de divisores, aunque pueden discrepar bastante.

Otra idea: Ser diferencia de cuadrados equivale a poder construir un gnomon con sus unidades. En las siguientes imágenes podemos ver uno con **a** par y otro con **a** impar.



Podemos traducir esta figura mediante una propiedad:

Los números que admiten una expresión como diferencia de cuadrados también se pueden representar como una suma de impares consecutivos.

Número de descomposiciones

Entre los números menores que 1000 hay uno que es igual a diez diferencias distintas de cuadrados *¿Cuál?*

Para encontrarlo acudiremos a la hoja de cálculo:

El número menor que 1000 que se puede representar como diez diferencias de cuadrados es el 960.

En esta imagen de nuestro Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) se muestra un planteo. No figuran las diez posibilidades porque se ralentizaría mucho el proceso o se producirían errores de desbordamiento:

Solución	Detalles
1	1 31
64	8 32
196	14 34
484	22 38
1156	34 46
1849	43 53
3136	56 64
5929	77 83
13924	118 122

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	50000

Con estas propiedades:

CUADRADO
ES CUADRADO(N+960)
EVALUAR RAIZ(N) RAIZ(N+960)

En la columna de Detalles figuran nueve soluciones.

En la siguiente tabla se han inluido todas las formas de descomponer 960 en dos factores. Después se han seleccionado los de la misma paridad, y mediante suma y diferencia se han obtenido A y B tales que $960 = A^2 - B^2$

Factores de 960		Paridad	A	B	Comprobación
2	480	0	241	239	960
3	320	1			
4	240	0	122	118	960
5	192	1			
6	160	0	83	77	960
8	120	0	64	56	960
10	96	0	53	43	960
12	80	0	46	34	960
15	64	1			
16	60	0	38	22	960
20	48	0	34	14	960
24	40	0	32	8	960
30	32	0	31	1	960
	Igual paridad	10			

Pero, ¿cómo encontramos el 960? Aparte de un análisis bastante pesado de los factores de los números menores que 1000 podemos usar este código en Basic:

Sub numerodiferencias

Dim i,j
dim a

for i=1 to 1000 (Números a probar)
a=0 (Contador de factores de la misma paridad)
for j=1 to sqr(i) (Se buscan los factores hasta la raíz cuadrada)
if esdivisible(i,j) then (Comprueba si es factor)
if paridad(j)=paridad(i/j) then a=a+1 (Igual paridad, se incrementa a)
end if
next j

```
msgbox(i)
msgbox(a)
next i
End Sub
```

Con una macro definida por este código obtenemos una tabla con el número de descomposiciones de igual paridad similar a la de la imagen

32	2
33	2
34	0
35	2
36	2
37	1
38	0
39	2
40	2
41	1
42	0

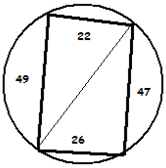
Así se ha encontrado que 960 admite 10 descomposiciones, y que los múltiplos de 2 que no lo son de 4, ninguna.

Los códigos que necesitarás también son:

```
public function esdivisible(a,b) as boolean
if int(a/b)=a/b then esdivisible=True else
esdivisible=False
end function

public function paridad(n)
paridad=n-int(n/2)*2
end function
```

El tema da todavía más de sí:



En el caso de varias soluciones podemos relacionarlas con los cuadriláteros con lados de medida entera inscriptibles en una circunferencia. Así, los lados 49, 47, 26 y 22 forman uno de esos cuadrados.

En efecto, si dos diferencias son iguales, como $49^2 - 47^2 = 26^2 - 22^2$, también se verificará que $49^2 + 22^2 = 26^2 + 47^2$, que se puede interpretar como dos triángulos rectángulos que comparten un mismo diámetro por lo que formarán un cuadrilátero inscriptible.

CURIOSIDADES BIEN FUNDAMENTADAS

Todos los que publicamos sobre números naturales incluimos en algún momento curiosidades aritméticas. A veces no nos damos cuenta de tres hechos que influyen en la aparición de las mismas restando un poco de su importancia matemática.

(A) Algunas son meras coincidencias sin valor matemático alguno, como $2^5 9^2 = 2592$

(B) Otras dependen del sistema de numeración empleado, como todas las que usan los conceptos de capicúa o de cifras invertidas. Por ejemplo $12^2 = 144$ y $21^2 = 441$

(C) En algunos casos no existe tal curiosidad numérica, sino que es el reflejo de una propiedad algebraica expresada de forma que se oculte su origen.

El otro día, releyendo “Los números mágicos del Dr. Matrix” de Martin Gardner, recordé la clave algebraica de esta serie de curiosidades:

$3^2+4^2 = 5^2$
$10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$
$21^2+22^2+23^2+24^2 = 25^2+26^2+27^2$

Según el autor, basta tomar como primer sumando el cuadrado de n(2n+1), siendo n el número de términos del segundo miembro. Por tanto, la siguiente igualdad comenzará con el cuadrado de 4(2*4+1) = 36: $36^2+\ldots+40^2 = \ldots$

¿Sabrías demostrarlo algebraicamente sin trabajar demasiado? Busca algún atajo, si no, mejor lo dejas, que directamente puede resultar muy largo. Eso sí, practicarás el Álgebra hasta hartarte de ella. Quizás debas esperar antes de seguir leyendo.

¿Cómo demostrar esta propiedad?

$3^2+4^2 = 5^2$
$10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$
$21^2+22^2+23^2+24^2 = 25^2+26^2+27^2$

Es bueno que distingamos entre comprobar y demostrar.

(1) En el siguiente documento del Club Mensa

http://www.mensa.es/carrollia/c63.pdf

puedes estudiar una demostración que requiere mucho cálculo algebraico, pero que al final llega, por demostración, a que el primer cuadrado debe ser el del número n(2n+1).

(2) Si recuerdas que la suma de los n primeros números cuadrados es igual n(n+1)(2n+1)/6, puedes sustituir cada miembro de la igualdad como una diferencia entre este tipo de sumas. Luego, hay que desarrollar paréntesis y cuadrados hasta llegar a una misma expresión algebraica en ambos. Tomamos como primer cuadrado el de n(2n+1), es decir, $2n^2+2n$

La calculadora online Wiris nos puede ayudar.

simplificar (2n^2+2n)·(2n^2+2n+1)·(4n^2+4n+1) $\Rightarrow$ $16\cdot n^6+48\cdot n^5+60\cdot n^4+40\cdot n^3+14\cdot n^2+2\cdot n$

simplificar (2n^2+n−1)·(2n^2+n)·(4n^2+2n−1) $\Rightarrow$ $16\cdot n^6+24\cdot n^5-10\cdot n^3-n^2+n$

simplificar $16\cdot n^6+48\cdot n^5+60\cdot n^4+40\cdot n^3+14\cdot n^2+2\cdot n-(16\cdot n^6+24\cdot n^5-10\cdot n^3-n^2+n)$ $\Rightarrow$ $24\cdot n^5+60\cdot n^4+50\cdot n^3+15\cdot n^2+n$

simplificar (2n^2+3n)·(2n^2+3n+1)·(4n^2+6n+1) $\Rightarrow$ $16\cdot n^6+72\cdot n^5+120\cdot n^4+90\cdot n^3+29\cdot n^2+3\cdot n$

simplificar $(16\cdot n^6+72\cdot n^5+120\cdot n^4+90\cdot n^3+29\cdot n^2+3\cdot n)-(16\cdot n^6+48\cdot n^5+60\cdot n^4+40\cdot n^3+14\cdot n^2+2\cdot n)$ $\Rightarrow$ $24\cdot n^5+60\cdot n^4+50\cdot n^3+15\cdot n^2+n$

Observa la igualdad de resultados:

$24n^5+60n^4+50n^3+15n^2+n$.

(3) Lo anterior no es una demostración, sino una comprobación de que el inicio en n(2n+1) es correcto. Para demostrarlo podemos seguir basándonos en

S= n(n+1)(2n+1)/6.

Si usamos como variable N el número anterior a una suma de este tipo y llamamos K al número de sumandos, se puede demostrar que

$(N+1)^2+(N+2)^2+\ldots+(N+K)^2=$
$2K^3+(6N+3)K^2+(6N^2+6N+1)K.$

Si aplicamos esta fórmula por una parte a N y K (primer miembro) y por otra a N+K y K-1 (segundo miembro), al igualarlas, y simplificar mucho (¡mucho!), llegamos a una ecuación de segundo grado de soluciones enteras, que nos exige que N=K(2K-3), que es equivalente al de n(2n+1) con un cambio de variables.

Todo lo propuesto es muy costoso de desarrollar, pero te queda la satisfacción de no tener que creértelo sólo porque esté escrito en un blog.

SUMAS DE LOS PRIMEROS CUADRADOS

Estudiando un tema determinado me he encontrado con esta relación que no conocía:

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+23^2+24^2 = 70^2$

La presento aquí por su elegancia y por mi sospecha de que no existen casos similares. He buscado hasta 50000 y no he encontrado otro cuadrado que sea suma de los K primeros cuadrados.

¿Ocurrirá algo parecido con los números triangulares?

$1+3+6+10+15\ldots+N(N+1)/2 = K(K+1)/2$

La respuesta es afirmativa

Hemos descubierto cuatro casos entre 1 y 100000, sin contar el trivial 1=1, en los que la suma de los primeros triangulares produce otro triangular.

El primero es 1+3+6 = 10

¿Cuáles son los otros tres?

Ya puestos a calcular, nos hemos planteado si sumando los primeros números triangulares podremos obtener un cuadrado, o, a la inversa, si sumando los primeros cuadrados la suma será un número triangular. (Ver Soluciones)

CUADRADOS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

No es difícil encontrar ternas de cuadrados perfectos que estén en progresión aritmética, tales como 1, 25 y 49, o 4, 100 y 196. ¿Cómo podríamos encontrar más ternas con una hoja de cálculo? Se podría organizar una tabla de doble entrada con los cuadrados perfectos, y después someter a su media aritmética a una condición ¿Cuál?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			1	2	3	4	5	6	7	8
3			1	4	9	16	25	36	49	64
4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
5	2	4	0	1	0	0	0	0	0	0
6	3	9	0	0	1	0	0	0	0	0
7	4	16	0	0	0	1	0	0	0	0
8	5	25	0	0	0	0	1	0	0	0
9	6	36	0	0	0	0	0	1	0	0
10	7	49	1	0	0	0	0	0	1	0
11	8	64	0	0	0	0	0	0	0	1
12	9	81	0	0	0	0	0	0	0	0
13	10	100	0	0	0	0	0	0	0	0
14	11	121	0	0	0	0	0	0	0	0
15	12	144	0	0	0	0	0	0	0	0
16	13	169	0	0	0	0	0	0	0	0
17	14	196	0	1	0	0	0	0	0	0
18	15	225	0	0	0	0	0	0	0	0
19	16	256	0	0	0	0	0	0	0	0
20	17	289	0	0	0	0	0	0	1	0
21	18	324	0	0	0	0	0	0	0	0
22	19	361	0	0	0	0	0	0	0	0
23	20	400	0	0	0	0	0	0	0	0
24	21	441	0	0	1	0	0	0	0	0
25	22	484	0	0	0	0	0	0	0	0
26	23	529	0	0	0	0	0	0	1	0

En la imagen puedes ver el resultado de una búsqueda similar, en la que se han marcado con un 1 los cuadrados perfectos pertenecientes a una terna como la propuesta. Si te animas a construir un buscador semejante podrás encontrar muchas más ternas. Ponte a prueba: *¿Con qué otros dos cuadrados forma progresión aritmética el número 10404, cuadrado de 102?*

Para concretar las ternas pedidas hemos recurrido a una exploración sistemática. Es una forma válida de trabajar en Matemáticas (así se encuentran los números primos), pero que alguien puede pensar que es algo perezosa. A continuación aportamos un análisis algo más profundo.

Enfoque algebraico

Llamemos n a la raíz cuadrada del término central, que sería n^2.

El tercer cuadrado tendrá la forma $(n+h)^2$ y el primer cuadrado $(n-k)^2$ con $k>h$ *¿por qué?*

Las diferencias entre ellos serán iguales, luego

$(n+h)^2 - n^2 = n^2 - (n-k)^2$

Simplificando: $2nh + h^2 = 2nk - k^2$

Despejando n: $n = (h^2 + k^2) / (2(k-h))$

Como $k>h$, llamamos $m=k-h$, y entonces queda:

$n = (h^2 + (h+m)^2) / (2m) = (2 h^2 + 2mh + m^2) / (2m)$

Esto obliga a que m sea par, y la podemos sustituir por 2p

$\mathbf{n} = (2 h^2 + 4ph + 4p^2) / (4p) = \mathbf{h^2/(2p) + h + p}$ (1)

Esto nos da un procedimiento de generación de ternas de cuadrados:

Elegimos cualquier entero p y buscamos un número par h cuyo cuadrado sea divisible entre p y cuyo cociente sea mayor que el mismo p (para que n-k sea positivo), y mediante la fórmula (1) calculamos n. Seguidamente encontramos los valores de n+h y n-k = n-h-2p

Ejemplo: p=5, h=10, n=100/10 + 10 + 5 = 25; (n+h)=35: (n-k)=25-10-5*2=5.

Por tanto, los cuadrados en progresión aritmética buscados son: 25, 625 y 1225.

Notas

- Si tres cuadrados están en progresión aritmética, sus diferencias mutuas son siempre múltiplos de 24. Intenta demostrarlo, que es un reto muy interesante. Si no lo logras, en las Soluciones tienes una demostración basada en los restos cuadráticos.

- No existen cuatro cuadrados en progresión aritmética, ni en mayor número.

- Tampoco existen tres cubos en progresión aritmética.

- Leonard Dickson en su libro "History of the Theory of Numbers" (1919), propone estas fórmulas:

$x = 2\ v^2/u – u$
$y = 2\ v^2/u + u + 2\ v$
$z = 2\ v^2/u + u + 4\ v$
donde u divide a $2\ v^2$ con un cociente mayor que u.

Este método coincide con el que se propone en este libro. Por ejemplo, para h=12 y p=6 las soluciones son n=30, n+h=42, n-k=6, y con la propuesta de Dickson se logra la misma solución con $2v^2=72$ y u=6:
x=72/6-6=6; y=72/6+6+12=30; z=72/6+6+24=42.

- No es difícil crear un código de búsqueda, si dispones de la función ESCUAD, para saber si un número es cuadrado:

Se supone que se buscan soluciones hasta un número N

```
For i = 2 To N
a = i * i
For k = 1 To a / 2
If escuad(a - k) And escuad(a - 2 * k) Then
Msgbox(a): Msgbox(a-k): Msgbox(a-2*k)
End If
Next k
Next i
```

En el lenguaje PARI se puede usar este código:

```
isinteger(n)=(n==truncate(n))
isquare(n)= { local(f,m,p=0); if(n==1,p=1,f=factor(n);
m=gcd(f[, 2]); if(isinteger(m/2),p=1));return(p) }
{ for (n=2, 100, a=n*n;for(k=1,a/2,if (isquare(a-k) &&
isquare(a-2*k), write("final.txt",a," ",a-k," ",a-2*k)))) }
```

LA MITAD, CUADRADO, EL TERCIO, CUBO

Encuentra los primeros números naturales N que admiten estas dos descomposiciones:

$N= 2n^2 = 3m^3$

Es necesario recorrer los posibles factores primos de m y de n y sus exponentes.

Una solución es N=41472, pero existe otra menor.

Si has aprendido a hacerlo, prueba con

$N= 2n^2 = 5m^5$

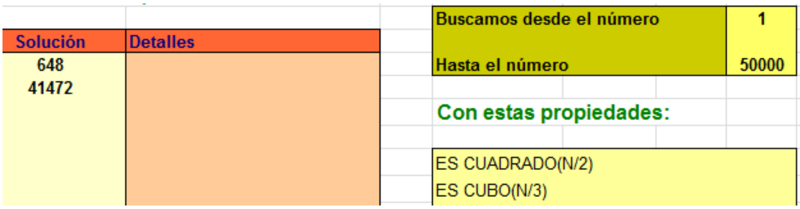
Una solución es un número “muy redondo”

Si tu ánimo no ha sufrido merma, aborda el que

$N= 3n^3 = 5m^5$

Quizás la primera solución tenga nueve cifras

Puedes comprobar tus resultados con el Buscador. Así se procedería en el primer caso propuesto:



UNA EXPLORACIÓN MATEMÁTICA

En la entrada número 120 del interesante blog de Claudio (http://simlementenumeros.blogspot.com) se hacía una propuesta que esencialmente consistía en buscar los números que son cuadrados perfectos y que su doble aumentado en una unidad también lo es, como $144=12^2$ y $144*2+1=289 = 17^2$. En un primer comentario, se proponían las soluciones 0^2, 2^2, 12^2, 70^2, 408^2 y 2378^2 con una ley de formación $a_{n+1} = 6a_n – a_{n-1}$

Una entrada posterior contenía un enlace a una página de sucesiones de números enteros muy popular.

Navegando un poco y siguiendo enlaces sucesivos al propuesto descubrí que las soluciones 0, 4, 144, 4900, 166464,… divididas entre 4 coincidían con los números enteros que son cuadrados y triangulares a la vez (se puede prescindir del 0): 1, 36, 1225, 41616,…

Recordé que estos números se encuentran mediante la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$, una de cuyas soluciones es $x=1$, $y=3$. De esta forma se aclaró bastante la cuestión, y por su posible interés, se desarrolla a continuación el proceso que seguí, mediante una serie de propuestas encadenadas complementarias a las de Claudio.

(1) Demuestra que si $2n^2 + 1 = m^2$, entonces $n^2/4$ es también cuadrado y triangular.

(2) Demuestra que los números x que son cuadrados y triangulares a la vez coinciden con los valores de x^2 que son soluciones de la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$

(3) Una de las soluciones de la ecuación citada es $x_1=1$, $y_1=3$. Según la teoría correspondiente a las ecuaciones de Pell, las demás soluciones de esta ecuación vienen dadas por la igualdad

$$\left(3+\sqrt{8}\right)^n = y_n + \sqrt{8}\,x_n$$

Usa esta propiedad para encontrar las soluciones de x, que serán 1, 6, 35, 204,…., que elevadas al cuadrado coincidirán con los números cuadrados y triangulares a la vez 1, 36, 1225, 41616,…que, a su vez, multiplicados por 4, resultarán ser las soluciones de $2n^2 + 1 = m^2$, 4, 144, 4900, 166464…

(4) Usa la fórmula del apartado anterior para demostrar esta fórmula doble de recurrencia:

$y_n=8x_{n-1}+3y_{n-1}$, $x_n=3x_{n-1}+y_{n-1}$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Su aplicación reiterada nos permitirá encontrar los valores (1,3), (6,17), (35,99)…

Convierte esas dos fórmulas de recurrencia en una sola para x_n, y te resultará

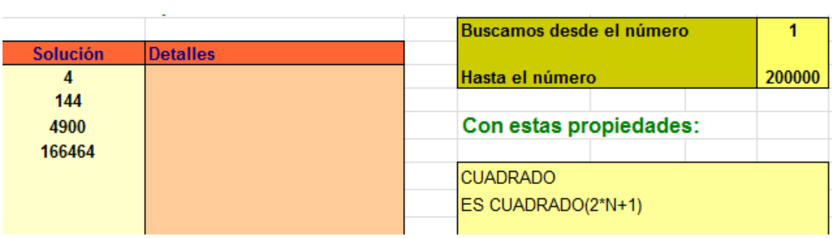
$x_n=6x_{n-1}-x_{n-2}$, que coincide con la propuesta en el blog para sus dobles 0, 2, 12, 72,…

(5) ¿Por qué el cociente entre las x parece tender a esta expresión?

$$3 + 2\sqrt{2}$$

Nos podemos basar en que $q_n = 6-1/q_{n-1}$, que nos lleva, tomando límites para n tendiendo a infinito, a la ecuación x = 6 -1/x, una de cuyas soluciones es que es la que vale al ser creciente la sucesión.

Si después de tanto análisis te apetece un descanso, observa cómo encontraría las soluciones el Buscador de Naturales:



Solución	Detalles
4	
144	
4900	
166464	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200000
Con estas propiedades:	
CUADRADO ES CUADRADO(2*N+1)	

O bien de esta otra forma:

Solución	Detalles
1	4
36	144
1225	4900
41616	166464

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	50000

Con estas propiedades:

CUADRADO
TRIANGULAR
EVALUAR 4*N

EL NÚMERO 30500

Mantener un blog de números con cierta periodicidad supone un gran esfuerzo en la búsqueda de temas y su posterior desarrollo. Por eso, suelo usar “disparadores de ideas”: páginas web, libros o revistas que tratan un tema matemático y que en sus desarrollos se incluyen fórmulas o propiedades que me sugieren (¡ajá!) un desarrollo sobre ellas.

Una de las páginas que visito con frecuencia es la popular The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, de dirección http://oeis.org/

La otra tarde escribí en ella el número 30500 (eso recordaba yo, pero no fue así) y descubrí que era suma de los cuadrados de cuatro números primos consecutivos. Así que me interesé por el tema, y como hacía tiempo que no le daba vueltas a una cuestión, lo elegí con ese fin y así lo presento:

(1) La serie de números que son suma de cuadrados de primos, salvo el primero, que contiene el cuadrado de 2, todos son pares, como era de esperar, pero ¿existe alguna terminación en 0, 2, 4, 6 u 8 que no puedan presentar nunca? Intenta justificarlo. Es una cuestión bastante sencilla.

(2) Más sencilla todavía: Salvo el primero, todos son múltiplos de 4 (es sencilla pero no trivial, podían ser pares no múltiplos de 4)

(3) Cuando volví a la página de secuencias enteras y probé 30500 me di cuenta de que estaba recordando mal. Ese número no presenta la propiedad deseada. Después de varios intentos encontré que el valor probado había sido otro terminado también en 500, pero con unos pocos miles menos. ¿Qué número es y qué cuadrados de números primos consecutivos lo forman? (Hay otro más pequeño que también termina en 500)

(4) Si dispusiéramos de la función ***primprox(N***) "próximo primo después de N" podríamos preparar un algoritmo que nos devolviera la serie de este tipo de números. Esta función PRIMPROX está publicada en el Anexo del libro "Números y hoja de cálculo I" de nuestra colección Hojamat.es

Bastaría iniciar cuatro variables a=2, b=3, c=5, d=7, los cuatro primeros primos, y después ir copiando una en otra de esta forma: a=b, b=c, c=d, d=primprox(d). Así se recorrerían todas las cuaternas de números primos consecutivos y bastaría elevarlos al cuadrado y sumar. Así se ha construido esta lista en hoja de cálculo:

Orden	Primer primo	Suma
1	2	87
2	3	204
3	5	364
4	7	628
5	11	940
6	13	1348
7	17	2020
8	19	2692
9	23	3700
10	29	4852
11	31	5860
12	37	7108
13	41	8548
14	43	10348
15	47	12220

(5) Las consideraciones anteriores nos permiten construir un algoritmo que nos determine, dado un número múltiplo de 4 si es suma de cuadrados de primos consecutivos o no. ¿Qué pasos tendría?

(6) Si repitiéramos el estudio con sumas de tres cuadrados en lugar de cuatro, no obtendríamos ningún resultado, salvo el que comienza con 5^2, termina en 5. ¿Por qué?

Si lo intentáramos con sumas de dos primos, ningún resultado termina en 6, y a partir del cuarto, tampoco en 4. ¿Cuál es la razón?

PIEZAS PARA CUADRADOS

En otra parte de esta publicaión hemos construido triángulos concatenando cifras. Vamos a intentarlo con cuadrados. Este tema está estudiado, y ya hay más casos publicados en OEIS. Los recorremos.

n//n

Es difícil que un número concatenado consigo mismo produzca un cuadrado. Los pocos casos que aparecen ya están publicados:

132231404961322314049 6,
20661157025206611570 25,
29752066116297520661 16,
40495867769404958677 69,
52892561984528925619 84,… http://oeis.org/A092118

La razón de que se descubran tan pocos es la siguiente: el número concatenado n//n es en realidad

n*(10^c+1), siendo **c** el número de cifras de **n**, por lo que **n<10^c**.

Por ejemplo, 7878=78*(10^2+1)=78*101. Si deseamos que n//n sea un cuadrado, 10^c+1 ha de contener algún cuadrado como factor, porque si es libre de cuadrados, es imposible que **n** aporte los factores que quedan para completar un cuadrado, puesto que es menor que 10^c.

Habrá que buscar números del tipo 10^k+1 que no sean libres de cuadrados.

Si factorizamos, por ejemplo, desde 11 hasta 10^50+1, descubrimos que sólo en cuatro casos contiene un cuadrado (copiamos la tabla parcialmente)

100000000001=11^2*23*4093*8779

1000000000000000000001=7^2*11*13*127*2689*4596
91*909091

1000000000000000000000000000000001=7*11^2*13*
23*4093*8779*599144041* 183411838171

1000000000000000000000000000000000000001=7*11
*13^2*157*859*6397*216451*1058313049*
388847808493.

Para completar un cuadrado como el que se pide, **n** deberá contener los factores primos que **no figuran al cuadrado** (la parte libre) y además, si acaso, otros factores adicionales elevados al cuadrado. Ya vimos en su día que si multiplicamos N por la parte libre de N conseguiremos el mínimo múltiplo cuadrado de N

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html).

Cumplido esto, deberá tener el número de cifras adecuado. Por ejemplo, en el primer caso

N=23*4093*8779*k^2 y si queremos que tenga 11 cifras, el valor mínimo de k es 4, con lo que nos da la primera solución: n=23*4093*8779*16=13223140496, que engendra el cuadrado **1322314049613223140496**, primer término de http://oeis.org/A092118

Si tomamos k=5 obtenemos el segundo término: n=20661157025, que engendra el segundo cuadrado **2066115702520661157025**

Para k=6 se engendra el tercer cuadrado: **2975206611629752066116** y para k=7, 8 o 9 se engendran los términos cuarto a sexto. A partir de este valor se sobrepasan las cifras.

Así que el caso 100000000001 engendra seis términos.

Pasamos al siguiente:

10000000000000000000001=7^2*11*13*127*2689*459691*909091

El valor adecuado de n será del tipo

n=11*13*127*2689*459691*909091*k^2

Para k=1 y k=2 no se llega al número de cifras mínimo. Para k=3 nos resulta el séptimo término:

183673469387755102041183673469387755102041.

No están publicados más términos. Para k=4, 5 y 6 nos resultan términos inéditos:

326530612244897959184326530612244897959184

510204081632653061225510204081632653061225

734693877551020408164734693877551020408164

No deseamos marear a nuestros lectores, por lo que no abordamos los siguientes casos. Sólo dejamos una muestra:

132231404958677685950413223140496132231404958677685950413223140496

2n//n

Se puede seguir el mismo razonamiento y descomponer en factores los números del tipo 2*10^c+1 que contienen cuadrados

200000000000000000001=3*7^2*83*1663*985694468327

20000000000000000000000000000000001=3*43^2*245169227*1470638299531951365929

Con el primero

32653061224489795921632653061224489796

734693877551020408236734693877551020 41

1306122448979591836865306122448979591 84

Con el segundo

21633315305570578691184424012980010816657652
78528934559221200649 00

26176311519740400216333153055705813088155759
8702001081665765278529

31151974040021633315305570578691215575987020
0108166576527852893456

36560302866414277988101676581936218280151433
2071389940508382909681

42401297998918334234721471065440821200648999
4591671173607355327204

48674959437533802055164954029205024337479718
7669010275824770146025

55381287182260681449432125473228827690643591
1303407247160627366144

62520281233098972417522985397512231260140616
5494862087614926987561

70091941590048674959437533802055235045970795
0243374797187669010276

78096268253109789075175770686857839048134126
5548945375878853434289

865332612222823147647376960519200432666306111411573823688480259600

Los primeros están publicados en

http://oeis.org/A115529

n//2n

No explicamos ya el procedimiento. Los candidatos son:

12=2^2*3

1000000000000000000000002=2*3*7^2*19961*17040030781111603

100000000000000000000000000000000000000000000000000000002=2*3*89^2*
353891*184629530872289*3220312754723112768886882952137673

Con el primero obtenemos el 36=6^2

Con el segundo:

8163265306122448979592163265306122448979591844

183673469387755102040823673469387755102040816 4

3265306122448979591836865306122448979591836736

Y con el tercero, verdaderos gigantes:

504986744097967428355005681100871102133568993813912384800100997348819593485671001136220174220426713798762782476960

Publicados en http://oeis.org/A115527

Concatenación con diferencias constantes

Casi todos los casos están estudiados. Aquí ya no disponemos del análisis de los factores de 2*10^c+1 o similares. Sólo podemos acudir a la búsqueda, porque al añadir un sumando al número todo el planteamiento anterior falla.

n//n+1

Los primeros ejemplos los buscaremos con hoja de cálculo (no mostraremos el código) y con PARI.

N	N//N+1	Raíz
183	183184	428
328	328329	573
528	528529	727
715	715716	846
6099	60996100	7810
13224	1322413225	36365
40495	4049540496	63636

Hemos añadido la raíz cuadrada de la concatenación. Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A030465 y llama a los primeros números de Sastry.

El código PARI adecuado es

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(issquare(a),print(a)))}

N+1//n

Los primeros ejemplos son

N	N//N+1	Raíz
81	8281	91
8241	82428241	9079
9801	98029801	9901

También publicado en http://oeis.org/A054214

Adapta tú el código PARI para encontrar más.

n//n+2

El número par 7874 es el más pequeño que cumple que concatenado con el siguiente par 7876 produce un cuadrado: 78747876=8874^2. Este caso ya está publicado en http://oeis.org/A115426.

n+2//n

Es el problema simétrico del anterior y también está estudiado en http://oeis.org/A115431

Aquí paramos, porque otras concatenaciones resultan menos atractivas. No obstante, con lo que ya has leído puedes emprender búsquedas por tu cuenta.

CARNAVAL DE CUADRADOS

Consideremos el conjunto de divisores de un número natural N que son cuadrados perfectos. Sabemos que el mayor de ellos es la **parte cuadrada** del número), a la que designaremos como PC(N).

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html)

Si descomponemos N en factores primos

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \dots {p_k}^{a_k}$$

para encontrar la parte cuadrada basta elevar a cada factor primo al mayor número par contenido en cada uno de los exponentes, es decir

$$PC(p^r) = p^{r-r\ MOD\ 2}$$

Así, por ejemplo, para encontrar la parte cuadrada de $26460=2^2*3^3*5*7^2$ bastará truncar cada exponente a un número par, con lo que quedaría PC(26460)= $2^2*3^2*7^2$=1764. A la raíz cuadrada de esa parte se le suele llamar **Raíz Interna** del número N

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html)

En este caso la raíz interna de 26460 sería 42=2*3*7.

Todo esto lo recordamos para poder estudiar mejor los divisores cuadrados de un número. Se pueden considerar las siguientes afirmaciones:

Los divisores cuadrados de N coinciden con los de su parte cuadrada.

Si k es divisor cuadrado de N, todos sus exponentes en (1) serán pares, pero ninguno sobrepasará al correspondiente en PC(N), luego será también divisor de esa parte cuadrada. Inversamente, todo divisor de PC(N) lo es también de N.

El número de divisores cuadrados de N coincide con el de los divisores de la raíz interna de N.

Esto es así porque si extraemos la raíz cuadrada a todos los divisores cuadrados de N, es claro que permanecerán los mismos factores primos pero con sus exponentes reducidos a la mitad, que es la misma operación sufrida por la raíz interna.

En el ejemplo elegido, si esa raíz interna es 42, poseerá ocho divisores, por ser igual a 2*3*7 (aplicando la fórmula del número de divisores resultaría (1+1)(1+1)(1+1)=8). Efectivamente, si buscamos todos los divisores cuadrados de 26460 nos resultan estos ocho: 1764, 441, 196, 49, 36, 9, 4 y 1, que son los cuadrados de los divisores de 42: 42, 21, 14, 7, 6, 3, 2 y 1

Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores cuadrados de N y los divisores de su raíz interna, de forma que cada uno de los primeros es el cuadrado de otro del segundo conjunto.

Por ejemplo, para N=1200, su parte cuadrada es 400, su raíz interna 20, y se da la correspondencia entre los divisores de 20 y los divisores cuadrados de 20.

400	20
100	10
25	5
16	4
4	2
1	1

Esto nos da, como hemos visto, un procedimiento para contar los divisores cuadrados de un número, pero también para sumarlos, si recordamos la fórmula de la función sigma_2, que suma los cuadrados de los divisores

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/03/la-familia-de-las-sigmas-2.html)

$$\sigma_2(N) = \prod \frac{{p_i}^{2(e_i+1)} - 1}{{p_i}^2 - 1}$$

Aplicamos esa fórmula a la raíz interna. Esto es importante, porque esa raíz determina el número de divisores cuadrados. En nuestro ejemplo lo haríamos así:

SDC(26460)=(2^4-1)/(2^2-1)* (3^4-1)/(3^2-1)* (7^4-1)/(7^2-1)=5*10*50=2500

Comprueba: 1764+441+196+49+36+9+4+1=2500

Si deseas comprobar este resultado con otros números, con este codigo PARI puedes sumar todos los divisores cuadrados:

print(sumdiv(26460,d,d*issquare(d)))

Sustituyes el ejemplo 26460 por otro número cada vez que lo desees.

Con el Basic de las hojas de cálculo también lo puedes calcular mediante esta función:

```
public function sumdivcuad(n)
dim i,p,a,s

p=1
s=0
for i=1 to sqr(n)
a=i*i
if n/a=n\a then s=s+a
next i
sumadivcuad=s
end function
```

Comprueba de varias formas que el número 84000 posee sólo seis divisores cuadrados cuya suma es 546. Usa también la fórmula basada en sigma_2 ((2^6-1)/(2^2-1)*(5^4-1)/(5^2-1)=21*26=546)

Como otras variantes de la función sigma, esta suma de divisores cuadrados es una función multiplicativa, por lo que basta definirla para p^r, siendo p un factor primo. Para ello, según (2) tomamos como exponente de su raíz interna (r – r MOD 2)/2, con lo que la suma de los divisores cuadrados será

$$SDC(p^r) = \frac{p^{2(\frac{r-r\,mod\,2}{2}+1)} - 1}{p^2 - 1}$$

Por ejemplo, la suma de divisores cuadrados de $2048=2^{11}$ será igual a (2^12-1)/(2^2-1)=4095/3=1365. Comprobamos: 1024+256+64+16+4+1 = 1365.

En el caso particular de que r sea igual a 2 o a 3 la suma de divisores cuadrados será p^2+1. Es muy fácil razonarlo y lo usaremos más adelante.

Otro caso particular se da cuando la raíz interna está libre de cuadrados, tipo RI(N)=p*q*r*s…, la suma buscada será $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)(1+s^2)$…Sería el caso, por ejemplo, del número 60500, cuya parte cuadrada es 12100 y la raíz interna 110=2*5*11, libre de cuadrados, por lo que la suma de divisores cuadrados de 60500 debería ser $(1+2^2)(1+5^2)(1+11^2)$=5*26*122=15860. En efecto, los divisores cuadrados de 60500 suman

12100+3025+484+121+100+25+4+1=1586

CURIOSIDADES DE LA SUMA DE DIVISORES CUADRADOS

Engendramos cuadrados

La siguiente sucesión presenta varias propiedades respecto a la suma de los divisores cuadrados que merece la pena destacar

1764, 60516, 82369, 529984, 2056356, 2798929, 3534400, 18181696, 38900169, 96020401, 97121025, 335988900, 455907904, 457318225, 617820736, 1334513961, 1599200100, 2176689025, 3279852900, 4464244225, 8586616896…

(publicada en https://oeis.org/A232554)

Todos ellos son cuadrados tales que la suma de sus divisores cuadrados, incluidos ellos mismos, también es un cuadrado. Sí, puedes volver a leerlo si no lo has captado. En la siguiente tabla puedes comprobar esta propiedad:

A[n]	Factores	Raiz	sigma 2	Raiz	Factores
1764	[2,2][3,2][7,2]	42	2500	50	[2,1][5,2]
60516	[2,2][3,2][41,2]	246	84100	290	[2,1][5,1][29,1]
82369	[7,2][41,2]	287	84100	290	[2,1][5,1][29,1]
529984	[2,6][7,2][13,2]	728	722500	850	[2,1][5,2][17,1]
2056356	[2,2][3,2][239,2]	1434	2856100	1690	[2,1][5,1][13,2]
2798929	[7,2][239,2]	1673	2856100	1690	[2,1][5,1][13,2]
3534400	[2,6][5,2][47,2]	1880	4884100	2210	[2,1][5,1][13,1][17,1]
18181696	[2,6][13,2][41,2]	4264	24304900	4930	[2,1][5,1][17,1][29,1]
38900169	[3,8][7,2][11,2]	6237	45024100	6710	[2,1][5,1][11,1][61,1]
96020401	[41,2][239,2]	9799	96079204	9802	[2,1][13,2][29,1]
97121025	[3,6][5,2][73,2]	9855	113635600	10660	[2,2][5,1][13,1][41,1]
335988900	[2,2][3,2][5,2][13,2][47,2]	18330	488410000	22100	[2,2][5,2][13,1][17,1]
455907904	[2,6][17,2][157,2]	21352	607622500	24650	[2,1][5,2][17,1][29,1]
457318225	[5,2][7,2][13,2][47,2]	21385	488410000	22100	[2,2][5,2][13,1][17,1]
617820736	[2,6][13,2][239,2]	24856	825412900	28730	[2,1][5,1][13,2][17,1]
1334513961	[3,8][11,2][41,2]	36531	1514610724	38918	[2,1][11,1][29,1][61,1]
1599200100	[2,2][3,2][5,2][31,2][43,2]	39990	2313610000	48100	[2,2][5,2][13,1][37,1]
2176689025	[5,2][7,2][31,2][43,2]	46655	2313610000	48100	[2,2][5,2][13,1][37,1]
3279852900	[2,2][3,2][5,2][23,2][83,2]	57270	4747210000	68900	[2,2][5,2][13,1][53,1]
4464244225	[5,2][7,2][23,2][83,2]	66815	4747210000	68900	[2,2][5,2][13,1][53,1]
8586616896	[2,6][3,8][11,2][13,2]	92664	13011964900	114070	[2,1][5,1][11,1][17,1][61,1]

En la primera columna figuran los elementos de la sucesión. Hemos prescindido del 1, que también cumpliría la misma propiedad. En la siguiente su descomposición en factores primos, que ya analizaremos. Como en el caso anterior sugeríamos sumar los divisores cuadrados mediante la función **sigma_2** aplicada a la raíz interna, hemos calculado dicha suma en las siguientes columnas, comprobando mediante su raíz cuadrada que se trata de cuadrados perfectos. Finamente también se han calculado los factores de esas raíces.

Se pueden generar con este código en lenguaje PARI:

```
{for(n=1,10^5,m=n*n;k=sumdiv(m,d,d*issquare(d));if
(issquare(k)&&k>>1,print(m)))}
```

Factorización

Podemos observar que ningún término de la sucesión es potencia de un solo primo.

Con dos factores primos distintos sólo se dan tres casos, que puedes buscar en la tabla, y los primos que intervienen son 7, 41 y 239, curiosamente pertenecientes a la sucesión de primos p para los que p^2+1 no está libre de cuadrados

(ver el documento de Rafael Parra http://hojamat.es/parra/NumerosLDC.pdf

y la sucesión https://oeis.org/A224718).

En el caso de los tres citados, 7^2+1=2*25^2, 41^2+1=2*29^2 y 239^2+1=2*13^4. Si ahora los multiplicamos dos a dos, obtendremos un factor 2*2=4 multiplicado por dos cuadrados, luego será cuadrado perfecto, como se pedía.

Otra curiosidad es que las sumas de cuadrados son todas pares y muchas de ellas múltiplos de 100. Sus raíces son pares hasta donde hemos buscado. Queda ahí abierta una cuestión para estudiarla con más ciencia que nosotros.

Sucesión derivada

Si multiplicamos los términos de esta sucesión por otro número **libre de cuadrados** resultará otra sucesión formada por números **no cuadrados** con suma de divisores cuadrados propios **que resulta ser cuadrada**:

3528, 5292, 8820, 10584, 12348, 17640, 19404, 22932, 24696, 26460, 29988, 33516, 37044, 38808, 40572, 45864, 51156, 52920, 54684, 58212, 59976, 61740, 65268, 67032, 68796, 72324, 74088, 75852, 81144, 82908, 89964, 93492, 97020…(publicada en https://oeis.org/A232555)

Podemos construir todos los múltiplos de ese tipo hasta una cota, por ejemplo un millón y después ordenarlos en sucesión. Así lo hemos hecho y casi todos los primeros son múltiplos de 1764.

En realidad esta sucesión es parte de otra más amplia en la que aparecen todos los casos, y no sólo estos múltiplos que hemos considerado. Son estos:

Números cuya suma de divisores cuadrados propios es otro cuadrado mayor que 1

900, 3528, 4900, 5292, 8820, 10404, 10584, 12348, 17640, 19404, 22932, 24696, 26460, 29988, 33516, 37044, 38808, 40572, 45864, 51156, 52920, 54684, 58212, 59976, 61740, 65268, 67032, 68796, 72324, 74088, 75852, 79524, 81144, 81796, 82908, 89964, 93492, 97020…(publicada en https://oeis.org/A232556)

En ellos la suma de divisores cuadrados propios es otro cuadrado. Por ejemplo, la suma en el caso de 5292 es 1764+441+196+49+36+9+4+1=2500=50^2,

que también es un cuadrado.

Aunque los hemos buscado con funciones de hoja de cálculo, se puede intentar también con PARI. Prueba si quieres este código:

```
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d)*(d<n));if(issquare(k)&&k>>1,print(n)))}
```

Todos los encontrados son múltiplos de 4 y al menos poseen tres factores primos distintos. De ellos, algunos son también cuadrados:

900, 4900, 10404, 79524, 81796, 417316, 532900, 846400, 1542564, 2464900, 3232804, 3334276, 3496900, 12432676, 43850884, 50836900, 51811204, 71470116, 107453956, 236975236, 253892356, 432889636, 544102276, 864948100, 1192597156, 1450543396, 1554094084, 2024820004, 2165413156…(publicada en https://oeis.org/A232557)

No son cuadrados el resto: 3528, 5292, 8820, 10584, 12348,…que resultan ser los múltiplos de la primera sucesión que ya tratamos.

Resumimos:

Sucesiones de cuadrados

(1) Pueden formar un cuadrado sumándoles todos sus divisores cuadrados propios. Nos resultaría la primera sucesión: 1764, 60516, 82369, 529984,…(A232554)

(2) Forman un cuadrado sólo la suma de divisores propios, sin sumarles el número dado. Tendríamos la sucesión: 900, 4900, 10404, 79524, 81796,…(A232557)

Sucesiones de no cuadrados

(3) Números cuyos divisores cuadrados suman otro cuadrado. Son 3528, 5292, 8820, 10584,…(A232555) Son múltiplos de elementos de la sucesión (1)

Sin condicionamiento

(4) La unión de la sucesión (2) con la (3) (A232556)

Formamos palindrómicos

Con la suma de divisores cuadrados podemos formar números palindrómicos. Es una simple curiosidad, pero está inédita, que sepamos. Hay dos formas, con divisores cuadrados propios o con todos:

Con divisores propios

Estos son los números en los que la suma de divisores cuadrados propios es un número palindrómico de al menos dos cifras (para eliminar casos triviales):

144, 324, 1089, 1936, 5929, 13225, 30752, 46128, 58564, 76880, 92256, 107632, 125316, 138384, 149769, 153760, 154449, 169136, 199888, 215264, 230640, 261392, 292144, 322896, 338272, 342225, 353648, 378225, 399776, 405769, 445904, 461280, 476656, 507408, 522784, 538160, 568912, 584288, 599664,…

(Los hemos publicado en https://oeis.org/A232892)Si expresamos el resultado en una tabla de dos columnas, vemos los resultados palindrómicos a la derecha:

144		66
324		131
1089		131
1936		626
5929		171
13225		555
30752		20202
46128		20202
58564		15251
76880		20202
92256		20202
107632		20202
125316		48784

Llama la atención la frecuencia con la que aparece el valor 20202, y prolongando la tabla veríamos muchos más. La razón de esto es que el primer caso, $30752=2^5*31^2$, tiene como divisores cuadrados 15376+3844+961+16+4+1=20202, que provienen de los factores 2^4*31^2 =15376 y entonces, si multiplicamos ese número por factores libres de cuadrados se volverá a dar el mismo caso. En efecto, según la tabla, los siguientes son: 46128=15376*3, 76880=15376*5, 92256=15376*6, 107632=15376*7,…

La pregunta es por qué no funciona este razonamiento en los primeros casos de la tabla. La respuesta es que esos números son cuadrados y si los multiplicamos por un libre de cuadrados, se convertirían ellos mismos en divisores cuadrados propios, y eso alteraría la suma.

Un código PARI para encontrarlos puede ser

```
reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d)*(d<n));if(p
alind(k),print(n)))}
```

Con todos los divisores cuadrados

Los primeros números con esta propiedad son

15376, 30752, 46128, 76880, 92256, 107632, 153760, 169136, 199888, 215264, 230640, 261392, 292144, 322896, 338272, 353648, 399776, 445904, 461280, 476656, 507408, 522784, 538160, 568912, 584288, 599664, 630416, 645792, 661168, 707296, 722672, 784176, 814928, 845680, 876432, 891808, 907184, 937936, 953312, 999440,…

(Los hemos publicado en https://oeis.org/A232893)

Todos producen la suma de cuadrados 20202, que ya vimos, y todos son múltiplos del primero 15376 con cociente libre de cuadrados. Esta situación llega hasta el número 2217121, que ya no es múltiplo de 15376 y la suma palindrómica que produce es 2217122, ya que sus únicos divisores cuadrados son él mismo y la unidad.

Código PARI:

```
reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d));if(palind(k),print(n)))}
```

Otras sumas

Podemos intentar lograr números de otros tipos, como triangulares u oblongos, pero los resultados son tan abundantes que pierden su interés. En el caso de los oblongos los primeros resultados son múltiplos de 144. Ahí tienes una exploración.

IGUALDAD DE SUMAS DE CUADRADOS CON UN ESCALÓN

Repasando algunas propiedades curiosas me encontré en hojamat.es con esta:

$365=10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$

La pregunta inmediata que me surgió fue la de si existían otros números con la misma propiedad o similar. Los encontré en OEIS (http://oeis.org/) pero no descubriré dónde por ahora, aunque los lectores experimentados sabrán hallarlos. Con esto quiero aclarar que lo que consigamos está ya descubierto, pero el objetivo es intentar la concurrencia de métodos y el uso de la hoja de cálculo.

Nos acercaremos al problema con el planteamiento de dos preguntas:

¿Existen más números en los que la suma de tres cuadrados consecutivos coincida con los dos siguientes?

¿Qué ocurrirá si aumentamos o disminuimos el número de cuadrados?

Es probable que hayas pensado en el $25=3^2+4^2=5^2$, luego parece que sí existen casos similares. Lo vemos.

Acercamiento con la hoja de cálculo

Si concretamos un número de inicio **n** y un número de cuadrados igual a **k+1** en el primer miembro y a **k** en el segundo, con estas sencillas líneas podemos descubrir si existen otros casos:

For i=1 to 10000 (por ejemplo)
‘calcula el primer miembro
a = 0
For l = 0 To k
a = a + (i + l) ^ 2
Next l
‘calcula el segundo miembro
b = 0
For l = k + 1 To 2 * k
b = b + (i + l) ^ 2
Next l

‘Los compara y si son iguales lo comunica
If a = b Then
Msgbox(n)
Msgbox(a)
End If
Next i

Hemos tomado como tope 10000, pero después habrá quizás que ampliar. Implementa esto como rutina en tu hoja de cálculo y descubrirás que para cada k existe una solución y sólo una. Recogemos en una tabla los primeros resultados:

k	n	a
1	3	25
2	10	365
3	21	2030
4	36	7230
5	55	19855
6	78	45955
7	105	94220

Ahora ya descubrimos que los resultados coinciden con los recogidos en http://oeis.org/A059255, pero no podemos dejarlo así, porque en la tabla aparecen números triangulares y múltiplos de 5. Algo habrá detrás. Intentamos descubrirlo.

Un poco de Álgebra

Si sospechamos que las soluciones son únicas para cada valor de **k**, es probable que exista una relación algebraica sencilla. En efecto, aunque los principios son algo farragosos, con paciencia algebraica llegaremos a la meta. No damos todos los detalles y te dejamos practicar:

Primera suma de cuadrados A

Suponemos que comienza en n y termina en n+k (k+1 sumandos), es decir:

$$A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots (n+k)^2$$

Segunda suma de cuadrados B

$$B = (n+k+1)^2 + (n+k+1+1)^2 + (n+k+1+2)^2 + \cdots (n+k+1+k-1)^2$$

Observa cómo lo hemos escrito, para que te aproveches de la fórmula para la suma de números naturales consecutivos.

Desarrolla cada suma separando los coeficientes de $\mathbf{n^2}$, de **n** y los independientes. Como esta tarea te puede llevar a la desesperación, usa las dos populares fórmulas:

$$1+2+3+\cdots k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Calcula A-B para igualarla a cero y ve encontrando los coeficientes:

De $\mathbf{n^2}$ te deberá resultar **a=1**. Es fácil verlo.

De **n**, si sabes usar la primera fórmula ofrecida, con algún retoque, te dará $\mathbf{b=-2k^2}$

El coeficiente independiente es un poco más complejo de encontrar correctamente. Puedes usar la suma de cuadrados de los primeros naturales. Deberá resultar **c=-2k³-k²**

Así que la ecuación para calcular **n** quedaría así:

$$n^2 - 2k^2n - 2k^3 - k^2 = 0$$

Su discriminante es el cuadrado de 2k(k+1), lo que nos garantiza una solución entera. Tomamos la positiva y, efectivamente **n=k(2k+1)**, que es el número triangular de orden 2k, como habíamos sospechado al principio.

Para cada valor de k, la igualdad de cuadrados pretendida ocurre para n=k(2k+1), el número triangular correspondiente a 2k, y es por tanto la solución única.

Hemos resuelto con rigor lo que sospechábamos tras el uso de la hoja de cálculo. Esto es imprescindible: las herramientas informáticas sólo proponen o dan pistas, pero no demuestran nada. A veces olvidamos esta limitación.

Expresión de la suma

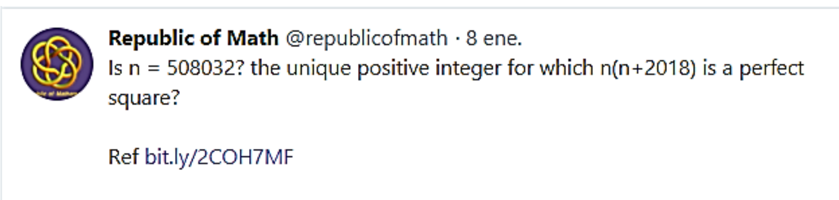
Ahora podemos calcular el valor de las dos sumas. Sustituimos k(2k+1) en una de ellas, y sacando factor común nos resulta $A(k)=k(k+1)(2k+1)(12k^2+12k+1)/6$. Por ejemplo, para k=3 resulta

3*4*7*(12*9+12*3+1)=2030.

El problema se ha reducido a una cuestión algebraica.

CUADRADOS DEL TIPO N(N+K)

En enero de 2018 se publicaron en Twitter varios resultados sobre una propuesta de Republic of Math @republicofmath, uno de los cuales insertamos a continuación:



Republic of Math @republicofmath · 8 ene.
Is n = 508032? the unique positive integer for which n(n+2018) is a perfect square?

Ref bit.ly/2COH7MF

En estos documentos acudimos con frecuencia a la técnica de "dar vueltas" a una cuestión de la que tengamos noticia. En este caso concreto estudiaremos de forma algebraica y algorítmica la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Por ejemplo, si k=16, existen dos números, 2 y 9, que producen un cuadrado mediante dicha expresión. En efecto:

$2(2+16)=2*18=36=6^2$; $9(9+16)=9*25=225=15^2$

Para encontrar soluciones correspondientes a un valor de **k** acudiremos a búsqueda en hoja de cálculo y PARI para después abordar un estudio teórico. Es una metodología nuestra muy frecuente: comenzar con una búsqueda sin apoyo teórico y después ir buscando regularidades o fundamentaciones algebraicas.

Estudio con hoja de cálculo

Es fácil programar una función que nos indique si un número **n** produce un cuadrado en la expresión **n(n+k)** para un **k** dado. La que insertamos a continuación nos servirá para valores de **k** pequeños. En otros casos los errores de truncamiento de los cálculos nos pueden llevar a conclusiones falsas. Por eso es interesante acudir a un lenguaje de más exactitud como PARI y dar una vuelta de Álgebra a esta cuestión.

La función más simple que podemos proponer es esta:

Function escuadprod(n, k) As Boolean
'Depende de dos variables y devuelve VERDADERO o FALSO
Dim a
a = n * (n + k) 'Construimos el producto pedido
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then escuadprod = True Else escuadprod = False
'Si **a** equivale al cuadrado de la parte entera de su raíz cuadrada, vale
End Function

Con ella y un bucle de búsqueda se pueden encontrar las soluciones para un valor de **k** dado. En la imagen figuran las correspondientes a k=21, que son 4, 7, 27 y 100.

21	5000	1
4		21
7		21
27		21
100		21

Las comprobamos:

$4(4+21)=4*25=100=10^2$
$7(7+21)=7*28=196=14^2$
$27(27+21)=27*48=1296=36^2$
$100(100+21)=100*121=12100=110^2$

¿Se podrán encontrar más? Lo veremos en el estudio algebraico.

Para mayor velocidad y exactitud trasladamos vuestra función a PARI (lo puedes realizar fácilmente con otro lenguaje). Este sería el listado para k=21.

```
escp(n,k)=issquare(n*(n+k))
k=21;for(i=1,10000,if(escp(i,k),print(i)))
```

Hemos acotado la búsqueda en 10000, pero para valores de k superiores deberíamos ampliar la búsqueda. Ya trataremos esto más adelante.

El resultado es:

```
%8 = (n,k)->issquare(n*(n+k))
4
7
27
100
?
```

Coinciden las soluciones 4, 7, 27 y 100.

Estudio algebraico

Llamemos m^2 al cuadrado que debe producir el producto n(n+k).

En ese caso se cumplirá: $n(n+k)=m^2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$n^2 + kn - m^2 = 0$$

$$n = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4m^2}}{2}$$

El radicando ha de ser un cuadrado perfecto, llamémosle p^2, lo que nos lleva a que

$p^2 - 4m^2 = k^2$

$(p+2m)(p-2m)=k^2$

Si encontramos dos valores enteros para p y m, sustituyendo en la resolución de la ecuación:

$$n = \frac{p-k}{2}$$

Bastará entonces descomponer k^2 en dos factores, sean A y B, e igualar:

Resultará **p+2m=A, p-2m=B, p=(A+B)/2, m=(A-B)/4**

Deberemos buscar entonces A y B de forma que **su diferencia sea múltiplo de 4** y distinto de cero, para evitar la solución cero.

Veamos el caso de 21. Su cuadrado 441 admite estas descomposiciones en productos:

441*1=147*3=63*7=49*9=21*21

Los cuatro primeros se diferencian en un múltiplo de 4, y nos queda:

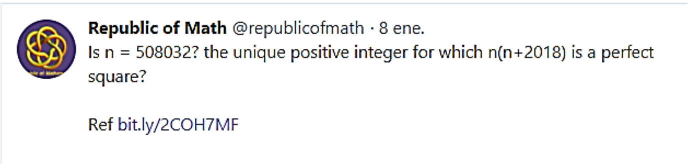
441*1: m=(441-1)/4=110; p=(441+1)/2=221; n=(p-k)/2=(221-21)/2=100
147*3: m=(147-3)/4=36; p=(147+3)/2=75; n=(75-21)/2=27
63*7: m=(63-7)/4=14; p=(63+7)/2=35; n=(35-21)/2=7
49*9: m=(49-9)/4=10; p=(49+9)/2=29; n=(29-21)/2=4

Obtenemos las soluciones sabidas 100, 27, 7 y 4. Hemos desechado la solución cero, que se obtendría de 21*21.

Hemos deducido que el valor de p equivale a p=(A+B)/2, siendo A y B factores de k^2, luego p<=k^2/2, y, por tanto, el valor buscado n=(p-k)/2, tendrá como amplia cota k^2/4:

$$n \leq \frac{k^2}{4}$$

Podíamos ajustar más, pero no es necesario. Por ejemplo, para el caso k=2018, PARI nos da la solución (por cierto, única) de n=508032, ya publicada en Twitter

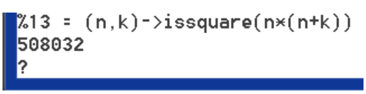


Esta solución cumple 508032<2018^2/4=1018081

Por tanto, en PARI deberíamos buscar hasta esa cantidad:

escp(n,k)=issquare(n*(n+k))
k=2018;for(i=1,1018081,if(escp(i,k),print(i)))

Obtendríamos la misma solución única:



¿Por qué es única?

Seguimos el proceso algebraico:

2018^2=4072324=4072324*1=2036162*2=1018081*4=
4036*1009=2018*2018

El único par válido es 2036162*2, luego p=(2036162+2)/2=1018082 y n=(1018082-2018)/2=508032

Es única la solución 508032

Terminamos con una consideración:

Si n convierte n(n+k) en un cuadrado, es decir, es solución para un k dado, el número *rn* será solución para *rk*.

Es una propiedad muy importante, que se justifica en estas simples igualdades:

Si n(n+k)=m^2, entonces rn(rn+rk)=$(rm)^2$

Número de soluciones para cuadrados del tipo n(n+k)

En el anterior apartado comenzamos a “dar vueltas” a la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Ya presentamos la función **escuadprod(n,k)** para averiguar si un número **n** forma cuadrado mediante **n(n+k)**. Después se tradujo a PARI y se desarrolló un procedimiento algebraico para encontrar las soluciones del problema planteado.

Comenzaremos por contar las soluciones que presenta cada valor de **k**, para pasar luego a algunos casos interesantes.

Función para contar soluciones

Mediante procedimientos similares a los desarrollados en los anteriores apartados, podemos crear la función ***numcuadprod(k)*** que cuente las soluciones para un valor concreto de **k**. El siguiente código para VBA de Excel resuelve la cuestión.

```
Function numcuadprod(k)
Dim a, i, r, c

c = 0 ‘Contador de soluciones
r = k ^ 2 / 4 ‘Cota de búsqueda
For i = 1 To r
a = i * (i + k)
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then c = c + 1 ‘Si se cumple, se incrementa el contador
Next i
numcuadprod = c
End Function
```

Si prefieres la exactitud del lenguaje PARI, puedes usar este código:

```
numcp(k)={local(c=0,
a=0,r=k^2/4,i=0);for(i=1,r,a=i*(i+k);if(issquare(a),c+=1
)); c}
```

print(numcp(960))

Lo hemos particularizado para k=960

Aquí tienes el resultado en Excel

Valor de k	960
Número soluciones	40

Y aquí en PARI

```
%1 = (k)->local(c=0,a=0,r=k^

40
?
```

Con la función ***escuadprod(n,k)*** que estudiamos anteriormente podemos buscar esas 40 soluciones. Son:

En Excel:

1	216	1000	4332
8	250	1156	5290
12	320	1352	5929
20	363	1470	6728
40	392	1849	9126
54	484	1944	11045
64	540	2420	13924
98	722	2738	18723
120	768	3136	28322
196	845	3375	57121

Y en PARI

```
%5 = (n,k)->issquare(n*(n+k))
1, 8, 12, 20, 40, 54, 64, 98, 120, 196, 216, 250, 320, 363, 392, 484, 540, 722,
768, 845, 1000, 1156, 1352, 1470, 1849, 1944, 2420, 2738, 3136, 3375, 4332, 5290
, 5929, 6728, 9126, 11045, 13924, 18723, 28322, 57121,
? 
```

Casos particulares

Estudiaremos a continuación algunos casos particulares en los que no es complicado contar soluciones**.**

Múltiplos de 3

Todos tienen al menos una solución. Si k=3m, una solución para n es m, ya que $m(m+3m)=4m^2=(2m)^2$

Un razonamiento similar valdría para múltiplos de 8, ya que $m(m+8m)=(3m)^2$

Por tanto los múltiplos de un número anterior a un cuadrado presentarán la misma situación.

Números que no presentan soluciones

Los números 1, 2 y 4 no admiten soluciones, porque sus cuadrados no se pueden descomponer en dos factores A y B cuya diferencia sea múltiplo de 4.

Números primos mayores que 2

Si k es primo, $A=k^2$ y B=1. Todos los cuadrados de primos mayores que 2 son de la forma 4m+1, ya que $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$, $(2k+3)^2=4(k^2+3k+2)+1$, y por tanto A-B será múltiplo de 4. En este caso tendremos que $p=(k^2+1)/2$ y $n=((k^2+1)/2-k)/2=(k^2-2k+1)/4=(k-1)^2/4$, o bien:

$$n = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Así lo comunica @republicofmath

> **Republic of Math** @republicofmath · 9 ene.
> Unique n such that n(n+p) is a perfect square, where p > 2 is prime, is n=[(p-1)/2]^2

Aquí añadimos que esta solución también es válida **para todos los impares**, aunque sólo tiene que ser única para los primos (recuérdese el 21).

En el caso de 21, n=(21-1)^2/4=400/4=100, pero existen otras.

Podemos listar las soluciones para los primeros primos y comprobar esa fórmula:

k	n
3	1
5	4
7	9
11	25
13	36
17	64
19	81
23	121
29	196

Potencias de 2 mayores que 4

Si **k=2^r**, con r>2, el número de soluciones será **r-2**

En efecto, k^2 en ese caso se podría descomponer de la forma A=2^a, B=2^b, con la condición de que a+b=2r a>b y que la diferencia A-B sea múltiplo de 4, para lo que b ha de ser mayor que 1, ya que

$A\text{-}B=2^a-2^b=(2^{a-b}-1)*2^b$

En esa diferencia el paréntesis es impar, luego sólo será múltiplo de 4 si lo es 2^b, es decir, con b>1

Esto reduce los valores de b a **2, 3, 4,…r-1**, ya que el valor **r** produciría la igualdad A=B. Contamos casos, y, efectivamente, son **r-2**

Lo vemos para el 16:

S k=16, r=4, 2r=8, y los valores posibles de b, 2 y 3

Si b=2, B=4, A=64, p=(A+B)/2=34, n=(34-16)/2=9, y se cumple $9(9+16)=225=15^2$

Si b=3, B=8, A=32, p=(A+B)/2=20, n=(20-16)/2=2, y tenemos $2(2+16)=36=6^2$

Con la función ***numcuadprod(n)*** podemos comprobar estos resultados:

r	k	numcuadprod	r-2
3	8	1	1
4	16	2	2
5	32	3	3
6	64	4	4
7	128	5	5
8	256	6	6
9	512	7	7

Se observa la coincidencia de valores en los resultados de la función ***numcuadprod*** y la expresión **r-2**

Semiprimos pares mayores que 4

Estos números presentan una sola solución, ya que si k=2h, k^2=4h^2, con h primo impar y la única forma de descomponer k en dos factores adecuados es A=2h^2, B=2, con lo que su diferencia será 2*(h^2-1). El paréntesis será múltiplo de 4, ya que h^2 es de la forma 4m+1. Así que las soluciones se formarán así: p=(2h^2+2)/2=h^2+1 y de ahí, n=(p-k)/2=(h^2+1-2h)/2=

$(h-1)^2/2=(k-2)^2/8$

En resumen

$$n=\frac{(k-2)^2}{8}$$

Lo puedes comprobar con la tabla de los primeros semiprimos pares:

k	n
6	2
10	8
14	18
22	50
26	72
34	128
38	162
46	242
58	392
62	450
74	648
82	800
86	882
94	1058

Estos razonamientos confirman lo visto con anterioridad, cuando se afirmaba que 2018 (semiprimo par) sólo presentaba una solución, 508032.

Números de la forma $k=2^m*p$, con $m>1$ y p primo mayor que 2

En este caso $\mathbf{k^2=2^{2m}*p^2}$

Al descomponer $\mathbf{k^2}$ en factores, el primo **p** puede pertenecer a ambos, o bien $\mathbf{p^2}$ pertenecerá a uno de ellos y al otro no.

Primer caso

Si el primo figura en ambos factores, sean $\mathbf{A=2^rp}$ y $\mathbf{B=2^sp}$, aparecerán tantos factores como indique 2^m, ya que p no añadirá ninguno más. Como vimos en el apartado de potencias de 2, se producirán **m-2** soluciones válidas.

Segundo caso

Si p^2 figura en un factor y en otro no, ambos factores han de ser múltiplos de 4, luego de todas las potencias de 2 que dividen a 2m, sean 2^1, 2^2, 2^3,… 2^{2m-2}, 2^{2m-1}, 2^{2m}, habrá que eliminar la primera, que no es múltiplo de 4, y las dos últimas, que impedirían que fuera múltiplo de 4 el otro factor, luego sólo nos quedan **2m-3** posibilidades.

Sumamos y resultan **3m-5** el número de soluciones que admite **$k=2^m*p$.**

Lo comprobamos con un ejemplo. Sea $k=80=2^4*5$. Según la fórmula, deben aparecer 2*4-5=7 soluciones. Lo desarrollamos:

$K^2=6400$

Descomponemos en productos válidos.

Primer caso

Debe entrar el 5 en ambos factores. Las posibilidades son: 320*20 y 160*40, en total 4-2 soluciones, que serían:

A=320, B=20, p=(320+20)/2=170, n=(170-80)/2=45. Compruebo: $45(45+80)=75^2$

A=160 B=40, p=(160+40)/2=100, n=(100-80)/2=10. Se cumple: $10(10+80)=900=30^2$

Segundo caso

El primo 5 sólo figura en un factor. Nos quedarían los productos válidos 1600*4, 800*8, 400*16, 200*32, 100*64, que darían lugar (omitimos los cálculos) a las soluciones 361, 162, 64, 18 y 1. Serían 5 soluciones, es decir 2*4-3, según la fórmula.

Resumimos ambos casos y resultan las siete soluciones (3*4-5) que podemos obtener con la función *escuadprod*:

Soluciones k=80	n(n+k)	Raíz cuadrada
1	81	9
10	900	30
18	1764	42
45	5625	75
64	9216	96
162	39204	198
361	159201	399

Números impares

En el caso de los impares el cálculo se simplifica. Sólo necesitamos conocer su descomposición factorial, en la que todos los números primos serán impares. Todos ellos serán del tipo 4k+1 o 4k+3, pero sus cuadrados, cuartas o sextas potencias serán todos del tipo 4k+1 y sus diferencias múltiplos de 4. Si en el emparejamiento un primo del tipo 4k+3 se toma una vez, el otro factor también lo contendrá, y se compensa el 3 al restar, resultando también un múltiplo de 4.

En este caso k^2 tendrá la forma $k^2=p^{2t}q^{2u}r^{2v}s^{2w}\ldots$, con p, q, r, s primos y t, u, v y w sus exponentes primitivos. Se sabe que entonces su número de divisores será (1+2t)(1+2u)(1+2v)…Este producto es la función TAU, la que cuenta divisores.

Todos esos factores se deberán emparejar, ya que sus diferencias siempre serán múltiplos de 4. Un par tendrá dos factores iguales, y se deberá eliminar, con lo que nos quedan **(TAU(k^2)-1)/2** productos posibles, y soluciones para k.

Ejemplo

Si k=165=3*5*11, según la función numcuadprod, se deberán esperar 13 soluciones, número que coincide con la fórmula que acabamos de obtener: =(TAU(165^2)-1)/2=(3^3-1)/2=26/2=13. En efecto, al sacar los divisores de 165^2 podemos obtener trece pares válidos. Reproducimos los cálculos habituales para sacar todas las soluciones para k=165:

A	B	p	n
27225	1	13613	6724
9075	3	4539	2187
5445	5	2725	1280
3025	9	1517	676
2475	11	1243	539
1815	15	915	375
1089	25	557	196
825	33	429	132
605	45	325	80
495	55	275	55
363	75	219	27
275	99	187	11
225	121	173	4
165	165	No válido	

El último par se desecha por tener los factores idénticos, y nos quedan 13 soluciones en la última columna. Coinciden con las obtenidas mediante búsqueda ordenada con la función ***escuadprod*** ya vista anteriormente:

4
11
27
55
80
132
196
375
539
676
1280
2187
6724

Un ejemplo con k conteniendo potencias:

Sea $k=3^3*5^2*7=4725$. Su cuadrado tendrá de exponentes 6, 4 y 2.

Calculamos TAU=(1+6)(1+4)(1+2)=7*5*3=105

El número de soluciones será (TAU-1)/2=(105-1)/2=52, que coincide con el que nos devuelve *numcuadprod*:

k	numcuadprod(k)
4725	52

Caso general

Ya hemos acumulado experiencia para abordar el caso general, que resume en cierto modo lo descubierto hasta ahora. Mediante búsqueda empírica y razonamiento posterior, creemos que podemos acudir a este procedimiento:

(1) Encontramos **la valuación** del número **k** respecto a 2, es decir, el exponente máximo del 2 contenido en el

número dado, llamémosle **m**. Esto quiere decir que el número k se descompone en parte par, 2^m, y parte impar. Entonces:

$k^2=2^{2m}*v$, siendo v la parte impar.

(2) Hallamos la función TAU de la parte impar v, y aplicamos la fórmula vista en párrafos anteriores **(TAU(k^2)-1)/2** , y al resultado le llamaremos **t**.

(3) En ese caso, el número de soluciones para nuestra condición de que sea cuadrado n(n+k) vendrá dada por

N=t*(2m-3)+m-2 si m>2. Si no, lo tratamos como impar.

El primer sumando proviene de combinar todas las soluciones de la parte impar (la TAU t) con todas las de 2^m (vimos que con un solo primo resultaban 2m-3) y el segundo de la partición que se desechó en la parte impar por tener dos factores iguales (k*k).

Esto hay que tomarlo como una explicación, no como demostración, que requeriría un conteo más sistemático de todos los casos. Lo vemos, por ejemplo, con $336=2^4*3*7$. En este caso m=4 y la parte impar es $441=3^2*7^2$, cuya TAU vale (1+2)(1+2)=9 y t=(9-1)/2=4. Por tanto, según la expresión que hemos presentado, n=4*(2*4-3)+4-2=4*5+2=22

En efecto, la función ***numcuadprod*** nos devuelve 22:

n	336
numcuadprod(n)	22

Según el razonamiento de más arriba, el segundo sumando, 4-2=2 proviene de tomar en la parte impar de 21^2 el par 21*21. Y así es en este ejemplo, ya que se corresponderían a los productos

1344*84=21*64*21*4=336*336
672*168=21*32*21*8=336*336

Los restantes 20 productos válidos se corresponderán con todas las combinaciones válidas de los productos de la parte par con los de la parte par. Por curiosidad, los copiamos aquí. Ninguno de ellos presenta el factor común 21 en ambos factores:

28224*4, 14112*8, 9408*12, 7056*16, 4704*24, 4032*28, 3528*32, 3136*36, 2352*48, 2016*56, 1764*64, 1568*72, 1344*84, 1176*96, 1008*112, 784*144, 672*168, 576*196, 504*224 y 448*252.

Las 22 soluciones para n respecto al valor de k=336 las podemos obtener, ordenadas de menor a mayor, con la función ***escuadprod***:

2
7
14
25
27
42
64
112
150
189
242
289
350
432
625
722
847
1014
1600
2187
3362
6889

Tomemos una al azar, como 847: 847*(847+336)=1002001=1001^2. Resulta un cuadrado, luego es una solución válida.

Hemos construido la función ***numcuadprod2*** recogiendo el algoritmo propuesto. Con ella se puede verificar la coincidencia de los dos métodos que podemos utilizar, el de la búsqueda simple (*numcuadprod)* y el basado en las consideraciones desarrolladas en este apartado (*numcuadprod2*)

En esta tabla de datos tomados al azar se observa la equivalencia:

Número	numcuadprod	numcuadprod2
4	0	0
32	3	3
6	1	1
24	4	4
32	3	3
77	4	4
220	4	4
480	31	31
500	3	3

Casos publicados

Analizamos ahora los casos que se publicaron en Twitter en enero de 2018:

Republic of Math @republicofmath · 7 ene.
There are (at least) 4 positive integers n for which n(n+2019) is a perfect square: n = 673, 112225, 338688, 1018081

Según nuestro procedimiento, como es impar, buscamos la función TAU de su cuadrado:

2019=3*673, luego TAU(2019^2)=(1+2)(1+2)=9, y el número de soluciones será (9-1)/2=4

Estas cuatro soluciones provendrán de los productos válidos del cuadrado de 2019:

A	4076361	1358787	452929	6057
B	1	3	9	673
p	2038181	679395	226469	3365
n	1018081	338688	112225	673

Hemos seguido lo sugerido en párrafos anteriores:

- Buscar productos cuya diferencia sea múltiplo de 4

– Llamar A y B a los factores

– Encontrar su promedio p

– Aplicar la fórmula n=(p-k)/2.

Podemos observar la coincidencia entre nuestro cálculo y el publicado.

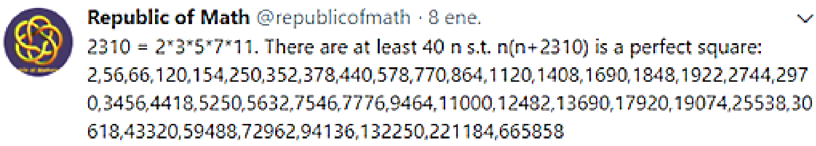
Republic of Math @republicofmath · 7 ene.
n(n+2020) is a perfect square for (at least) the following positive integers n: 1616, 9216, 50000, 254016

Traducir del inglés

Aquí $2020=2^2*5*101$. Es el caso en el que el exponente de 2 es 2, luego el número de casos será 4, pues la parte impar sólo presenta dos factores y el cuadrado de 2 no incrementa ese número.

Los productos válidos de 2020^2 son:

A	1020100	204020	40804	10100
B	4	20	100	404
p	510052	102020	20452	5252
n	254016	50000	9216	1616


Republic of Math @republicofmath · 8 ene.
2310 = 2*3*5*7*11. There are at least 40 n s.t. n(n+2310) is a perfect square:
2,56,66,120,154,250,352,378,440,578,770,864,1120,1408,1690,1848,1922,2744,2970,3456,4418,5250,5632,7546,7776,9464,11000,12482,13690,17920,19074,25538,30618,43320,59488,72962,94136,132250,221184,665858

Para 2310=2*3*5*7*11 bastará calcular el número de casos de la parte impar de su cuadrado. Es fácil ver que TAU(2310^2)=3*3*3*3=81, luego el número de casos será (81-1)/2=40, tal como se afirma en la publicación que analizamos.

Reproducir los cuarenta casos es muy pesado. Deberíamos factorizar el cuadrado de 2310, 5336100 y buscarle todos los divisores:

5336100 2668050 1778700 1334025 … 10 9 7 6 5 4 3 2 1

Después formaríamos pares con ellos y nos quedaríamos con los que presentan una diferencia múltiplo de 4. No lo haremos con todos, sólo con los primeros:

A	2668050	889350	533610	381150
B	2	6	10	14
p	1334026	444678	266810	190582
n	665858	221184	132250	94136

Si siguiéramos el procedimiento con todos los pares de factores coincidiríamos con lo publicado de forma total.

n	k
1	3
2	6
3	9
4	**5**
5	15
6	18
7	21
8	**10**
9	**7**
10	30
11	33
12	**15**
13	39
14	42
15	45
16	**9**
17	51
18	**14**
19	57
24	**30**

Problema inverso

Hasta ahora hemos buscado el valor de **n** que consigue que **n(n+k)** sea un cuadrado. Si planteamos el problema inverso, si dado un **n** ver si existe un **k** que cumpla la misma condición, con lo visto en párrafos anteriores tenemos la respuesta, pues vimos **que n(n+3n) es un cuadrado, luego existe solución para todo n**.

También vimos más arriba que 8n, 15n, 24n,…son todas soluciones para k, luego existen infinitas. La más pequeña suele ser 3n, pero con muchas excepciones, como puedes ver en la siguiente tabla, en la que las hemos marcado en rojo:

Esos casos se producen en los números que contienen cuadrados. Analizamos la situación:

(a) Si n es libre de cuadrados, será producto de varios primos, todos elevados a exponente 1. Por tanto, el cuadrado resultante de n(n+k) ha de ser múltiplo de los cuadrados de esos primos, luego el paréntesis también lo será, lo que obliga a que k sea múltiplo de n. De ahí que la solución mínima sea 3n.

(b) Si n contiene un cuadrado mayor que 1, será, por ejemplo, $n=r^2*s$, lo que nos lleva a la situación de que $r^2*s*(r^2*s+k)$ sea un cuadrado. Esto se consigue dando un valor a k que convierta el paréntesis en otro cuadrado. Para ello se puede convertir r^2 en $(r+1)^2$.

Sabemos que la diferencia entre esos dos cuadrados es 2r+1, luego el valor de k que nos conviene es (2r+1)*s, ya que $r^2*s*(r^2*s+(2r+1)*s)= r^2*s*(r+1)^2*s= r^2*s^2*(r+1)^2$, luego hemos conseguido el cuadrado. Lo vemos con algún ejemplo:

$N=20=2^2*5$. Hacemos k=(2*2+1)*5=25 y queda $20(20+25)=20*45=900=30^2$

$N=24=2^2*6$. Si k=(2*2+1)*6=30, tenemos $24(24+30)=1296=36^2$

No hemos analizado si existe en el caso de números que contienen cuadrados alguna solución menor que la presentada. Lo importante es que todos los valores de **n** admiten infinitas soluciones para **k**.

SUMAS DE CUADRADOS CON EL MISMO RESULTADO

De nuevo tomamos un tweet de @connumeros para profundizar en una cuestión. El día 1/3/2020 publiqué en Twitter lo siguiente:

1320 es suma de cuadrados pares consecutivos, y también de impares:

Pares: 1320=12^2+14^2+16^2+18^2+20^2=(20×21×22-10×11×12)/6

Impares: 1320=5^2+7^2+9^2+11^2+13^2+15^2+17^2+19^2=(19×20×21-3×4×5)/6

Esto me dio la idea de buscar coincidencias de varias sumas de cuadrados con un mismo resultado. El problema que nos aparecerá será la lentitud de los cálculos, pues nos encontraremos con bucles dobles y triples en los algoritmos de búsqueda. Comenzamos por los más sencillos:

Coincidencias en las sumas de cuadrados

Dado un número natural cualquiera, nos podemos plantear a cuantas sumas de cuadrados equivale. Nos podemos basar en la conocida fórmula de la suma de los primeros cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con esta fórmula, si deseamos encontrar una suma **S** de cuadrados que comience en **p** y termine en **q**, su expresión sería S(p,q)=(q(q+1)(2q+1)-(p-1)p(2p-1))/6

Esta expresión se puede implementar en un algoritmo que busque los números que presentan más de dos descomposiciones en suma de cuadrados consecutivos. Lo presentaremos en PARI:

```
for(n=1, 25000, m=0; i=1; while(i^2<=n, j=0; while(j<i, if(i*(i + 1)*(2*i + 1) - j*(j + 1)*(2*j + 1) == 6*n, m+=1); j+=1); i+=1);if(m>1,print1(n,", ")))
```

En él, para cada **n** recorremos los valores de **i** mientras **i^2>=n**. Añadimos otra variable **j**, que será el inicio de la posible suma de cuadrados. Usamos la fórmula de más arriba, y si el resultado es **n**, incrementamos el contador **m**. Si este pasa de 1, imprimimos.

Prueba este código en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html y obtendrás la siguiente sucesión, que ya está publicada:

A130052 Numbers that are the sum of one or more consecutive squares in more than one way.

25, 365, 841, 1405, 1730, 2030, 3281, 3655, 3740, 4510, 4705, 4760, 4900, 5244, 5434, 5915, 5929, 7230, 7574, 8415, 8464, 9385, 11055, 11236, 11900, 12325, 12524, 14905, 16745, 17484, 18879, 19005, 19044, 19855, 20449, 20510, 21790, 22806, 23681

Aunque la idea de este algoritmo parece acertada, es más rápido este otro, que se limita a sumar cuadrados sin ningún uso de fórmulas. Así que dejamos los dos para comprobar.

```
ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0, a);while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0&&a<=n,if(a==n, m+=1); j-=1; a=a+j^2); i-=1); return(m>1)}
```

for(p=1, 24000, if(ok(p), print1(p,", ")))

Este programa lo hemos añadido a la sucesión publicada.

Coincidencias en sumas de cuadrados impares

La fórmula adecuada para sumar números impares consecutivos es muy parecida a la general:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

Aunque es útil en otros estudios, parece, tal como se comentó más arriba, que la suma directa de cuadrados es más rápida en lenguaje PARI (y en el VBASIC de Excel) que la suma con esta fórmula. La razón no es que sea ineficiente, sino que requiere bucles de búsqueda más amplios. La usaremos para comprobar.

Para VBasic de Excel usaremos la misma función para cuadrados pares o impares. El listado siguiente sirve para cuadrados impares, y en una de las líneas añadimos como comentario cómo habría que sustituirla para que sirviera para cuadrados pares:

Function vsumacuad3$(n) 'Pares o impares
Dim i, j, m, a

Dim s$

s = ""

i = Int(Sqr(n)) ‘Comenzamos con la posibilidad de un solo cuadrado

If i Mod 2 = 0 Then i = i – 1 ‘Para adaptar al caso PAR, usar ***If i Mod 2 = 1 Then i = i – 1***

m = 0 ‘Número de soluciones

While i > 0 And m < 2

a = i ^ 2

j = i ‘La variable j recorre los posibles sumandos cuadrados

While j > 0 And a <= n

If a = n Then m = m + 1: s = s + "###" + Str$(i) + ", " + Str$(j) ‘Se ha encontrado una suma

j = j – 2 ‘Tanto **j** como **i** bajan de 2 en 2 para mantener la paridad

a = a + j ^ 2

Wend

i = i - 2

Wend

If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s ‘Se añade el número de soluciones

vsumacuad3 = s

End Function

Buscar soluciones con esta función es una tarea bastante lenta. Como se ha querido llegar a un rango de 2 millones en la búsqueda, ha sido un proceso de muchos minutos. Los primeros números que presentan dos soluciones con sumas de cuadrados impares son estos:

2890, 7735, 22715, 60655, 70225, 87571, 92225, 93314, 136115, 152354, 155519, 256330, 326434, 475861, 511225, 562475, 636360, 671195, 695419, 733485, 808335, 847760, 876490, 1105819, 1107414, 1225965, 1252216, 1293425, 1373701, 1540081, 1541165, 1627899, 1633069, 1832824, 1848405, 1979649

Por ejemplo, 2890 = 37^2 + 39^2 y también 2890 = 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 19^2 + 21^2 + 23^2 + 25^2

En el lenguaje PARI puedes probar con la fórmula insertada en párrafos anteriores, pero descubrirás pronto su lentitud de proceso. Este sería el código adecuado.

```
for(n=1, 100000, m=0; i=1; while(i^2<=n, j=1; while(j<i, if(i*(i + 1)*(i+2) - j*(j + 1)*(j+2) == 6*n, m+=1); j+=2); i+=2);if(m>1,print1(n,", ")))
```

Después de transcurrir algunos minutos, te devolverá las ocho primeras soluciones: 2890, 7735, 22715, 60655, 70225, 87571, 92225, 93314. Hay que imaginar lo que tardaría en llegar a 2 millones en la búsqueda.

Es más rápido este otro programa:

```
ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0, a); i=i-(i%2==0); m=0; while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0 && a<=n, if(a==n, m+=1); j-=2; a=a+j^2); i-=2); return(m>1)}
concat([0], select(ok, [1..22000]))
```

Suma de cuadrados pares

Las técnicas usadas para los números impares sirven también para los pares, ya que sus fórmulas son similares. En el listado para impares en Vbasic ya lo adveríamos:

If i Mod 2 = 0 Then i = i – 1 ‘Para adaptar al caso PAR, usar ***If i Mod 2 = 1 Then i = i – 1***

Así obtendríamos:

100, 1460, 3364, 5620, 6920, 8120, 13124, 14620, 14960, 18040, 18820, 19040, 19600, 20976, 21736, 23660, 23716, 28920, 30296, 33660, 33856, 37540, 44220, 44944, 47600, 49300, 50096, 59620, 66980, 69936, 75516, 76020, 76176, 79420, 81796, 82040, 87160, 91224, 94724, 99856

Por ejemplo, 1460=26^2+28^2 y también 1460=20^2+22^2+24^2

Versión en PARI

Prueba este código y obtendrás el mismo listado. Lo hemos organizado sólo hasta 22000 para que no sea tan lento.

```
ok(n) = {my(i=sqrtint(n), m=0,a,j); i=i-(i%2==1); m=0;
while(i>0&&m<2, a=i^2; j=i; while(j>0 && a<=n,
if(a==n, m+=1); j-=2; a=a+j^2); i-=2); return(m>1)}
concat([0], select(ok, [1..22000]))
```

Caso de pares e impares

Llegamos a nuestro objetivo principal, que es buscar aquellos números, como 1320, que admiten sumas de cuadrados pares y también de impares.

Para ello, refundiremos los algoritmos en uno: buscaremos pares e impares por separado y uniremos los resultados mediante una conjunción lógica. En Excel supone un listado bastante largo. Por ello, damos una idea en PARI:

Se idea una función (***issum***) que admita un segundo parámetro además de n (sea t), tal que si vale 0 sirva para los pares y si es 1, para los impares, o al contrario, porque es indiferente. Después, en la función Ok refundimos los dos resultados haciendo una conjunción con la conectiva Y (&& en PARI)

Quedaría así:

```
issum(n,t)={my(i,j,a,m=0);i=sqrtint(n);if(t==0,if(i%2==
0,i-=1),if(i%2==1,i-
=1));while(i>0&&m<1,a=i^2;j=i;while(j>0&&a<=n,if(a=
=n,m+=1);j-=2;a=a+j^2);i-=2);return(m)}
```

```
isok(m)=issum(m,0)&&issum(m,1)
for(p=1,20000,if(isok(p),print(p)))
```

Con estas dos funciones refundidas obtenemos el listado que pretendíamos. Entre los números encontrados, algunos presentarán soluciones dobles para pares o para impares, pero eso no nos importa por ahora. Lo dejamos por si alguien quiere investigar.

Chocará con la lentitud de los algoritmos.

Los primeros números con esta propiedad mixta son:

164, 596, 1320, 1736, 3156, 4040, 5204, 9416, 10660, 22096, 27080, 29260, 29584, 40020, 69940, 73140, 79540, 85284, 87636, 112916, 113480, 121996, 137960, 161480, 171940, 176420, 182104, 209924, 214396, 221780, 231760, 260120, 290280,…

Por ejemplo, 1736 equivale a estas dos sumas de cuadrados:

Pares: 1736=22^2+24^2+26^2

Impares:

1736=7^2+9^2+11^2+13^2+15^2+17^2+19^2+21^2

TRIANGULARES

JUGAMOS CON LOS TRIANGULARES

El estudio de cuestiones aritméticas deriva pronto a cálculos algebraicos, generalmente tediosos, y, en algunos casos, también a esquemas geométricos. Estos dos caminos, el algebraico y el visual se complementan perfectamente. Los números figurados, por su propia definición, son buenos elementos de unión entre ellos. Veamos un ejemplo con números triangulares:

"Llamamos T(n) al enésimo numero triangular. ¿Qué obtenemos si sumamos los cuadrados de un número triangular T(n) y de su siguiente T(n+1)?

Orientación algebraica

(1) Conjetura: Diseñamos una tabla de números triangulares en una hoja de cálculo y en una columna adjunta calculamos la suma de cuadrados pedida para todos los casos posibles. Fácilmente se descubre una ley de formación. No indicamos el resultado, tan sólo que es un número triangular. ¿Cuál?

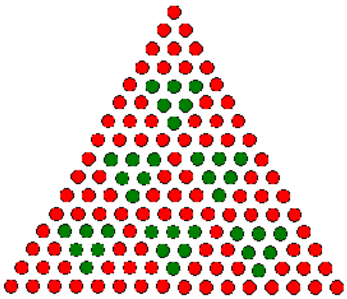
(2) Cálculo: Mediante cálculos algebraicos se puede verificar la conjetura. Basta desarrollar la expresión y

comprobar su resultado con el imaginado. En la imagen tienes un desarrollo efectuado con la calculadora Wiris. La conjetura está un poco escondida.

$$(x\cdot(x+1)/2)\verb|^|2+((x+1)\cdot(x+2)/2)\verb|^|2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^4+2\cdot x^3+\frac{7}{2}\cdot x^2+3\cdot x+1$$

$$((x+1)\cdot(2x+2)/2)\cdot((x+1)\cdot(2x+2)/2+1)/2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^4+2\cdot x^3+\frac{7}{2}\cdot x^2+3\cdot x+1$$

Orientación geométrica

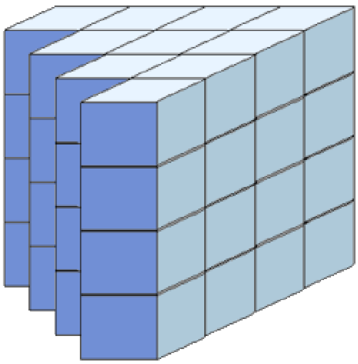


(3) Podemos atrevernos a pensar que si T(n) es un número triangular, su cuadrado se podrá representar por otro número triangular idéntico a él, pero sus elementos no serán puntos o bolitas, sino triángulos más pequeños. Sería "un triángulo de triángulos".

Si no acertaste la conjetura por medio del Álgebra, esta imagen te la sugerirá con más facilidad. Las bolitas rojas corresponden al cuadrado de T(4) y las verdes al de T(3). Si no sientes una pequeña emoción al analizarla es que no te gustan de verdad las Matemáticas.

TRIANGULARES ALOJADOS

Si tomamos 40 cubos, los podemos apilar en forma de prisma con base un triángulo isósceles y rectángulo, o en términos aritméticos, un número triangular mayor que 1. Excluimos la unidad porque en ese caso se pierde la forma triangular.



Este ejemplo es válido porque 40=4*10, y 10 es el cuarto número triangular.

No todos los números enteros se pueden representar así, pues han de ser múltiplos de un número triangular y eso no siempre ocurre. Por ejemplo, el 14, ya que entre sus divisores no figuran 3, 6 ó 10, que son los triangulares menores que él (recuerda que excluimos el 1). Esto ya nos divide el conjunto de los números naturales entre los que tienen divisores triangulares mayores que 1 y los que no.

Los segundos, que no admiten la representación propuesta, son 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 26, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38… (http://oeis.org/A112886) y les llamaremos **libres de triangulares**. Verás que están los primos, algunos semiprimos, potencias de primos y otros a los que volveremos más adelante.

Parte triangular y parte libre de triángulos

Sabemos que los primeros admiten un divisor triangular pero, como pueden ser varios, nos quedaremos con el mayor: llamaremos **parte triangular** (PTR) de un número **al mayor divisor triangular que posea**. Si has leído sobre estos temas, te recordará esto a la parte cuadrada y la parte libre de un número

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html)

El mayor divisor triangular puede ser 1 o el mismo número, como se comprueba en la lista de todos ellos (http://oeis.org/A115017):

N 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22…

PTR 1, 1, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 3, 10, 1, 6, 1, 1, 15, 1, 1, 6, 1, 10, 21, 1…

En ella están los libres de triangulares, que son los que se corresponden con un 1, como el 4 y el 5, los triangulares, cuya PTR son ellos mismos, como 6 y 10, y el resto, en el que se tiene una parte triangular y otra libre ambas mayores que la unidad. Es el caso de 12 o 40. La parte libre de estos últimos está recogida en http://oeis.org/A121289

Una idea: dos números con la misma parte libre y partes triangulares consecutivas formarán un prisma cuadrado. Imagina el prisma de la primera imagen y su complementario.

Búsqueda de la parte triangular

Un algoritmo simple es el de ir recorriendo los números naturales k, formar con ellos los triangulares mediante k(k+1)/2 e ir verificando si el número dado N es múltiplo de alguno. El mayor de todos ellos será la PTR(N).

Previamente es bueno calcular el orden del máximo triangular que es menor o igual que N, para acortar el ciclo de búsqueda. Se deja a los lectores la demostración de que ese orden k se calcula mediante

$$k = Int\left(\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right)$$

En hoja de cálculo sería =ENTERO((RAIZ(8*N+1)-1)/2)

Por ejemplo, para N=14534, k=169 y el mayor triangular menor que N, 169*170/2 = 14365. A nosotros nos interesaría el 169, porque entre 2 y 169 estaría el orden del triangular buscado. Todo esto se puede plasmar en una función:

Public Function partetriang(n)
Dim p, i, t, tr

p = Int((Sqr(n * 8 + 1) - 1) / 2) ‘Calcula el máximo orden
t = 1
For i = 2 To p
tr = i * (i + 1) / 2 ‘forma todos los triangulares menores o iguales a n
If n / tr = n \ tr Then t = tr ‘si es divisor, toma nota
Next i
partetriang = t ‘se queda con el mayor
End Function

El algoritmo busca los triangulares entre el menor 3 y el mayor k(k+1)/2 y se va quedando con los divisores. El último encontrado será PTR(A).

Si en lugar de recoger el valor de i*(i+1)/2 hubiéramos ido recogiendo i, nos hubiera resultado el orden de PTR.

Los tienes en http://oeis.org/A083312

Estudio elemental con el Buscador

Para números no muy grandes es fácil encontrar su parte triangular. Vemos en la imagen que nos bastan dos condiciones:

Solución	Detalles
1	
3	
6	
10	
15	
36	
45	
120	
300	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	14400

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
DIVISOR DE 14400

En el caso de 14400 su parte triangular es 300=24*25/2

¿Qué números dan alojamiento a un triangular?

Para que N tenga un divisor triangular mayor que 1 se ha de poder escribir de la forma N=k(k+1)*M/2 con k>1. Esto da lugar a varias interpretaciones:

(a) N tiene un divisor triangular mayor que 1, si y sólo si 2N posee dos divisores consecutivos mayores que 1.

Es condición necesaria, pues la expresión de 2N sería 2N=k(k+1)*M con k>1, con lo que k y k+1 son los divisores pedidos.

Por ejemplo, el triangular 21 divide a N=8883, con lo que el doble 17766=6*7*423 contiene a los consecutivos 6 y 7.

La condición es suficiente: Si 2N posee dos divisores consecutivos h y h+1 con h>1, estos serán primos entre sí, luego su MCM(h,h+1) será su producto h(h+1). Como 2N es múltiplo de h y h+1, lo será de su MCM, es decir de su producto. Por tanto 2N=h(h+1)P y será múltiplo del triangular h(h+1)/2, ya que uno de los dos h o h+1 es par.

Los números 2N de este tipo los tienes en http://oeis.org/A132895. Son el doble de un número libre de triángulos.

Sería interesante que pensaras en un algoritmo que descubriera esos números.

(c) Los semiprimos N=p*q son números libres de triángulos salvo que uno de sus factores sea 3, o bien q=2p±1

En efecto, si **N=p*q** con p y q primos, 2N=2pq ha de contener dos divisores consecutivos. Si p o q fueran iguales a 3, ya se cumpliría, porque 2N=2*3*k, pero entonces N sería múltiplo de 3.

Si ni p ni q son iguales a 3, lo serán a 2 o a un primo mayor que 3. Si por ejemplo p=2 entonces 2N=2*2*q y q se ve obligado a ser 3, con lo que pasamos al primer caso. Seria múltiplo de 3.

Así que sólo nos queda que N=p*q con p y q primos mayores que 3 y no son números consecutivos (porque son impares). En ese caso es claro que 2N=2pq no podría tener divisores consecutivos salvo que q=2p+1 o bien q=2p-1 (o simétricamente, p=2q+1 o 2q-1). En el primer caso p sería un primo de **Sophie Germain.**

Recuerda que los primos de Sophie Germain son aquellos en los que 2*p+1 también es primo: 2, 3, 5, 11,…

(d) Los números primarios (potencias de primos) están libres de triángulos salvo el caso $N=3^k$

Esta es trivial: Si $N=p^k$ con k>1, entonces 2N=2pppp…sólo contendría divisores consecutivos en el caso 2N=2*3*3*3...

¿Se te ocurren más propiedades? A nosotros por ahora no.

CARNAVAL DE TRIANGULARES

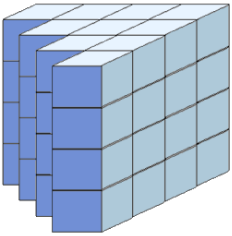
Este capítulo se ha desbordado, como una serpentina que al arrojarla ya no puede volver a ser rollo. Comenzamos a estudiar variantes de estudios anteriores y a la multiplicidad de divisores triangulares le siguió su suma, las coincidencias en esa suma y la reconstrucción de otro triangular. Por ello comenzamos con un esquema:

- Número de divisores triangulares (http://oeis.org/A007862)
- Cálculo general
- Números con un solo divisor triangular propio (http://oeis.org/A203468)
- Suma de divisores triangulares (http://oeis.org/A185027)
- Curiosidades

- Números con suma de triangulares también triangular (http://oeis.org/A209309)
- Números triangulares con la misma propiedad (http://oeis.org/A209310)
- Otras curiosidades menores
- Caso en el que la suma de divisores triangulares es otro divisor (http://oeis.org/A209311)

Número de divisores triangulares

Vimos en otro apartado que el número 40 posee una parte triangular igual a 10, que le permite ser representado como un prisma triangular.



Esta representación $40=4*T_4$ es única (no consideramos el triangular 1, por lo que no volveremos a citarlo). Ningún otro número triangular menor o igual que 40 (3, 6, 10, 15, 21, 28 o 36) lo divide salvo el 10. Esto por lo que se refiere al 40, pero existen otros números que admiten varias representaciones. El 30 admite cuatro: $30=10*T_2 = 5*T_3 = 3*T_4 = 2*T_5$

No es difícil contar los divisores triangulares que posee un número N (al menos, el 1). Basta cambiar el algoritmo que publicamos anteriormente para que cuente en lugar de quedarse con el mayor

```
Public Function numdivtriang(n)
Dim p, i, t, tr

p = Int((Sqr(n * 8 + 1) - 1) / 2) 'Calcula el máximo orden
t = 1
For i = 2 To p
tr = i * (i + 1) / 2 'forma todos los triangulares menores o iguales a n
If n / tr = n \ tr Then t = t+1  'si es divisor, incrementa el contador
Next i
numdivtriang = t 'se queda con el mayor
End Function
```

Esta función cuenta el 1, por lo que para 30 dará 5 posibilidades y para 40 sólo 2. En la siguiente tabla parcial lograda con hoja de cálculo lo puedes comprobar

30	5
31	1
32	1
33	2
34	1
35	1
36	4
37	1
38	1
39	2
40	2

Este resultado lo tienes en http://oeis.org/A007862 y es interesante leer los comentarios que se incluyen.

Números con un solo divisor triangular propio mayor que 1

El caso del 40 no es único. Hay muchos números que sólo pueden representarse de una sola forma como un prisma triangular con base y altura mayores que uno (para evitar trivialidades). Son estos:

6, 9, 15, 20, 21, 27, 33, 39, 40, 50, 51, 56, 57, 69, 70, 80, 81, 87, 93, 99, 100, 111, 112, 117, 123, 129, 130, 141, 153, 159, 160, 170, 171, 177, 182, 183, 190, 196, 200, 201, 207, 213, 219, 224, 230, 237, 243…

Los hemos publicado en http://oeis.org/A203468

Prueba con cualquiera de ellos, el 182=2*7*13. Puedes usar la propiedad que vimos de que su doble ha de tener dos divisores consecutivos. 364=2*2*7*13 y su conjunto de divisores es {364, 182, 91, 52, 28, 26, 14, 13, 7, 4, 2, 1}. Los únicos divisores consecutivos son 13 y 14, que dan lugar a un único divisor triangular de 182, el 91.

Por cierto, su consecutivo 183 presenta la misma situación: su único divisor triangular es el 3. No es el único par de consecutivos contenido en la sucesión. Por ejemplo, tenemos 170 y 171.

Dentro de esta sucesión figuran números triangulares. Todos ellos presentarán tres divisores triangulares:

ellos, un divisor propio y la unidad. Así, 351 tiene como únicos divisores triangulares 1, 3 y el propio 351.

Suma de divisores triangulares

Además de considerar la suma de todos los divisores de un número, puede resultar curioso sumar sólo los de un tipo. Por ejemplo, el número 720 tiene como suma de divisores 2418, pero si sólo consideramos los que son cuadrados, sumarían 210=144+36+ 16+9+4+1 y con los triangulares 236=120+45+36+15+10+6+3+1. Se pueden considerar otros tipos de divisores: los pares, los oblongos…

Un algoritmo un poco burdo, pero que funciona, es el de recorrer todos los posibles divisores y someter a cada uno a una condición antes de incorporarlo a la suma. Aquí tienes el que hemos usado para cuadrados y triangulares:

```
Public Function sumadiv(nume, tipo)
'tipos
'0 da todos los divisores
'1 los cuadrados
'2 los triangulares

Dim i, s
s = 0
For i = 1 To nume
If esmultiplo(nume, i) Then
If tipo = 0 Then s = s + i
If tipo = 1 And escuad(i) Then s = s + i
If tipo = 2 And estriangular(i) Then s = s + i
```

```
End If
Next i
sumadiv = s
End Function
```

Con un algoritmo similar hemos publicado en OEIS la función que recoge la suma de los divisores triangulares de los primeros números naturales:

1, 1, 4, 1, 1, 10, 1, 1, 4, 11, 1, 10, 1, 1, 19, 1, 1, 10, 1, 11, 25, 1, 1, 10, 1, 1, 4, 29, 1, 35, 1, 1, 4, 1, 1, 46, 1, 1, 4, 11, 1, 31, 1, 1, 64, 1, 1, 10, 1, 11, 4, 1, 1, 10, 56, 29, 4, 1, 1, 35, 1, 1, 25, 1, 1, 76…

(http://oeis.org/A185027)

Curiosidades

Esta sucesión da lugar a varias curiosidades:

La suma de triangulares puede ser triangular. Excluimos el caso en que sea igual a 1 por trivial. Estos son los números que lo cumplen:

6, 12, 18, 24, 48, 54, 96, 102, 110, 114, 138, 162, 174, 186, 192, 204, 220, 222, 228, 246, 258, 282, 315, 318, 348, 354, 364, 366, 372, 384, 402, 414, 426, 438, 440, 444, 456, 474, 486, 492, 498, 516, 522, 534, 550…

También la acabamos de publicar

(http://oeis.org/A209309)

Por ejemplo, 444 tiene como divisores triangulares 6, 3 y 1, y su suma es 10 que es triangular. Más complejo sería el caso de 1320, cuyos divisores triangulares, 120, 66, 55, 15, 10, 6, 3 y 1 suman 276, que es triangular igual a 23*24/2.

Similares a esta, pero menos exigentes, son estas condiciones:

(1) La suma de los divisores ordinarios es triangular

1, 2, 5, 8, 12, 22, 36, 45, 54, 56, 87, 95, 98, 104, 116, 152, 160, 200,… A045746

(2) La que es triangular es la suma de las partes alícuotas, y mayor que 1

2,4,6,14,16,18,24,25,28,33,36,51,54,66,91,112

(3) Números triangulares en los que la suma de sus divisores propios es también triangular

1, 3, 6, 28, 36, 66, 91, 231, 496, 8128, 14196, 15225, 129795, 491536… (A083675)

(4) Números triangulares cuya suma de divisores es también triangular

1, 36, 45, 23220, 105111, 135460, 2492028, 5286126, 6604795, 14308575, 45025305, 50516326, 54742416, 99017628, 108125865, 152486916 (A083674)

Ahora viene la nuestra, la más exigente:

Números triangulares cuya suma de divisores triangulares es mayor que 1 y triangular

6, 4186, 32131, 52975, 78210, 111628, 237016, 247456, 584821, 750925, 1464616, 3649051, 5791906, 11297881, 16082956, 24650731, 27243271, 38618866, 46585378, 51546781, 56026405, 76923406, 89880528, 96070591…(http://oeis.org/A209310)

El estudio del código PARI de esta sucesión te enseñará técnicas útiles:

(PARI) istriangular(n)=issquare(8*n+1)
{t=0; for(n=1, 10^8, if(istriangular(n), k=sumdiv(n, d, istriangular(d)*d) ; if(istriangular(k)&&k>>1, t+=1; write("b209310.txt", t, " ", n))))}

Y por último, para no cansar (si es que has llegado hasta aquí), la última curiosidad

Números en los que la suma de divisores triangulares es mayor que 1 y divisor del número

285, 1302, 1425, 1820, 2508, 3640, 3720, 4845, 4956, 5016, 5415, 7125, 7280, 9100, 9114, 9912, 11685, 12255, 12740, 14508, 15105, 16815, 17385, 18200, 19095, 19824, 20235, 20805, 22134, 22515, 23655, 23660, 24021, 24738…

http://oeis.org/A209311

Aquí tienes dos ejemplos:

285.-Divisores triangulares:1, 3 y 15 y su suma, 19, es divisor de 285
1302.- Divisores triangulares: 21 + 6 + 3 + 1 = 31 que es divisor de 1302.

Código PARI

```
istriangular(n)=issquare(8*n+1)
{t=0; for(n=1, 10^7, k=sumdiv(n, d, istriangular(d)*d);
if(n/k==n\k&&k>>1, t+=1; print(t, " ", n)))}
```

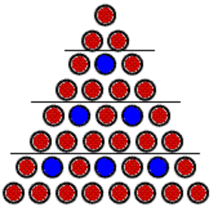
Nos queda algo en el tintero, porque en esta última el cociente puede ser también triangular, pero esto queda para otra ocasión.

TRIANGULARES DE LADO PAR

Los números triangulares 3, 10, 21, 36,…son aquellos cuyo número de orden es par: 3=T(2)=2*3/2; 10=T(4)=4*5/2; 21=T(6)=6*7/2,…Si aplicamos la expresión algebraica de un número triangular, la de estos será

$T(2n)=2n(2n+1)/2=n(2n+1)=2n^2+n$

Los podemos representar como formados por filas de triángulos de 3 elementos separados por otros elementos aislados. En la imagen hemos representado el 36, es decir T(8)



Observa que está formado por 10 triángulos de tres elementos y 6 puntos aislados. Nos sugiere que un número triangular de orden par equivale a triangular de orden mitad multiplicado por 3 más su triangular anterior, es decir:

T(2n)=3T(n)+T(n-1)

Es fácil demostrarlo por inducción:

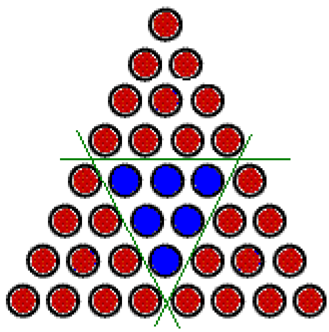
T(2)=3*T(1)+T(0)=3*1+0=3;
T(4)=3*T(2)+T(1)=3*3+1=10…

Probemos con T(2(n+1))=T(2n)+(2n+1)+(2n+2) por definición de número triangular. Si aceptamos la hipótesis para n, tendremos:

T(2(n+1))=3*T(n)+T(n-1)+(n+1+n+1+n+1)+n=3*T(n)+3*(n+1)+T(n-1)+n=3*T(n+1)+T(n), luego la hipótesis se cumple para n+1.

La fórmula T(2n)=3T(n)+T(n-1) es válida

Adaptamos una demostración visual contenida en http://math.berkeley.edu/~rbayer/09su-55/handouts/ProofByPicture-printable.pdf



Así se ve mejor la relación.

En realidad, estos números **son los triangulares que no pueden ser hexagonales**. Se sabe que todo hexagonal es triangular, porque su expresión es H(n)=n(2n-1)=2n(2n-1)/2=T(2n-1), pero el número de orden del triangular es 2n-1, impar, luego los que no son hexagonales formarán la sucesión que estamos estudiando: 3, 10, 21, 36,…, que está contenida en http://oeis.org/A014105

Expresión como resta entre una suma de pares y otra de impares

En la página OEIS enlazada se destacan estas relaciones:

3=4-1
10=6+8-1-3
21=8+10+12-1-3-5
36=10+12+14+16-1-3-5-7

No se justifican, y esto es una invitación a que lo hagamos nosotros. En primer lugar generalizamos. Llamamos a nuestra sucesión TT(n)

TT(n)=T(2n)=SP(2(n+1),n)-SI(1,n)

Con **SP(2(n+1),n)** deseamos expresar que se toman **n** números pares a partir de **2(n+1)** y con **SI(1,n)** que se suman los primeros **n** impares. Lo intentamos demostrar por inducción:

TT(n+1)=TT(n)+2n+1+2n+2, como ya sabemos por los párrafos anteriores. Si usamos la hipótesis para n queda:

TT(n+1)=2(n+1)+2(n+2)+…+2(2n)-1-3-5-7…- (2n-1)+2n+1+2n+2

Para construir la nueva suma de pares hay que añadir 2(2n+1)+2(2n+2) y eliminar 2(n+1). La diferencia es 4n+2+4n+4-2n-2=6n+4, que ha de salir de los nuevos sumandos 2n+1+2n+2=4n+3, que equivalen a 6n+4-(2n+1), siendo el paréntesis el nuevo impar que habría que restar, luego la estructura de la fórmula se mantiene y es correcta.

Usamos el álgebra

TT(n)=T(2n)=n(2n+1)=2n^2+n

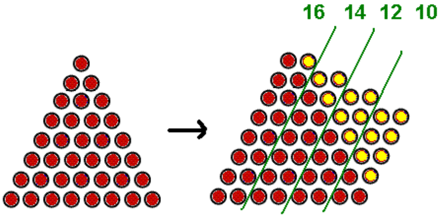
$SP(2(n+1),n)=(2(n+1)+2(2n))*n/2=3n^2+n$

$SI(1,n)=n^2$ como es sabido.

Por tanto, se verifica la diferencia.

Demostración visual

Ahí te la dejamos para el caso de 36. Analízala e intenta reproducirla para otros casos:



Esta construcción sólo es posible porque el triángulo es de orden par.

Otros desarrollos

Se cumple que **TT(n)=T(2n)=3+7+11+15+…(4n-1)**, es decir, que es la suma de impares tomados de 4 en 4 a partir de 3. Si sabes verlo, en la anterior imagen se muestra esa suma con claridad. Puedes justificarlo algebraicamente:

$3+7+11+15+\ldots(4n-1)=(3+4n-1)*n/2=(4n+2)*n/2=n(2n+1)=TT(n)$

Este desarrollo se puede escribir así: **$TT(n)=2^2-1^2+4^2-3^2+6^2-5^2+8^2-7^2\ldots$,** que es una forma elegante de terminar este tema..

CUADRADOS Y TRIANGULARES

CUADRADOS VECINOS DE TRIANGULARES

Sabemos que hay números que son triangulares y cuadrados a la vez: 1, 36, 1225, 41616,…, pero, ¿existirán pares de números consecutivos tales que uno sea triangular y el otro cuadrado?

Dejamos como propuesta encontrar pares de números consecutivos tales que uno sea triangular y el otro cuadrado mediante el método de formar una columna de triangulares en una hoja de cálculo, y junto a esa columna formar otra sumando o restando una unidad a los anteriores, y finalmente analizando que resulte un cuadrado perfecto. Como este método lo hemos desarrollado varias veces, lo dejamos así, como propuesta.

Si sabes escribir código de macros en Calc o en Excel, puedes usar estas dos funciones y una macro de búsqueda (son válidas para ambas hojas de cálculo)

```
Public Function escuadrado(n) As Boolean
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuadrado = True Else
escuadrado = False
End Function
```

```
Public Function estriangular(n) As Boolean
If 8 * n + 1 = Int(Sqr(8 * n + 1)) ^ 2 Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function


Sub busqueda()
For i = 1 To 1000000
If escuadrado(i) And estriangular(i + 1) Then MsgBox (i)
Next i
End Sub
```

Tal como está escrito el código, encontrará números cuadrados tales que al sumarles una unidad se convierten en triangulares. Una búsqueda del 1 a 1000000 obtendríamos los pares:

Cuadrado más uno igual a triangular

10	9
325	324
11026	11025
374545	374544

Para comprobar consulta http://oeis.org/A164055

En lenguaje PARI:

```
isinteger(n)=(n==truncate(n))
isquare(n)= { local(f,m,p=0); if(n==1,p=1,f=factor(n); m=gcd(f[, 2]); if(isinteger(m/2),p=1));return(p) }
```

```
{  for (n=2, 100, a=n*n;for(k=1,a/2,if (isquare(a-k) && isquare(a-2*k), write("final.txt",a," ",a-k," ",a-2*k)))) }
{istriang(n)=isquare(8*n+1)}
{for(n=2,10^7,if(isquare(n)&&istriang(n+1),print1(n," ")))}
```

Con el Buscador lo tenemos fácil:

Solución	Detalles
9	10
324	325
11025	11026
374544	374545

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	500000

Con estas propiedades:

CUADRADO
ES TRIANGULAR(N+1)
EVALUAR N+1

Resulta lento si deseamos llegar al 374544.

Si sustituimos la expresión i+1 en el código por i-1, obtendremos:

Triangulares más uno cuadrados

0	1
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096
17955	17956
139128	139129
609960	609961

Como el 0 no es triangular, desechamos la primera solución. Consulta http://oeis.org/A006454

Pero esto es fiarse demasiado de la máquina. Para encontrar triangulares y cuadrados consecutivos podemos intentar usar las técnicas algebraicas.

Acudimos a la fórmula de los números triangulares para plantear la igualdad pedida

$$\frac{n(n+1)}{2} \pm 1 = k^2$$

en la que el doble signo de 1 se justifica porque el triangular puede ser mayor o menor que el cuadrado. Si desarrollamos y exigimos que el discriminante de la ecuación sea cuadrado perfecto, llegaremos a la ecuación de Pell x^2-8y^2=-7 en el primer caso y a la x^2-8y^2=9 en el segundo (intenta desarrollarlo así y te resultarán esas dos ecuaciones)

Podemos llegar a las mismas ecuaciones recordando que un número triangular multiplicado por 8 y añadiéndole una unidad se convierte en cuadrado perfecto. De esta forma llegamos a la ecuación de Pell de forma mucho más rápida.

$$\frac{m^2-1}{8} \pm 1 = k^2$$

Con el signo + del 1 llegamos a m^2-8k^2 = -7 y con el menos a
m^2-8k^2 = 9

Así que el problema desemboca en la resolución de las ecuaciones $x^2-8y^2=-7$; $x^2-8y^2=9$

No todas las ecuaciones de Pell tienen solución. Estas dos sí las tienen, como se puede ver por tanteo: $5^2-8*2^2=-7$; $9^2-8*3^2=9$, que nos dan las primeras soluciones del problema:

Si x=5 y=4 obtenemos el número triangular 3 y el cuadrado 4 que son consecutivos

Si x=9 y=3 aparecerán el triangular 10 y el cuadrado 9, consecutivos, pero con el triangular mayor.

Estas soluciones coinciden con las primeras obtenidas con la hoja de cálculo.

Pero ¿y las demás soluciones?

Si la ecuación de Pell hubiera sido $x^2-8y^2=1$, una solución trivial sería $X_0=3$, $Y_0=1$. Nos podemos aprovechar de esto de la siguiente forma:

La identidad $3^2-8*1^2 = 1$ la podemos escribir como un producto en el anillo $Q(\sqrt{8})$:

$$\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)=1$$

Igualmente, la ecuación $x^2-8y^2=-7$ la podemos escribir como

$$\left(x+y\sqrt{8}\right)\left(x-y\sqrt{8}\right)=-7$$

Si ahora multiplicamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})(x+y\sqrt{8})(x-y\sqrt{8}) = -7 \quad \textbf{(1)}$$

y agrupando términos

$$\left(3x+8y+(x+3y)\sqrt{8}\right)\left(3x+8y-(x+3y)\sqrt{8}\right) = -7$$

o bien

$$(3x+8y)^2 - 8(x+3y)^2 = -7$$

De esta forma hemos obtenido una fórmula de recurrencia para las siguientes soluciones:

$x_n = 3x_{n-1}+8y_{n-1}$ $y_n = x_{n-1}+3y_{n-1}$

Esta fórmula valdría igualmente para el caso $x^2-8y^2=9$

Lo hemos desarrollado en una hoja de cálculo:

Para el primer caso:

3	**1**		
X	Y	Triangular	Cuadrado
5	2	3	4
31	11	120	121
181	64	4095	4096
1055	373	139128	139129
6149	2174	4726275	4726276
35839	12671	160554240	160554241
208885	73852	5454117903	5454117904
1217471	430441	185279454480	185279454481

Para el segundo:

3	1		
X	Y	Triangular	Cuadrado
9	3	10	9
51	18	325	324
297	105	11026	11025
1731	612	374545	374544
10089	3567	12723490	12723489
58803	20790	432224101	432224100
342729	121173	14682895930	14682895929
1997571	706248	498786237505	498786237504

Esta segunda tabla coincide con la obtenida con hoja de cálculo anteriormente:

10	9
325	324
11026	11025
374545	374544

pero en el primer caso ¡sólo hemos obtenido la mitad!

Con la hoja salían más:

0	1
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096
17955	17956
139128	139129
609960	609961

La causa de que no hayamos obtenido todas las soluciones está en la agrupación de términos que efectuamos:

Igualmente, la ecuación x^2-8y^2=-7 la podemos escribir como

$$(x + y\sqrt{8})(x - y\sqrt{8}) = -7$$

Si ahora multiplicamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8})(x + y\sqrt{8})(x - y\sqrt{8}) = -7 \quad \textbf{(1)}$$

y agrupando términos

$$(3x + 8y + (x + 3y)\sqrt{8})(3x + 8y - (x + 3y)\sqrt{8}) = -7$$

$$(3x + 8y)^2 - 8(x + 3y)^2 = -7$$

En esta agrupación de la ecuación (1) habíamos multiplicado el primer factor por el tercero y el segundo por el cuarto para que nos diera la suma por diferencia igual a la diferencia de cuadrados, pero si llegamos a multiplicar primero por cuarto y segundo por tercero, habríamos llegado a

$$(3x - 8y)^2 - 8(x - 3y)^2 = -7$$

y de ahí obtendríamos las soluciones que faltan. En el segundo caso coincidían las dos posibilidades y por eso no echamos a faltar ninguna solución.

Enseñanza: Hay que agotar todas las posibilidades y no alegrarnos demasiado con el éxito obtenido.

TRIANGULARES Y CUADRADOS CON PIEZAS

Quien ha entrado en el mundo de la programación elemental sabe qué es la operación de *concatenar* cadenas (“strings”): situar sus caracteres uno detrás del otro. Si lo representamos por &, equivaldría a que “Pablo “&”Pérez”= “Pablo Pérez”. En las hojas de cálculo disponemos de la función CONCATENAR, que une varios textos de celdas en uno =CONCATENAR(A12;B22;G1).

Más difícil es concatenar números naturales, de forma que el resultado sea otro verdadero número en el que cada cifra tenga su valor relativo. Una forma se basa en esta función CONCATENAR. Para ello debemos convertir los números en cadenas, con la función TEXTO, después, concatenarlos, y finalmente, usar la función VALOR para devolverles el carácter numérico. Tiene un inconveniente, y es que TEXTO ha de ir acompañado de un formato, y esto lo complica todo. En

PARI no existe ese problema, por lo que puedes definir la concatenación entre números mediante

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))

Un método más matemático, y es el que adoptaremos para la hoja de cálculo es el de multiplicar el número de la izquierda por una potencia de 10 adecuada y sumar luego el de la derecha. Así, concatenar 255 con 182 equivaldría al número 255*10^3+182=255182

¿Qué exponente ha de tener esa potencia de 10? El número de cifras del que está a la derecha. Para encontrar ese número podemos usar el logaritmo decimal, de esta forma: =ENTERO(LOG(N;10))+1. Por tanto, una concatenación numérica vendría dada por la fórmula
CONCAT(A;B)=A*10^((ENTERO(LOG(B;10))+1))+B

Esta fórmula fallaría para B=0, por lo que habría que retocarla con un condicional, pero no lo haremos. Basta que se sepa que existe esa función numérica, y en la práctica usaremos una rutina en Basic.

Se producen muchas curiosidades cuando concatenamos números naturales. Veamos algunas. Es evidente que nos movemos en cuestiones curiosas y no teóricas. Comenzamos generando números triangulares. Ya veremos más adelante otros casos.

Estudiamos algunas concatenaciones concretas:

Producir triangulares

Intentaremos concatenar un número **n** consigo mismo o con otros relacionados con él a fin de conseguir un número triangular. Por ejemplo, 426 concatenado consigo mismo produce el triangular 426426. Para entender mejor lo que sigue, recuerda que todo número triangular se puede expresar como N(N+1)/2, es decir, la mitad de un oblongo N(N+1). En este caso, 426426=923*924/2

Triangular concatenando n//n

En primer lugar probaremos a concatenar un número consigo mismo para producir un triangular. Ya están publicados en http://oeis.org/A068899

55, 66, 5050, 5151, 203203, 255255, 426426, 500500, 501501, 581581, 828828, 930930, 39653965, 50005000, 50015001, 61566156, 3347133471, 5000050000, 5000150001, 6983669836, 220028220028, 500000500000, 500001500001…

Si te llaman la atención los ejemplos del tipo 500…500 y 500…1500…1, piensa que no son nada extraordinarios:

500500=1000*1001/2, que es un triangular

50015001=10001*10002/2 es otro. Investiga casos similares.

Triangular concatenando 2n//n

De esta forma se generan los siguientes:

21, 105, 2211, 9045, 222111, 306153, 742371, 890445, 1050525, 22221111, 88904445, 107905395, 173808690, 2222211111, 8889044445, 12141260706, 15754278771, 222222111111, 888890444445, 22222221111111, 36734701836735, 65306123265306, 88888904444445, 163718828185941…

¿Es siempre triangular 2222…1111…? Sí, porque sus dobles se descomponen como 4444…2222=6666..6*6666…7, es decir, números oblongos formados por productos de números consecutivos. En lo que sigue acudiremos varias veces al hecho de que el doble de un triangular es un oblongo, k(k+1).

Se puede demostrar que cada vez que se añade la cifra a los factores aparecen 4444..2222. Lo razonamos con 666*667=444222 pero para más cifras se comprende igual: En efecto, si 666*667=444222, al añadir una cifra tenemos:

6666*6667=(6000+666)(6000+667)=36000000+6000*1333+666*667=

43998000+444222=44442222.

Observa que si aumentamos las cifras, 1333 se convertiría en 133….33 y el sumando final 43998000 en

4399…8000… con lo que el efecto de reconstruir 44444 y 2222 sería el mismo.

Algo similar ocurre con la subsucesión 9045, 890445, 88904445,…engendrada por los oblongos 134*135, 1334*1335, 13334*13335,…Son casualidades que ocurren al dividir las potencias de 10 en tercios o en sextos.

Si deseas reproducir los resultados puedes usar este código en PARI

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^5,a=concatint(2*n,n);if(istriang(a),print(a))))}

La función ***istriang*** usa la propiedad de que ocho veces un triangular más la unidad es un número cuadrado

(fácil: $n(n+1)/2*8+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, un cuadrado)

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A226742

Concatenación inversa n//2n

¿Y si concatenáramos en sentido contrario, primero el número y después su doble? Pues, aunque menos llamativo, también se construyen triangulares. Son estos:

36, 1326, 2346, 3570, 125250, 223446, 12502500, 22234446, 1250025000, 2066441328, 2222344446, 2383847676, 3673573470, 125000250000, 222223444446, 5794481158896, 12500002500000, 12857132571426, 22222234444446, 49293309858660…

Intenta razonar la aparición de estos números, con un método similar al usado en el anterior caso: 36, 2346, 223446, 22234446,… es porque sus dobles se descomponen como 666…68*666…69. Observa también esta otra subsucesión: 125250, 12502500, 12500025000, que provienen de los oblongos 500*501, 5000*5001,…¿Y el resto? Te lo dejamos por si encuentras una pauta.

Código PARI para este caso:

```
concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,2*n);if(istriang(a),print(a
))))}
```

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A226772

Concatenación n//n+1

También se producen números triangulares:

45, 78, 4950, 5253, 295296, 369370, 415416, 499500, 502503, 594595, 652653, 760761, 22542255, 49995000, 50025003, 88278828, 1033010331, 1487714878, 4999950000, 5000250003, 490150490151, 499999500000, 500002500003, 509949509950, 33471093347110, 49999995000000, 50000025000003, 69834706983471…

Se destaca el subconjunto 45, 4950, 499500,….y es porque sus dobles son 9999…*10000… y también los 5253, 502503, 50035003…¿En qué se parecen entre sí?

Puedes reproducirlos con este código PARI

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(istriang(a),print(a)))}

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A226788

Con n+1//n resultan verdaderos monstruos

21, 26519722651971, 33388573338856, 69954026995401, 80863378086336,…

A partir de este último no se han podido encontrar más para n<10^10, o resultados menores que 10^20. Quizás con una herramienta o equipo más potentes se pueda hallar alguno más fuera de esa acotación. Los lectores quedáis invitados a intentarlo. Podéis usar este código PARI

```
concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(istriang(a),print(
a)))}
```

Si disponéis de MATHEMATICA también bastará adaptar este otro, añadido por T.D. Noe a A226789:

```
TriangularQ[n_] := IntegerQ[Sqrt[1 + 8*n]]; t = {};
Do[s = FromDigits[Join[IntegerDigits[n+1],
IntegerDigits[n]]]; If[TriangularQ[s], AppendTo[t, s]],
{n, 100000}]; t (* T. D. Noe, Jun 18 2013 *)
```

No vamos seguir las concatenaciones de este tipo. Las dejamos para quien le apetezca encontrar más ejemplos curiosos. Sí podíamos seguir jugando con las cifras, pero con otras estructuras. Seguimos buscando triangulares.

Otras concatenaciones para triangulares

No hemos intentado todavía concatenar un número con su reverso. Por ejemplo, 59 con 95 forman el triangular 5995. Intentamos una búsqueda por ahí. Antes de presentar resultados hay que advertir que los terminados en 0, como 90, producen resultados ambiguos, en este caso 990. Por eso restringiremos la búsqueda a números no múltiplos de 10. En ese caso resultan estas soluciones:

55, 66, 5995, 8778, 617716, 828828, 35133153, 61477416, 1264114621,…, que forman una subsucesión de http://oeis.org/A003098

Un resultado curioso es si concatenamos un número n por la izquierda con 10*n, porque en ese caso resulta un número duplicado con un cero en el centro. Hemos encontrado estos, que resultan muy vistosos:

41041, 66066, 165301653, 56661056661, 3719010371901, 276816602768166, 13776656013776656, 28265441028265441, 41631576041631576, 47337278047337278, 55666611055666611, 82189446082189446, 91836735091836735, 118525260118525260, 196059210196059210…

Evitamos seguir insistiendo en el tema. Con estos ejemplos nuestros lectores pueden abordar otras búsquedas.

NÚMEROS QUE SON UN PRODUCTO ESPECIAL

Este apartado y los siguientes tienen el doble objetivo de presentar unas curiosidades numéricas (algo intrascendentes) y analizar cómo organizar búsquedas de cierto tipo intentando dar con el algoritmo más rápido posible, ya que llegan fácilmente al orden de 10^7. Comenzamos con un ejemplo:

Números triangulares que son producto de triangulares

Muchos números triangulares son producto de otros dos también triangulares. Por ejemplo, 45=15*3, 210=21*10, todos triangulares. Los tienes publicados en https://oeis.org/A188630

36, 45, 210, 630, 780, 990, 1540, 2850, 3570, 4095, 4851, 8778, 11781, 15400, 17955, 19110, 21528, 25200,…

Esta búsqueda está resuelta, pero imagina que la deseamos reproducir. No es fácil, porque para cada número natural deberíamos buscar lo siguiente:

- Ver si ese número **N** es triangular
- En caso afirmativo, recorrer todos sus divisores **d**.

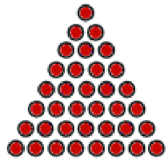
- Para cada uno de ellos, investigar si tanto **d** como **N/d** son ambos triangulares, y en caso afirmativo, **parar la búsqueda** para ese valor **N** y proseguir con **N+1**.

Es fácil darse cuenta de que se perderá mucho tiempo recorriendo números de uno en uno, que no son triangulares o bien que no poseen muchos divisores triangulares (o ninguno). Con búsquedas de ese tipo, llamemos "ingenuas", nuestro ordenador se pasaba minutos y minutos cuando llegaba a números grandes. Una solución es encaminar la búsqueda para que, hasta donde sea posible, sólo se recorran los números de cierto tipo. En el caso de triangulares, cuadrados, oblongos o primos, es posible realizar ese filtro. Lo concretamos:

Generación de triangulares

Los números que usaremos, salvo los primos, se pueden engendrar a partir de los precedentes. Comenzaremos por explicar distintas formas de generar algunos tipos de números, y así ya las tenemos preparadas para cuestiones posteriores.

En el caso de los triangulares manejamos dos variables: Número N e incremento D. Comenzamos haciendo N=1 (primer triangular) e incremento D=2, para que 1+2 genere el siguiente triangular, el 3. Luego, en cada paso, N se convierte en N+D y D en D+1. Así funciona, ya que los números triangulares se forman añadiendo una fila con un elemento más.



Observa estos valores, generados con hoja de cálculo:

	Número N Triangular	Incremento D		
	1	2		
	3	3		
Los triangulares	6	4	Los incrementos crecen	
se incrementan	10	5	en una unidad en cada paso	
en D	15	6		
	21	7		
	28	8		
	36	9		

Recordamos: **Los triangulares se generan tomando incrementos con una unidad más en cada paso**. Ya utilizaremos esto más adelante.

Generación de cuadrados

Aquí tenemos dos soluciones, ambas prácticas, según el contexto, para recorrer sólo números cuadrados: la primera es trivial, declarar una variable k y luego usar k^2 en los cálculos. Está bien, pero a veces es lenta y no admite con facilidad ciertas acotaciones. La segunda es similar a la de los triangulares, pero incrementando D en D+2, en dos unidades en lugar de en una.

Observa el esquema:

	Número N cuadrado	Incremento D			
	1	3			
	4	5			
Los cuadrados	9	7	Los incrementos crecen		
se incrementan	16	9	en dos unidades en cada paso		
en D	25	11			
	36	13			
	49	15			
	64	17			

Para quienes conozcáis estas propiedades, esto parecerá trivial, pero no está mal recordarlo, porque más adelante dará velocidad a nuestras búsquedas.

Generación de oblongos

Un número es oblongo cuando tiene la forma N=k(k+1), es decir, doble de un triangular. Es fácil ver que el siguiente oblongo será (k+1)(k+2). Su diferencia (k+1)(k+2)-k(k+1) = 2(k+1), es decir, **el doble del mayor en el producto**, luego el incremento adecuado será par y crecerá de 2 en 2. Esto nos permite generar oblongos: comenzamos con N=2 y D=4, Así generamos los siguientes: N=2+2*2=6, N=6+2*3=12, N=12+2*4=20,…También podemos declarar una variable y después trabajar con k*(k+1). Así hemos procedido en nuestra primera búsqueda con hojas de cálculo.

Número N oblongo	Incremento D
2	4
6	6
12	8
20	10
30	12
42	14
56	16
72	18

Así que, mientras los cuadrados se generan sumando impares, los oblongos sumando pares (y los triangulares sumando todos)

Caracterización de estos números

Necesitaremos también en las búsquedas que emprenderemos una forma de caracterizar estos números, cómo saber si un resultado es cuadrado u oblongo, por ejemplo. Aunque es sencillo y conocido, lo recordamos aquí:

Para saber si un número natural es cuadrado, la mejor prueba es que la parte entera de su raíz cuadrada, elevada a su vez al cuadrado, nos dé como resultado el número primitivo. En hoja de cálculo:

```
Public Function escuad(n) As Boolean
If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End Function
```

Si trabajas con las celdas, sin macros, el procedimiento es el mismo, pero con distinto lenguaje. Si tienes, por ejemplo, en la celda C12, un número del que deseas saber si es cuadrado, escribe en otra celda esta fórmula: =SI((ENTERO(RAIZ(C12)))^2=C12;1;0), y te devolverá un 1 si es cuadrado y un 0 si no lo es.

La caracterización de un número como triangular se basa en lo anterior, ya que ser triangular N es equivalente a que 8*N+1 sea cuadrado. Por tanto, podemos definir esta función:

```
Function estriangular(n) As Boolean
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function
```

En lenguaje de celdas sería algo más complejo:

=SI((ENTERO(RAIZ(C12*8+1)))^2=C12*8+1;1;0),

Por último, los oblongos, al ser doble de triangulares, se descubren fácilmente:

Public Function esoblongo(n) As Boolean

If escuad(4 * n + 1) Then esoblongo = True Else esoblongo = False
End Function

Sin macros,
=SI((ENTERO(RAIZ(C12*4+1)))^2=C12*4+1;1;0)

Algoritmos de búsqueda

Ya podemos pasar a nuestras búsquedas. Comenzaremos generando la sucesión https://oeis.org/A188630, con la que comenzamos este estudio: Números triangulares que son producto de otros dos triangulares. Nos organizaremos así:

Iniciamos triangulares: N=3, D=3 (Comenzamos por el 3)
1 Mientras no lleguemos al tope que nos hayamos marcado
Iniciamos otros triangulares para ver si son divisores: K=3, P=3

2 Mientras no lleguemos a N ni encontremos un producto de triangulares

Para cada K vemos si:

1.-Es divisor de N

2.- Si el cociente N/k es triangular

Si cumple ambas condiciones, cerramos la búsqueda para N e imprimimos.

Si no, generamos otro triangular convirtiendo K en K+P y P en P+1

Fin de 2 Mientras

Generamos otro triangular convirtiendo N en N+D y D en D+1

Fin del 1 Mientras

Hemos comenzado los triangulares en el 3 para evitar trivialidades.

Para quienes no manejen mucho los algoritmos puede resultar complicado, pero hay que repasar hasta entenderlo. Se puede traducir al Visual Basic de Excel:

Sub productriang()

Dim i, j, k, p, c

i = 3: j = 3 Iniciamos la búsqueda en 3, para eliminar trivialidades

While i <= 10 ^ 4

k = 3: p = 3: c = 0 También iniciamos los divisores en 3

While c = 0 And p < i

If i / k = i \ k And estriangular(i / k) And i / k > 1 Then c = k

En la línea anterior buscamos que sea divisor, cociente triangular y no trivial

If c <> 0 Then MsgBox (i) Si cumple todo, presentamos el resultado

k = k + p: p = p + 1 Generamos el siguiente divisor

Wend

i = i + j: j = j + 1 Generamos el siguiente triangular

Wend

End Sub

Elimina comentarios, copia el resto como rutina para Visual Basic y al ejecutar verás aparecer los valores 36, 45, 210,…

Si te apetece explorar, aquí tienes la versión para PARI

{i=3;j=3; **Iniciamos la búsqueda en 3, para eliminar trivialidades**

while(i<=10^4,k=3;p=3;c=0; **También iniciamos los divisores en 3**

while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&ispolygonal(i/k,3)&&i/k>1,c=k);

En la línea anterior buscamos que sea divisor, cociente triangular y no trivial

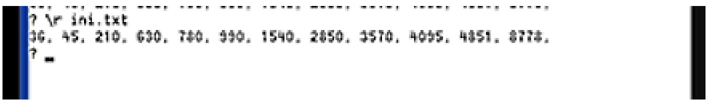
if(c>0,print1(i,", ")); **Si cumple todo, imprimimos**

k+=p;p+=1); **Generamos el siguiente divisor**

i+=j;j+=1) **Generamos el siguiente triangular**

}

Igualmente, si eliminas los comentarios y ejecutas este código PARI verás reproducida la sucesión https://oeis.org/A188630



Números triangulares como producto de otros

En el apartado anterior planteamos el problema de buscar los números triangulares que son a su vez producto de otros dos triangulares. Presentamos una forma de generar cuadrados, oblongos y triangulares de la forma más rápida posible, ya que estas búsquedas se hacen lentas para números grandes, y construimos un algoritmo para generar estos números, contenidos en la sucesión de OEIS https://oeis.org/A188630

Ahora generaremos triangulares con otros tipos de números, y llegaremos a sucesiones que permanecían inéditas hasta ahora.

Triangulares producto de dos cuadrados

Aquí no hay que buscar mucho, ya que basta considerar que el número que cumple esto es aquel que es cuadrado (producto de cuadrados) y triangular a la vez. Esto está muy estudiado. Son estos:

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… y está publicados en

https://oeis.org/A001110

Vemos, pues, otros casos.

Triangulares que son producto de un triangular y un cuadrado

Ahora tenemos ocasión de aplicar lo expuesto anteriormente: cómo generar de forma rápida cuadrados y triangulares y cómo saber si son o no de ese tipo. Si esto te quedó claro, entenderás el algoritmo que sigue. Primero en Visual Basic de Excel:

Sub productriang()
Dim i, j, k, p, c
i = 3: j = 3 Generamos el primer triangular
While i <= 10 ^ 4
k = 3: p = 3: c = 0 Aquí generamos posibles divisores triangulares
While c = 0 And p < i Cuando c<>0 se para la búsqueda y se comunica el resultado
If i / k = i \ k And escuad(i / k) And i / k > 1 Then c = k
La línea de arriba investiga si **k** es divisor y si **i/k** es cuadrado
If c <> 0 Then MsgBox (i)

k = k + p: p = p + 1 Genera el siguiente posible divisor triangular

Wend

i = i + j: j = j + 1 Genera el siguiente triangular para seguir buscando

Wend

End Sub

300
1176
3240
7260
14196
25200
29403
41616
64980

Si repasas el apartado anterior, es el mismo algoritmo propuesto en él, pero cambiando ***estriangular(i/k)*** por ***escuad(i/k)***. Puedes repasar los comentarios que se incluían. Con un ligero cambio en el código, hemos situado los resultados en columna:

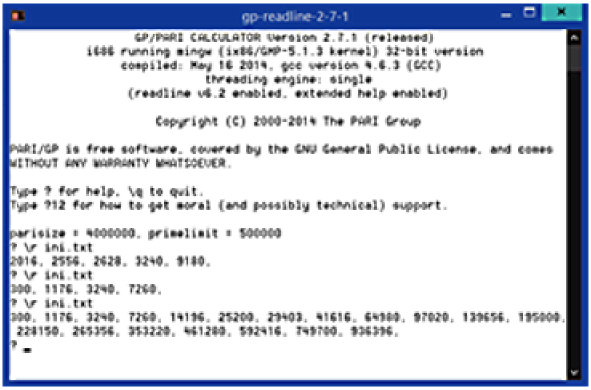
A partir de este valor se produce desbordamiento, por lo que acudimos a PARI y al código

{i=3;j=3;
while(i<=10^6,k=3;p=3;c=0;
while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&issquare(i/k)&&i/k>1,c=k);

if(c>0,print1(i,", "));
k+=p;p+=1);
i+=j;j+=1)
}

No insertamos comentarios porque es el mismo que presentamos en la anteriormente, salvo el uso de la función issquare (“es cuadrado”)

Con él puedes obtener los primeros números triangulares que son producto de un triangular y un cuadrado:



300, 1176, 3240, 7260, 14196, 25200, 29403, 41616, 64980, 97020, 139656, 195000, 228150, 265356, 353220, 461280, 592416, 749700, 936396, 1043290, 1155960, 1412040, 1708476, 2049300, 2438736, 2881200, 3381300, 3499335, 3943836, 4573800,…

Esta sucesión no se había publicado, y lo hicimos en http://oeis.org/A253650

Si los escribimos en columna podemos desarrollarlos como producto del tipo deseado:

Triangular	Cuadrado	Triangular
300	100	3
1176	196	6
3240	324	10
7260	484	15
14196	676	21
25200	900	28
29403	9801	3
41616	1156	36
64980	1444	45
97020	1764	55
139656	2116	66
195000	2500	78

Antes de seguir adelante, hay que advertir que estas descomposiciones en producto no tienen que ser únicas. Por ejemplo, 2881200 admite estos dos productos: 3*960400 y 300*9604, ambos formados por un triangular y un cuadrado. Por eso en la tabla se puede tener la falsa idea de que el factor triangular es más pequeño que el cuadrado. No es así, sino que hemos detenido la búsqueda al encontrar un ejemplo.

Una curiosidad

Los números triangulares de esta sucesión, tendrán, como todos la forma T(P)=P(P+1)/2. Pues bien, ni P ni P+1 pueden ser primos, porque si se descompone en un producto de un triangular y un cuadrado, tendríamos

$P(P+1)=k(k+1)m^2$ y si P o P+1 fueran primos, tendrían que dividir a k o a k+1 o a m, y los tres son menores que P. Estúdialo. Lo vemos en una tabla con los primeros casos:

Triangular	P	Factores(P)	P+1	Factores(P+1)
300	24	[2,3][3,1]	25	[5,2]
1176	48	[2,4][3,1]	49	[7,2]
3240	80	[2,4][5,1]	81	[3,4]
7260	120	[2,3][3,1][5,1]	121	[11,2]
14196	168	[2,3][3,1][7,1]	169	[13,2]
25200	224	[2,5][7,1]	225	[3,2][5,2]
29403	242	[2,1][11,2]	243	[3,5]
41616	288	[2,5][3,2]	289	[17,2]
64980	360	[2,3][3,2][5,1]	361	[19,2]
97020	440	[2,3][5,1][11,1]	441	[3,2][7,2]
139656	528	[2,4][3,1][11,1]	529	[23,2]
195000	624	[2,4][3,1][13,1]	625	[5,4]

Subconjunto interesante

Los números triangulares de orden k^2-1, siendo k impar y mayor que 1, pertenecen a esta sucesión. En efecto, si k es impar tendrá la forma 2m+1, luego el orden del triangular será

$$(2m+1)^2-1=4m^2+4m.$$

El triangular formado sobre él tendrá la forma $((2m+1)^2*(4m^2+4m)/2$ y se puede descomponer en un cuadrado y un triangular: $4(2m+1)^2 * m(m+1)/2$.

Otra forma de expresarlo es que son triangulares construidos sobre 8 veces otro número triangular, ya que $4m^2+4m=8*(m(m+1)/2)$. Estos números los tienes en http://oeis.org/A185096

Casi todos los elementos de la sucesión tienen esta forma: 300, 1176, 3240, 7260, 14196, 25200,… y pertenecen a la sucesión http://oeis.org/A083374 pero otros no, como 29403, 1043290 y 3499335.

Triangulares que son producto de un triangular y un primo

En esta búsqueda nos organizaremos de forma similar a la precedente pero al llegar a investigar si (i/k) es cuadrado o triangular, deberemos sustituirlo por la pregunta de si es primo. Esta es más difícil de responder, pero disponemos de la función ***isprime*** en PARI y de ***esprimo*** en nuestra hoja Conjeturas (situada en http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global)

Puedes adaptar el algoritmo usado en la búsqueda anterior cambiando esas funciones: Observa que ahora, con lo explicado antes, las operaciones se entienden mejor, por lo que omitimos los comentarios y usamos color rojo en las novedades. Para hoja de cálculo podría servir esta rutina de Visual Basic:

```
Sub productriang()
Dim i, j, k, p, c


i = 3: j = 3
While i <= 10 ^ 3
k = 3: p = 3: c = 0
While c = 0 And p < i
If i / k = i \ k And esprimo(i / k) And i / k > 1 Then c = k
If c <> 0 Then MsgBox (i)
k = k + p: p = p + 1
Wend
i = i + j: j = j + 1
Wend
End Sub
```

En PARI

```
{i=3;j=3;while(i<=10^6,k=3;p=3;c=0;while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=k);if(c>0,print1(i,", "));k+=p;p+=1);i+=j;j+=1)}
```

Los triangulares obtenidos son, en este caso, los siguientes:

6, 15, 21, 45, 66, 78, 105, 190, 210, 231, 435, 465, 630, 861, 903, 1035, 1326, 2415, 2556, 2628, 3003, 3570, 4005, 4950, 5460, 5565, 5995, 7140, 8646, 8778, 9870, 12246, 16471, 16836, 17205, 17391, 17766, 20100, 22155, 26565, 26796, 28680, 28920, 30381, 32131, 33411, 33930, 36856, 40755,… (los publicamos en http://oeis.org/A253651)

Podíamos pensar que, al ser el segundo factor primo, el primero será el máximo divisor triangular propio que tiene el número que se descompone (ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/02/de-los-triangulares-alojados-los-primos.html). Esto es así en la gran mayoría de casos. Así, 4005 se descompone como 45*89, siendo 45 es el máximo divisor triangular propio de 4005 y 89 un factor primo. Sin embargo, en el número 3570, su divisor triangular máximo es 595, que daría lugar al producto 3570=595*6, y el 6 no es primo. El producto válido sería 3570=210*17, que sí es primo.

Triangulares producto de triangular y oblongo

Estos son los primeros:

6, 36, 120, 210, 300, 630, 1176, 2016, 3240, 3570, 4950, 7140, 7260, 10296, 14196, 19110, 23436, 25200, 32640, 39060, 41616, 52326, 61776, 64980, 79800, 97020, 116886, 139656, 145530, 165600, 195000, 228150, 242556, 265356, 304590, 306936, 349866, 353220, 404550, 426426, …

Si recuerdas la caracterización de los oblongos en el aparado anterior, entenderás este código en PARI:

```
{i=3;j=3;
while(i<=10^6,k=2;p=4;c=0;
while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&issquare(4*(i/k)+1)&&i/
k>1,c=k);
if(c>0,write1("final.txt",i,", "));
k+=p;p+=2);
i+=j;j+=1)
}
```

Destacamos que el doble de cualquiera de estos números tiene la forma N=P(P+1)Q(Q+1). Así, 2*2016=4032=7*8*8*9. Al contrario, como uno de los factores es oblongo, el producto será par y se podrá dividir entre dos y su mitad será producto de dos triangulares.

Todos los términos no nulos de la sucesión A083374 (6, 36, 120, 300, 630, 1176, 2016, 3240,…) pertenecen a esta, pues si tienen la forma $n^2(n^2-1)/2$ se pueden descomponer en el oblongo n(n+1) y el triangular n(n-1)/2, o bien el oblongo n(n-1) y el triangular n(n+1)/2.

Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A253652

Triangulares producto de un cuadrado y un primo

Al llegar a este punto simplificamos la exposición, ya que tendrás una buena idea de cómo se generan. Los triangulares que se forman multiplicando un cuadrado y un primo son estos:

28, 45, 153, 171, 300, 325, 496, 2556, 2628, 3321, 4753, 4851, 7381, 8128, 13203, 19900, 25200, 25425, 29161, 29403, 56953, 64980, 65341, 101025, 166753, 195625, 209628, 320400, 354061, 388521, 389403, 468028, 662976, 664128, 749700, 750925, 780625, 781875, 936396,…

Los números perfectos lo cumplen

Entre los números encontrados figuran los perfectos 28, 496, 8128,… https://oeis.org/A000396

La razón es que estos números tienen la forma $2^{k-1}(2^k-1)= 2^k(2^k-1)/2$, y son, por tanto, triangulares. Además, como (2^k-1) es primo de Mersenne en esta expresión, k ha de ser impar, y k-1, par, con lo que 2^{k-1} es un cuadrado y (2^k-1) un primo, cumpliéndose así la condición.

Para no cansar más con este tema, sólo incluimos el código PARI con las novedades en rojo:

PARI

```
{i=3;j=3;
while(i<=10^6,k=4;p=5;c=0;
while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=
k);
if(c>0,write1("final.txt",i,", "));
k+=p;p+=2);
i+=j;j+=1)
}
```

Pues ya está bien. Ahora te toca a ti. ¿Sabrías prolongar las siguientes sucesiones con las técnicas que hemos desarrollado en este capítulo?:

Triangulares producto de un cuadrado y un oblongo: 120, 300, 378, 528, 990, 1176, 2016,…

Y por último, los triangulares producto de un oblongo y un primo: 6, 10, 36, 66, 78, 210, 276, …

Con números cuadrados

Proseguimos el tema de buscar números especiales que son producto de dos factores también especiales. Hemos estudiado algunas variantes con triangulares, cuadrados, oblongos y primos.

Ahora descompondremos cuadrados como producto de otros dos de algún tipo especial.

Un caso que no necesita estudio es el de cuadrados producto de cuadrados, pues esta condición la cumplen todos salvo los cuadrados de primos. Así que pasamos a otros productos. En todos ellos exigiremos que **los factores del producto sean distintos**, para evitar trivialidades, ya que si son iguales su producto sería cuadrado sin necesidad de buscar más.

Los algoritmos se basarán todos en la generación de cuadrados mayores que 1 que ya estudiamos, es decir, iniciar P=4 y K=5 y después, en cada pasada del bucle, hacer P=P+K y K=K+2, ya que sabemos que los incrementos de los cuadrados crecen de 2 en 2.

Producto de triangulares distintos

Hemos encontrado esta sucesión, que contiene muchos cuadrados de términos de https://oeis.org/A175497:

900, 7056, 32400, 44100, 88209, 108900, 298116, 705600, 1368900, 1498176, 2924100, 5336100, 8643600, 8820900, 9217296, 10432900, 15210000, 24147396, 37088100, 50893956, 50979600, 52490025, 55353600, 80568576, 114704100, 160123716, 200930625, 219632400, 265559616, 268304400, 296528400, 394657956,…

Pronto se llega a números grandes, por la fuerte condición que les exigimos. Por ejemplo, 88209 es el cuadrado de 297, y se puede descomponer en el producto de dos triangulares distintos: 88209=29403*3 y 29403 es el triangular número 242 (29403 =242*243/2) y 3 es el segundo (3=2*3/2).

Hemos comprobado los cálculos con dos métodos. Aquí tienes el de PARI

```
{i=4;j=5; ‘Inicia cuadrados
while(i<=5*10^8,k=3;p=3;c=0; ‘Inicia factores triangulares
while(k<sqrt(i)&&c==0,if(i/k==i\k&&ispolygonal(i/k,3)&&i/k>1,c=k);
‘Sólo llegamos en la búsqueda hasta la raíz cuadrada, para que ambos factores sean distintos
if(c>0,print(i);write1("final.txt",i,",  ")); ‘Si c>0 se ha encontrado una solución
k+=p;p+=1);
i+=j;j+=2)
}
```

900	3	[3,1]	300	[2,2][3,1][5,2]
7056	6	[2,1][3,1]	1176	[2,3][3,1][7,2]
32400	10	[2,1][5,1]	3240	[2,3][3,4][5,1]
44100	36	[2,2][3,2]	1225	[5,2][7,2]
88209	3	[3,1]	29403	[3,5][11,2]
108900	15	[3,1][5,1]	7260	[2,2][3,1][5,1][11,2]
298116	21	[3,1][7,1]	14196	[2,2][3,1][7,1][13,2]
705600	28	[2,2][7,1]	25200	[2,4][3,2][5,2][7,1]
1368900	6	[2,1][3,1]	228150	[2,1][3,3][5,2][13,2]
1498176	36	[2,2][3,2]	41616	[2,4][3,2][17,2]
2924100	45	[3,2][5,1]	64980	[2,2][3,2][5,1][19,2]
5336100	55	[5,1][11,1]	97020	[2,2][3,2][5,1][7,2][1
8643600	3	[3,1]	2881200	[2,4][3,1][5,2][7,4]
8820900	300	[2,2][3,1][5,2]	29403	[3,5][11,2]
9217296	66	[2,1][3,1][11,1]	139656	[2,3][3,1][11,1][23,2
10432900	10	[2,1][5,1]	1043290	[2,1][5,1][17,2][19,2
15210000	78	[2,1][3,1][13,1]	195000	[2,3][3,1][5,4][13,1]
24147396	91	[7,1][13,1]	265356	[2,2][3,6][7,1][13,1]

Ambos factores triangulares han de tener algún factor en común para que se forme un cuadrado.

Sus partes libres de cuadrados serán iguales, ya que es la única forma de que al final resulte un cuadrado. Lo puedes comprobar con algunos ejemplos de la tabla. Por ejemplo, 705600 es el triangular número 1187, y se descompone en el triangular 28, con parte libre 7, y el triangular25200=60^2*7, que tiene también un 7 como parte libre.

Cuadrados producto de dos oblongos distintos

Este caso es equivalente al que exige que un cuadrado sea igual a cuatro veces el producto de dos triangulares distintos. Así, si el cuadrado 3600 es el producto de los dos oblongos 6=2*3 y 600=24*25, también cumple, como es evidente, que su cuarta parte es el producto de dos triangulares 3600/4=900=3*300.

Los primeros cuadrados que cumplen esto son:

144, 3600, 4900, 28224, 129600, 166464, 176400, 352836, 435600, 1192464, 2822400, 5475600, 5654884, 5992704, 11696400, 21344400, 34574400, 35283600, 36869184, 41731600, 60840000, 96589584, 148352400, 192099600, 203575824, 203918400, 209960100, 221414400, 322274304, 458816400,…

Aquí tienes la descomposición en producto de oblongos de los primeros:

144	2	[2,1]	72	[2,3][3,2]
3600	6	[2,1][3,1]	600	[2,3][3,1][5,2]
4900	2	[2,1]	2450	[2,1][5,2][7,2]
28224	12	[2,2][3,1]	2352	[2,4][3,1][7,2]
129600	20	[2,2][5,1]	6480	[2,4][3,4][5,1]
166464	2	[2,1]	83232	[2,5][3,2][17,2]
176400	72	[2,3][3,2]	2450	[2,1][5,2][7,2]
352836	6	[2,1][3,1]	58806	[2,1][3,5][11,2]
435600	30	[2,1][3,1][5,1]	14520	[2,3][3,1][5,1][11,2]
1192464	42	[2,1][3,1][7,1]	28392	[2,3][3,1][7,1][13,2]
2822400	56	[2,3][7,1]	50400	[2,5][3,2][5,2][7,1]
5475600	12	[2,2][3,1]	456300	[2,2][3,3][5,2][13,2]
5654884	2	[2,1]	2827442	[2,1][29,2][41,2]
5992704	72	[2,3][3,2]	83232	[2,5][3,2][17,2]
11696400	90	[2,1][3,2][5,1]	129960	[2,3][3,2][5,1][19,2]
21344400	110	[2,1][5,1][11,1]	194040	[2,3][3,2][5,1][7,2][11,1]

Como todos son pares, ya tienen un factor común, y como en el caso anterior, sus partes libres de cuadrados han de ser iguales.

Los puedes conseguir en PARI con

```
{i=4;j=5;while(i<=5*10^8,k=2;p=4;c=0;while(k<sqrt(i)&&c==0,if(i/k==i\k&&issquare(4*i/k+1)&&i/k>1,c=k);if(c>0,print(i));k+=p;p+=2);i+=j;j+=2)}
```

Si usamos nuestra imaginación podemos recorrer muchas variantes, pero nos quedaremos con esta última:

Cuadrados producto de triangular y primo

9, 196, 225, 900, 2601, 3249, 4225, 15376, 53361, 88209, 136161, 176400, 181476, 191844, 324900, 450241, 461041, 1032256, 2152089, 2873025, 3960100, 7027801, 8643600, 11826721, 12744900, 17791524, 19193161, 28515600, 43956900, 45360225, 61230625, 63282025, 96216481, 108680625,…

Aquí es como si el número primo aportara el factor que se necesita para convertir un triangular en un cuadrado. Por tanto, el factor primo es igual a la parte libre de cuadrados del otro factor triangular.

Número	Factor triangular	Factor primo	Parte libre de cuadrados del triangular
9	3	3	3
196	28	7	7
225	45	5	5
900	300	3	3
2601	153	17	17
3249	171	19	19
4225	325	13	13
15376	496	31	31
53361	4851	11	11
88209	29403	3	3
136161	3321	41	41
176400	25200	7	7
181476	2556	71	71
191844	2628	73	73

Por tener esta propiedad disponemos de dos códigos distintos para encontrar esos números. Uno es el “largo”, que sigue lo explicado previamente:

{i=4;j=5;
while(i<=5*10^8,k=3;p=3;c=0;

```
while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=
k);
if(c>0,print(i);write1("final.txt",i,", "));
k+=p;p+=1);
i+=j;j+=2)
}
```

Podemos usar este otro, mucho más corto, pero que no nos ordena los números en orden creciente:

```
{i=1;j=2;while(i<=10^5,m=core(i);if(isprime(m),print1(i*m,
", "));i+=j;j+=1)}
```

Como hemos indicado, se podría seguir con otros casos. Intenta reproducir este:

Cuadrados producto de un triangular y un oblongo

36, 900, 3600, 7056, 15876, 41616, 44100, 54756, 69696, 108900,…

EQUILIBRADOS ENTRE SEMEJANTES

Existen números equilibrados que son media entre el anterior y el posterior de la misma clase. Así, un número primo es equilibrado si es promedio de sus dos primos contiguos. Por ejemplo, 257 es media de su anterior 251 y el posterior 263, que por cierto también es primo equilibrado. Los tres primos componentes de la terna formarán, pues, una progresión aritmética.

Los primos equilibrados los tienes en

http://oeis.org/A006562

5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977, …

Si dispones de las funciones ESPRIMO, PRIMANT y PRIMPROX (las puedes encontrar en

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global), es fácil encontrarlos. Por ejemplo, con esta función:

5
53
157
173
211
257
263
373
563
593
607
653
733
947
977

Public Function equiprimo(n)

If esprimo(n) And n = (primprox(n) + primant(n)) / 2 Then equiprimo = True Else equiprimo = False

End Function

Con ella es fácil reproducir la lista:

Las diferencias, salvo en el 5, son múltiplos de 6. La razón es que a partir del 5 todos los primos son del tipo 6n+1 o 6n+5. En las ternas que se forman tienen que ser todos del mismo tipo, ya que si el primero es 6n+1 y el segundo 6m+5, el tercero tendría el tipo 6m+5+(6k+4)=6h+3, no primo. Igualmente, si el primero es tipo 6n+5 y el segundo 6m+1, el tercero sería 6m+1+(6h+2). Lo puedes ver con Z_6: Si el primero tuviera resto 1 y el último resto 5, el promedio presentaría resto 3 y no sería primo. Igual con los otros casos. Una consecuencia curiosa de esto es la sucesión publicada en http://oeis.org/A101597, que cuenta el número de compuestos comprendidos entre el primo equilibrado y sus contiguos, y es claro que todos los elementos tienen el valor 5, 11, 17,…es decir, un múltiplo de 6 menos 1.

Se ha conjeturado que existen infinitos primos equilibrados.

Complementamos con el uso del Buscador:

Solución	Detalles
5	3 Y 7
53	47 Y 59
157	151 Y 163
173	167 Y 179
211	199 Y 223
257	251 Y 263
263	257 Y 269
373	367 Y 379
563	557 Y 569
593	587 Y 599
607	601 Y 613
653	647 Y 659
733	727 Y 739

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1000

Con estas propiedades:

PRIMO
ES 2*N=PRIMANT(N)+PRIMPROX(N)
EVALUAR PRIMANT(N) $y PRIMPROX(N)

En la columna de **Detalles** aparecerán los primos consecutivos.

Otros números equilibrados

Con cuadrados

Ningún cuadrado como tal puede ser equilibrado, ya que $(n+1)^2-n^2=2n+1$ y $n^2-(n-1)^2=2n-1$. Igual le ocurre a los triangulares, ya que, por definición, la diferencia entre el triangular de orden n y su anterior es precisamente n, y con su posterior, n+1. No busques equilibrados entre números poligonales o procedentes de valores numéricos de polinomios.

Así que tendremos que ir visitando otros tipos de números hasta dar con aquellos que presenten elementos equilibrados.

Libres de cuadrados

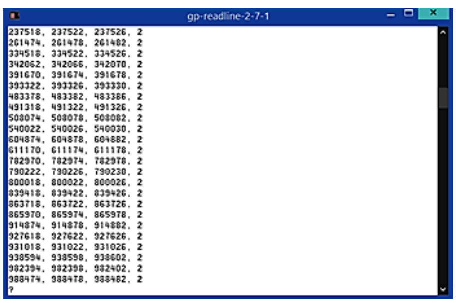
Este tipo de números sí admite equilibrados. Los tienes en http://oeis.org/A245289

2, 6, 14, 17, 19, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 53, 55, 58, 66, 70, 78, 86, 89, 91, 94, 102, 106, 110, 114, 130, 138, 142, 158, 161, 163, 166, 170, 178, 182, 186, 194, 197, 199, 202, 210, 214, 218, 222, 230, 233, 235, 238,…

Los hemos reproducido con hoja de cálculo, incorporando sus factores primos, y nos ha llamado la atención que en la terna de libres de cuadrados consecutivos figuran muchos primos, lo que hace que el M.C.D. de los integrantes de la terna sea frecuentemente un 1.

Terna de libres de cuadrados equilibrados			Descomposición en factores primos		
29	30	31	[29,1]	[2,1][3,1][5,1]	[31,1]
33	34	35	[3,1][11,1]	[2,1][17,1]	[5,1][7,1]
37	38	39	[37,1]	[2,1][19,1]	[3,1][13,1]
41	42	43	[41,1]	[2,1][3,1][7,1]	[43,1]
51	53	55	[3,1][17,1]	[53,1]	[5,1][11,1]
53	55	57	[53,1]	[5,1][11,1]	[3,1][19,1]
57	58	59	[3,1][19,1]	[2,1][29,1]	[59,1]
65	66	67	[5,1][13,1]	[2,1][3,1][11,1]	[67,1]
69	70	71	[3,1][23,1]	[2,1][5,1][7,1]	[71,1]
77	78	79	[7,1][11,1]	[2,1][3,1][13,1]	[79,1]
85	86	87	[5,1][17,1]	[2,1][43,1]	[3,1][29,1]
87	89	91	[3,1][29,1]	[89,1]	[7,1][13,1]
89	91	93	[89,1]	[7,1][13,1]	[3,1][31,1]
93	94	95	[3,1][31,1]	[2,1][47,1]	[5,1][19,1]

Hemos buscado factores comunes en muchas ternas, hasta 10^8, y sólo hemos encontrado el 2. No parece que tengan en común los factores 3, 5 o 7. Si aparece este caso, será para números muy grandes. Con PARI hemos obtenido listados de ternas con M.C.D. igual a 2, pero no para valores mayores. No tenemos respuesta para la cuestión de si terminarán apareciendo.



Semiprimos equilibrados

También se pueden encontrar ternas de semiprimos consecutivos que formen progresión aritmética, con lo que el central de la terna sería un semiprimo equilibrado. Son estos:

34, 86, 94, 122, 142, 185, 194, 202, 214, 218, 262, 289, 302, 314, 321, 358, 371, 394, 407, 413, 415, 422, 446, 471, 489, 493, 497, 517, 535, 562, 581, 586, 626, 634, 669, 687, 698, 734, 785, 791, 815, 838, 842, 922, 982, 989, 1042, 1057, 1079, 1135, 1138,…

http://oeis.org/A213025

Podemos investigar aquí también qué factores comunes tienen estas ternas de semiprimos. Hemos encontrado ternas con el factor 2 en común:

```
289154, 289166, 289178, 2
774142, 774154, 774166, 2
838582, 838594, 838606, 2
844114, 844126, 844138, 2
900142, 900154, 900166, 2
989474, 989486, 989498, 2
```

En ellas los otros factores que acompañan al 2 son ternas de primos equilibrados.

Esfénicos equilibrados

Existen esfénicos (productos de tres primos distintos) que son equilibrados, es decir, que forman ternas en progresión aritmética con el anterior y el posterior esfénico. Forman esta sucesión:

186, 370, 406, 418, 518, 582, 602, 710, 786, 814, 826, 830, 942, 978, 994, 1010, 1034, 1070, 1162, 1310, 1374, 1394, 1570, 1630, 1686, 1758, 1886, 1978, 2014, 2114, 2158, 2270, 2274, 2278, 2294, 2438, 2510, 2534, 2570, 2630, 2666, 2690, 2774, 2778, 2782, 2806, …

Entre ellos figura el año 2014, que ya se comentó en su día que formaba una terna de esfénicos con el 2013 y el 2015.

Los hemos publicado en http://oeis.org/A258276

Siguiendo con la idea de estudiar el MCD de los tres elementos de la terna, aquí encontramos una gran variedad de números primos como resultado, entre ellos 705, 710 y 715 con factor común 5, o 3311, 3322 y 3333 con el 11. Al tener tres factores es más fácil obtener estos resultados.

Podríamos estudiar la misma cuestión con números formados por el producto de cuatro primos distintos, y también encontraríamos equilibrados:

1518, 1554, 2190, 2590, 3354, 4710, 4970, 5810, 7566, 8170, 10506, 11110, 11346, 12194, 12610, 13706, 14098, 15690, 16874, 17574, 18538, 18734, 19830, …

No hemos querido seguir para no cansar a los lectores. Si estudias el código PARI que hemos usado puedes proseguir el estudio en esa dirección, cambiando el 4 por 5, 6 o 7.

is4prim(n)=if(n>0,omega(n)==4&&bigomega(n)==4,0)

```
next4prim(n)={local(k=n+1);while(!is4prim(k),k+=1);k
}
prec4prim(n)={local(k=n-
1);while(!is4prim(k)&&k>0,k-=1);k}
{for(i=1,10^4,if(is4prim(i)&&2*i== next4prim(i)+
prec4prim(i),print(i)))}
```

DAMOS VUELTAS A LOS TRIANGULARES CUADRADOS

Generación de la sucesión

Dos entradas del blog de John D. Cook

(http://www.johndcook.com/blog/2015/08/20/when-is-a-triangle-a-square/ y siguiente) me han animado a volver a tomar el tipo de cuestión al que llamé "dar vueltas" a un tema o concepto. Lo haré sobre estos números:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… (http://oeis.org/A001110)

Evidentemente, estos números tienen en común el ser triangulares y cuadrados a la vez. Puedes leer un desarrollo sencillo y claro en este documento:

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_IV_num_1/jue_mat_num_triang.pdf

Me he dado cuenta de que es un concepto sencillo pero que da lugar a bastantes reflexiones, algoritmos y repasos de teoría.

Nosotros seguiremos en parte este documento para iniciar el tema.

Búsqueda de números triangulares cuadrados

Un número triangular tiene por fórmula n(n+1)/2 y un cuadrado m^2. Aquellos números que participen de las dos características tendrán que cumplir la igualdad

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

De esta igualdad deducimos esta otra mucho más práctica:

$$n^2 + n + \frac{1}{4} - 2m^2 - 1/4 = (n + \frac{1}{2})^2 - 2m^2 - 1/4 = 0$$

O bien

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Con cambio de variable se convierte en una ecuación de Pell:

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Esta ecuación la tenemos muy estudiada

http://hojamat.es/parra/pell.pdf (documento de Rafael Parra) http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html

Disponemos además de una hoja de cálculo para ayudar a resolverla:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

Usamos esta herramienta para el coeficiente 8 y el segundo miembro 1 y nos dan las primeras soluciones:

cuadrado perfecto)				8										
mbro, +1 ó -1				1										
	2	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	2	3	14	17	82	99	478	577	2786	3363	16238	19601	94642	114243
0	1	1	5	6	29	35	169	204	985	1189	5741	6930	33461	40391
	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1
		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución

(1,0) (3,1) (17,6) (99,35) (577,204) (3363,1189) (19601,6930) (114243, 40391),…

Por recurrencia:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Según la teoría de la ecuación de Pell, las soluciones aparecen con las recurrencias (en este caso) $x_n=3*x_{n-1}+8*y_{n-1}$ $y_n=3*y_{n-1}+1*x_{n-1}$. Por ejemplo, 99=3*17+8*6, 35=3*6+1*17.

Ahora sólo nos queda elevar al cuadrado las soluciones de **y** (que equivalen a la variable **m** de la primera igualdad que planteamos) y nos resultarán los triangulares cuadrados:

$0^2=0$, $1^2=1$, $6^2=36$, $35^2=1225$, $204^2=41616$, $1189^2= 1413721$,…

Primer algoritmo

El estudio que acabamos de desarrollar nos da una pista para la generación de términos triangulares cuadrados: Iniciamos dos variables X=1, Y=0, y en cada paso del algoritmo convertimos X en 3X+8Y y la Y en 3Y+X. Terminado el cálculo presentamos el valor de Y^2 como siguiente triangular cuadrado. En el Basic de las hojas de cálculo quedaría así:

```
Sub triangcuad()
Dim x, y, x1, y1, i, t, fila

x = 1: y = 0 'Valores de inicio
fila = 3 'Fila inicial
Cells(fila, 4).Value = 0 'El primer valor es un cero
For i = 1 To 8 'Calculamos sólo ocho
x1 = 3 * x + 8 * y 'Iteración para x
y1 = 3 * y + x 'Iteración para y
x = x1
y = y1
t = y * y 'Número triangular cuadrado
```

fila = fila + 1
Cells(fila, 4).Value = t ‘Se presenta el resultado
Next i
End Sub

Obtendríamos:

0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
5,5421E+10

El que el último se nos ofrezca en coma flotante nos da idea de las limitaciones de la hoja para cálculos con enteros de muchas cifras. Si acudimos a PARI no nos encontraremos con esas limitaciones. Prueba este código:

{x=1;y=0;print(0);while(x<10^10,x1=3*x+8*y;y1=3*y+ x;x=x1;y=y1;t=y^2;print(t))}

```
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056
1882672131025
63955431761796
2172602007770041
73804512832419600
2507180834294496361
85170343853180456676
?
```

En pocos segundos te presenta los triangulares cuadrados menores que 10^10.

Relación de recurrencia con una sola variable

Por la naturaleza de su definición podemos esperar que estos números sigan una relación de recurrencia de segundo orden. Para encontrar su expresión, que será del tipo

$A_n=aA_{n-1}+bA_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 36, 1225, 41616 para plantear:

36=a*1+b*0+c
1225=a*36+b*1+c
41616=a*1225+b*36+c

Resolvemos

1189=35a+b
40391=1189a+35b

1224=36a y a=34, b=-1 y c=2

Según los cálculos anteriores, la relación de recurrencia será

$A_n=34A_{n-1}-A_{n-2}+2$

Es la misma que propone John D. Cook en su blog.

No olvidamos la hoja de cálculo. Intenta una resolución como la de la imagen usando cálculo matricial:

B	C	D	E	F
1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616

A partir de esta escritura matricial del sistema de ecuaciones, creamos debajo la matriz inversa de los coeficientes con MINVERSA, y a su derecha su producto por los términos independientes con MMULT:

1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616
-0,97222222	1	-0,02777778		34
33,0277778	-34	0,97222222		-1
1,97222222	-1	0,02777778		2

Conseguimos así la misma solución 34, -1, 2

Segundo algoritmo

La relación de recurrencia nos permite un segundo algoritmo para encontrar los triangulares cuadrados. El que describimos a continuación presenta los nueve primeros (después existen problemas de coma flotante)

Sub triancuad1()
Dim m, n, p, k, fila
m = 0: n = 1 ‘Valores iniciales
fila = 3
Cells(1, 3).Value = m ‘presenta los dos primeros términos

Cells(2, 3).Value = n
For k = 1 To 7
p = 34 * n - m + 2 ‘relación de recurrencia
Cells(fila, 3).Value = p: fila = fila + 1 ‘presenta los siguientes términos
m = n: n = p ‘cada término se convierte en el anterior
Next k
End Sub

Los términos rellenarán una columna de hoja de cálculo:

C
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056

Siguiendo nuestra costumbre, lo traducimos a PARI para conseguir más términos:

{x=0;y=1;print(0);print(1);for (k=1, 20, z=34*y-x+2;print(z);x=y;y=z)}

No resistimos la tentación, al igual que propone J.C. Cook, de intentar una versión recursiva en forma de función. Funciona muy bien en hoja de cálculo:

Public Function ftriangcuad(n)
If n < 2 Then
ftriangcuad = n
Else
ftriangcuad = 34 * ftriangcuad(n - 1) - ftriangcuad(n - 2) + 2
End If
End Function

No necesita explicación. La tabla siguiente se forma con gran rapidez de cálculo:

N	Ftriangcuad(N)
0	0
1	1
2	36
3	1225
4	41616
5	1413721
6	48024900
7	1631432881
8	55420693056

Fórmula directa

Si lees el capítulo sobre sucesiones recurrentes en nuestra publicación ***Sucesiones***

(http://www.hojamat.es/publicaciones/sucesiones.pdf)

entenderás que a partir de la fórmula de recurrencia es posible encontrar la expresión directa de cada término (fórmula del término general). Sólo insertamos la captura de pantalla de nuestra hoja de cálculo

Recurrencias

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

en la parte homogénea de la recurrencia:

Ecuación característica   Resolver

Discriminante   1152

Dos raíces reales

Z1= 33,97056   Z2= 0,02944

Solución general
0,02946   -0,02946

Expresión X(n)= .02946*(33.97056)^n+-.02946*(.02944)^n)

Con un ligero retoque y la interpretación de los decimales llegamos a la propuesta por John D. Cook:

$$A(n)=\frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^{n}+\left(17-12\sqrt{2}\right)^{n}-2}{32}$$

El uso de la raíz cuadrada de 2 le quita utilidad en nuestro trabajo, por lo que intentaremos prescindir de ella. Para ver la influencia del formato de coma flotante, la implementamos en hoja de cálculo, y el resultado es similar al de los algoritmos anteriores:

A=	17+12√2	33,97056275	
B=	17-12√2	0,029437252	
	n	Fórmula directa	(A^n+B^n-2)/32
	0	0	
	1	1	
	2	36	
	3	1225	
	4	41616	
	5	1413721	
	6	48024900	
	7	1631432881	
	8	55420693056	
	9	1,88267E+12	

Función generatriz

Para quien no lo sepa, diremos que la función generatriz de una sucesión, si se desarrolla como una serie de potencias, poseerá como coeficientes de esas potencias de x los términos de la sucesión.

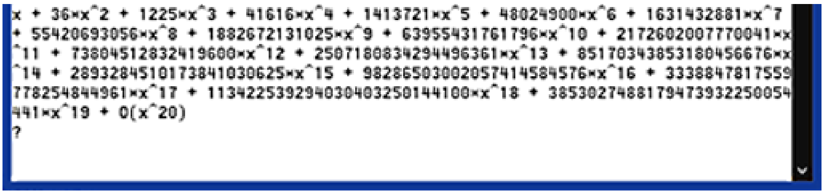
En el caso de los números triangulares cuadrados la función generatriz es

$$F(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)(1-34x+x^2)}$$

(ver http://oeis.org/A001110)

Con esta sencilla orden de PARI podemos comprobar su desarrollo.

print(taylor(x*(1+x)/((1-x)*(1-34*x+x^2)),x,20))


```
x + 36*x^2 + 1225*x^3 + 41616*x^4 + 1413721*x^5 + 48024900*x^6 + 1631432881*x^7
+ 55420693056*x^8 + 1882672131025*x^9 + 63955431761796*x^10 + 2172602007770041*x
^11 + 73804512832419600*x^12 + 2507180834294496361*x^13 + 85170343853180456676*x
^14 + 2893284510173841030625*x^15 + 98286503002057414584576*x^16 + 3338847817559
778254844961*x^17 + 113422539294030403250144100*x^18 + 3853027488179473932250054
441*x^19 + O(x^20)
?
```

Tercer algoritmo

Finalizamos con la presentación de un algoritmo de los que llamamos “ingenuos”, que no usan la teoría para simplificar los cálculos, pero sí la fuerza bruta de la velocidad de proceso. En este caso obligaremos a los números naturales a ir creciendo hasta alcanzar un cuadrado, y después a la inversa, que los cuadrados avancen hasta alcanzar un triangular. Cuando se llegue a una igualdad se imprime el resultado. A pesar de su simplicidad, no resulta lento. Es éste:

Sub triancuad2()
Dim i, j, m, n, k, fila
m = 3: n = 4: i = 2: j = 3 ‘Se inician las variables
k = 10 ^ 7

```
fila = 3
Cells(fila, 3).Value = 1: fila = fila + 1
While m < k 'Busca soluciones menores que k
While m <= n 'Los triangulares crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1 'Hay igualdad
i = i + 1: m = m + i
Wend
While n <= m 'Los cuadrados crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1'Hay igualdad
j = j + 2: n = n + j
Wend
Wend
End Sub
```

Dejamos a los lectores el estudio de por qué funciona este algoritmo para descubrir los triangulares cuadrados. Como los anteriores, llega a los mismos resultados, en este caso hasta 10^7:

C
1
36
1225
41616
1413721

Curiosidades.

Otra recurrencia

Según un comentario incluido en

http://oeis.org/A001110, podemos tener en cuenta otra recurrencia a partir de n=3:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_{n-1}}$$

En efecto, $1225=(36-1)^2/1$, $41616=(1225-1)^2/36$, … O con hoja de cálculo:

A(n)	(A(n)-1)^2/A(n-1)
0	
1	
36	1225
1225	41616
41616	1413721
1413721	48024900
48024900	1631432881
1631432881	55420693056

Intenta averiguar cómo crear esta tabla siguiendo la recurrencia. La podemos expresar también como que la media geométrica entre el anterior y el siguiente a un término coincide con el cuadrado de ese término al que se le ha restado una unidad.

Una propiedad similar es que la media geométrica entre un término y el siguiente es también un número triangular. Lo tienes en esta tabla. Escribe los triangulares cuadrados e intenta después reproducirla:

A(n)	RAIZ(A(n)*A(n+1))	Orden como triangular
0		
1		
36	6	3
1225	210	20
41616	7140	119
1413721	242556	696
48024900	8239770	4059
1631432881	279909630	23660

En http://oeis.org/A029549 tienes estudiadas esas medias geométricas y puedes descubrir que estos números son oblongos y también su conexión con ciertas ternas pitagóricas. A partir de esta sucesión se abren tantos caminos que es mejor parar aquí.

Por otra parte, por ser cuadrados, los términos son suma de dos triangulares consecutivos, luego los triangulares cuadrados son "triangulares suma de dos triangulares consecutivos"

Raíz cuadrada

Ya que tratamos con cuadrados, sería interesante estudiar sus raíces cuadradas, que son estas:

0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860,…

(http://oeis.org/A001109)

Estos números no nos son desconocidos, pues son soluciones de la incógnita Y en la ecuación de Pell que usamos para encontrar sus cuadrados

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Insertamos de nuevo la tabla que obtuvimos:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Más adelante veremos alores relacionados con la variable X.

Recurrencia entre las raíces

Al igual que sus cuadrados, estos números se pueden generar mediante una recurrencia de segundo grado. Para descubrirla operamos como en el apartado anterior.

$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 6, 35, 204 para plantear:

6=a*1+b*0+c
35=a*6+b*1+c
204=a*35+b*6+c

Resolvemos

29=5a+b
169=29a+5b
169-5*29=169-145=24=4a   a=6, b=-1, c=0

Luego $\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}}$, que es la recursión que figura en A001109

Esta recurrencia la podemos comprobar con nuestra hoja de cálculo dedicada a ellas http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Escribimos los coeficientes 6 y -1

Recurrencias lineales de segundo orden					
Coeficientes					
A	6		B	-1	
Valores iniciales					
X0	0		x1	1	

Y obtenemos la sucesión

Sucesión	**0**
	1
	6
	35
	204
	1189
	6930
	40391
	235416
	1372105
	7997214
	46611179

Orden como triangulares

Al igual que hemos estudiado las raíces cuadradas de los triangulares cuadrados, también podemos fijar la atención en su orden como triangulares.

Para ello planteamos k(k+1)/2=A(n), siendo A(n) un término de la sucesión de triangulares cuadrados. Es fácil ver que la solución será

$$k = \frac{\sqrt{8A(n)+1}-1}{2}$$

Se generará esta otra sucesión:

1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449, 11309768, 65918161, 384199200,… (http://oeis.org/A001108)

También estos números están relacionados con la ecuación de Pell del anterior apartado.

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Basta recordar que llamamos x a 2n+1. Deshaciendo el cambio en la tabla:

(3-1)/2=1, (17-1)/2=8, (99-1)/2=49, (577-1)/2=288,… y así resultarán todos.

Según OEIS, su fórmula recursiva es idéntica a la de los anteriores, pero con término independiente igual a 2:

$\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}+2}$

Para no cansar a los lectores nos limitamos a comprobarla.

8=6*1-0+2, 49=6*8-1+2, 288=6*49-8+2,…

Diferencias entre términos

Si restamos cada dos términos consecutivos, el resultado coincide con las raíces cuadradas de los términos de orden impar. Es una propiedad muy curiosa, pero no he encontrado ninguna demostración elemental de la misma.

N	Triangulares cuadrados	Diferencias	Diferencias al cuadrado
0	0	0	
1	1	1	1
2	36	35	1225
3	1225	1189	1413721
4	41616	40391	1631432881
5	1413721	1372105	1,88267E+12
6	48024900	46611179	2,1726E+15
7	1631432881	1583407981	2,50718E+18
8	55420693056	53789260175	2,89328E+21

En la tabla, si elevamos las diferencias al cuadrado nos resultan los términos de orden impar. Son los de color rojo enlazados con flechas. Si, además, encontráramos su orden como triangulares, sería un cuadrado (compruébalo), y ellos mismos, además de triangulares serían ***hexagonales***. Bastante curioso, como ves.

Recurrencia directa

Lekraj Beedassy, en http://oeis.org/A001110, propone la siguiente recurrencia no lineal que sólo depende del término anterior:

$$a_{n+1} = 1 + 17a_n + 6\sqrt{a_n + 8{a_n}^2}$$

Esta propiedad permite engendrar de nuevo los números triangulares cuadrados en una hoja de cálculo directamente, sin macros, y con gran rapidez, con una fórmula similar a **=1+17*I5+6*RAIZ(I5+8*I5^2)**, donde puedes sustituir I5 por el término anterior de la sucesión.

NÚMEROS DOBLE DE UN CUADRADO

Hoy haremos un ejercicio de “dar vueltas” a un tema, técnica muy usada en documentos anteriores y que hemos ido abandonando a lo largo de los años. Consiste en tomar un concepto y buscarle propiedades desde varios puntos de vista.

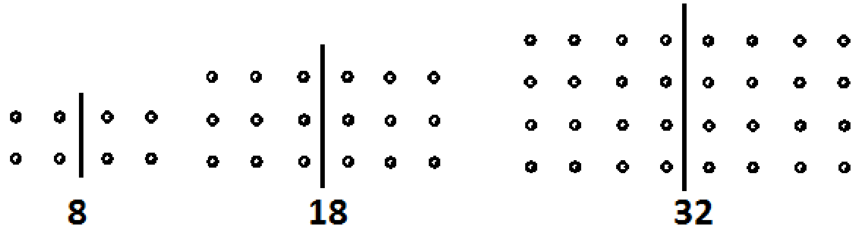
Hoy daremos vueltas a los números que son el doble de un cuadrado, como 2, 8, 72 o 288. Su expresión es, evidentemente, $D(n)=2n^2$, donde los hemos representado con la D de doble. Simultáneamente, son mitad de otro cuadrado, ya que $2n^2=(2n)^2/2$, lo que los convierte en el área de un triángulo isósceles de lado 2n, o de un cuadrado de diagonal 2n.

Es una expresión muy simple, pero que nos puede llevar a varios territorios muy diferentes entre sí.

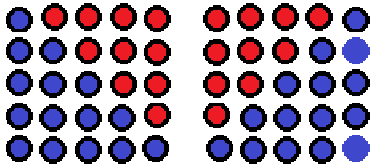
Están publicados en http://oeis.org/A001105, y de esa página extraeeremos algunas ideas.

Relación con números figurados

Es evidente que estos números son también figurados (representables con una figura geométrica), como los triangulares o pentagonales, pero especiales, no pertenecientes a la categoría general de números poligonales. Simplemente están formados por dos cuadrados adosados, tal como se ve en la siguiente imagen.



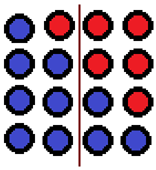
Como todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos, los dobles de cuadrados que estamos estudiando se podrán formar adosando cuatro triangulares:



En la imagen se han usado los triangulares T(4) y T(5) para formar el número

$50=2*5^2=2(T(4)+T(5))=2(10+15)=50$

Por tanto, además de ser dobles de cuadrados, estos números son suma de dobles de triangulares, como era de esperar. Al contrario, también son mitad de una suma de triangulares consecutivos, según la figura siguiente:



Algebraicamente, podemos expresar:

Todo doble de cuadrado es el promedio de dos números triangulares consecutivos:

$2n^2=(T(2n-1)+T(2n))/2=(2n(2n-1)+2n(2n+1)/4=2n*4n/4=2n^2$

Es decir **D(n)=(T(2n-1)+T(2n))/2**

Así: 2=(1+3)/2, 8=(6+10)/2, 18=(15+21)/2

Como los números triangulares, multiplicados por 8 y aumentados en una unidad se convierten en cuadrados ($8T(n)+1=(2n+1)^2$), como ocurre, por ejemplo, en

$8*15+1=121=11^2$, la propiedad anterior nos indica que si efectuamos la misma operación con los dobles de cuadrados, resultará el promedio de dos cuadrados:

$8D(n)+1=(8T(2n-1)+1+8T(2n)+1)/2=((4n-1)^2+(4n+1)^2)/2$

Ejemplo: $8*D(4)+1=8*32+1=257$

$(15^2+17^2)/2=(225+289)/2=514/2=257$

Si a un doble de cuadrado lo multiplicamos por 8 y le añadimos una unidad, resulta el promedio de dos cuadrados diferenciados en dos unidades.

La anterior operación desemboca en un cuadrado más la unidad, ya que $8D(n)+1=16n^2+1=(4n)^2+1$. Así ha ocurrido en el ejemplo anterior.

El cuadrado de un número múltiplo de 4 más la unidad es el promedio de dos cuadrados m^2 y $(m+2)^2$.

Por ejemplo, $1024+1=1025=(31^2+33^2)/2$

Con esto finalizamos la “vuelta” a este tipo de números figurados y sus propiedades algebraicas.

Relación con sumas

D(n) es el resultado de sumar todas las particiones de 2n en exactamente dos partes(Wesley Ivan Hurt, Jun 01 2013).

Es sencillo demostrarlo, pues en cada paréntesis de los siguientes figura una partición de 2n:

$(1+2n-1)+(2+2n-2)+\dots(n+n)=n*2n=2n^2=D(n)$

La suma de enteros consecutivos entre D(n) y D(n+1)-1, ambos inclusive, es un cubo (Patrick J. McNab, Dec 24 2016).

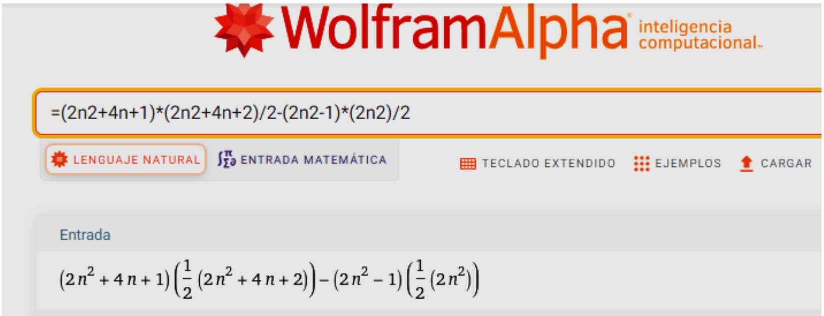
En efecto, entre 8 y 32, por ejemplo, esa suma es $8+9+10+11+\dots30+31$, y es igual a $343=7^3$. En general:

Los primeros números consecutivos suman un triangular, luego esa suma será igual a S=T(D(n+1)-1)-T(D(n)-1). Desarrollando:

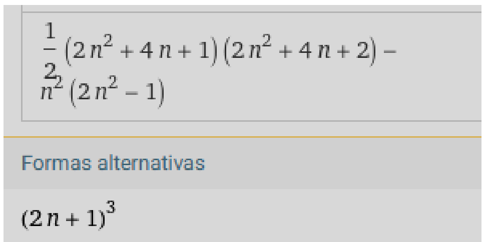
$S=T(2(n+1)^2-1)-T(2n^2-1)=T(2n^2+4n+1)-T(2n^2-1)$ que es igual a

$S=(2n^2+4n+1)*(2n^2+4n+2)/2-(2n^2-1)*(2n^2)/2.$

Le damos este dato a Wolfram Alfha



Nos devuelve la expresión simplificada:



En efecto, es un cubo, $(2n+1)^3$. Hemos programado estas sumas y se comprueba su carácter de cubo:

D(n)	2	8	18	32	50
Suma	27	125	343	729	1331

Recurrencias

Vincenzo Librandi propone la siguiente, en la que se mezcla a(n-1) con la variable n

a(n) = 4*n + a(n-1) – 2

No es difícil comprobarla con hoja de cálculo. Basta crear una columna con los valores 1, 2, 3, …y comenzar con a(1)=2, para después ir aplicando la relación hacia abajo:

n	4n+a(n-1)-2
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50
6	72
7	98
8	128
9	162
10	200

Algebraicamente: $4n+2(n-1)^2-2 = 4n+2n2-4n+2-2=2n^2$

Es preferible una recurrencia lineal homogénea, en la que a(n) depende de los términos anteriores sin implicar al número de orden. Muchos números figurados siguen una relación de recurrencia con los coeficientes 1, -3, 3, y en este caso es válida. Para demostrarlo hemos acudido a nuestra herramienta *ecurecurre,xlsm*, accesible desde la página

http://www.hojamat.es/sindecimales/otros.htm

En el listado sobre el blog que contiene hay que buscar *ecurecurre.xlsm*

Con ella se comprueba que los propuestos son los coeficientes válidos:

Sucesión	2	8	18	32
3,875	-5,5	2,125		
-5,5	7	-2,5		
2,125	-2,5	0,875		

Filas	3	Columnas	3

Resultado: Producto

1
-3
3

Para confirmarlo hemos acudido a otra de nuestras herramientas, la que estudia relaciones de recurrencia de segundo orden:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Coeficientes					
A	3	**B**	-3	**C**	1
Valores iniciales					
X0	2	**x1**	8	**x2**	18

Al pedir la sucesión observamos que se reproduce la sucesión D(n):

2
8
18
32
50
72
98
128

$2n^2 = 3(2(n-1)^2))-3(2(n-2)^2))+2(n-3)^2$

Volvemos a acudir a Wolfram Alfha y nos da la igualdad como verdadera.

Entrada

$$2\,n^2 = 3\left(2\,(n-1)^2\right) - 3\left(2\,(n-2)^2\right) + 2\,(n-3)^2$$

Forma expandida

Verdadero

Caso de base prima

Con nuestro Buscador de naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) es sencillo crear la subsucesión de D(n) formadas por aquellos términos de base prima.

Resultado de la búsqueda

Fin

lúm.	Solución	Detalles
1	2	8
2	3	18
3	5	50
4	7	98
5	11	242
6	13	338
7	17	578
8	19	722
9	23	1058
10	29	1682
11	31	1922
12	37	2738
13	41	3362

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

PRIMO
EVALUAR 2*N^2

Forman la sucesión 8, 18, 50, 98, 242, 338, 578, 722, 1058, 1682, 1922, 2738, 3362, 3698, 4418,…

Está publicada en http://oeis.org/A079704

Los podemos representar como **$2p^2$**

En ellos, la falta de pautas en la sucesión de primos hace inviables las recurrencias lineales, pero presentan algunas curiosidades.

Funciones TAU, SIGMA y PHI

TAU (número de divisores) tiene le valor de 6 en todos los términos, porque depende solo de los exponentes, y según su fórmula, ***$TAU(2p^2)=(1+1)(1+2)=6$***

SIGMA (suma de divisores) posee un desarrollo parecido: ***$SIGMA(2p^2)=(1+2)(1+p+p^2)$***

Por ejemplo,

$SIGMA(242)=SIGMA(2*11^2)=(1+2)(1+11+11^2)=3*133=399$

PHI (cuenta coprimos con N y menores que él), según también su fórmula usual, tendría en este caso la siguiente:

$PHI(2p^2)= 2p^2(1-1/2)(1-1/p)=p(p-1)$

En el caso de $98=2*7^2$, se cumplirá $PHI(98)=7*6=42$

Podríamos seguir:

$OMEGA(2p^2)=2$, $BIGOMEGA(2p^2)=3$, …

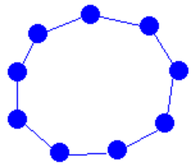
POLIGONALES

Ya se advirtió en la Presentación de esta publicación que no se trataría en ella el estudio sistemático de los números poligonales y piramidales, por lo que lo que se incluye a continuación tiene el carácter de una colección de curiosidades y propiedades notables. Se han conservado cuestiones sobre poligonales centrados.

¿ERES UN POLIGONAL?

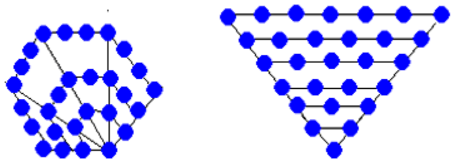
Si reuniéramos en una sola lista los números triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc. ¿llenarían todo el conjunto de los números naturales?

Podemos llamar **orden n** del número poligonal al número de unidades incluidas en uno de sus lados, y **tipo k**, al número de lados. Evidentemente, si consideramos los poligonales de orden 2, cualquier número N se puede representar como un polígono de N lados, luego la respuesta es afirmativa.



El problema es más interesante si sólo estudiamos números poligonales de al menos orden 3.

Existen números que son triangulares, como el 10, pentagonales, como el 22, o incluso algunos, como el 28, que son triangulares y hexagonales simultáneamente, como puedes observar en la imagen:



¿Existirán números que sólo puedan considerarse como poligonales de grado uno y no admitan otras representaciones poligonales?

Dado un número cualquiera, como 2011, sería interesante averiguar qué representaciones admite como número poligonal. Se puede abordar el problema desde varios puntos de vista. Veamos el más sencillo:

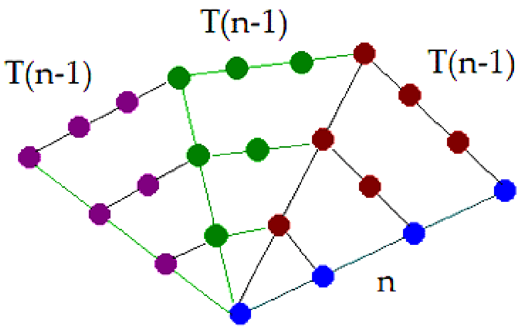
Generación mediante triangulares

Todo número poligonal de orden n y tipo k se puede generar mediante esta fórmula:

$$P_{n,k} = n + (k-2)T_{n-1}$$

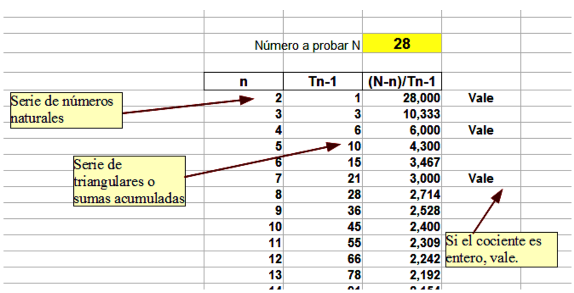
siendo T_{n-1} el número triangular de orden n-1.

No es difícil justificar esta fórmula La simple visión de la siguiente imagen te permite comprenderla. Las unidades azules representan a n, y las de los otros tres colores a los números triangulares que terminan de engendrar el pentagonal:



Así que para saber si un número es n-gonal **bastará restarle el valor de n y después averiguar si la diferencia contiene a Tn-1 un número entero de veces.**

En una hoja de cálculo se pueden organizar tres columnas: La primera con los números naturales n, la segunda con sus sumas acumuladas, que serían los números triangulares T, y en la tercera el cociente (N-n)/T. Si este cociente es entero, hemos descubierto que el número probado es n-gonal.



Número a probar N: 28

n	Tn-1	(N-n)/Tn-1	
2	1	28,000	Vale
3	3	10,333	
4	6	6,000	Vale
5	10	4,300	
6	15	3,467	
7	21	3,000	Vale
8	28	2,714	
9	36	2,528	
10	45	2,400	
11	55	2,309	
12	66	2,242	
13	78	2,192	

Serie de números naturales

Serie de triangulares o sumas acumuladas

Si el cociente es entero, vale.

En la imagen tienes el proceso para descubrir que el número 28 es 28-gonal, hexagonal y triangular, como ya sabíamos. También podemos comprobar que hay números, como el 2011, que sólo admiten formar un polígono de grado 1 y tipo 2011. Sin embargo, el 2016 admite seis representaciones, con tipos 2016, 673, 136, 24, 6 y 3.

Generación mediante fórmula

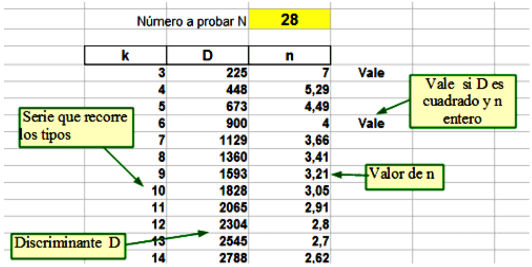
De la generación de números poligonales a partir de triangulares se puede deducir la popular fórmula

$$P_{n,k} = \frac{n\left(n(k-2)-(k-4)\right)}{2}$$

Si la consideramos como ecuación de segundo grado en n, se puede exigir que su discriminante sea cuadrado perfecto, es decir:

$$D = (k-4)^2 + 8P_{n,k}(k-2) = M^2$$

Esto nos da otro procedimiento: Recorremos valores de k y observamos cuáles producen cuadrados perfectos y después si el valor de n y k son enteros. En la imagen puedes observar cómo se organiza la búsqueda en hoja de cálculo



Según la anterior fórmula, los números primos **p** sólo pueden ser p-gonales, es decir, de orden 2. Son como collares, con los elementos situados todos en el perímetro. Hay otros números compuestos que comparten esta misma propiedad. Están recogidos en **http://oeis.org/A176949:**

4, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 77, 80, 86, 98, 104, 110, 116, 119,…

Ninguno puede ser k-gonal para k<N

Con este sencillo código en el Basic de Excel puedes encontrar de cuántas formas pueden expresarse los 28 primeros números como poligonales (excluimos 0, 1 y 2)

```
Fila=15
For i = 3 to 28
a = 1
b = 0
For k = 2 To i – 1
c= (i - k) / a
If c=int(c) Then b = b + 1
a = a + k
Next k
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 6).Value = i
```

```
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 7).Value = b
fila = fila + 1
Next i
```

Obtendríamos esta tabla

Número	Posibles
3	1
4	1
5	1
6	2
7	1
8	1
9	2
10	2
11	1
12	2
13	1
14	1
15	3
16	2
17	1
18	2
19	1
20	1
21	3
22	2
23	1
24	2
25	2
26	1
27	2
28	3

Observamos que en los primos sólo existe una posibilidad desechando las trivialidades y que también ocurre lo mismo en 4, 8, 14… como se afirmó más arriba.

Para quienes vayan conociendo PARI, tenemos este código equivalente, aunque menos legible:

```
isinteger(n)=(n==truncate(n))
{for(i=3,28,a=1;b=0;for(k=2,i-1,if(isinteger((i-k)/a),b=b+1);a=a+k);print(i," ",b))}
```

CUBOS Y GNOMONES

En alguna página web he vuelto a encontrar esta propiedad:

$1 = 1^3$
$3+5 = 2^3$
$7+9+11 = 3^3$
$13+15+17+19 = 4^3$

Independientemente de su elegancia, es una invitación a profundizar en otras relacionadas con ella y a justificar rigurosamente su existencia.

(1) La propiedad presentada está relacionada con otra bien conocida:

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$

Saca consecuencias:

¿Se puede afirmar que todo cubo perfecto es diferencia de dos cuadrados?

En caso afirmativo ¿Qué tipo de números son los que pueden formar esa diferencia?

¿Podrías demostrarlo con todo rigor?

(2) La propiedad considerada nos permite encontrar una expresión algebraica para la suma de varios cubos consecutivos, por ejemplo

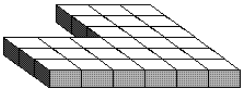
$K^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + \ldots + (k+r)^3$

¿Sabrías encontrarla? Se pueden dar varias distintas. Si deseas comprobar la que propongas usa la hoja de cálculo

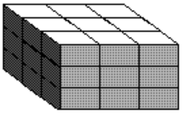
Número	Cubo	Sumas	Mi fórmula
3	27	27	27
4	64	91	91
5	125	216	216
6	216	432	432
7	343	775	775
8	512	1287	1287
9	729	2016	2016
10	1000	3016	3016
11	1331	4347	4347
12	1728	6075	6075

Es esclarecedor observar la cuestión propuesta desde el punto de vista geométrico. Si representamos la suma

7+9+11 como un embaldosado compuesto de tres gnomones, n^3 se adivina apilando baldosas:

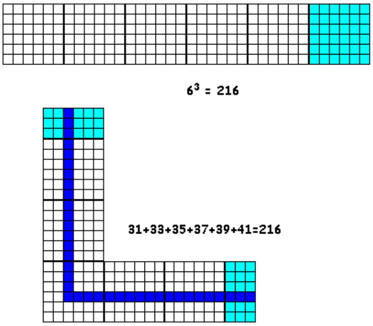


En este caso se visualiza fácilmente



Prueba a convertir en cubo de esta forma otras sumas parecidas, como 13+15+17+19.

También es atractiva la idea de formar primero el cubo y después convertirlo en suma de impares. Observa la figura:



Otra vuelta

Hasta ahora hemos sumado números impares y potencias. La demostración algebraica de las fórmulas de este tipo puede estar sujeta a errores. Nadie puede decir que no se ha equivocado en un desarrollo algebraico de dos hojas. Un método para comprobar nuestros cálculos es el uso de una fórmula de interpolación.

En este caso un método de interpolación adecuado es el de Newton. Se puede adaptar con cierta facilidad al caso de valores enteros equidistantes. En la siguiente dirección puedes encontrar su implementación en Excel y Calc:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

Si aplicamos esta herramienta al caso de la suma de cubos tomando, por ejemplo, como primer cubo el 27, nos resultaría esta expresión:

Suma=27 + 64(x-3)+61/2(x-3)(x-4)+5(x-3)(x-4)(x-5)+1/4(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)

Puedes comprobar su validez dando a x los valores 3, 4, 5, 6,7,… para comprobar que se obtienen las sumas de cubos 27, 91, 216, 432, 775,…

Otro problema es el simplificar esta expresión, que también sería una operación sujeta a errores. Si lo haces, observarás que efectivamente la fórmula equivale a $T^2_{k+r} - T^2_{k-1}$.

Nota: No resisto incluir la interpolación que se logra con la calculadora en red WIRIS, porque es un gran auxiliar en este tipo de desarrollos:

$$a=\{3,4,5,6,7\} \rightarrow \{3,4,5,6,7\}$$
$$b=\{27,91,216,432,775\} \rightarrow \{27,91,216,432,775\}$$
$$\text{interpolar}(a,b) \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x1^4+\frac{1}{2}\cdot x1^3+\frac{1}{4}\cdot x1^2-9$$

¿Por qué entonces usar la hoja de cálculo? Yo tengo mi propia respuesta, y es que resulta más divertido pedalear que echar gasolina.

Cuando ya tenía programadas las tres entradas sobre Cubos y gnómones encontré esta curiosidad en el siempre interesante blog de Claudio

http://simplementenumeros.blogspot.com/

$$\frac{11480^2+11481^2+11482^2+11483^2+11484^2}{8117^2+8118^2+8119^2+8120^2+8121^2}=2$$

Me planteé buscar cocientes similares pero con suma de cubos. Para ello, según lo que hemos visto en esas entradas, bastaría buscar diferencias de cuadrados de números triangulares tales que las diferencias entre sus índices fueran iguales dos a dos, como ocurre, por ejemplo con T_{10}^2 - T_5^2 = 45^2-10^2 y T_{18}^2 - T_{13}^2 =153^2-78^2, (10-5=5 y 18-13=5) y que, además, las dos diferencias fueran divisibles, como ocurre en este ejemplo, en el que 153^2-78^2=17325 es múltiplo de 45^2-10^2=1925.

Después bastaría traducir las diferencias entre triangulares en sumas de cubos, con lo que obtendríamos cocientes aparentemente complicados con resultado simple. La exigencia de que las diferencias entre índices sean iguales se debe a un deseo de simetría pero no es imprescindible.

Con una tabla de doble entrada de cuadrados de triangulares o con código Basic se encuentran fácilmente.

Presentamos cuatro de esos resultados, pero se pueden obtener muchos más.

$$\frac{4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3+11^3+12^3}{2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3} \rightarrow 2$$

$$\frac{10^3+11^3+12^3+13^3+14^3+15^3+16^3+17^3+18^3}{2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3} \rightarrow 9$$

$$\frac{7^3+8^3+9^3}{2^3+3^3+4^3} \rightarrow 16$$

$$\frac{12^3+13^3+14^3+15^3+16^3+17^3+18^3+19^3+20^3+21^3+22^3+23^3}{4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3+11^3+12^3+13^3+14^3+15^3} \rightarrow 5$$

Carácter de múltiplos de 5

Es fácil ver que aunque la expresión propuesta tiene denominador 6, su resultado será entero, porque ese ha sido su origen, y porque los factores k(k+1)(2k+1) garantizan un factor 2 y un 3. Estúdialo, que no es difícil de descubrir.

¿De dónde sacamos el factor 5?

Lo podemos ver mediante congruencias módulo 5. El valor de k puede presentar respecto al 5 los restos 0, 1, 2, 3 o 4.

Resto 0: En ese caso **k** contiene el factor 5

Resto 1: El factor $12k^2+12k+1$ será múltiplo de 5

Resto 2: Contamos con el factor 2k+1

Resto 3: El factor $12k^2+12k+1$ sería congruente con 12*9+12*3+1=108+36+1=145, múltiplo de 5

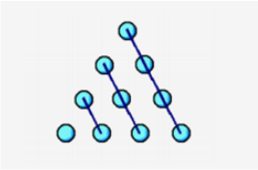
Resto 4: Nos proporciona el factor deseado el valor de k+1

En todos los casos la suma de cuadrados será un múltiplo de 5.

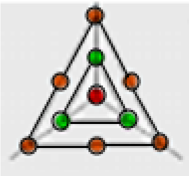
Hemos terminado con éxito. Nuestras sospechas tenían fundamento y la sucesión 25, 365, 2030, 7230, 19855, 45955, 94220, 176460… representa simplemente los distintos valores de un polinomio de quinto grado definido sobre los números naturales.

POLIGONALES CENTRADOS

Los números poligonales ordinarios se engendran acumulando distintos polígonos a partir de un vértice, como podemos ver en la figura



Los poligonales centrados son similares, pero los polígonos se acumulan alrededor de un centro, con sus lados paralelos



Todos los poligonales de esta clase se pueden pues generar mediante sumas de números naturales que representen los contornos de los polígonos. En el caso de los triángulos serían 1+3+6+9+12+…

Efectuando sumas parciales obtendríamos la sucesión 1, 4, 10, 19, 31,.., a la que nombraremos como “números triangulares centrados”.

En el caso de cuadrados se formaría la suma 1+4+8+12+16+…, y las sumas formarían la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números “cuadrados centrados”.

Con el mismo método resultarían los “pentagonales centrados”, a partir de la suma 1+5+10+15+20…, que serían 1, 6, 16, 31, 51,…

En general, los polígonos de orden n y lado k, al sumarse formarían:

1+n+2n+3n+4n+...+kn=1+n*(1+2+3+4+5+...+k)=1+n*k*(k+1)/2

Si contamos el 1 como primer elemento, la suma del paréntesis tendría un elemento menos, y daría la expresión, si llamamos POLC al poligonal centrado:

POLC(n,k)=1+n*k*(k-1)/2=(n*k^2-n*k+2)/2

Es decir:

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

En ella n representa el tipo de poligonal y k el lado.

Así, POLC(5,4)=(5*16-5*4+2)/2=62/2=31, tal como vimos en el listado de pentagonales.

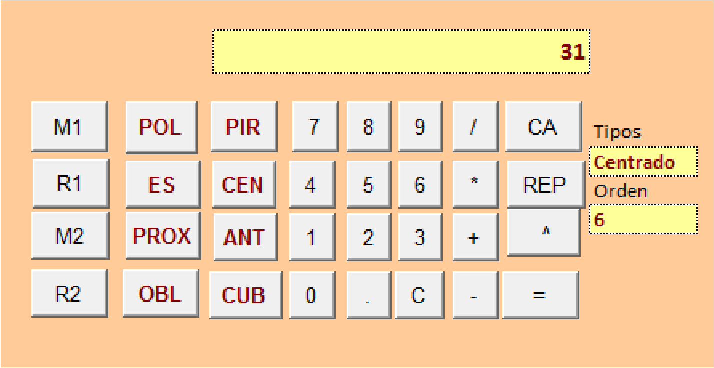
POLC(3,5)=(3*25-3*5+2)/2=62/2=31, que sería el quinto triangular que obtuvimos más arriba.

Calculadora CALCUPOL

Estos cálculos se pueden evitar con nuestra calculadora de números figurados, “Calcupol”. Esta calculadora Se descarga desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Con la tecla CEN (de centrado) y la secuencia de teclas **3 CEN 5 =** obtendríamos el triangular centrado de lado 5, que ya sabemos vale 31.



Usaremos esta calculadora varias veces en este tema.

Relación con los poligonales ordinarios

Si recordamos la fórmula de los números poligonales

k((n-2)*k-(n-4))/2

y la comparamos con la de los centrados

$(n*k^2-n*k+2)/2$

resulta:

$(n*k^2-n*k+2)/2-(k^2*(n-2)-k*(n-4)/2 =$

$=(n*k^2-n*k+2-n*k^2+2k^2+n*k-4k)/2 =$

$= (2+2k^2-4k)/2=(k-1)^2$

Así que si conocemos un poligonal ordinario, bastará sumarle **el cuadrado del lado después de restarle una unidad**. Lo vemos con Calcupol. El número poligonal de orden 7 (heptagonal) de lado 10 tiene un valor de 235 (secuencia de teclas **7 POL 10 =**) y si le añadimos $(10-1)^2$, obtenemos 235+81=316, que es el poligonal centrado del mismo orden y lado. Puedes comprobarlo con la secuencia **7 CEN 10** =

Relación con los triangulares ordinarios

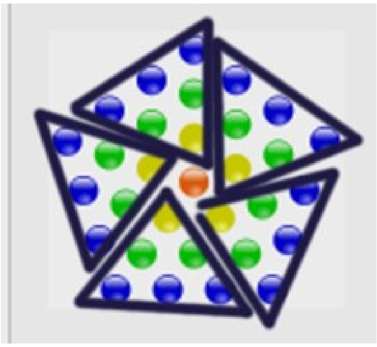
La expresión

$$POLC(n,k) = \frac{nk^2 - nk + 2}{2}$$

Se puede escribir así:

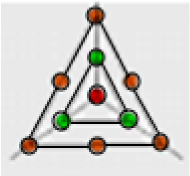
$$POLC(n,k) = n\frac{k(k-1)}{2} + 1 = nT(k-1) + 1$$

Esto nos indica que un poligonal centrado se forma añadiendo a 1 n números triangulares de lado n-1. En el caso, por ejemplo, del pentagonal de lado 4, se podrá descomponer en cinco triángulos de lado 3 y una unidad. La siguiente imagen, adaptación de otra de la Wikipedia, nos muestra claramente los triángulos:



Números triangulares centrados

Comenzamos el estudio particularizado para cada orden, siendo n=3 el caso de menos lados. Ya se comentó más arriba que los triangulares centrados se forman mediante triángulos concéntricos como los de la imagen:



Se considera la unidad como primer triángulo.

Ya se vio que se forman mediante la suma 1+3+6+9+12+...+3k, que da lugar a la expresión 1+3*k(k-1)/2, con lo que los primeros triangulares centrados serán; 1, 1+3, 1+3+6, 1+3+6+9,….es decir: 1, 4, 10, 19,…

Completamos la sucesión con más términos:

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, 235, 274, 316, 361, 409, 460, 514, 571, 631, 694, 760, 829, 901,… Están publicados en http://oeis.org/A005448

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno.

Fijas en la parte derecha **“Centrado” y orden 3**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1. Después, cada vez que pulses **PROX**, aparecerán los siguientes términos: 4, 10, 19, 31,...

Es interesante deducir la expresión del término general, que ya conocemos, mediante nuestro interpolador lineal para números naturales

(lo puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton)

Si la aplicamos a los números 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64 descubrimos que sus diferencias de tercer orden son nulas, y que esto los convierte en valores de un polinomio de segundo grado.

1	2	3	4	5	6	7
1	4	10	19	31	46	64
	3	6	9	12	15	18
		3	3	3	3	3
			0	0	0	0
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	0	3	3	1
720	120	24	6	2	1	1

La herramienta de interpolación nos proporciona también los coeficientes en las filas inferiores.

Si conoces la interpolación de Newton entenderás que el polinomio buscado es

1/1+3/1(x-1)+3/2(x-1)(x-2)=1+3x(x-1)/2

Esto comprueba lo indicado más arriba.

Propiedades

(1) A partir del 10, todos los triangulares centrados son suma de tres triangulares consecutivos.

TC(n)=T(n)+T(n-1)+T(n-2)

Es una cuestión de Álgebra:

T(x-2)+T(x-1)+T(x)=(x-2)(x-1)/2+(x-1)x/2+x(x+1)/2=(x^2-3x+2+x^2-x+x^2+x)/2=($3x^2$-3x+2)/2=1+3x(x-1)/2= TC(x)

Por inducción

Se cumple para $TC(4)=10=1+3+6=T(1)+T(2)+T(3)$

Si se cumple para x, será $TC(x)=T(x-2)+T(x-1)+T(x)$. Si añadimos 3x, se convertirá en $TC(x+1)$, y bastará demostrar que $T(x-2)$ se convierte en $T(x+1)$

En efecto:

$(x-2)(x-1)/2+3x=(x^2-3x+2+6x)/2=(x^2+3x+2)/2=T(x+1)$

Piénsalo bien, sólo hay que convertir $T(x-2)$ en $T(x+1)$

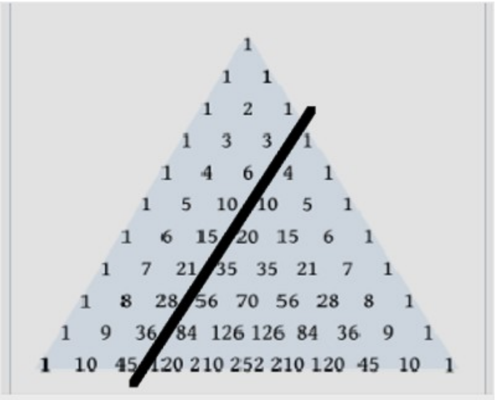
(2) Relación con números combinatorios

$TC(n+1) = C(n+3, 3)-C(n, 3)$

Otra cuestión de Álgebra:

$C(n+3, 3)-C(n, 3)=((n+3)(n+2)(n+1)-n(n-1)(n-2))/6$

$(n^3+6n^2+11n+6-n^3+3n^2-2n)/6=(9n^2+9n+6)/6=1+3n(n+1)/2=TC(n+1)$



Puedes ir restando números combinatorios situados debajo de la línea continua, con un salto de tres lugares, e irán resultando los triangulares centrados:

20-1=19; 35-4=31; 56-10=46; 84-20=64; 120-35=85…

(3) Triangulares centrados primos

Entre los triangulares de este tipo existen algunos que son primos. Sólo es una curiosidad. Los primeros son:

19, 31, 109, 199, 409, … https://oeis.org/A125602

(4) Recurrencia

Todas las sucesiones de números figurados admiten recurrencias, por ser fórmulas polinómicas. Los triangulares centrados también poseen una generación por recurrencia, además de la contenida en la definición, de añadir 3n al término anterior:

Elegimos esta:

TC(n) = 3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3), TC(1)=1, TC(2)=4, TC(3)=10.

Se cumple para el 19=3*10-3*4+1=30-12+1=19

Otro término lo cumplirá por simples cálculos algebraicos.

3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3)=3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Si no te apetece simplificar acude a cualquier CAS. Nosotros hemos usado Wolfram Alpha

WolframAlpha computational knowledge engine.

3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Hemos obtenido la expresión

Expanded form:

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$$

que coincide con 1+3n(n-1)/2, expresión de TC(n)

Existen otras recurrencias, que puedes intentar demostrar:

a(n) = a(n-1) + 3*n-3. - (Vincenzo Librandi)

a(n) = 2*a(n-1) - a(n-2) + 3. - (Ant King)

Cuadrados centrados

Vimos en los primeros párrafos que la suma 1+4+8+12+16+…, que se forma añadiendo 4 unidades a cada sumando, forma, con sus sumas parciales, la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números "cuadrados centrados".

Los primeros términos son:

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381,...y están publicados en http://oeis.org/A001844

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno. La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Fijas en la parte derecha **"Centrado" y orden 4**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1

Como en el caso de los triangulares, con cada pulsación de la tecla PROX irás obteniendo los siguientes cuadrados centrados: 5, 13, 25,...

Si en la expresión de los poligonales centrados

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

sustituimos n por 4 nos resultará la expresión de los cuadrados centrados:

$$CC(k)=2k^2-2k+1$$

Por ejemplo CC(4)=2*16-2*4-1=32-8+1=25

Esta fórmula presenta una interpretación sencilla, pues equivale **a la suma de dos cuadrados consecutivos**. Así, 25=16+9, o 13=9+4. Si recordamos que los cuadrados son sumas de impares, con esta propiedad podemos engendrar los cuadrados centrados como una suma creciente y decreciente de impares. Lo vemos con el 61:

61=1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1

Con un poco de Álgebra es fácil ver que es válida también esta otra expresión:

$$CC(k)=\frac{(2k-1)^2+1}{2}$$

Así, el término 5 equivaldrá a (81+1)/2=41, como puedes comprobar en el listado. También 41 es suma de cuadrados: 41=26+16

Lo podemos expresar también como que el **doble de un cuadrangular menos una unidad es un cuadrado perfecto**. Esto convierte a un cuadrado centrado N en **la hipotenusa de un triangulo rectángulo** con un cateto igual a N-1. En efecto, $N^2-(N-1)^2 = 2N-1$ es un cuadrado. Por ejemplo:

$41^2 - 40^2 = 1681 – 1600 = 81 = 9^2$

Pentagonales centrados

Al igual que en los casos anteriores, partimos de la sucesión formada por el 1 y los múltiplos de 5, ya que en un pentagonal centrado se van añadiendo polígonos de cinco lados aumentando una unidad en cada caso: 1+5+10+15+20. Las sumas parciales formarán los pentagonales centrados (PC(n)):

1, 6, 16, 31, 51,…

Los primeros pentagonales centrados son:

1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, 276, 331, 391, 456, 526, 601, 681, 766, 856, 951, 1051, 1156, 1266, 1381, 1501, 1626, 1756, 1891, 2031, 2176, 2326, 2481, 2641, 2806, 2976,…

Están publicados en http://oeis.org/A005891

Para conseguir su expresión podemos acudir a la interpolación polinómica. Como ya la hemos usado en casos anteriores, sólo insertaremos una captura de pantalla:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	6	16	31	51	76	106
Dif1		5	10	15	20	25	30
Dif2			5	5	5	5	5
Dif3				0	0	0	0
Dif4					0	0	0
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	0	0	5	5	1
	720	120	24	6	2	1	1

Vemos que dará lugar a un polinomio de segundo grado. Leemos los coeficientes:

P(x)=1+5*(x-1)+5/2*(x-1)(x-2)=(5n^2+5n+2)/2

Así que

$$PC(n)=\frac{5n^2+5n+2}{2}$$

Basta observar la fórmula para darse cuenta de que todos estos números son congruentes con la unidad módulo 5. Así 16=5*3+1, 76=5*15+1,...Ya sabemos que sus diferencias son múltiplos de 5.

También es sencillo comprobar que los coeficientes del 5 en la anterior expresión son todos números triangulares, ya que PC(n)=5n(n+1)/2+1.

Hexagonales centrados

La definición de estos números coincide con la de los anteriores, pero añadiendo a cada uno de ellos un hexágono nuevo (o múltiplo de 6)

Dejamos como ejercicio comprobar que su expresión es

$HC(n)=(n+1)^3-n^3$

Con ella podemos desarrollar la sucesión de hexagonales centrados:

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2611, 2791, 2977, 3169, 3367, 3571, 3781, 3997

(http://oeis.org/A003215)

La expresión obtenida equivale claramente a una diferencia de cubos consecutivos. En efecto, $7=2^3-1^3$, $19=3^3-2^3=27-8$, $37=4^3-3^3=64-27$

Propiedad combinatoria

Sumas iguales a cero

Benoit Cloitre propone en la página OEIS citada que los números de la sucesión se corresponden con el número de tripletes ordenados de enteros (a,b,c),con -n <= a,b,c <= n, tales que a+b+c=0. Esta propiedad está expresada si el primer índice de la sucesión es cero, por lo que debemos aplicarla a n-1.

Por ejemplo, en el caso de n=3, HC(3)=19 coincidirá con el número de sumas de tres sumandos comprendidos entre -2 y 2 cuya suma sea 0.

Podemos comprobar esta propiedad con nuestra hoja Cartesius

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

El planteo sería muy simple:

xtotal=3

Xt=-2..2

Suma=0

Aunque no hayas usado nunca esta hoja Cartesius, entenderás que se fija un número de sumandos igual a 3, comprendidos entre -2 y 2 y cuya suma sea 0.

Introducimos este planteo en la hoja

Escribe a partir de la siguiente fila.
(no dejes filas en blanco)
xtotal=3
Xt=-2..2
Suma=0

Pulsamos el botón **Iniciar** y obtenemos las 19 sumas esperadas:

B	C	D
-2	0	2
-2	1	1
-2	2	0
-1	-1	2
-1	0	1
-1	1	0
-1	2	-1
0	-2	2
0	-1	1
0	0	0
0	1	-1
0	2	-2
1	-2	1
1	-1	0
1	0	-1
1	1	-2
2	-2	0
2	-1	-1
2	0	-2

Esta propiedad se puede demostrar por inducción. Ya hemos comprobado para n=3. Para n=2 basta con que recorras el listado de sumas y te quedes con las que tienen máximo 1. Las contamos y resultan 7, y es trivial que para el caso n=1 sólo obtenemos un caso. Con esto se comprueba para los casos 1, 2 y 3.

Para el caso n, podemos pasar al caso n+1, con lo que hay que añadir los elementos -(n+1) y n+1. Las nuevas sumas pueden ser de tres clases:

Si contienen -(n+1) y n+1, el tercer sumando será 0, y reordenando nos resultan 6 sumas nuevas.

Si sólo contiene el sumando -(n+1), deberá estar acompañado por todos los sumandos positivos entre 1 y n que sumen n+1. Existen n sumas ordenadas de ese tipo, y el sumando -(n+1) se puede situar en 3 posiciones, luego aparecerán 3n sumas nuevas.

El tercer caso también abarcará 3n sumas. Reunimos los tres casos y nos resulta 3n+3n+6=6(n+1), luego efectivamente, se añadirá un múltiplo de 6 al término anterior, lo que lo convierte en el siguiente hexagonal centrado.

Una propiedad aritmética

Las medias parciales de los k primeros términos coinciden con k^2.

Está basada en un inicio para n=0, por lo que usaremos n en lugar de n+1 en la demostración.

Esta propiedad se verifica en los primeros términos:

$(1+7)/2 = 4 = 2^2$

$(1+7+19)/3 = 9 = 3^2$

Si lo suponemos cierto para n, deberemos demostrar que la siguiente media coincide con $(n+1)^2$. Usaremos la expresión general aplicada al término n.

$M(n+1)=S(n+1)/(n+1)=(S(n)+3n^2+3n+1)/(n+1)=(n*n^2+3n^2+3n+1)/(n+1) = (n+1)^3/(n+1) = (n+1)^2$.

Es evidente que hemos demostrado de paso que las sumas parciales coinciden con n^3

Aquí dejamos los poligonales centrados.

Con esta muestra podrás investigar más sobre el tema.

MULTIPOLIGONAL

Recordemos que los números poligonales son aquellos que pueden organizar sus unidades en forma gráfica de polígono

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal).

Llamamos **dimensión k** a su número de lados y **orden n** al número de unidades por lado. Su expresión algebraica es

$$P_{n.k} = \frac{n(n(k-2)-(k-4))}{2}$$

Con nuestra calculadora de números figurados puedes calcularlos fácilmente.

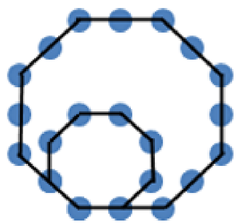
(Descarga libre desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/calcupol.xlsm)

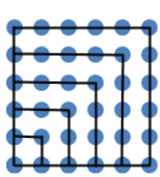
Por ejemplo, el número octogonal de orden 3 será igual a 21, ya que

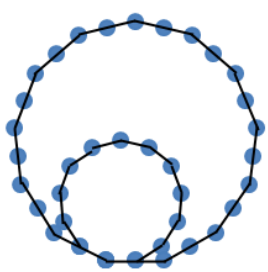
$P_{8,3}$ = 3*(3*6-4)/2 = 3*14/2 = 21

Gráficamente:



El problema que abordaremos ahora es el de clasificar aquellos números poligonales que lo son tomando distintos órdenes y dimensiones. Por ejemplo, el número 36 se puede representar con cuatro lados y también con trece:





En efecto:

$P_{4,6}$ = 6*(6*2-0)/2 = 6*6 = 36

P13,3 = 3*(3*11-9)/2 =3*24/2 = 36

¿De cuántas formas poligonales se puede expresar un número? Es evidente que todos ellos son poligonales de orden 2, incluso los primos, ya que es posible ordenar las unidades sobre un perímetro de **n** lados. Buscamos ahora aquellos que admitan varias representaciones.

Comenzaremos con una búsqueda ordenada. Nuestra costumbre es usar una función en Basic de Excel o Calc. Podría ser esta:

```
Function mpolig$(n)
Dim i
Dim s$

If n < 3 Then mpolig = "NO": Exit Function
s$ = ""
For i = 3 To n
If espoligonal(n, i) Then s$ = s$ + " #" + Str$(i) + ", "
+ Str$(quepoligonal(n, i))
Next i
mpolig = s
End Function
```

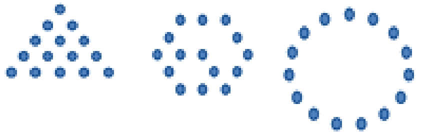
Esta función es de tipo texto, para poder añadir todos los tipos de poligonal que admite un número. Comienza desechando los números inferiores a 3. Después aplica un criterio, *espoligonal*, para ver si es poligonal o no. Si lo es, aplica la función *quepoligonal*, que encuentra el orden y dimensión. Si todo va bien, añade el nuevo polígono a la serie.

Estas dos funciones, *espoligonal* y *quepoligonal*, son algo teóricas, por lo que las añadimos a un Apéndice.

Por ejemplo, si aplicamos esta función al número 15, resultan tres formas de ser poligonal, y se presentan de esta forma:

MPOLIG(15)= # 3, 5 # 6, 3 # 15, 2

Significa que 15 puede ser un número triangular de lado 5, o bien hexagonal de lado 3, o, por último, un polígono de 15 lados. A partir de ahora no consideraremos esos polígonos formados por tantos lados como indique el número. Gráficamente:



Es fácil ver que las tres estructuras están compuestas por 15 unidades.

El primer número que presenta cuatro modalidades de poligonal es el 36:

MPOLIG(36)= # 3, 8 # 4, 6 # 13, 3 # 36, 2

Puede presentar 3, 4, 13 y 36 lados.

A estos números les podemos denominar *multipoligonales*. En el extremo opuesto figuran aquellos números que solo admiten forma de polígono simple, con lados de una unidad. Entre ellos están los primos y otros que no lo son, como el 38, que no admite ninguna otra forma poligonal salvo la trivial de un polígono de 38 lados. Este tipo de números está recogido en http://oeis.org/A090467.

Es fácil transformar la función *mpolig* en otra que simplemente cuente las soluciones de los distintos tipos de poligonal que admite un número. Quedaría así:

```
Function npolig(n)
Dim i, p

If n < 3 Then npolig = 0: Exit Function
p = 0
For i = 3 To n
If espoligonal(n, i) Then p = p + 1
Next i
npolig = p
End Function
```

Su funcionamiento es fácil de entender. Por ejemplo, con ella podemos listar los números que admiten cuatro representaciones como poligonales. Los primeros son:

36		4	# 3, 8 # 4, 6 # 13, 3 # 36, 2
45		4	# 3, 9 # 6, 5 # 16, 3 # 45, 2
66		4	# 3, 11 # 6, 6 # 23, 3 # 66, 2
81		4	# 4, 9 # 7, 6 # 28, 3 # 81, 2
105		4	# 3, 14 # 12, 5 # 36, 3 # 105, 2
120		4	# 3, 15 # 6, 8 # 41, 3 # 120, 2
153		4	# 3, 17 # 6, 9 # 52, 3 # 153, 2
171		4	# 3, 18 # 13, 6 # 58, 3 # 171, 2
190		4	# 3, 19 # 6, 10 # 33, 4 # 190, 2
196		4	# 4, 14 # 11, 7 # 34, 4 # 196, 2
210		4	# 3, 20 # 5, 12 # 71, 3 # 210, 2
261		4	# 9, 9 # 19, 6 # 88, 3 # 261, 2
280		4	# 8, 10 # 15, 7 # 48, 4 # 280, 2
351		4	# 3, 26 # 25, 6 # 118, 3 # 351, 2
378		4	# 3, 27 # 6, 14 # 127, 3 # 378, 2
396		4	# 9, 11 # 28, 6 # 133, 3 # 396, 2
400		4	# 4, 20 # 16, 8 # 68, 4 # 400, 2

En la primera columna figuran los números y en la segunda el número 4 y los distintos tipos de poligonal que admiten.

Los listados de los números con un número dado de tipos de poligonal están todos publicados en sus casos más sencillos. Por ejemplo, los anteriores figuran en http://oeis.org/A195528

Números con dos tipos determinados de poligonal

Para saber si un número es de dos tipos determinados basta usar esta función:

Function doblepolig(n, p, q) As Boolean

If espoligonal(n, p) And espoligonal(n, q) Then doblepolig = True Else doblepolig = False

End Function

Es sencilla de entender, ya que exige que sea poligonal de tipo **p** y también de tipo **q**, que son los parámetros que acompañan a **n**.

No vamos a recorrer todos los casos, ya que los valores del número de lados aumentan muy pronto, y se hacen inabordables.

Por ejemplo, con hoja de cálculo solo podemos obtener de forma razonable dos números que son heptagonales y cuadrados, el 81 y el 5929. El siguiente, 2307361, necesita más tiempo de cálculo, y no digamos los que siguen: 12328771225, 4797839017609, 350709705290025, 25635978392186449, 997644413533141202 5,…

(Ver http://oeis.org/A036354)

Un caso concreto

(Complemento con uso de técnicas algo más avanzadas)

¿Qué números son hexagonales y también cuadrados?

Si los buscamos con la función *doblepolig* y parámetros 4 y 6, nos resulta el número 1225, pero el siguiente 1413721, ya necesita unos minutos de proceso. Intentamos una aproximación algebraica:

Un número cuadrado de orden n tiene como fórmula $\mathbf{n^2}$, y un hexagonal de orden m, **m(2m-1)**. Igualamos:

Sería $n^2=2m^2-m$

Multiplico por 2:

$2n^2=4m^2-2m$

Completo un binomio al cuadrado:

$2n^2=(2m)^2-2*2m*1/2+(1/2)^2-(1/2)^2$

$2n^2=(2m-1/2)^2-(1/2)^2$

Multiplico por 4

$8n^2=(4m-1)^2-1$

$(4m-1)^2-8n^2=1$

Llamando x=8m-1 e y=n, logramos el planteo de una ecuación de Pell: $x^2-8y^2=1$

(Ver mi entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/ecuacion-de-pell.html)

Acudimos a nuestra herramienta

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/pell.xls

Rellenamos los parámetros 8, RAIZ(8) y 1 y obtenemos las soluciones:

X	Y	
3	**1**	**+1 ó -1**
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Al pasar de **X** a **n**, deberemos desechar las soluciones no enteras. Aplicamos a **X** la función (X+1)/8 para volver a **n**:

3	**1**	**+1 ó -1**		**M**
17	6	1		4,5
99	35	1		25
577	204	1		144,5
3363	1189	1		841
19601	6930	1		4900,5
114243	40391	1		28561
665857	235416	1		166464,5

Nos quedamos con las soluciones enteras. La primera es Y=N=35 y X=25. Vemos que, efectivamente, se cumple que el cuadrado de 35, 1225, coincide con el hexagonal de 25, $2*25^2-25=1250-25=1225$.

Veamos la segunda solución entera:

$Y=N=1189$, $X=841$, con lo que $1189^2=1413721=2*841^2-841$

De igual forma obtendríamos la tercera, $40391^2=1631432881$

(Puedes comprobarlo en http://oeis.org/A046177)

Recurrencia

Esta parte la desarrollaremos sin justificar.

En una ecuación de Pell de parámetro 8, las soluciones se obtienen a partir de las primeras X=3, Y=1 mediante las recurrencias

$X_{n+1}=3X_n+8Y_n$ y $Y_{n+1}=X_n+3Y_n$

Puedes comprobarlo en la tabla de más arriba.

Como las soluciones enteras aparecen cada dos pasos, las recurrencias quedarán

$X_{n+2}=3(3X_n+8Y_n)+8(X_n+3Y_n)=17X_n+48Y_n$

$Y_{n+2}=3X_n+8Y_n+3*(X_n+3Y_n)=6X_n+17Y_n$

Así, de x=99, y=35, obtenemos:

X=17*99+48*35=3363

Y=6*99+17*35=1189

Estas serían las siguientes soluciones. Reiterando, obtendríamos todas las demás:

X=17*3363+48*1189=114243

Y=6*3363+17*1189=40391

Este ha sido un ejemplo concreto, sin demasiada dificultad algebraica. Las demás coincidencias entre dos tipos se resuelven de forma similar, pero quizás con un desarrollo más complejo.

Apéndice

Función espoligonal

Devuelve VERDADERO o FALSO

```
Function espoligonal(n, k) As Boolean
Dim d
Dim e As Boolean

e = False
d = (k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2)
If escuad(d) Then
If esentero((k - 4 + Sqr(d)) / 2 / (k - 2)) Then e = True
End If
espoligonal = e
End Function
```

Función quepoligonal

Encuentra la dimensión de un número como poligonal

```
Function quepoligonal(n, k)
```

```
Dim d
d = Sqr((k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2))
If d <> Int(d) Then quepoligonal = 0 Else quepoligonal = (k - 4 + d) / (2 * k - 4)

End Function
```

NÚMEROS POLIGONALES DOBLEMENTE CENTRADOS

El día 17/02/21 publiqué en Twitter (@connumeros) lo siguiente:

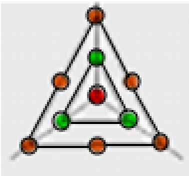
17221 es un número multipoligonal centrado, porque equivale a un poligonal de ese tipo de 20 lados con medida 42 y también a otro de 21 lados y medida 41. Es interesante comparar las fórmulas:

17221=(20×42^2-20×42+2)/2

17221=(21×41^2-21×41+2)/2

Esto, que parece una casualidad, me llamó la atención por el hecho de que 42 es el doble de 21, y eso podría suponer que este tipo de coincidencias fuera más frecuente de lo esperado inicialmente. En efecto, existen coincidencias de este tipo y otros parecidos con abundancia de casos concretos.

En primer lugar hay que recordar que los poligonales centrados se forman mediante figuras concéntricas, y no adosadas como los poligonales usuales.



En la imagen está representado el triangular centrado de orden 3, que equivale a 10 unidades. En efecto, según la fórmula

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

POLC(3,3)=(3*3^2-3*3+2)/2=(27-9+2)/2=10

(Ver mi publicación "Números y formas", http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf)

Podríamos usar esta fórmula para estudiar la casualidad que publiqué en Twitter:

POLC(20, 42)=(20×42^2-20×42+2)/2=17221

POLC(21,41)=(21×41^2-21×41+2)/2=17221

En general, usaremos las variables (n, k) para el primer poligonal y (n+1, k-1) para el segundo, olvidando por ahora si n es el doble de k+1 o no. Es decir, restringiremos la búsqueda al caso en el que los dos parámetros, número de lados n y orden k sean consecutivos con su par.

Podemos plantear esta igualdad:

$(n*k^2-n*k+2)/2=((n+1)*(k-1)^2-(n+1)*(k-1)+2)/2$

Simplificando y agrupando factores queda:

$n*(k^2-k)=(n+1)((k-1)^2-(k-1))$

O bien

nk(k-1)=(n+1)(k-1)(k-2)

nk=(n+1)(k-2)=nk+k-2n-2

k=2(n+1)

Luego el hecho de que 42 fuera el doble del 21 no era casual, sino obligado en este caso.

Así que todo poligonal centrado en el que n sea el doble de k-1 debe cumplir la condición de partida. Lo vemos:

k	n=k/2-1	POLC(n,k)	POLC(n+1,k-1)
8	3	85	85
10	4	181	181
12	5	331	331
14	6	547	547
16	7	841	841
18	8	1225	1225
20	9	1711	1711
22	10	2311	2311
24	11	3037	3037
26	12	3901	3901
28	13	4915	4915
42	20	17221	17221

En la tabla comenzamos con los números pares consecutivos y con su mitad menos 1 como orden. Aplicamos las fórmulas con parámetros consecutivos y comprobamos que da el mismo resultado. En la última fila se ha añadido el caso de 17221.

Esta tabla se podría prolongar y comprobaríamos que todos los poligonales centrados en los que el orden k sea par y el número de lados el adecuado (k/2-1) presentarán esta coincidencia.

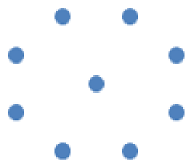
Ya tenemos resuelto el caso planteado, pero aquí nos seguimos planteando siempre segundas preguntas, y, en este caso ¿existirán muchos números multipoligonales centrados además de los estudiados?

Caso general

Para descubrir a cuántos poligonales centrados equivale uno concreto recorreremos todos los posibles parámetros n y k tomando nota de las repeticiones.

Poligonales no triviales

Al igual que con los números poligonales usuales, todo número entero positivo es poligonal centrado, ya que es igual a la unidad más un polígono de dos unidades por lado. En la imagen vemos el número 9 representado por la unidad centrada con un octógono, es decir, con un lado menos y dos unidades por lado:



Muchos números sólo poseen esta representación como poligonales centrados. Les llamaremos poligonales centrados triviales. Los no triviales están publicados en http://oeis.org/A275340 y los primeros son (han incluido casos con n<3, como 4 y 7):

4, 7, 10, 11, 13, 16, 19, 21, 22, 25, 28, 29, 31, 34, 37, 40, 41, 43, 46, 49, 51, 52, 55,…

Esto acota nuestra búsqueda, porque el caso trivial se repite demasiado y no nos interesa.

Comenzaremos con una función de Excel, que nos devolverá las formas de ser poligonal centrado de cada número. Veremos que se excluye el caso trivial:

Function multipoligc$(n)
Dim i, j, m
Dim s$

s = "" ‘Variable que recibirá los resultados
m = 0 ‘Número de resultados
For i = 3 To n ‘Número de lados, comenzando en 3
For j = 3 To n ’ Unidades por lado, evitando el caso trivial de 2

If n = (i * j * (j - 1) + 2) / 2 Then m = m + 1: s = s + Str$(i) + Str$(j) + " # " ‘Existe una solución. Se incrementa el contador y se incorpora al conjunto obtenido

Next j

Next i

If s <> "" Then s = ajusta(m) + ":" + s ‘Se añade el contador al resultado

multipoligc = s

End Function

Si el resultado de esta función es la cadena vacía, es que no es “multipoligonal” y, en caso contrario, la cadena contiene el número de soluciones y sus parámetros.

Estos serían los primeros no triviales:

10	1: 3 3 #		
13	1: 4 3 #		
16	1: 5 3 #		
19	2: 3 4 # 6 3 #		
22	1: 7 3 #		
25	2: 4 4 # 8 3 #		
28	1: 9 3 #		
31	3: 3 5 # 5 4 # 10 3 #		
34	1: 11 3 #		
37	2: 6 4 # 12 3 #		
40	1: 13 3 #		
41	1: 4 5 #		
43	2: 7 4 # 14 3 #		
46	2: 3 6 # 15 3 #		
49	2: 8 4 # 16 3 #		
51	1: 5 5 #		
52	1: 17 3 #		
55	2: 9 4 # 18 3 #		
58	1: 19 3 #		
61	4: 4 6 # 6 5 # 10 4 # 20 3 #		
64	2: 3 7 # 21 3 #		
67	2: 11 4 # 22 3 #		
70	1: 23 3 #		
71	1: 7 5 #		
73	2: 12 4 # 24 3 #		
76	2: 5 6 # 25 3 #		

Los resultados se inician con el número de soluciones. Por ejemplo, el 43 posee dos formas de ser poligonal centrado, una de 7 lados y orden 4 y otra de 14 lados y orden 3.

En efecto, 43=1+7+14+21 y también 43=1+14+28, sumas de capas concéntricas (o múltiplos de 7 y 14)

Observamos que 61 posee cuatro representaciones. La razón es que 61-1=60 posee muchos divisores distintos.

El número con el que comenzamos este estudio, 17221, presenta 10 formas de ser poligonal centrado:

17221: 10: 20 42 # 21 41 # 82 21 # 164 15 # 615 8 # 820 7 # 1148 6 # 1722 5 # 2870 4 # 5740 3 #

Entre ellas, las que dieron lugar a estas búsquedas, 20 42 y 21 41

TRIANGULARES QUE SON OBLONGOS

Un número triangular puede ser doble de otro triangular, como ocurre con el 6=3*4/2, que es doble de 3=2*3/2. Como a los dobles de los triangulares les llamamos *oblongos*, de ahí el título de este apartado: triangulares que también son oblongos. Recordemos que la fórmula del triangular de orden **n** es **T(n)=n(n+1)/2** y la del oblongo **O(n)=n(n+1)**.

En nuestro almacén de funciones disponemos de estas dos, que nos pueden servir para una búsqueda:

Public function estriangular(n) as boolean
dim a
*a = Int(sqr(8*n+1))*
*if a*a=8*n+1 then estriangular = true else estriangular = false*
end function

Public Function esoblongo(n) As Boolean
*If escuad(4 * n + 1) Then esoblongo = True Else*

esoblongo = False
End Function

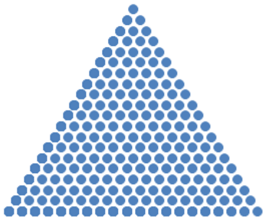
Si aplico estos dos criterios de búsqueda con Excel o Calc, rápidamente obtendré las primeras soluciones:

N	Orden Triang	Orden Oblong.
6	3	2
210	20	14
7140	119	84

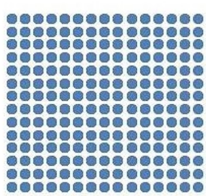
Por ejemplo, 210 es el triangular número 20 (210=20*21/2) y también el oblongo de orden 14, pues 210=14*15.

Gráficamente:

Triangular 210: 1+2+3+4+…+19+20



Oblongo 210=15*14



Para encontrar más, es conveniente pasar al lenguaje PARI y tener en cuenta que en los triangulares T, es un cuadrado la expresión 8T+1, y en los oblongos 4T+1. De esa forma resulta un código muy breve:

for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))

Con él conseguimos unos ejemplos más:

```
? para (i = 1, 10 ^ 8, si (es cuadrado (8 * i + 1) && es cuadrado (4 * i + 1), imprime (i)))
6
210
7140
242556
8239770
```

```
for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))
```

También se consiguen con el Buscador:

Solución	Detalles
6	
210	
7140	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	20000

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
OBLONGO

Puedes consultar los siguientes en http://oeis.org/A029549

0, 6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470, 372759573255306, 12662852473364940, 430164224521152660, 14612920781245825506, 496409142337836914550, 16863297918705209269200

Observamos que no hay muchos ejemplos, y que crecen rápidamente.

Estudio teórico

Al estudiar números poligonales, casi todas las situaciones terminan siendo previsibles, porque la búsqueda puede traducirse en un estudio teórico y en la resolución de alguna ecuación diofántica. En el caso que estudiamos se trataría de la ecuación de Pell, sobre la que disponemos de una herramienta con hoja de cálculo.

En primer lugar, planteamos que un triangular equivalga a un oblongo:

Comenzamos con $x(x+1)/2=y(y+1)$

Al desarrollar productos queda $x^2+x=2y^2+2y$

En estas cuestiones es frecuente completar cuadrados multiplicando por 4 y sumando algo, en este caso un 2: $4x^2+4x+2=2(4y^2+4y+1)$; $(2x+1)^2+1=2(2y+1)^2$

Si cambiamos de variable: $a=2x+1$; $b=2y+1$, queda $a^2-2b^2=-1$

Esta ecuación es de tipo Pell, con un coeficiente D=2 en el segundo cuadrado. La resolveremos con nuestra hoja PELL

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

El problema de esta ecuación es que se resuelve mejor si el segundo miembro es igual a 1. No entraremos en teorías, que ya publiqué en su momento:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/ecuacion-de-pell.html

En esta herramienta comienzas por escribir el valor de D, que en este caso es 2 y el del segundo miembro, que es -1:

Escribe el valor de D (entero y no cuadrado perfecto)	**2**
Escribe el valor del segundo miembro, +1 ó -1	**-1**

A continuación, la hoja aplica un algoritmo de fracciones continuas y sus reducidas y ofrece soluciones. En este caso se alternan las correspondientes a 1 con las de -1:

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119
1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Hemos tenido suerte, y obtenido soluciones para el valor -1, pero estas son soluciones para A y B, y después hay que pasarlas a X y a Y:

A	B	X=(A-1)/2	Y=(B-1)/2	Triangular	Oblongo
1	1	0	0	0	0
7	5	3	2	6	6
41	29	20	14	210	210
239	169	119	84	7140	7140
1393	985	696	492	242556	242556
8119	5741	4059	2870	8239770	8239770
47321	33461	23660	16730	279909630	279909630

En las dos últimas columnas aparecen las primeras soluciones de los triangulares que son idénticos a unos oblongos

Podemos seguir encontrando nuevos casos, porque la ecuación de Pell produce recurrencias, que recoge la herramienta nuestra que estamos utilizando:

1	1	+1 ó -1
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1

Estas soluciones se han obtenido mediante la recurrencias $x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$, $y_n=x_{n-1}+y_{n-1}$. Este tema lo puedes estudiar en la entrada enlazada.

Son las recurrencias en Pell, pero como se alternan las soluciones 1 y -1, hay que reiterar cada recurrencia, y queda:

$x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1}$

$y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$

A partir de la primera solución X=1, Y=1, que corresponde al triangular 0, podemos, con estas iteraciones, comprobar las dos primeras columnas de la tabla obtenida:

A	B
1	1
7	5
41	29
239	169
1393	985
8119	5741
47321	33461

Se puede comprobar con facilidad: 7=3*1+4*1, 5=2*1+3*1, 41=3*7+4*5 y 29=2*7+3*5, y así con todos. A partir de los dos últimos valores A=47321 B=33461 se pueden construir los siguientes, y completar la tabla hasta el límite que se desee. No sería una búsqueda, sino una obtención rigurosa.

Obtención de un listado por recurrencia

Las ideas anteriores se pueden plasmar en este código PARI:

a=1;b=1;for(i=1, 12, a1=3*a+4*b;b1=2*a+3*b;a=a1;b=b1;c=(b-1)/2;print(c*(c+1)))

En él se someten A y B a la recurrencia y después se extrae de su valores un nuevo triangular oblongo. Este listado devuelve el compilador:

```
6
210
7140
242556
8239770
279909630
9508687656
323015470680
10973017315470
372759573255306
12662852473364940
430164224521152660
?
```

Lo importante es que se puede avanzar siempre y que, por tanto, existen infinitos triangulares oblongos.

Recurrencia

Si los valores de X e Y siguen una recurrencia lineal, los triangulares que dependen de ellos también seguirán una propia. Para no enredarnos en cálculos algebraicos, usaremos una ecuación del tipo T(n+1)=A*(T(n)+B*T(n-1)+C. Le daremos tres juegos de valores para obtener un sistema de ecuaciones que nos dará los valores de A, B y C. Es un método rápido.

Usaremos los valores 0, 6, 210, 7140 y 242556. Quedará (sustituimos A, B, C por X, Y, Z para la resolución automática):

210=6X+0Y+Z

7140=210X+6Y+Z

242556=7140X+210Y+Z

Se resuelve con WIRIS (https://calcme.com/a) :

resolver$(210=6X+0Y+Z, 7140=210X+6Y+Z, 242556=7140X+210Y+Z)$

$\{\{X=34, Y=-1, Z=6\}\}$ Calc

Coincide con la publicada en OEIS:

*a(n+2) = 34*a(n + 1) - a(n) + 6. - Charlie Marion, Feb 11 2011*

Por ejemplo, 7140=34*210-6+6.

Hemos combinado búsqueda con teoría, que es la mejor forma de iniciar un tema.

PITÁGORAS Y SUS TERNAS

EL SUEÑO DE LEWIS CARROLL

La lectura de la biografía de Lewis Carroll me ha sugerido el proponer la siguiente búsqueda, inspirada en un problema que le impidió dormir una noche:

¿Qué números enteros equivalen al área de un triángulo rectángulo de lados también enteros, de tres formas distintas?

La primera solución es **840**, porque las tres ternas

15, 112 y 113
24, 70 y 74
40, 42 y 58

pertenecen a lados de triángulos rectángulos de área 840.

¿Cuáles son las siguientes soluciones?

Área 840 Triángulos de lados 15,112 y 113 24,70 y 74 40,42 y 58

Aquí tenéis las siguientes:

Área 3360 Lados 30,224 y 226 48, 140 y 148 80,84 y 116

Área 7560 Lados 45, 336 y 339 72,210 y 222 120,126 y 17

Área 10920 Lados 56,390 y 394 105,208 y 233 120,182 y 218

Área 13440 Lados 60,448 y 452 96,280 y 296 160,168 y 232

Área 21000 Lados 75,560 y 565 120,350 y 370 200,210 y 290

Los siguientes son 30240, 31920, 41160 y 43680. Quedáis invitados a encontrar los tres triángulos correspondientes a cada uno. Una vez que se conocen las soluciones ya no es difícil encontrar los catetos apropiados.

OBLONGOS Y PITAGÓRICOS I

Una cuestión que ha dado juego desde los tiempos de Girard y Fermat y que permite recorrer alternativas de cálculo es la siguiente:

De todos los triángulos rectángulos de lados enteros ¿Cuáles cumplen que la diferencia entre los catetos es la unidad?

El primero que la cumple es el popular de lados 3, 4 y 5, pues la diferencia entre 3 y 4 es una unidad. ¿Habrá más? ¿Cómo abordamos el cálculo? Casi todos los caminos nos llevan a una ecuación diofántica de segundo grado, pero hay que ver cuál y cómo resolverla. También podemos intentar una búsqueda con hoja de cálculo.

Quizás fuera prudente comenzar con esta última posibilidad. Si lo intentas descubrirás al menos estas soluciones:

3, 4 y 5
20, 21 y 29
119, 120 y 169
696, 697 y 985
4059, 4060 y 5741
23660,23661 y 33461
137903, 137904 y 195025

¿Cómo organizar una búsqueda de soluciones para

$$x^2+(x+1)^2=y^2$$

con hoja de cálculo?

Presentamos dos propuestas:

Elemental:

Rellena una columna con los primeros números naturales consecutivos, y en la columna de su derecha auméntalos en una unidad. Supongamos que has comenzado en las celdas B4 y C4 respectivamente. En ese caso puedes rellenar la celda D4 con la fórmula B4^2+C4^2, y en la E4 una condición que nos devuelva la palabra “Vale” si es cuadrado perfecto:

SI(D4=(ENTERO(RAIZ(D4))^2; “Vale”;””).

De esta forma descubriremos las soluciones, con algo de paciencia, tiempo y muchas filas de hoja de cálculo:

1	2	5	
2	3	13	
3	4	25	Vale
4	4	32	
5	6	61	
6	7	85	
7	8	113	
8	9	145	
9	10	181	
10	11	221	
11	12	265	
12	13	313	
13	14	365	
14	15	421	
15	16	481	
16	17	545	
17	18	613	
18	19	685	
19	20	761	
20	21	841	Vale
21	22	925	

Con Basic

La misma idea de construir una lista para X, otra para X+1 y una tercera en la que buscamos los cuadrados perfectos se puede construir en Basic. X lo almacenamos en la variable i, X+1 en la j, y la hipotenusa en k. Una sentencia IF nos presenta las soluciones en las que k es un entero.

Con este código se buscan las soluciones para números inferiores a 1000000.

```
Sub busquedas
Dim i,j,k

for i=1 to 1000000
j=i+1
k=i^2+j^2
if  k=Int(sqr(k))^2 then
msgbox(i)
msgbox(j)
msgbox(sqr(k))
end if
next i
End Sub
```

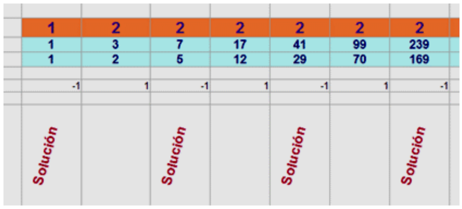
Estudio algebraico

La ecuación $x^2+(x+1)^2 = y^2$ se puede desarrollar de esta forma: $x^2+(x+1)^2 = y^2$; $2x^2+2x+1=y^2$; $(2x+1)^2 + 1 = 2y^2$; $(2x+1)^2 - 2y^2 = -1$, por lo que llamando $z=2x+1$ desembocamos en una ecuación de Pell con segundo miembro igual a -1

$Z^2-2y^2 = -1$

Utilizamos la hoja de cálculo pell.ods o pell.xls contenidas en la dirección http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

con el resultado que indica la imagen:



1	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239
1	2	5	12	29	70	169
-1	1	-1	1	-1	1	-1
Solución		Solución		Solución		Solución

en la que valdrán las soluciones correspondientes a -1

Z=1; Y=1; Imposible, pues X sería negativo
Z=7; Y=5 X=3; X+1=4; Y=5
Z=41; Y=29 X=20; X+1=21; Y=29
Z=239; Y=169 X=119; X+1=120; Y=169
Z=1393; Y=985 X=696; X+1=697; Y=985

Este método tiene el inconveniente de que depende de la precisión que tenga la hoja de cálculo en los cálculos con coma flotante, lo que hará que se rompa en algún momento la periodicidad de los cocientes, en este caso el 2. Por ello se puede completar con una fórmula recursiva que obtenga soluciones exactas conociendo las primeras.

En este ejemplo cada elemento de las distintas celdas cumple la fórmula

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

pero como las soluciones aparecen de forma alternada, deberemos reiterar dos veces, y nos quedará:

$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} = 2(2a_{n+2} + a_{n+1})+ 2a_{n+1} + a_n = 4a_{n+2} + 4a_{n+1}+ a_n = 6a_{n+2} - a_n$

Con esta fórmula recursiva se van obteniendo las soluciones sin errores a partir de las dos primeras:

$Z_0 = 1$; $Z_2 = 7$; $Z_4 = 6*7-1 = 41$; $Z_6 = 6*41-7 =239$;…

$Y_0 = 1$; $Y_2 = 5$; $Y_4 = 6*5-1 = 29$; $Y_6 = 6*29-5 =169$;…

Pero no olvidemos que Z es una variable auxiliar Z=2X+1 y que después debemos despejar X

La siguiente lista de ternas, que coincide con la primera que propuso Girard, se ha obtenido mediante esta técnica

1	0	1
5	3	4
29	20	21
169	119	120
985	696	697
5741	4059	4060
33461	23660	23661
195025	137903	137904
1136689	803760	803761
6625109	4684659	4684660
38613965	27304196	27304197

225058681	159140519	159140520
1311738121	927538920	927538921
7645370045	5406093003	5406093004
44560482149	31509019100	31509019101
259717522849	183648021599	183648021600
1513744654945	1070379110496	1070379110497
8822750406821	6238626641379	6238626641380
51422757785981	36361380737780	36361380737781
299713796309065	211929657785303	211929657785304

Un reto: Fermat propuso una fórmula de recurrencia para generar ternas de este tipo a partir de otras similares. Dada la terna (x,x+1,y), se puede generar otra similar (x’,x’+1,y’)

mediante las fórmulas x’=2x+3y+1 y y’=4x+3y+2.

¿Sabrías demostrarlo? ¿Engendra todas las ternas posibles a partir de 3, 4,5?

Notas

(1) Dados dos catetos X y X+1 de la serie anterior, los siguientes se obtienen sumando los tres lados y restando después un cateto u otro del doble de esa suma:

Por ejemplo, de 3, 4,5 obtenemos suma 12, su doble 24, y restando 3 y 4 por separado obtenemos 20 y 21, que es la siguiente solución junto con 29.

En efecto, de las fórmulas de Fermat

X’ = 3X+2Y+1; Y’ = 4X+3Y+2, junto con la de la suma de los tres, S= 2X+1+Y

obtenemos 2S-X = 4X+2+2Y-X = 3X+2Y+2 = X’+1, que es el nuevo cateto mayor, y de forma similar obtendríamos X’ como 2S-(X+1)

(2) Según G. Hutton, si llamamos p_r/q_r a la r-ésima convergente de √2 en su desarrollo mediante fracciones continuas, las ternas pitagóricas que hemos presentado con catetos del tipo X y X+1 vendrían dadas por

$X_r=p_r*p_r+1$ $Y_r=2q_r*q_r+1$

En efecto, la siguiente tabla obtenida con Excel nos permite comprobar esta propiedad:

Convergentes	1	3	7	17	41	99	239	577
de la raíz de 2	1	2	5	12	29	70	169	408
p_n*p_{n+1}	3	21	119	697	4059	23661	137903	803761
$2q_r*q_{r+1}$	4	20	120	696	4060	23660	137904	803760

3) La terna 3, 4,5 está engendrada por las fórmulas clásicas 2uv, u^2-v^2 y u^2+v^2 para u=2 y v=1. Si sustituimos u y v por u, v+2u se mantendrá la misma diferencia entre catetos.

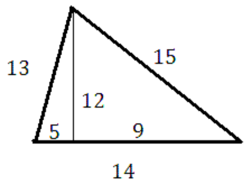
Basta ver que si engendramos los nuevos catetos y los restamos (en orden contrario) resultará: 2u(v+2u) -(v+2u)^2+u^2= 2uv+4u^2-v^2-4u^2-4uv+u^2 = u^2-v^2-2uv, que es la diferencia original.

Esto nos permite engendrar de nuevo la lista que estamos considerando, tomando, n primer lugar u=2 v=1, y generando con ella la primera terna 3,4 y 5. Después se aplica la fórmula de recurrencia $u_n = 2u_{n-1}+v_{n-1}$ $v_n = u_{n-1}$ y se vuelve a generar una terna con ella, que resultará tener la misma diferencia pero con signo cambiado. Así hemos generado la lista con hoja de cálculo:

u	v	x	y	z
2	1	4	3	5
5	2	20	21	29
12	5	120	119	169
29	12	696	697	985
70	29	4060	4059	5741
169	70	23660	23661	33461
408	169	137904	137903	195025
985	408	803760	803761	1136689
2378	985	4684660	4684659	6625109
5741	2378	27304196	27304197	38613965
13860	5741	159140520	159140519	225058681

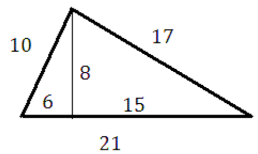
VIAJE DE IDA Y VUELTA A LA GEOMETRÍA

Según leo en el libro “Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano” de Francisco M. Casalderrey, a Fibonacci le interesó mucho el estudio del triángulo de lados con medidas enteras 13, 14 y 15, porque la altura correspondiente al lado que mide 14 también tiene medida entera, 12, así como los dos segmentos que forma en la base, 5 y 9 respectivamente.



¿Existirán más triángulos con esa propiedad?

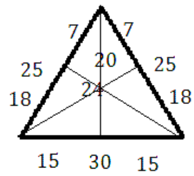
La respuesta es afirmativa. Existen muchos, y no es difícil encontrarlos. Uno de ellos, con la misma superficie que el anterior, está formado por los lados 17, 21 y 10.



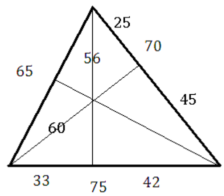
¿Podrías encontrar alguno más con medidas inferiores a 50?

Más difícil es que esta propiedad la presenten dos alturas.

Existen algunos triángulos en los que aparece por simetría, como el de la imagen. Los lados son 25, 25 y 30, las alturas 24, 24 y 20, y los segmentos en las bases 7, 15 y 18. Todos son enteros.



¿Existirán triángulos en los que dos alturas presenten segmentos de medida entera sin acudir a la simetría? Pues también la respuesta es afirmativa. En la imagen tienes uno:



Los lados miden 70, 65 y 75 respectivamente, una altura de 56 divide al 75 en dos segmentos de medidas 33 y 42, y la otra altura, de 60, divide a 70 en 25 y 45.

El hecho de que este triángulo sea semejante al de Fibonacci y posea una propiedad más amplia nos demuestra que estas cuestiones no son geométricas, sino aritméticas. Todo depende de si una medida se expresa como entera o como fraccionaria. Una altura que en el primero medía 11,2. en este mide 5 veces más, lo que la convierte en entera: 56.

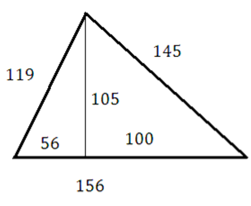
Con lo explicado en el párrafo anterior puedes encontrar triángulos en los que todos los lados, alturas, segmentos formados por estas en las bases, perímetro y área sean enteros.

Para conseguir un triángulo con lados, alturas y segmentos en la base todos enteros puedes seguir estos pasos:

(1) Elige dos ternas pitagóricas, preferentemente primitivas, como 20, 21,29 y 8, 15,17.

(2) Multiplícalas ambas por un valor entero adecuado a fin de unificar las medidas de sus dos catetos mayores (el que sean los mayores no es necesario, pero te garantiza que el triángulo sea acutángulo) Puedes buscar el MCM de ambos valores. En nuestro ejemplo se convertirían en 56, 105,119 y 100, 105,145

(3) Arma un primer triángulo tomando como altura el cateto común:



Con esto te garantizas que el seno y el coseno de los ángulos opuestos a la altura 105 sean números racionales, y como consecuencia que también lo sean los del tercer ángulo ¿Por qué?

También tienes garantizada una medida racional para las alturas y segmentos que quedan, pero no necesariamente enteros.

(4) En efecto, usando la fórmula $(a^2+b^2-c^2)/(2a)$ para todos los pares de lados nos resultarán las medidas de

los segmentos, necesariamente racionales. Puedes verlo en un desarrollo con Wiris

a=119 → 119
b=145 → 145
c=156 → 156
(a^2+b^2−c^2)/2/b → $\frac{1085}{29}$
(a^2+b^2−c^2)/2/a → $\frac{775}{17}$
(a^2+c^2−b^2)/2/a → $\frac{1248}{17}$
(a^2+c^2−b^2)/2/c → 56
(b^2+c^2−a^2)/2/b → $\frac{3120}{29}$
(b^2+c^2−a^2)/2/c → 100

A la vista del desarrollo encontrarás los factores por los que hay que multiplicar (para conseguir una semejanza de triángulos) a fin de que todas las medidas sean enteras. En este caso por 29 y 17.

Con esto llegamos a la meta:

a=119·17·29 → 58667
b=145·17·29 → 71485
c=156·17·29 → 76908
(a^2+b^2−c^2)/2/b → 18445
(a^2+b^2−c^2)/2/a → 22475
(a^2+c^2−b^2)/2/a → 36192
(a^2+c^2−b^2)/2/c → 27608
(b^2+c^2−a^2)/2/b → 53040
(b^2+c^2−a^2)/2/c → 49300

Sólo nos queda calcular las alturas y tendremos el triángulo completo:

Lados	**58667**		**71485**		**76908**	
Segmentos	22475	36192	18445	53040	27608	49300
Alturas	67860	67860	55692	55692	51765	51765

Puedes analizar también el área, el perímetro y el radio de la circunferencia inscrita. Sus valores son: A= 1990571310, P=207060 y R=19227

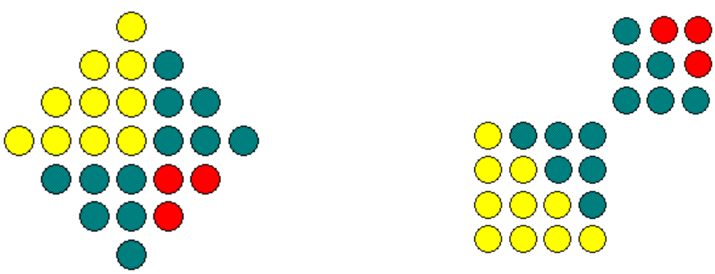
En definitiva, de la Geometría sólo hemos usado fórmulas, por lo que el resultado constituye un regreso a la Aritmética de números enteros y racionales, que es su verdadero sitio, aunque lo hayamos representado como un triángulo. Quizás por eso le gustaba a Fibonacci.

CENTRADOS Y PITAGÓRICOS

¿Por qué los números cuadrados centrados pueden ser siempre los términos mayores (la hipotenusa) de ciertas ternas pitagóricas?

Por ejemplo: $61^2 = 60^2 + 11^2$

Es fácil demostrarlo: todo cuadrado centrado se descompone en dos cuadrados consecutivos:



La figura se explica por sí misma: el cuadrado centrado de orden 4, con valor 25, se descompone en cuatro triangulares, dos iguales y los otros dos consecutivos, que recombinados forman los cuadrados de orden 3 y 4 respetivamente

Por tanto, $CC_4 = C_4+C_3$ (CC: Cuadrado centrado, C: cuadrado normal), lo que nos lleva a la fórmula para los cuadrados centrados $CC_4 = n^2+(n-1)^2 = 2n^2 – 2n + 1$.

Para demostrar que puede ser el término mayor de una terna pitagórica elevamos su fórmula al cuadrado y podemos dividirla en dos cuadrados:

$(2n^2 – 2n + 1)^2 = 4n^4 - 8n^3 + 8n^2 -4n + 1 = (2n^2 – 2n)^2 + (2n – 1)^2$

con lo que descubrimos que la terna tiene la estructura X, Y, Y+1, con $X^2 = 2y+1$

En la siguiente tabla están contenidos los desarrollos de los 10 primeros cuadrados centrados. Algunas ternas son muy populares:

N	CCN=Y+1	Y	X
2	5	4	3
3	13	12	5
4	25	24	7
5	41	40	9
6	61	60	11

7	85	84	13
8	113	112	15
9	145	144	17
10	181	180	19

¿Se puede demostrar el teorema inverso: Si en una terna pitagórica la hipotenusa se diferencia en una unidad del cateto mayor, dicha hipotenusa es un número cuadrado centrado?

Solución: $Y^2=(Y-1)^2+X^2$ equivale a que $2Y-1 = X^2$ es decir $Y=(X^2-1)/2$. Como X ha de ser impar, sustituimos por 2N-1 y queda que $Y = 2n^2 – 2n + 1$ y por tanto es cuadrado centrado.

CUADRADOS CON TROZOS CONSECUTIVOS

Acabo de leer en

(http://maanumberaday.blogspot.com/) que el número 573 tiene la propiedad de que su cuadrado está representado en el sistema decimal con los dígitos de dos números consecutivos:

$573^2 = 328329$

He puesto a trabajar a mi hoja de cálculo y me ha devuelto siete de esos números entre 1 y 50000.

Es este un problema interesante, porque el algoritmo se simplifica mucho si se concibe a la contra: en lugar de recorrer los números uno a uno y después someterlos a la prueba del cuadrado formado por dos consecutivos, se cambia la perspectiva, es decir, se construyen los candidatos a cuadrados y después se prueba si lo son o no. En caso afirmativo se les extrae la raíz cuadrada para ver la solución.

Sub cuadrado_consecutivos

Input n ‘se concreta hasta dónde llegará la búsqueda.
for i=1 to n
j=numcifras(i+1) ‘se cuentan las cifras del número i+1
k=i*10^j+i+1 ‘ se forma el posible cuadrado con dos números consecutivos.
if escuad(k)=1 then ‘si es cuadrado perfecto se comunica
msgbox(sqr(k)) ‘solución
msgbox(k) ‘cuadrado
end if
next i
end sub

He conseguido 7 soluciones hasta el 50000 y una falsa (el 1000): 428, 573, 727, 846, 7810, 36365, 63636

Los tienes en http://oeis.org/A030467

Es muy elegante la versión en PARI. Analizándola puede que desees estudiar este lenguaje un poco mejor:

```
{for(x=1,10^7,m=eval(concat(Str(x),Str(x+1)));if(issquare(m,&p),print(p)))}
```

DIFERENCIA ENTRE CATETOS

En otro momento estudiamos las ternas pitagóricas en las que la diferencia entre catetos era igual a 1. Nos podemos plantear también qué números, aparte del 1, pueden ser diferencia entre catetos en esas ternas. Estudiaremos algunos aspectos de este problema

(1) **Afirmamos que todo número puede ser diferencia entre catetos en una terna pitagórica.**

En efecto, dado cualquier número k, a partir de la terna 3, 4, 5 podemos construir 3k, 4k, 5k con diferencia de catetos k

(2) **Más difícil es demostrar que todo número es diferencia de catetos de infinitas formas distintas**. Para ayudarte puedes demostrar previamente lo siguiente:

Si u y v engendran una terna pitagórica mediante las fórmulas 2uv, u^2-v^2 y u^2+v^2, los valores 2u+v y v engendran otra terna con la misma diferencia de catetos.

No es difícil. Dados dos valores u, v primos entre sí y de distinta paridad, engendran la terna pitagórica primitiva u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2, con diferencia de catetos igual a u^2-v^2-2uv.

Los nuevos valores 2u+v, v son de distinta paridad y primos entre sí (fácil de ver) y engendran la terna $(2u+v)^2-u^2$, $2u(2u+v)$, $(2u+v)^2+u^2$, con diferencia

$(2u+v)^2-u^2-2u(2u+v)= 4u^2+v^2+4uv-u^2-4u^2-2uv = v^2-u^2+2uv$, que es la misma con signo cambiado.

La nueva terna será primitiva, porque se cumplen las condiciones.

Si lo anterior es cierto, reiterando el procedimiento obtendremos infinitas ternas con la misma diferencia (salvo signo u orden). Si la primera es primitiva, todas las demás lo serán ¿Por qué?

Por ejemplo, de u=4, v=3, x=7, y=24, z=25, con diferencia entre catetos igual a 17, podemos engendrar u=11, v=4, x=88, y=105, z=137, con 105-88 = 17 y después u=26, v=11, x=572, y=555 z=797, y así tantas como queramos.

(3) Si sólo admitimos ternas primitivas, no todos los números pueden ser diferencia de catetos. Los únicos

posibles son 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, 119, ...(http://oeis.org/A058529)

La razón es que la diferencia D ha de ser impar, con fórmula $D=u^2-v^2-2uv = (u+v)^2-2v^2$

Esto obliga a que el número 2 sea resto cuadrático respecto a todos divisores de D.

Existe un criterio derivado del de Euler, que nos dice que 2 es resto cuadrático módulo p (primo) si $(p^2-1)/8$ es par (consultar bibliografía), y esto sólo se cumple si p=8k+1 o p=8k-1.

Los factores primos de los números considerados son del tipo 8k±1. Como esta estructura algebraica se conserva en el producto, todos los números presentarán esta estructura

Esta condición se puede concretar aún más: Entre los factores primos del tipo 8k±1 no pueden estar 2, 3 ni 5. Los primos mayores que 3, como se demuestra fácilmente, presentan también la estructura 6k±1, luego los números de la lista también presentarán esta estructura.

Las dos condiciones han de cumplirse a la vez. Si las combinamos nos resulta otra definitiva (la puedes obtener tachando los restos que no las cumplen):

Todos los números de la lista sólo pueden presentar respecto al 24 los restos 1, 7, 17 o 23.

DOBLADO PITAGÓRICO

Si tomamos un segmento de longitud 31 cm. y lo doblamos por cierto punto en forma de ángulo recto, podemos completar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene medida entera. No es difícil averiguar por dónde se puede doblar: basta hacerlo con un segmento de medida 7, con lo que el otro trozo mediría 24 y la hipotenusa 25.

Existen otros números con la misma propiedad: 7, descompuesto en 3 y 4, 23, doblado por 8 y 15, y otros muchos.

Te proponemos una búsqueda elemental, mediante razonamiento, hoja de cálculo o navegación por la Red:

Además de 7, 23 o 31, ¿qué otros números tienen la propiedad de engendrar un triángulo rectángulo de medidas enteras con un simple “doblado”?

Te dejamos este código por si deseas practicar:

(Dado un valor n)

Sub buscar(n)
for i=7 to n
for j=3 to i/2
k=i-j

```
if escuadrado(k*k+j*j)=1 then
msgbox(i)
msgbox(j)
msgbox(k)
end if
next j
next i
end sub
```

Si lo resuelves te llevarás una sorpresa: las soluciones son las mismas de la entrada anterior (salvo el 1) 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, 119, ... y todos sus múltiplos.

Lo puedes ver en esta tabla:

7	3	4
14	6	8
17	5	12
21	9	12
23	8	15
28	12	16
31	7	24
34	10	24
35	15	20
41	20	21
42	18	24

46	16	30
47	12	35
49	9	40
49	21	28
51	15	36
56	24	32
62	14	48
63	27	36
68	20	48
69	24	45
70	30	40
71	11	60
73	28	45

La razón estriba en que ambos problemas están relacionados con la ecuación $2x^2-y^2=k$.

¿EN CUÁNTAS SUMAS DE CUADRADOS?

Todo comenzó con Fermat

Hay números que se pueden descomponer en suma de dos cuadrados, pero ¿de cuántas formas? Esta cuestión ha sido ya abordada en otros blogs de Matemáticas, pero aquí añadiremos técnicas y algoritmos de hoja de cálculo.

Para conseguir una respuesta a la pregunta formulada se necesitaron esfuerzos de varios matemáticos, pero todo comenzó con Fermat y su *Teorema de Navidad* (lo comunicó a Mersenne el 25 de Diciembre de 1640, pero no lo demostró), y que actualmente expresamos así:

Un número primo se puede descomponer en suma de dos cuadrados x^2+y^2 *de números enteros si y sólo si es el número 2 o bien es congruente con 1 módulo 4 (es decir, si es de la forma 4n+1).*

El teorema directo es difícil de demostrar, y lo ha sido a lo largo de siglos mediante diversas técnicas (descenso infinito, enteros gausianos, etc.), siendo Euler el primero que lo logró. El inverso está a nuestro alcance. Inténtalo:

Un número primo congruente con 3 módulo 4 no puede descomponerse en suma de dos cuadrados de números enteros.

Gauss, en la sección 182 de sus Disquisitiones arithmeticae destacó que esa descomposición es única, salvo orden y signo. Los dos números x e y han de ser primos entre sí ¿por qué?

De este hecho podemos obtener un criterio marginal: *Si un número de la forma 4n+1 no se puede descomponer en dos cuadrados o bien lo puede de más de una forma, no es primo.*

Esta propiedad de poder descomponerse en suma de dos cuadrados se mantiene si multiplicamos dos números primos de este tipo, y además se puede duplicar el número de posibles sumas. Así, si $13 = 2^2+3^2$ y $5 = 2^2+1^2$, al multiplicarlos obtenemos:

$65 = 13*5 = 8^2+1^2 = 7^2+4^2$

Esta propiedad se desprende de la famosa identidad:

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

que nos viene a decir que este producto también es suma de dos cuadrados y además de dos formas distintas (si los sumandos son distintos):

$65 = (2*2+3*1)^2 +(2*1-3*2)^2 = 7^2+4^2$ (obsérvese que en el cálculo se ha obtenido -4 y no 4)

$65 = (2*2-3*1)^2 +(2*1+3*2)^2 = 8^2+1^2$

Ocurre lo mismo si se multiplica el número primo por 2 (elemental ¿no?)

Fórmula de Gauss

Estas propiedades se resumen en un criterio que no vamos a desarrollar aquí, y es que sólo se pueden descomponer en cuadrados los números en los que los factores primos del tipo 4n+3 figuren en su descomposición con exponente par. Gauss fue más allá en esa sección 182, pues dio una fórmula para contar el número de formas diferentes en las que se descompone un número en suma de dos cuadrados con base no negativa:

N=ES[(□+1)(□+1)…(□ +1)/2]

donde ES significa “mínimo entero igual o superior” y los factores que le siguen se corresponden con los exponentes de los factores del tipo 4n+1 aumentados en una unidad. La fórmula, como advierte Gauss, sólo es válida si los factores del tipo 4n+3 forman un cuadrado perfecto.

Así, por ejemplo, el número $325=5^2*13$ se deberá descomponer en

N=ES((2+1)(1+1)/2)=ES(3*2/2)=ES(3)=3

En efecto, $325=1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$ (tres formas distintas)

Y el número 6664 sólo de una forma, pues $6664 = 2^3*7^2*17$ y aplicando la fórmula nos daría

N=ES(1+1)/2 = ES(1)=1, y su descomposición única es $6664=42^2+70^2$

Actualmente se prefiere considerar todas las sumas de cuadrados posibles, incluyendo bases negativas y teniendo en cuenta el orden. Esto multiplica por 8 el número de soluciones cuando x es distinto de y y ambos son no nulos, y por 4 en caso contrario. Así, el 13 presentaría ocho soluciones:

$13= 2^2+3^2 = (-2)^2+3^2 = 2^2+(-3)^2 = (-2)^2+(-3)^2 = 3^2 +2^2 =(-3)^2 +2^2 = 3^2 +(-2)^2 = (-3)^2 +(-2)^2$

Y el 16, cuatro: $16 = 4^2+0^2 = (-4)^2+0^2 =0^2 + 4^2 = 0^2 + (-4)^2$

Igualmente, 8 presentaría también 4: $8 = 4^2+4^2 = (-4)^2+4^2 =4^2 + (-4)^2 = (-4)^2 + (-4)^2$

Aparece el número π

En la sección anterior se presentaba una fórmula para encontrar el número de descomposiciones distintas en suma de dos cuadrados que puede presentar un número entero positivo. Vimos dos orientaciones: buscar sólo sumandos positivos o admitir también los negativos teniendo en cuenta además el orden

Para un resultado inesperado que obtendremos más adelante vamos a elegir la segunda opción: encontrar, dado un número entero positivo N, todos los pares x, y de números enteros tales que $x^2+y^2=N$. Al número de esos pares lo podemos considerar como función de N, lo que nos permite definir NSC(N)=Número de pares de enteros x, y tales que $x^2+y^2=N$

Para implementar esta función en la hoja de cálculo podemos usar un código similar al siguiente (comentarios en letra normal):

Public function nsc(n)
dim i,a,b,ns

if n=0 then
ns=1 Tenemos en cuenta que n puede valer 0
else
ns=0 Se inicia la suma
for i=0 to sqr(n) Busca el primer sumando
a=n-i*I Calcula el Segundo sumando
if a=int(sqr(a))^2 then El segundo sumando es un cuadrado
if i*i<=a then Esta línea es para no tener en cuenta el orden de los sumandos
b=sqr(a) Base del segundo cuadrado
if b>0 and i>0 and b<>i then Si ambas bases son positivas y distintas hay 8 posibilidades
ns=ns+8
else Si una es cero o son iguales, sólo hay 4
ns=ns+4
end if
end if
end if
next i
end if
nsc=ns Se recoge el resultado
end function

Esta función, si se declara *Public* se puede usar en la hoja de cálculo y formar una tabla que compare N con NSC(N):

N	NSC(N)
0	1
1	4
2	4
3	0
4	4
5	8
6	0
7	0
8	4
9	4
10	8
11	0
12	0
13	8
14	0
15	0
16	4
17	8
18	4
19	0
20	8

Aunque su distribución parece ser muy irregular, nos espera una sorpresa y es que si acumulamos los resultados y vamos calculando el promedio de NSC conforme crece N, este promedio tiene como límite π

En la siguiente tabla puedes observar que para N=20 ya se percibe esta tendencia al límite:

N	NSC(N)	Acumulada	Promedio
0	1	1	1,0000
1	4	5	5,0000
2	4	9	4,5000
3	0	9	3,0000
4	4	13	3,2500
5	8	21	4,2000
6	0	21	3,5000
7	0	21	3,0000
8	4	25	3,1250
9	4	29	3,2222
10	8	37	3,7000
11	0	37	3,3636
12	0	37	3,0833
13	8	45	3,4615
14	0	45	3,2143
15	0	45	3,0000

16	4	49	3,0625
17	8	57	3,3529
18	4	61	3,3889
19	0	61	3,2105
20	8	69	3,4500

Para N=500 el promedio oscila ya de una forma clara alrededor de 3,14:

498	0	1565	3,1426
499	0	1565	3,1363
500	16	1581	3,1620
501	0	1581	3,1557
502	0	1581	3,1494

y para N=8000 su valor es 3,14213. ¡No nos libramos del número π!

Puedes descargarte las hojas de cálculo en las que hemos implementado la fórmula de Gauss y la función NSC que cuenta todas las sumas considerando signos y orden en la dirección

http://hojamat.es/blog/sumacuad.zip

Problema del círculo de Gauss

En el anterior apartado nos aparecía el número π de forma algo sorprendente. En esta veremos que de sorpresa nada. Todo está relacionado, y se basa en la solución del llamado Problema del círculo de Gauss.

No entraremos demasiado en la parte teórica, que podéis consultar en las páginas

http://mathworld.wolfram.com/GausssCircleProblem.html

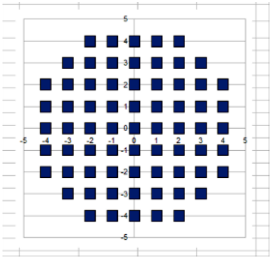
http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss_circle_problem

o en el Blog "Juan de Mairena"

http://demairena.blogspot.com/2008/01/1363-el-problema-del-crculo-de-gauss.html

Lo que presentaremos aquí es su tratamiento con hoja de cálculo, pero con una pequeña introducción.

Anteriormente desarrollamos los números enteros positivos como sumas de dos cuadrados de base entera. Estamos en el terreno del Teorema de Pitágoras, y si representamos todas las soluciones para un número N dado como catetos de un triángulo, los puntos representados por ellos se situarán todos en el círculo de radio la raíz cuadrada de N.



Si con una hoja de cálculo creamos una lista de valores X e Y tales que $X^2+Y^2<=N$, según lo explicado, se rellenarán puntos dentro de un círculo, lo que representará perfectamente el círculo de Gauss. En la imagen puedes ver el gráfico correspondiente a N=22

Para conseguir esta imagen necesitaremos el algoritmo que encuentre todas las soluciones para que $X^2+Y^2<=N$ Una vez conseguida la lista de soluciones bastará con crear un gráfico del tipo XY para conseguir la aproximación al círculo.

Se puede usar un código en el Basic de OpenOffice.org similar al siguiente:

```
Sub desarrollo(n)
dim i,j,s,t,fi,a,b,x

fi=5
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(3,fi).value=0
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(4,fi).value=0
for x=1 to n
```

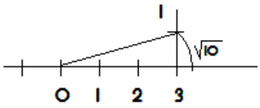
```
i=0
a=sqr(x)
while i<=a
j=x-i*i
if j=int(sqr(j))^2 or j=0 then
b=sqr(j)
for s=-1 to 1 step 2
for t=-1 to 1 step 2
fi=fi+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(3,fi).value=i*s
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(4,fi).value=b*t
next t
next s
end if
i=i+1
wend
next x
End Sub
```

Puedes descargarte las versiones en Excel 2007 y OpenOffice.org 3 desde la dirección

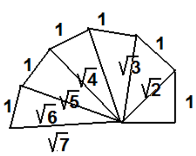
http://hojamat.es/blog/circulogauss.zip

Reflexión intrascendente

Después de redactar los últimos apartados he recordado que en mis clases de Matemáticas, al explicar los números reales, utilizábamos el Teorema de Pitágoras para representar en la recta real los irracionales cuadráticos. Así situábamos, por ejemplo, la raíz cuadrada de 10 mediante el uso de una recta graduada y un compás:



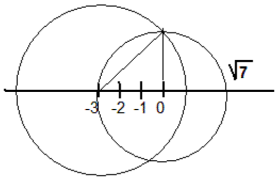
De igual forma representábamos las raíces cuadradas de 2, 13, 17, etc.



Cosa curiosa: en tantos años nadie me preguntó por la raíz de 7 ¿Cómo se representa en la recta real? ¿Qué le hubieras respondido tú?

Hay dos respuestas al menos: una es acumular triángulos rectángulos a partir de uno con hipotenusa la raíz de 2 adosándole un cateto de medida la unidad, con lo que la hipotenusa equivaldría a la raíz de 3, y así sucesivamente, mediante catetos 1 se irían generando todas la raíces.

Otra es acudir a una diferencia de cuadrados. En la imagen puedes ver la representación de la raíz de 7 tomada como cateto de un triángulo de hipotenusa 4 y el otro cateto 3:



Pero este método tiene un inconveniente, y es que sólo son representables con diferencias de cuadrados los números impares y los múltiplos de 4. Por tanto, el número 14 no se podría construir ni con sumas de cuadrados ni con diferencias.

¿Sabrías indicar qué otras dos construcciones geométricas sobre un triángulo rectángulo nos permitirían representar todos los irracionales cuadráticos?

Así que hemos descubierto que la descomposición de un número en sumas o bien en diferencias de cuadrados clasifica a los números enteros positivos en cuatro clases.

Terminamos este estudio como lo comenzamos, con la sección 182 de las ***Disquisitiones arithmeticae***:

Todo número natural según Gauss se puede representar de la siguiente forma:

$$N = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b2} \dots p_r^{b_r} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \dots q_s^{c_s}$$

Donde p_i son los factores del tipo 4h+3 y los q_i del tipo 4h+1.

Con esa nomenclatura podemos afirmar:

Si a es par y todas la b_i pares (contando el 0), N se puede descomponer en suma de dos cuadrados y en diferencia de otros dos. Igualando, $N=a^2+b^2 = m^2-n^2$ y produce de forma indirecta soluciones a la ecuación $x^2+y^2+z^2=u^2$. Sería el caso del número 17 = $4^2+1^2= 9^2-8^2$, que da lugar a la identidad $4^2+1^2+8^2= 9^2$

Si a es impar y todas la b_i pares, N equivaldrá a sumas de cuadrados pero no a diferencias. Ocurre esto con el número 10 = 3^2+1^2 que no puede escribirse como diferencia de cuadrados a causa de no poder expresarse como dos factores de la misma paridad.

Si a es par y alguna b_i impar, admitirá una descomposición en diferencias de cuadrados pero no en sumas (de dos). Así, $15=4^2-1^2$ y no se puede descomponer en suma por ser del tipo 4h+3.

Por último, no admitirán ninguna descomposición similar los que presenten a impar y alguna b_i impar. Es así el número 70 = 2*5*7, que a causa del 2 y el 7 no admitirá ser expresado como suma o diferencia de cuadrados. Insisto en la pregunta: ¿Cómo lo podríamos representar en la recta real? Es una cuestión más bien elemental.

ESPIRAL DE NÚMEROS

A partir del número 3 se construye la siguiente sucesión de números impares

3, 5, 13, 85, 157, 12325, 12461, 106285, 276341,…

¿Cómo se ha conseguido? Si consultas en la Red puedes descubrir una definición algo complicada, que está contenida en una página muy popular. Nosotros pedimos un procedimiento más simple mediante el que se genere un 5 a partir del 3, y un 13 a partir del 5, y así el mismo procedimiento en todos.

Descubrimos la solución y, siguiendo nuestra afición a los giros, le daremos algunas vueltas.

Para formar esta sucesión a partir del 3 se ha elegido en cada paso la "mínima hipotenusa que forma con el número una terna pitagórica": $3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$; $13^2+84^2=85^2$… y así van saliendo 3, 5, 13, 85,…

(a) La función mh(n) ("*mínima hipotenusa para n*") está definida para todo número entero mayor que 2. En efecto, n^2 ha de ser igual a una diferencia de cuadrados entre mh(n) y un cateto, llamémosles a y b:

$n^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, siendo ambos factores de la misma paridad y diferentes entre sí.

Esto siempre es posible: Si n es impar, n^2 también lo será, y se podrá descomponer al menos como $n^2 = n^2 * 1$, ambos impares. Si es par, n^2 será múltiplo de 4, luego se puede escribir como $n^2 = 2*2m$, ambos pares.

Por tanto todo número mayor que 2 posee una o varias hipotenusas posibles y bastará elegir la mínima (¿por qué esto falla con el 1 y el 2?)

(b) Una demostración fácil: Si **n** es primo, sólo existe una solución y viene dada por **Mh(n)=(n^2+1)/2**. Además, en ese caso, la diferencia entre la hipotenusa y el otro cateto es la unidad.

(c) Implementación de la función mh(n)

Si toda solución pasa por una diferencia de cuadrados, deberemos encontrar dos factores de **n** con la misma paridad lo más cercanos uno de otro, a fin de que su semisuma (valor de a) sea mínima.

Incluimos un posible código

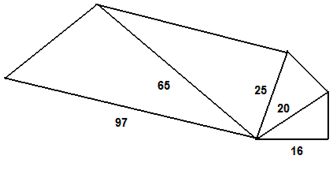
function minihip(n)
dim i,a,b
dim sigue as boolean

a=n*n ‘ tomamos el cuadrado de n

i=n ‘El primer factor probar es el mismo n
sigue=true ‘Controla el bucle while
while sigue
i=i-1 ‘Vamos bajando el valor de i
b=a/i ‘calculamos el otro factor
if esmultiplo(a,i)=1 and esnumpar(i+b)=1 then sigue=false ‘Han de ser divisores de n2 y de la misma paridad
wend
b=(b+i)/2 ‘Se encuentra la semisuma de ambos factores
minihip=b ‘y ese es el valor de mh(n)
end function

(d) Espiral de números

Si reiteramos la aplicación de la función mh(n) a partir de un número entero, podremos construir un espiral con las hipotenusas (enteras) lo más pequeñas posible. De poco nos sirve, porque pronto comienzan a crecer. Por ejemplo, la que comienza con el 16 al principio va muy lenta, pero después salta: 16, 20, 25, 65, 97 y de pronto, 4705.



En cada tramo de la espiral el arcocoseno de n/mh(n) nos da una medida muy intuitiva de lo que aumenta el cateto al pasar a la hipotenusa, así como del giro que sufre ésta en cada paso. También podemos usar la razón mh(n)/n. Hay muchos números que comparten la misma razón, así mh(22)/22 = 122/22 = 61/11 y mh(121)/121 = 671/121 = 61/11, pero hay que tener cuidado, pues el carácter mínimo de mh(n) puede romper alguna proporcionalidad.

(e) La función mh(n) no es inyectiva. De hecho, el número 925, es mínima hipotenusa de 43, 533, 740, 875, 888 y 924

(f) El que c sea la mínima hipotenusa para a, no significa que también lo sea para el otro cateto b. Hay veces que sí, como en el caso de a=52: su mínima hipotenusa es c=65, con lo que el otro cateto es b=39 y mh(39) = 65 de nuevo. En otros casos no se produce esa coincidencia: a=55, mh(a)=73, b=48 y mh(48)=50, que no coincide con 73.

Piensa, ¿qué será más frecuente, el que coincidan o el que no? Pues en los mil primeros números son más frecuentes las coincidencias (entre 56% y 53,5%), pero va decreciendo ese porcentaje. Con más paciencia o instrumentos más rápidos podríamos conjeturar su límite.

(g) Se señaló anteriormente que el arcocoseno es una buena medida de la razón n/mh(n). Su cota es pi/2. ¿Crees que podemos acercarnos a esa cota tanto como queramos eligiendo convenientemente n? La respuesta es afirmativa:

Usando números primos la razón n/mh(n) = $2p/(p^2+1)$ tendería a 0 para p suficientemente grande.

ÁREAS DE TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

El 18 de septiembre de 2009 publiqué una de mis primeras entradas de mi blog, con el siguiente breve texto:

Ternas pitagóricas que comparten área

La lectura de la biografía de Lewis Carroll me ha sugerido el proponer la siguiente búsqueda, inspirada en un problema que le impidió dormir una noche:

¿Qué números enteros equivalen al área de un triángulo rectángulo de lados también enteros, de tres formas distintas?

La primera solución es 840, porque las tres ternas

15, 112 y 113

24, 70 y 74

40, 42 y 58

pertenecen a lados de triángulos rectángulos de área 840.

¿Cuáles son las siguientes soluciones?

A partir de ella, mi amigo Claudio Meller (https://twitter.com/MellerClaudio) publicó en OEIS el resto de soluciones, como puedes comprobar en http://oeis.org/A177021

A partir de cálculos que no vienen al caso, me ha apetecido volver a este tema, estudiando otros casos parecidos y los procedimientos para llegar a ellos.

Procedimiento general de búsqueda

Las condiciones del problema se traducen, dado un número N, en encontrar los dos catetos de una terna pitagórica adecuada, sea $a^2+b^2=c^2$, tales que a*b=2*N. Bastará entonces buscar pares de divisores de 2N que sean catetos en una terna pitagórica. La hipotenusa c no tiene por qué intervenir.

Si organizamos la búsqueda con estas propiedades, será útil contar los pares válidos, para ver a cuántas áreas equivale N. También, según decidimos últimamente, podemos crear una función que devuelva una cadena de texto con los valores de los catetos. Proponemos esta, para Excel o Calc:

Function areapitag$(n)
Dim p, q, m
Dim s$
s$ = "": m = 0 ‘Se pone a cero el contador y el resultado
For p = 2 To Sqr(2 * n) ‘Un cateto no puede sobrepasar la raíz cuadrada de 2N
q = 2 * n / p ‘El otro divisor
If q = Int(q) Then ‘Tiene que ser entero
‘Si es terna pitagórica, se memoriza y se incrementa el contador
If escuad(p ^ 2 + q ^ 2) Then m = m + 1: s$ = s$ + " # " + Str$(p) + ", " + Str$(q)
End If
Next p
If s$ = "" Then s$ = "NO" Else s$ = Str$(m) + s$
areapitag = s
End Function

Así, si tomamos, por ejemplo el 840 del texto de arriba, nos devolverá:

AREAPITAG(840)=” 3 # 15, 112 # 24, 70 # 40, 42”

Significará que hay tres soluciones (primer 3 de la cadena) y que los catetos de cada una son (15,112), (24,70) y (40, 42), tal como afirmamos hace más de diez años.

Con esta función, si leemos el primer dígito del resultado S$, sabremos cuántas soluciones presenta cada número dado. En Excel podemos usar LEFT$(S;2), sabiendo el número está precedido por un espacio en blanco, o bien MID$(S,2,1). En cualquier bucle de búsqueda que organicemos, usaremos una de estas dos condiciones para identificar qué números no presentan solución o bien una o más de una.

Antes de emprender búsquedas, hay que advertir que si un número **a** posee un número de soluciones, también las tendrá $a*m^2$, por la generación de las distintas ternas como múltiplos de una terna primitiva.

Números que son área de al menos una terna

La primera cuestión puede consistir en descubrir qué números coinciden con al menos un área de triángulo pitagórico. Con la función anterior *areapitag* basta exigir que el resultado sea distinto de “NO”. Los primeros números de este tipo son:

6	1 # 3, 4	
24	1 # 6, 8	
30	1 # 5, 12	
54	1 # 9, 12	
60	1 # 8, 15	
84	1 # 7, 24	
96	1 # 12, 16	
120	1 # 10, 24	
150	1 # 15, 20	
180	1 # 9, 40	
210	2 # 12, 35	# 20, 21
216	1 # 18, 24	
240	1 # 16, 30	
270	1 # 15, 36	
294	1 # 21, 28	
330	1 # 11, 60	
336	1 # 14, 48	
384	1 # 24, 32	

Todos equivalen a un área, salvo 210 que admite dos. Están ya publicados, como algunos de los que estudiaremos hoy.

Areas of Pythagorean triangles: numbers which can be the area of a right triangle with integer sides.

6, 24, 30, 54, 60, 84, 96, 120, 150, 180, 210, 216, 240, 270, 294, 330, 336, 384, 480, 486, 504, 540, 546, 600, 630, 720, 726, 750, 756, 840, 864, 924, 960, 990, 1014, 1080, 1176, 1224, 1320, 1344, 1350, 1386, 1470, 1500, 1536, 1560, 1620, 1710, 1716, 1734, 1890

http://oeis.org/A009112

Todos los términos son múltiplos de 6.

Se generan en PARI con un código algo oscuro. Es preferible este otro que proponemos, copia de la función *areapitag*:

for(i=1,2000,m=0;for(p=2,sqrt(2*i),q=2*i/p;if(q==truncate(q)&&issquare(p^2+q^2),m+=1));if(m>0,print1(i,", ")))

Puedes comprobar que se llega al mismo listado.

De ellos, algunos solo admiten una representación, como se ha visto en la tabla de más arriba. Si en el código PARI sustituimos ***m>0*** por ***m==1***, los obtendremos:

6, 24, 30, 54, 60, 84, 96, 120, 150, 180, 216, 240, 270, 294, 330, 336, 384, 480, 486, 504, 540, 546, 600, 630, 720, 726, 750, 756, 864, 924, 960, 990, 1014, 1080, 1176, 1224, 1344, 1350, 1386, 1470, 1500, 1536, 1560, 1620, 1710, 1716, 1734, 1920, 1944,…

Observamos que ya no está 210, que equivale a dos áreas. Esta sucesión no figura en OEIS.

Si en el código cambiamos ***m==1*** por ***m==2***, obtendremos los números que equivalen a dos áreas.

210, 1320, 1890, 2730, 4914, 5250, 5280, 7980, 10290, 11880, 17010, 18480, 19656, 21120, 24570, 25410, 29400, 30600, 32130, 33000, 34650, 35490, 41580, 44226,…

Por último, si igualamos a 3, resultará la sucesión con la que comenzamos este estudio

A177021 Numbers which are the area of exactly three Pythagorean triangles.

840, 3360, 7560, 10920, 13440, 21000, 30240, 31920, 41160, 43680, 53760, 68040, 84000, 98280, 101640, 120960, 127680, 141960, 164640, 166320, 174720, 189000, 215040, 242760, 272160, 273000, 286440, 287280, 303240, 336000, 370440, 393120, 406560, 444360

AUTHOR Claudio Meller, on a suggestion by Antonio Roldán, Dec 08 2010

Para finalizar, si deseas practicar un poco, intenta encontrar estos números con nuestra función *areapitag* (con Excel o PARI). En esta sucesión a(n) es el menor número que equivale a las áreas de n triángulos pitagóricos:

A055193 Smallest number that is the area of n distinct Pythagorean triangles.

6, 210, 840, 341880, 71831760, 64648584000, 2216650756320, 228610581335136000

Reciben este nombre en la página OEIS (http://oeis.org) aquellos números que coinciden con el producto de los tres lados de una terna pitagórica. El primero, como era de esperar, es 60, que es el producto de 3, 4 y 5, elementos de la terna más sencilla que conocemos. El segundo, 480, es el producto de sus dobles, 6*8*10. Siguen infinitos de este tipo (porque también es infinito el número de ternas), y nuestro objetivo en este apartado es analizar métodos para encontrarlos.

La idea sencilla es ir construyendo ternas y después tomar nota del producto de sus lados. El inconveniente reside en que así no podemos averiguar si un número cualquiera es de este tipo o no. Si nos preguntan si lo es 238772, no vamos a formar todas las ternas hasta llegar a él. Por eso, como en otras ocasiones, recurriremos a una función que nos responda a esa pregunta.

Algoritmo con fuerza bruta

Esta es la aproximación a un problema con la que solemos comenzar los temas. Fingimos no saber nada de la cuestión y emprendemos una búsqueda sin apoyarnos en ninguna propiedad. Usaremos la siguiente función:

Public Function Saint_Exupery(n)
Dim a, b, c, p, r
Dim s$

a = 3: b = 4: c = 5: p = 60 ‘Iniciamos valores con la terna (3, 4, 5)
s = "" ‘Recogerá soluciones
r = Sqr(n) ‘Tope de búsquedas
While a <= r And s = ""
b = a + 1 ‘Segundo cateto
p = a * b * c ‘Posible número de Saint_Exupery
While b <= r And s = ""
c = n / a / b ‘Tercer cateto
If a ^ 2 + b ^ 2 = c ^ 2 Then s = Str$(a) + Str$(b) + Str$(c) ‘Es terna pitagórica y se publica
b = b + 1
Wend
a = a + 1
Wend
Saint_Exupery = s
End Function

Con esta función podemos responder a la pregunta de si 238772 es del tipo buscado, y la respuesta es que no, porque devuelve una cadena vacía. Más adelante veremos una razón más sencilla, y es que no es múltiplo de 60.

También con ella podemos encontrar los primeros números de Saint_Exupery:

En la tabla siguiente, cada número viene acompañado de la terna de la que es producto:

Número	Terna
60	3 4 5
480	6 8 10
780	5 12 13
1620	9 12 15
2040	8 15 17
3840	12 16 20
4200	7 24 25
6240	10 24 26
7500	15 20 25
12180	20 21 29
12960	18 24 30
14760	9 40 41
15540	12 35 37
16320	16 30 34

Indirectamente, esta es una forma de ordenar ternas por el producto de sus lados.

No es este un algoritmo rápido. Para llegar a estos resultados se han necesitado 1m y 20s. Pronto veremos una simplificación.

Estos números ya están publicados en OEIS, de donde hemos obtenido su definición:

A057096 Saint-Exupéry numbers: ordered products of the three sides of Pythagorean triangles.

60, 480, 780, 1620, 2040, 3840, 4200, 6240, 7500, 12180, 12960, 14760, 15540, 16320, 20580, 21060, 30720, 33600, 40260, 43740, 49920, 55080, 60000, 65520, 66780, 79860, 92820, 97440, 97500, 103680, 113400, 118080, 120120, 124320, 130560, 131820, 164640

(http://oeis.org/A057096)

Segundo algoritmo

En el algoritmo de fuerza bruta hemos obviado el hecho de que los lados de la terna han de ser divisores del número de Saint-Exupéry buscado. Si tenemos esto en cuenta, la búsqueda se simplifica bastante. Podemos intentar esta variante:

Public Function Saint2(n)
Dim a, b, c
Dim s$

a = 5
s = ""
While a <= n / 2 And s = ""
If n / a = n \ a Then ‘Exigimos que el primer lado sea divisor de **n**
b = a – 1 ‘Buscamos el siguiente divisor, más pequeño que **a**
While b > 1 And s = ""

If n / b = n \ b Then
c = n / a / b ‘El tercer divisor se calcula directamente
If a ^ 2 = b ^ 2 + c ^ 2 Then s = Str$(a) + Str$(b) + Str$(c)
End If
b = b - 1
Wend
End If
a = a + 1
Wend
Saint2 = s
End Function

Esta versión constituye una mejora en rapidez, porque tarda 54 segundos en reproducir la misma tabla de arriba.

Tercera versión

A propósito, para que se vea la utilidad de un apoyo teórico, hemos ignorado una propiedad muy popular de las ternas, y es que en cualquiera de ellas hay un múltiplo de 3, uno de 4 y uno de 5, que pueden coincidir o no en un mismo término. Por tanto, el producto de los tres lados será múltiplo de 60. Esto facilita mucho las cosas, porque se puede insertar un condicional del tipo

n/60=n\60 o **n MOD 60=0**, con lo que solo se analizarán los múltiplos de 60.

Con esta mejora, nuestro equipo, con bastantes años sobre él, solo tarda 13 segundos.

Ahora ha llegado el momento de traducir este algoritmo al lenguaje PARI:

```
saint(n)={my(a=5,b,c,m=0);if(n%60==0,while(a<=n/2&&m==0,if(n%a==0,b=a-1;while(b>=1&&m==0,if(n%b==0,c=n/a/b;if(c<a&&a^2==b^2+c^2,m=1));b-=1));a+=1));m}

for(i=60,60000,if(saint(i),write1("final.txt",i,", "))
```

No se gana mucha rapidez con él, porque PARI no es muy eficiente cuando se manejan bucles anidados. La ventaja que presenta es que llega fácilmente a números grandes. El listado siguiente llega hasta 60000:

60, 480, 780, 1620, 2040, 3840, 4200, 6240, 7500, 12180, 12960, 14760, 15540, 16320, 20580, 21060, 30720, 33600, 40260, 43740, 49920, 55080, 60000,…

Dos cuestiones

En las búsquedas que hemos emprendido no hemos encontrado un número que sea producto de lados de dos ternas distintas. Parece ser que su existencia es una cuestión abierta.

Nuestras funciones pueden resolver el llamado “Problema de Napoleón”, planteado por el mismo Saint-Exupéry. No vamos a desarrollar aquí ese problema. Puedes consultar

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Parallelepipede_Plane.pdf

En ese texto se llega a la solución 756, 825 y 1119. Si aplicamos nuestra función *saint2* al número 697920300 (ver texto recomendado), nos devuelve al momento esa solución:

Número	697920300
Terna	1119 825 756

(Ver también

https://www.antoinedesaintexupery.com/personne/le-probleme-du-pharaon/)

HIPOTENUSA MÚLTIPLO DE UNO DE LOS CATETOS.

Hace unas semanas tuve ocasión de estudiar la terna pitagórica (9, 40, 41) y me llamó la atención el hecho de que la medida del cateto 9 dividía al perímetro 9+40+41=90. Me pregunté si existían muchos números con esa propiedad. Aquí tenéis mis búsquedas y razonamientos.

Al principio creí que sería un hecho más bien extraordinario, pero después de las primeras búsquedas me di cuenta de que existen muchos casos de este tipo, aunque son más abundantes aquellos en los que el perímetro no es múltiplo de ninguno de los catetos.

Solo tiene interés estudiar las ternas primitivas, en las que los tres lados son primos entre sí, porque si se cumple en una primitiva, también se cumplirá en sus derivadas, porque tanto el perímetro como los lados se multiplican por el mismo número, con lo que el carácter de múltiplo se conserva.

La primera terna en la que se cumple esto es la (3, 4, 5). Su perímetro es 12, y es múltiplo de 3 y 4.

La siguiente es (5, 12, 13), porque P=5+12+13=30, que es múltiplo de 5 (pero no de 12)

La primera terna en la que no se cumple es la (20, 21, 29), ya que el perímetro es 70, que no es múltiplo ni de 20 ni de 21.

Sospechamos, pues, que ninguno de los dos casos contrarios es excepcional.

Función de búsqueda

Hay dos formas de construir ternas primitivas. Una de ellas es la tradicional de buscar expresiones del tipo (**2mn, m^2-n^2, m^2+n^2**) con **m** y **n** primos entre sí y paridad distinta. Esta forma la dejamos para más adelante. Hemos visto que el algoritmo correspondiente no gana mucha velocidad.

(Ver este procedimiento en

https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitag%C3%B3rica)

La otra forma es la que no usa esa teoría. Para una posible hipotenusa **n**, se descompone su cuadrado, si es posible, en suma de otros dos cuadrados enteros, y si las bases son primas entre sí y además el perímetro es múltiplo de uno al menos de los catetos, se cumplirá lo exigido. Lo plasmaremos en VBasic de Excel y más tarde en PARI.

Para Excel podemos usar la siguiente función de tipo texto. Su nombre recuerda cómo iniciamos lel capítulo, con un cateto 9 que dividía al perímetro 90.

```
Public Function cateto_div_terna$(n) 'n es la hipotenusa de la terna estudiada
Dim a, b, c, p, j, k
Dim s$
Dim noes As Boolean

a = n ^ 2 ‘Descomponemos n^2 en dos cuadrados
j = 1
b = 1: c = a - 1
s$ = ""
noes = True
j = 1 ‘Es la base del primer cuadrado
While j < n And noes
b = j ^ 2: c = a - b
If escuad(c) Then ‘Segundo cuadrado posible
k = Sqr(c)
p = n + j + k ‘Perímetro
If (p Mod j = 0 Or p Mod k = 0) And mcd(mcd(j, k), n) = 1 Then noes = False: s$ = Str$(n) + Str$(j) + Str$(k) + Str$(p)
‘La condiciones son que p sea múltiplo de j y de k y que todos sean primos entre sí.
Si se cumplen se recoge la solución en s$.
End If
j = j + 1
Wend
cateto_div_terna = s
```

End Function

Con esta función no es difícil recorrer números, quedarnos con la hipotenusa y reconstruir la terna. Aquí tienes las primeras soluciones:

Hipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Perímetro
5	3	4	12
13	5	12	30
17	8	15	40
25	7	24	56
37	12	35	84
41	9	40	90
61	11	60	132
65	16	63	144
85	13	84	182
101	20	99	220
113	15	112	240
145	17	144	306
181	19	180	380
197	28	195	420

Si continuamos buscando, llegaremos a una lista más extensa:

5, 13, 17, 25, 37, 41, 61, 65, 85, 101, 113, 145, 181, 197, 221, 257, 265, 313, 325, 365, 401, 421, 481, 485, 545, 577, 613, 677, 685, 761, 785, 841, 901, 925, 1013, 1025, 1105, 1157, 1201, 1297, 1301, 1405, 1445, 1513, 1601, 1625, 1741, 1765, 1861, 1937, 1985, 2113, 2117, 2245, 2305, 2381, 2501, 2521, 2665, 2705, 2813, 2917, 2965, 3121, 3137,

La versión en PARI es una simple traducción de la de Excel. La llamamos ok(k) para su posible publicación en OEIS:

```
ok(k)={my(a=k^2,j=1,b=1,c=a-1,l,p,
m=0);while(j<k&&m==0,b=j^2;c=a-
b;if(issquare(c),l=sqrtint(c);p=k+j+l;if((p%j==0||p%l=
=0)&&gcd(gcd(j,l),k)==1,m=1));j+=1);m}
```

```
for(i=1,2000,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

Su resultado coincide, como era de esperar, con el obtenido en Excel:

```
5, 13, 17, 25, 37, 41, 61, 65, 85, 101, 113, 145, 181, 197, 221, 257, 265, 313,
325, 365, 401, 421, 481, 485, 545, 577, 613, 677, 685, 761, 785, 841, 901, 925,
1013, 1025, 1105, 1157, 1201, 1297, 1301, 1405, 1445, 1513, 1601, 1625, 1741, 17
65, 1861, 1937, 1985,
```

Hemos recorrido listas de ternas primitivas para seleccionar las que cumplen lo exigido, y se llega al mismo listado.

Estudio teórico

Tras la búsqueda a ciegas podemos plantearnos un estudio más profundo. Nos basaremos en la clásica fórmula de generación de ternas primitivas:

($2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2) con **m** y **n** coprimos y de distinta paridad.

En ese caso el perímetro P tendrá la fórmula P=**$2mn+m^2-n^2+m^2+n^2=2m(m+n)$**

Se pueden dar tres casos:

1) El perímetro es múltiplo del cateto par

2m(m+n)/(2mn)=(m+n)/n=m/n+1

Al ser m y n coprimos y de distinta paridad, para que sea múltiplo ha de ser n=1 y m=2r, con lo que hipotenusa será $\mathbf{m^2+n^2=4r^2+1}$.

El perímetro será $4r+4r^2+1+4r^2-1=8r^2+4r=4r(2r+1)$ y pertenecerá a http://oeis.org/A033586 y la diferencia entre hipotenusa y cateto mayor será de dos unidades.

Puedes verificar que todas las soluciones en las que el perímetro es múltiplo del cateto impar tienen esta forma. Así ocurre con el ejemplo con el 17, que forma la terna (8, 15, 17), en la que $17=4*2^2+1$, el perímetro es 8+15+17=40, que es múltiplo de 8.

Por tener esta expresión, las hipotenusas correspondientes pertenecerán a

http://oeis.org/A053755 y las primeras serán 5, 17, 37, 65, 101, 145, 197, 257, 325, 401,…

2) El perímetro es múltiplo del cateto impar

En ese caso hay que estudiar el cociente $\mathbf{2m(m+n)/(m^2-n^2)=2m/(m-n)=2+2n/(m-n)}$, lo que obliga a que 2n/(m-n) sea entero. El denominador m-n ha de ser impar, luego ha de dividir a n y n/(m-n)=t será entero. Se deduce que n=(m-n)t; n(t+1)=m*t; n/t=m/(t+1)=k, lo que lleva a que k=1, pues en caso contrario, m y n no serían primos entre sí. Por tanto queda que n=t y m=t+1, es decir, que m y n son consecutivos. La hipotenusa quedaría como **(n+1)^2+n^2**.

Esto ocurre en el ejemplo del principio de esta estudio, (9, 40, 41): $41=5^2+4^2$, $9=5^2-4^2$; 40=2*4*5, y 41+40+9=90 es múltiplo del cateto impar.

Las hipotenusas de este tipo pertenecen a http://oeis.org/A001844

La terna quedará: $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)=(2n^2+2n, 2n+1, 2n^2+2n+1)$ y serán consecutivos la hipotenusa y un cateto

El perímetro será 2(n+1)(2n+1) y pertenecerá a http://oeis.org/A002939

Estos dos casos cubren toda la sucesión de hipotenusas que estamos estudiando.

Esto da lugar a otra función alternativa más rápida:

```
Public Function cateto2_div_terna(n) 'Da la hipotenusa para que el perímetro sea divisible
Dim b, c, j, k, a
Dim es As Boolean

j = 1
a = j ^ 2
es = False
```

While a < n And Not es

b = n - a

If escuad(b) Then ‘Se descompone **n** en suma de dos cuadrados

c = Sqr(b)

If c < j And (c = 1 And a Mod 2 = 0 Or Abs(j - c) = 1) Then es = True ‘Las dos condiciones

End If

j = j + 1: a = j ^ 2

Wend

cateto2_div_terna = es

End Function

Es interesante la intersección entre los dos casos:

3) El perímetro es múltiplo de los dos catetos

Es el caso del 5 y del 145, que cumplen las dos condiciones estudiadas. Es decir, en ellos se dará que

$4r^2$+1=(n+1)^2+n^2

$5=4*1^2+1=2^2+1^2$

$145=4*6^2+1=9^2+8^2$

Desarrollando y despejando $4r^2$ tenemos: $n^2+2n+1+n^2-1=2(n^2+n)$ ha de ser un cuadrado (que será par con seguridad) y la hipotenusa una unidad mayor. Aquí tienes los primeros:

n	(n+1)^2+n^2-1	Hipotenusa
1	4	5
8	144	145
49	4900	4901
288	166464	166465
1681	5654884	5654885
9800	192099600	192099601

Resultan ser elementos de http://oeis.org/A076218, pero con una definición alternativa.

Si te gustan las ecuaciones diofánticas, puedes plantear lo siguiente:

$(n+1)^2+n^2=4r^2+1$; $2n^2+2n+1=4r^2+1$; $4n^2+4n+2=8r^2+2$; $(2n+1)^2-8r^2=1$.

Esta es una ecuación de Pell, y la puedes resolver con nuestra hoja de cálculo

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/pell.xls

X	Y	
3	**1**	**+1 ó -1**
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Los valores de X serán, según lo visto más arriba, iguales a 2n+1. Si les restamos 1 y los dividimos entre 2, resultarán los índices de la tabla de arriba y las soluciones serán del tipo $n^2+(n+1)^2$:

3	1	5
17	8	145
99	49	4901
577	288	166465
3363	1681	5654885
19601	9800	192099601
114243	57121	6525731525
665857	332928	2,21683E+11

Esta tabla completa el estudio, que ha resultado con más base teórica de la que podía pensarse al inicio de las búsqueda

OBLONGOS Y PITAGÓRICOS II

Desde la publicación de nuestra entrada de título "Oblongos y pitagóricos"

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/03/oblongos-y-pitagoricos-3.html) hemos estudiado algunas relaciones entre catetos e hipotenusa dentro de una terna pitagórica. Parece conveniente repasar las mismas, eliminando lo accesorio, y efectuar una síntesis.

Catetos que se diferencian en una unidad

Comenzaremos con un repaso a la primera cuestión que publicamos:

Una cuestión que ha dado juego desde los tiempos de Girard y Fermat y que permite recorrer alternativas de cálculo es la siguiente:

De todos los triángulos rectángulos de lados enteros ¿Cuáles cumplen que la diferencia entre los catetos es la unidad?

Recordábamos que la primera terna en cumplir esta condición es la popular 3, 4 y 5. El resto resultará de la ecuación $x^2+(x+1)^2=y^2$.

Otra forma de expresarlo es que el área del rectángulo formado por los dos catetos es un número oblongo, tipo N(N+1) y, por tanto, el área del triángulo será triangular (N(N+1)/2).

Podemos resolverla mediante búsqueda y con técnicas algebraicas.

Búsqueda

Como últimamente usamos funciones, organizaremos la búsqueda con la siguiente:

```
Function catetoscons$(n)
Dim a
Dim s$
s = ""
a = n^2 + (n+1)^2
If escuad(a) Then s = Str$(n) + Str$(n + 1) + Str$(Sqr(a))
catetoscons = s
End Function
```

Su funcionamiento se entiende bien: si n^2+(n+1)^2 es cuadrado, devuelve la terna completa. Las primeras conseguidas son:

N	Terna
3	3 4 5
20	20 21 29
119	119 120 169
696	696 697 985
4059	4059 4060 5741
23660	23660 23661 33461

Los valores de N están publicados en http://oeis.org/A001652. Volveremos a esta sucesión para revisar algunas propiedades.

Versión en PARI

Con este código avanzaremos más lejos en los valores de N:

```
is(n)={issquare(n^2+(n+1)^2)}
for(i=1,10^9,if(is(i),print1(i,", ")))
```

Obtenemos este resultado:

3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519,

Hemos llegado más lejos, pero con tantas cifras la búsqueda se hace muy lenta. Es preferible algún otro procedimiento más rápido, por lo que pasamos al Álgebra:

Estudio algebraico

La ecuación $x^2+(x+1)^2=y^2$ se puede desarrollar de esta forma: $x^2+(x+1)^2=y^2$; $2x^2+2x+1=y^2$; $(2x+1)^2+1=2y^2$; $(2x+1)^2 - 2y^2 = -1$, por lo que llamando $z=2x+1$ desembocamos en una ecuación de Pell con segundo miembro igual a -1

$Z^2-2y^2 = -1$

Utilizamos la hoja de cálculo *pell.ods* o *pell.xlsm* contenidas en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

con el resultado que indica la imagen siguiente

1	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239
1	2	5	12	29	70	169
-1	1	-1	1	-1	1	-1
Solución		Solución		Solución		Solución

en la que valdrán las soluciones correspondientes a -1

Z=1; Y=1; Imposible, pues X sería negativo

Z=7; Y=5 X=3; X+1=4; Y=5

Z=41; Y=29 X=20; X+1=21; Y=29

Z=239; Y=169 X=119; X+1=120; Y=169

Z=1393; Y=985 X=696; X+1=697; Y=985

Este método tiene el inconveniente de que depende de la precisión que tenga la hoja de cálculo en los números con coma flotante, lo que hará que se rompa en algún momento la periodicidad de los cocientes, en este caso el 2. Por ello se puede completar con una fórmula recursiva que obtenga soluciones exactas conociendo las primeras.

En este ejemplo cada elemento de las distintas celdas cumple la fórmula

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

pero como las soluciones aparecen de forma alternada, deberemos reiterar dos veces, y nos quedará:

$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} = 2(2a_{n+2} + a_{n+1})+ 2a_{n+1} + a_n = 4a_{n+2} + 4a_{n+1}+ a_n = 6a_{n+2} - a_n$

Con esta fórmula recursiva se van obteniendo las soluciones sin errores a partir de las dos primeras:

$Z_0 = 1$; $Z_2 = 7$; $Z_4 = 6*7-1 = 41$; $Z_6 = 6*41-7 =239$;…

$Y_0 = 1$; $Y_2 = 5$; $Y_4 = 6*5-1 = 29$; $Y_6 = 6*29-5 =169$;…

Pero no olvidemos que Z es una variable auxiliar Z=2X+1 y que después debemos despejar X

La siguiente lista de ternas, que coincide con la primera que propuso Girard, se ha obtenido mediante esta técnica. Los valores de N coinciden con los de la segunda columna.

1	0	1
5	3	4
29	20	21
169	119	120
985	696	697
5741	4059	4060
33461	23660	23661
195025	137903	137904
1136689	803760	803761
6625109	4684659	4684660
38613965	27304196	27304197
225058681	159140519	159140520
1311738121	927538920	927538921
7645370045	5406093003	5406093004

44560482149	31509019100	31509019101
259717522849	183648021599	183648021600
1513744654945	1070379110496	1070379110497
8822750406821	6238626641379	6238626641380
51422757785981	36361380737780	36361380737781
299713796309065	211929657785303	211929657785304

Los valores de N coinciden con los contenidos en http://oeis.org/A001652, que, por cierto, usa esta recurrencia como definición, que con el cambio de variable entre Z y X queda así:

*a(n) = 6*a(n-1) - a(n-2) + 2 with a(0) = 0, a(1) = 3.*

0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519, 927538920, 5406093003, 31509019100, 183648021599, 1070379110496, 6238626641379, 36361380737780, 211929657785303,

Con hoja de cálculo ya no podemos seguir, por el problema de la coma flotante. Lo podemos intentar con PARI:

a=0;b=3;print1(a,", ");print1(b,", ");while(a<10^20,c=6*b-a+2;print1(c,", ");a=b;b=c)

Como llegamos a 10^20, en pocos segundos se avanza en la lista de valores de N:

0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519, 9
27538920, 5406093003, 31509019100, 183648021599, 1070379110496, 6238626641379, 3
6361380737780, 211929657785303, 1235216565974040, 7199369738058939, 419610018623
79596, 2445666641436218639, 14254388467549322240, 83080664390933374803, 48422959787
805316580, 2822296922877385246 79, 16449551939386258314 96,

Una curiosidad

Cuando no se tienen claras las fórmulas de recurrencia lineal, pero se dispone de suficientes términos iniciales. Se puede acudir a mi hoja de cálculo *ecurrecurre*, disponible en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm

En este caso usamos como datos los términos iniciales 0, 3, 20, 119, 696, y elegimos la variedad "No homogénea", para que admita el sumando independiente 2. Pulsamos el botón de ***resolver*** y nos devuelve los coeficientes 6, -1 y 2.

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	Resolver
Sucesión	0	3	20	119	696	
-5,375	7,5	-1,125				2
-12,375	14,5	-2,125				-1
2,125	-2,5	0,375				6

Recurrencia doble

Fermat propuso una fórmula de recurrencia para generar ternas de este tipo a partir de otras similares. Dada la terna (x,x+1,y), se puede generar otra similar (x',x'+1,y') mediante las fórmulas x'=2x+3y+1 y y'=4x+3y+2.

Cuando se buscan las soluciones de la ecuación de Pell las recurrencias vienen dadas por las fórmulas de recurrencia $z_{n+1}=z_n*z_0+D*y_n*y_0$ $y_{n+1}=z_n*y_0+y_n*z_0$, pero en el caso $z^2-2y^2 = -1$ las soluciones surgen de forma alternada.

Así, como en este caso $z_0=1$, $y_0=1$, tendremos:

$z_{n+1}=z_n+2y_n$; $y_{n+1}=z_n+y_n$ y reiterando dos veces

Z''=Z'+2Y'=(Z+2Y)+2(Z+Y) = Z+2Y+2Z+2Y = 3Z+4Y

Y''=Z'+Y' = Z+2Y+Z+Y = 2Z+3Y

Teniendo en cuenta que Z=2X+1, y que Y=X+1, nos resulta

Y''=2Z+3Y=2(2X+1)+3Y = 4X+3Y+2, que es la segunda fórmula de Fermat

De Z''=3Z+4Y podemos obtener (2X''+1)=3(2X+1)+4Y; 2X'' = 6X+4Y+2;

X'' = 3X+2Y+1, que es la primera

Aplicamos estas dos fórmulas al cateto menor y a la hipotenusa y obtenemos los mismos resultados a partir de 3, 4 y 5

X''=3X+2Y+1	X+1	Y''=4X+3Y+2
3	4	5
20	21	29

119 120 169
696 697 985
4059 4060 5741
23660 23661 33461
137903 137904 195025
803760 803761 1136689
4684659 4684660 6625109
27304196 27304197 38613965
159140519 159140520 225058681

Uso de la generación de ternas

La terna 3, 4, 5 está engendrada por las fórmulas clásicas 2uv, u^2-v^2 y u^2+v^2 para u=2 y v=1. Si sustituimos u y v por u, v+2u se mantendrá la misma diferencia entre catetos.

Basta ver que si engendramos los nuevos catetos y los restamos (en orden contrario) resultará: $2u(v+2u) - (v+2u)^2+u^2= 2uv+4u^2-v^2-4u^2-4uv+u^2 = u^2-v^2-2uv$, que es la diferencia original.

Esto nos permite engendrar de nuevo la lista que estamos considerando, tomando, n primer lugar u=2 v=1, y generando con ella la primera terna 3, 4 y 5. Después se aplica la fórmula de recurrencia $u_n = 2u_{n-1}+v_{n-1}$ $v_n = u_{n-1}$ y se vuelve a generar una terna con ella, que resultará tener la misma diferencia pero con signo cambiado. Así hemos generado la lista con hoja de cálculo:

u	v	x	y	z
2	1	4	3	5
5	2	20	21	29
12	5	120	119	169
29	12	696	697	985
70	29	4060	4059	5741
169	70	23660	23661	33461
408	169	137904	137903	195025
985	408	803760	803761	1136689
2378	985	4684660	4684659	6625109
5741	2378	27304196	27304197	38613965
13860	5741	159140520	159140519	225058681

Relación con triangulares

Área triangular y oblonga

Ya se comentó anteriormente que el área del triángulo rectángulo de catetos N y N+1 es un número triangular. En la sucesión que nos ocupa, las áreas son las siguientes (prescindimos del cero):

6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470,…

Están contenidas en http://oeis.org/A029549

En mi entrada de blog

http://hojaynumeros.blogspot.com/2021/05/triangulares-que-son-oblongos.html)

Se llega a la misma sucesión si exigimos que unos números sean triangulares y oblongos a la vez

```
? para (i = 1, 10 ^ 8, si (es cuadrado (8 * i + 1) && es cuadrado (4 * i + 1), imprime (i)))
6
210
7140
242556
8239770
```

```
for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))
```

En la parte inferior de la imagen se puede leer el código PARI usado.

Estas áreas están publicadas en

http://oeis.org/A029549

*A029549 a(n + 3) = 35*a(n + 2) - 35*a(n + 1) + a(n), with a(0) = 0, a(1) = 6, a(2) = 210.*

0, 6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470, 372759573255306, 12662852473364940, 430164224521152660, 14612920781245825506, 496409142337836914550, 16863297918705209269200

Resumimos la situación en la siguiente tabla, en la que en la última columna figuran las expresiones del área como número oblongo.

Cateto 1	Cateto 2	Área	N(N+1)
3	4	6	2*3
20	21	210	14*15
119	120	7140	84*85
696	697	242556	492*493
4059	4060	8239770	2870*2871
23660	23661	279909630	16730*16731
137903	137904	9508687656	97512*97513

Por tanto, las hipotenusas de estas ternas son números triangulares y también oblongos, es decir, son el doble de otro triangular.

Otras diferencias entre catetos

Si tomamos la terna 3, 4, 5 y multiplicamos sus lados por un mismo número, es evidente que resultará otra terna, pero no primitiva, en la que los catetos se diferenciarán en el factor de multiplicación que hayamos usado.

Así que cualquier número entero puede ser diferencia entre catetos. Además, si es diferencia en una terna, puede serlo en infinitas. La causa es que si en la generación de terna mediante los valores (u^2-v^2, $2uv$, u^2+v^2), también tendrán la misma diferencia si sustituimos u, v por 2u+v, u. En efecto, los lados serían:

Hipotenusa: $(2u+v)^2+u^2=4u^2+v^2+4uv+u^2=5u^2+v^2+4uv$

Cateto 1: $(2u+v)^2-u^2=4u^2+v^2+4uv-u^2=3u^2+v^2+4uv$

Cateto 2: $2*(2u+v)*u=4u^2+2uv$

Diferencia u^2-v^2-2uv

Es la misma diferencia que entre los dos catetos primitivos, u^2-v^2 y 2uv

Lo vemos con un ejemplo: Si u=2 y v=1, resulta la conocida 3, 4 y 5, con diferencia 1 entre catetos. Si aplicamos la transformación 2u+v, u, queda que u=2*2+1=5 v=2, Cateto 1: 5^2-2^2=21, 2*5*2=20, y mantienen la misma diferencia 1.

Reiterando el procedimiento obtendremos infinitas ternas con la misma diferencia (salvo signo u orden). Si la primera es primitiva, todas las demás lo serán, porque si u y v son primos entre sí, también lo serán 2u+v y u.

Ejemplo:

De los valores u=4, v=3, x=7, y=24, z=25, con diferencia entre catetos igual a 17, podemos engendrar u=11, v=4, x=88, y=105, z=137, con 105-88 = 17 y después u=26, v=11, x=572, y=555 z=797, y así tantas como queramos.

Valores de las diferencias

Si sólo admitimos ternas primitivas, no todos los números pueden ser diferencia de catetos. Los únicos posibles son 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, 119, ...

La razón es que las diferencias han de tener factores primos del tipo 8k+1 o bien 8k-1 (Ver http://oeis.org/A058529)

Otras relaciones entre hipotenusa y cateto

En las últimas cifras

Existen muchas hipotenusas que coinciden con catetos en las dos últimas cifras. Para que el estudio no tenga casos triviales, eliminamos los que terminan en dos ceros. Un ejemplo sería la terna (260, 288, 388), en la que dos lados terminan en 88. No es difícil encontrar hipotenusas de este tipo. Podemos probar esta función para Excel, en la que **n** es el número a estudiar y **c** el número de cifras en las que coincide con un cateto:

Function hip_mod_cat(n, c)
Dim i, m, p, r
Dim s$

s = "" ‘En esta cadena se volvará la terna pitagórica
m = 10 ^ c ‘Esta variable contendrá 10^c, 10, 100, 1000…
r = n Mod m ‘Encuentra las últimas cifras
If r = 0 Then hip_mod_cat = "NO": Exit Function ‘Desechamos potencias de 10
For i = r To n - m Step m
'If n - i Mod m = 0 Then ‘Tienen cifras iguales

If escuad(n ^ 2 - i ^ 2) Then p = Sqr(n ^ 2 - i ^ 2): s = s + Str$(p) + ", " + Str$(i) + ", " + Str$(n) ‘Si es un cateto, creamos la terna en modo texto

'End If

Next i

If s = "" Then s = "NO"

hip_mod_cat = s

End Function

Con esta función se puede crear un bucle de búsqueda y obtenemos estas ternas:

120, 22, 122	
140, 48, 148	
160, 78, 178	
180, 112, 212	
220, 21, 221	
240, 44, 244	
200, 150, 250	
260, 69, 269	
220, 192, 292	
280, 96, 296	
300, 125, 325	
240, 238, 338	
320, 156, 356	
360, 66, 366	
260, 288, 388	
340, 189, 389	
360, 224, 424	
440, 42, 442	280, 342, 442
420, 144, 444	
380, 261, 461	
480, 88, 488	
480, 234, 534	
520, 138, 538	
420, 341, 541	
320, 462, 562	

Observamos que algunas hipotenusas presentan dos soluciones. Podíamos estudiar este caso, pero no merece la pena, para una simple curiosidad.

Como el proceso de búsqueda es rápido y aparecen pronto muchas soluciones, no abandonaremos la hoja de cálculo para buscar otros instrumentos.

El tercer cateto será siempre múltiplo de 10, ya que es la raíz cuadrada de una diferencia de cuadrados con las cifras últimas coincidentes.

Como curiosidad, estas son las soluciones para tres cifras, por si deseas reproducirlas. El comportamiento del otro cateto te dará una pista para entender el proceso.

1100, 105, 1105
1200, 220, 1220
1300, 345, 1345
1400, 480, 1480
1500, 625, 1625
1600, 780, 1780
1700, 945, 1945
1800, 1120, 2120
2200, 210, 2210
1900, 1305, 2305
2400, 440, 2440
2000, 1500, 2500
2600, 690, 2690
2100, 1705, 2705
2200, 1920, 2920
2800, 960, 2960
2300, 2145, 3145
3000, 1250, 3250
3300, 315, 3315
2400, 2380, 3380
3200, 1560, 3560
2500, 2625, 3625
3600, 660, 3660
2600, 2880, 3880

Así que es condición necesaria que el tercer cateto termine en ceros.

Hipotenusa y cateto anagramáticos

Finalizamos esta exploración con un ejemplo más de relación entre hipotenusa y cateto. Con él y todo lo anterior como base, se pueden intentar otras búsquedas, que ya no entran aquí. Lo dejamos como propuesta.

Dos números son anagramáticos si poseen las mismas cifras y con la misma frecuencia. Para estudiarlos usaremos nuestra función *digiordenado*, que ordena las cifras de un número entero. La puedes consultar en esta dirección:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/05/sumas-anagramaticas.html

Con esta función es fácil saber si dos números son anagramáticos, pues entonces *digiordenado* dará el mismo resultado en ambos. Con esta idea, hemos construido una dunción similar a las anteriores. Es esta:

```
Function hip_anam_cat(n)
Dim i, p, r
Dim s$

s = ""
For i = 1 To n - 1
If digiordenado(n) = digiordenado(i) And escuad(n ^ 2 - i ^ 2) Then
p = Sqr(n ^ 2 - i ^ 2): s = s + Str$(p) + ", " + Str$(i) + ", " + Str$(n)
End If
Next i
```

If s = "" Then s = "NO"
hip_anam_cat = s
End Function

No necesita explicación. Con ella hemos encontrado estos ejemplos:

33, 56, 65	
72, 135, 153	
144, 108, 180	
120, 182, 218	
204, 253, 325	
180, 273, 327	
324, 135, 351	
240, 364, 436	
300, 455, 545	
252, 561, 615	
555, 296, 629	
408, 506, 650	330, 560, 650
360, 546, 654	
648, 270, 702	
228, 704, 740	
420, 637, 763	
360, 675, 765	117, 756, 765
207, 780, 807	
480, 728, 872	
888, 259, 925	
612, 759, 975	
540, 819, 981	

La tercera columna es la de hipotenusas, que son anagramáticas con el segundo cateto. Se observan soluciones dobles en 650 y 765.

El primer cateto siempre será múltiplo de 3, pues si los otros dos lados tienen las mismas cifras, la diferencia de sus cuadrados será múltiplo de 9 y, por tanto, su cuadrado lo será, luego el cateto será múltiplo de 3.

Como curiosidad, esta sería la versión para el lenguaje PARI:

```
is(n)={my(k=1,v=0);while(k<=n-1&&v==0,if(issquare(n*n-k*k)&&vecsort(digits(k))==vecsort(digits(n)),v=1);k+=1);v}
for(i=1,10000,if(is(i),print1(i,", ")))
```

Aquí, *digiordenado* se sustituye por *vecsort(digits(k))*

Devuelve las hipotenusas:

65, 153, 180, 218, 325, 327, 351, 436, 545, 615, 629, 650, 654, 702, 740, 763, 765, 807, 872, 925, 975, 981, 1325, 1453, 1480, 1530, 1625, 1635, 1640, 1800, 1865, 1872, 1940, 2132, 2180, 2601, 2725…

Con estos ejemplos ya podemos emprender otras búsquedas similares.

SOLUCIONES

CUADRADOS

Sumas de los primeros cuadrados

Cuadrados que dan cuadrado

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+23^2+24^2 = 70^2$

Cuadrados que dan triangular

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55 = T10$

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91 = T13$

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+84^2+85^2 = 208335 = T645$

(http://oeis.org/A039596)

Triangulares que dan cuadrados

$1+3 = 2^2$

$1+3+6+10+\ldots 1176 = 19600 = 140^2$

Triangulares que dan triangular

1+3+6 = 10 = T4

1+3+6+10+15+21+28+36 = 120 = T15

1+3+6+10+… + T20 = 1540 = T55

1+3+6+10+… + T34 = 7140 = T119

(http://oeis.org/A027568)

Cuadrados en progresión aritmética

La condición que ha de cumplir la media aritmética de los dos cuadrados, es la de ser ella también un cuadrado perfecto, y en hoja de cálculo se puede expresar mediante esta condición:

N=(ENTERO(RAÍZ(N))^2

El número 10404= 102^2 forma progresión aritmética con 1764= 42^2; y la media aritmética de ambos 6084 = 78^2

Las diferencias entre tres cuadrados en progresión aritmética son siempre múltiplos de 24. Lo razonaremos en dos fases:

(A) Las diferencias son múltiplos de 3

Partimos de $a^2+b^2=2c^2$ como condición de estar en progresión aritmética. Los restos cuadráticos módulo 3 son 0 y 1. Nunca pueden ser 2.

Si el resto de c^2 es 0, el de $2c^2$ también lo es, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 0 (es la única posibilidad). Por tanto sus diferencias serán múltiplo de 3.

Si el resto de c^2 es 1, el de $2c^2$ será 2 y eso obliga a que a^2 y b^2 tengan también resto 1, luego las diferencias vuelven a ser múltiplos de 3. Con esto queda demostrado.

(A) Las diferencias son múltiplos de 8

Los restos cuadráticos módulo 16 son 0, 1, 4 y 9. Podemos construir una tabla de sumar entre ellos para que comprendas mejor el razonamiento:

+	0	1	4	9
0	0	1	4	9
1	1	2	5	10
4	4	5	8	13
9	9	10	13	2

Con razonamientos similares al caso de 3, tendremos:

Si el resto de c^2 es 0, el de $2c^2$ también lo es, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 0. Por tanto sus diferencias serán múltiplos de 16 y con mayor razón de 8.

Si el resto de c^2 es 1, el de $2c^2$ es 2, luego a^2 y b^2 deberán presentar ambos resto 1 o resto 9. Por tanto su diferencia será al menos múltiplo de 8 si no lo es de 16 (en el caso 9-1)

Si el resto de c^2 es 4, el de $2c^2$ es 8, luego a^2 y b^2 deberán presentar también resto 4. Por tanto sus diferencias serán múltiplos de 16.

Si el resto de c^2 es 9, el de $2c^2$ será 2, y ya hemos estudiado ese caso.

Acabamos de razonar que las diferencias son múltiplos de 16 salvo en un caso en el que sólo lo son de 8.

Resumiendo: Las diferencias mutuas son múltiplos de 24.

La mitad, cuadrado, el tercio, cubo

Si $\mathbf{N = 2m^2 = 3n^3}$, deberán figurar, tanto en **m** como en **n**, los factores **2** y **3.** Luego $\mathbf{m^2 = 36*k^2}$ y $\mathbf{n^3 = 216*h^3}$.

$\mathbf{N = 72*k^2 = 648*h^3}$ y h ha de ser cuadrado perfecto para que se pueda dividir entre $\mathbf{k^2}$

Queda, pues, que $\mathbf{N=648p^6}$

Así que las soluciones se obtendrán de los valores de p^2

$p^2=1$, **648**, $p^2=4$, **41472**, $p^2=9$, **472392**, $p^2=16$, **2654208**

En el caso $\mathbf{N= 2n^2 = 5m^5}$

deberá ser $\mathbf{N = 200*k^2 = 500000*h^5}$

y una solución **500000**

En el caso $\mathbf{N= 3n^3 = 5m^5}$

será $\mathbf{10125*k^3 = 500000*h^5}$

y una solución posible es **922640625**

Exploración matemática

(1) Si $2n^2 + 1 = m^2$, ambos naturales, m ha de ser impar, luego m=2k+1 con k natural, con lo que se cumple si $2n^2 + 1 = 4k^2+4k+1$. Simplificando y dividiendo entre 8: $n^2/4 = k(k+1)/2$, luego se cumple que $n^2/4$ es cuadrado y triangular.

(2) Partimos de la igualdad $x^2=k(k+1)/2$. Multiplicamos todo por 8 y queda: $8x^2 =4k^2+4k+1-1=(2k+1)^2-1$. Si llamamos **y** a 2k+1, nos queda la ecuación de Pell $8x^2+1=y^2$

(3) (Para no complicar la edición, usaremos la palabra RAÍZ para representar la raíz cuadrada). Como $(3+\text{RAÍZ}(8))^n = y_n+\text{RAÍZ}(8)x_n$, basta ir multiplicando por sí mismo y sumando por separado los números naturales y los coeficientes de RAÍZ(8): (3+RAÍZ(8)), (17+6*RAÍZ(8)), (99+35*RAÍZ(8))… van resultando los valores de x 1, 6, 35,…

(4) Basta usar $(y_{n-1}+\text{RAÍZ}(8)x_{n-1})*\ (3+\text{RAÍZ}(8))= y_n+\text{RAÍZ}(8)x_n$ con lo que resultan las fórmulas pedidas. Para reducir a una sola con x, se puede acudir a esta transformación:

$y_n=3x_{n-1}+8y_{n-1},\ \ x_n=3x_{n-1}+y_{n-1}$

$x_n=3x_{n-1}+y_{n-1} = 9x_{n-2}+3y_{n-2}+(8x_{n-2}+3y_{n-2}) = 17\ x_{n-2} + 6\ y_{n-2} = 6(3x_{n-2} + y_{n-2})- x_{n-2} = 6\ x_{n-1} - x_{n-2}$

Jugamos con los triangulares

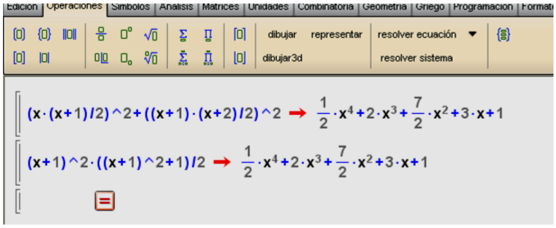
(1) La tabla a construir puede ser similar a la siguiente:

N	T(N)	Suma cuad.	X
1	1		
2	3	10	4
3	6	45	9
4	10	136	16
5	15	325	25
6	21	666	
7	28	1225	

En la primera columna figura el número de orden, en la segunda el triangular correspondiente, y a continuación la suma de cuadrados entre dos consecutivos. Fácilmente se descubre que los resultados son números triangulares de índice X, que resulta ser el cuadrado del índice. Por tanto conjeturamos que la suma del triangular de índice n con el siguiente de índice n+1 da como resultado al triangular correspondiente a $(n+1)^2$

(2) Si recordamos que $T(n)=n(n+1)/2$, será $T(n+1)=(n+1)(n+2)/2$. Desarrollamos sus cuadrados y sumamos, resultando la expresión $(n+1)^2(n^2+(n+2)^2)/4 =(n+1)^2(2\ n^2+4n+4)/4 =(n+1)^2((n+1)^2+1)/2$, que corresponde al triangular de índice $(n+1)^2$.

Con la calculadora Wiris se comprueba fácilmente:



(3) No necesita comentarios

Cubos y gnomones

(1) Todo cubo n^3 de base natural n equivale a la diferencia de los cuadrados de los números triangulares T_n y T_{n-1}. Basta desarrollar la expresión $(n(n+1)/2)^2-(n(n-1)/2)^2$ y comprobar que el resultado es n^3.

(2) la suma de cubos propuesta equivale a $T^2_{k+r} - T^2_{k-1}$. Puedes desarrollarla de varias formas simplificando algebraicamente.

El número 30500

(1) Se presentan todas las cifras, porque las terminaciones de cuadrados de primos mayores que 2 sólo pueden ser 1 y 9 (ó -1). Según la distribución del 1 y el 9 en las cuatro terminaciones tendremos: 1+1+1+1 termina en cuatro; 1+1+1+9 en 2; 1+1+9+9 en 0; 1+9+9+9 en 8 y 9+9+9+9 en 6, luego los números considerados recorrerán las cifras 2, 4, 6, 8 y 0

(2) Los cuadrados de los números primos salvo el 2 tienen la forma 4k+1, luego al sumar cuatro resultará 4m+4, que es múltiplo de 4

(3) 23500=71^2+73^2+79^2+83^2

(5)

```
sub sumaprimcuad
dim n,a,b,c,d,e,r,vale
dim s$

s$=inputbox("Número")
n=val(s$)
a=2:b=3:c=5:d=7
r=sqr(n/4)
vale=0
while a<=r and vale=0
e=a^2+b^2+c^2+d^2
if e=n then msgbox(str$(a)+str$(b)+str$(c)+str$(d)):vale=1
a=b:b=c:c=d:d=primprox(d)
wend
if vale=0 then msgbox("No es suma de cuadrados consecutivos")
end sub
```

(6) Por las mismas razones que en (1), a partir de un resultado todos tendrán una de las formas: 1+1+1 que

termina en 3, 1+1+9 en 1, 1+9+9 en 9 y 9+9+9 en 7, y nunca se produce la terminación en 5

En el caso de dos cuadrados tendríamos: 1+1 terina en 2, 1+9 en 0 y 9+9 en 8. No aparecen ni el 6 ni el 4.

PITÁGORAS Y SUS TERNAS

El sueño de Lewis Carroll

30240, 31920, 41160 y 43680

Las ternas pedidas son:

30240 90, 672 y 678 144, 420 y 444 240,252 y 348

31920 80, 798 y 802 105, 608 y 617 190, 336 y 386

41160 105, 784 y 791 168, 490 y 518 280, 294 y 406

43680 112, 780 y 788 210, 416 y 466 240, 364 y 436

Se pueden obtener con OpenOffice.org Calc con este código:

Código de la macrobúqueda

Sub busquedas

Dim fila,i,j,k,m,l,n
dim a,b,c
dim vale as boolean

fila=10 *‘Lleva a cuenta de las filas de presentación de resultados*
for i=1 to 50000 *Rango de búsqueda de áreas*
n=2*i *Doble del área o producto de catetos*

c=5 *Lleva la cuenta de la columna de presentación*
l=0 *Cuenta las ternas válidas*
a=int(sqr(n))
for j=1 to a *Busca catetos*

if esdivisible(n,j) then
b=n/j *Calcula el otro cateto*
m=j*j+b*b *Busca la terna pitagórica*
if escuadrado(m) then *Se trata de una terna pitagórica*

l=l+1
c=c+1 Se presenta el resultado
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(4,fila).value=iStarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(c,fila).value=j
c=c+1

```
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(c,fila).value=b
c=c+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellB
yPosition(c,fila).value=sqr(m)
c=c+1
end if
end if
next j

if l>2 then  fila=fila+1 Si se han conseguido tres ternas,
se avanza  una fila
next i
End Sub
```

Oblongos y pitagóricos

Solución

Cuando se buscan las soluciones de la ecuación de Pell las recurrencias vienen dadas por las fórmulas de recurrencia $z_{n+1}=z_n*z_0+D*y_n*y_0$ $y_{n+1}=z_n*y_0+y_n*z_0$, pero en el caso $z^2-2y^2 = -1$
las soluciones surgen de forma alternada.

Así, como en este caso $z_0=1$, $y_0=1$, tendremos:

$z_{n+1}=z_n+2y_n$; $y_{n+1}=z_n+y_n$ y reiterando dos veces

Z''=Z'+2Y'=(Z+2Y)+2(Z+Y) = Z+2Y+2Z+2Y = 3Z+4Y

Y’’=Z’+Y’ = Z+2Y+Z+Y = 2Z+3Y

Teniendo en cuenta que Z=2X+1, y que Y=X+1, nos resulta

Y’’=2Z+3Y=2(2X+1)+3Y = 4X+3Y+2, que es la segunda fórmula de Fermat

De Z’’=3Z+4Y podemos obtener (2X’’+1)=3(2X+1)+4Y; 2X’’ = 6X+4Y+2;

X’’ = 3X+2Y+1, que es la primera

Aplicamos estas dos fórmulas al cateto menor y a la hipotenusa y obtenemos los mismos resultados a partir de 3, 4 y 5

X"=3X+2Y+1	X+1	Y"=4X+3Y+2
3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025
803760	803761	1136689
4684659	4684660	6625109
27304196	27304197	38613965
159140519	159140520	225058681

Doblado pitagórico

Los catetos pueden ser $2uv$ y u^2-v^2 con u, v primos entre sí y de distinta paridad. Por tanto basta plantear $2uv+u^2-v^2=k$ y transformarla en $(u+v)^2-2v^2 = k$, que se puede expresar como $x^2-2y^2=k$ o como $2x^2-y^2=-k$ con lo que obliga a que 2 sea resto cuadrático respecto a los divisores de k y llegamos a la misma conclusión que en la anterior cuestión.

Espiral de números

El siguiente es 339709. La sucesión se ha formado eligiendo para cada número la menor hipotenusa que forma con él una terna pitagórica:

$3^2+4^2 = 5^2$; $5^2+12^2 = 13^2$; $13^2+84^2=85^2$; $85^2+132^2=157^2$, etc.

5, 13, 85, 157, 12325, 12461, 106285, 276341, 339709