

## Números y hoja de cálculo VII

$$\binom{p}{q} \binom{q}{p} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

Curso 2014-15

Colección Hojamat.es

© Antonio Roldán Martínez

<http://www.hojamat.es>

## PRESENTACIÓN

Llegamos al séptimo volumen de los resúmenes anuales del blog “Números y hoja de cálculo” En esta temporada hemos publicado más entradas relacionadas con ciertos temas concretos, que los que surgen de forma ocasional. Debemos destacar el conjunto dedicado a Restos cuadráticos, que prácticamente recorre toda la teoría sobre ellos, y la parte dedicada a la comprobación de conjeturas o la que presenta sucesiones recurrentes, que en esta temporada se ha dedicado a las de tercer orden.

Intentaremos siempre que en cada tomo figuren algunos temas desarrollados en varias entradas del blog junto a los que aparecen sugeridos por la actualidad. Así no se pierde frescura, pero se van recorriendo de forma más sistemática algunos temas importantes.

En el resumen actual, casualmente, sólo figura una entrada dedicada a las hojas de cálculo, pero no abandonaremos su estudio, desarrollando temas que surjan, pero sin planificación previa.

## CONTENIDO

<b>Presentación .....</b>	<b>2</b>
<b>Contenido .....</b>	<b>3</b>
<b>Restos cuadráticos .....</b>	<b>5</b>
Introducción .....	5
Criterio de Euler .....	11
Propiedades de los restos cuadráticos.....	17
<b>No dejaremos la hoja .....</b>	<b>22</b>
Unión e intersección de conjuntos.....	22
<b>Comprobación de conjeturas.....</b>	<b>30</b>
Goldbach.....	30
Conjetura $n^2+1$ .....	42
Conjetura de Polignac.....	52
<b>Sucesiones recurrentes.....</b>	<b>63</b>
Sucesión de Perrin.....	63
Sucesión de las vacas de Narayana .....	72
Números “Tribonacci” .....	80
Sucesión de Padovan .....	89

<b>Los divisores son los protagonistas .....</b>	<b>99</b>
Factores primos de la parte libre .....	99
Antisigma de un número natural.....	126
Relaciones entre un número y su sigma .....	137
Smarandache y Kempner.....	150
<b>Cuestiones sobre primos .....</b>	<b>172</b>
Suma con el próximo primo.....	172
<b>Números especiales .....</b>	<b>186</b>
Números especiales, producto especial .....	186
Formas de ser un número equilibrado.....	213
<b>Miscelánea.....</b>	<b>240</b>
Bienvenida al 2015.....	240
Autonúmeros.....	249

## RESTOS CUADRÁTICOS

### INTRODUCCIÓN

En esta entrada y otras posteriores trataremos el tema de las congruencias de segundo grado. Usaremos como siempre las hojas de cálculo, y, en especial una herramienta que hemos creado para este fin. Todo el tema gira alrededor de la ecuación

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

Imagina una clase de restos, por ejemplo la correspondiente a módulo 7,  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Elige un resto, sea el 5. ¿Existirá otro resto que multiplicado por sí mismo dé como resultado 5, módulo 7? Probemos:  $1*1 \equiv 1$ ,  $2*2 \equiv 4$ ,  $3*3 \equiv 2$ ,  $4*4 \equiv 2$ ,  $5*5 \equiv 4$ ,  $6*6 \equiv 1$ . Así que no es posible, los únicos resultados son 1, 4 y 2. Nunca resulta un 5, ni tampoco 3 ni 6.

Podemos resumir esta situación calificando 1, 2 y 4 como “restos cuadráticos” y 3, 5 y 6 como “no restos cuadráticos”. También podemos hablar de la “raíz cuadrada” de los primeros:  $1^2=1$ ,  $3^2=2$  y  $2^2=4$ . Es fácil ver que si  $k$  es raíz de  $n$ , también lo es  $m-k$ . Eleva esta última al cuadrado y lo comprobarás.

Restos	Raíz	No restos
1	1	3
2	3	5
4	2	6

Esta situación la tendrás siempre. Unos elementos podrán ser restos cuadráticos y otros no. El primer intento que hemos hecho para averiguarlo ha sido el probar los elementos uno a uno hasta conseguir que el cuadrado de uno de ellos coincida con el resto dado, o bien comprobar que esto es imposible y que se trata de un “no resto cuadrático”.

Para estudiar el tema con profundidad puedes acudir a

<http://hojamat.es/parra/restocudad.pdf>

[http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/teoria\\_analitica\\_de\\_numeros/clase11.pdf](http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/teoria_analitica_de_numeros/clase11.pdf)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic\\_residue](http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_residue)

Diremos que  $a$  es resto cuadrático módulo  $p$ , coprimo con él, cuando exista una solución a la ecuación

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

Con hoja de cálculo (o con ligeras variaciones, en cualquier lenguaje de programación) podemos automatizar este procedimiento. Definiremos una función, que dependa de un resto dado y del módulo correspondiente, que nos devuelva la raíz cuadrada,

con lo que sabremos que es resto cuadrático, o bien un cero si no lo es.

**Public Function restocudad(n,modu)** ‘los parámetros son el resto y el módulo

**Dim k, r,s**

**Dim es As Boolean**

**es = False** ‘ nos indica que aún no se ha encontrado una raíz

**k = 1** ‘contador que busca la raíz

**r = 0** ‘raíz encontrada

**While k <= modu / 2 And Not es** ‘va buscando las posibles raíces

**s=(n-k\*k)/modu**

**If s=int(s) Then es = True: r = k** ‘se ha encontrado la raíz

**k = k + 1** ‘seguimos buscando

**Wend**

**If es Then restocudad = r Else restocudad = 0** ‘devuelve un cero si no se ha encontrado

**End Function**

Con esta función implementada, puedes analizar qué restos son cuadráticos, formar tablas de restos y no restos y resolver la ecuación  $x^2 \equiv a$ , o, con los cambios

adecuados, la ecuación general de segundo grado. Lo vemos con un ejemplo:

### **Resolver $x^2-26x+10 \equiv 7 \pmod{11}$**

Damos estos pasos:

$$x^2-26x+10 \equiv (x-13)^2-159 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$(x-13)^2 \equiv 166 \pmod{11}$$

$$(x-13)^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

Buscamos la raíz cuadrada de 1 y resulta ser 1 o -1 (o 10) es decir:

$$x-13 \equiv 1 \text{ o } 10 \pmod{11} \text{ Despejando: } x=3 \text{ y } x=1$$

$$\text{Comprobamos: } 3^2-26*3+10=-59 \equiv -4 \equiv 7 \pmod{11} \text{ y } 1^2-26*1+10=-15 \equiv -4 \equiv 7 \pmod{11}$$

Hemos elegido un ejemplo que tenía solución, pero si llega a aparecer un no resto en lugar de 1, no podríamos seguir. Por eso es tan importante saber previamente si un resto es cuadrático o no.

### **Caso de módulo primo e impar**

En este caso, si consultas la teoría descubrirás que si  $p$  es el módulo primo e impar resulta que el número de restos cuadráticos es  $(p-1)/2$ , que son congruentes con



$1^2, 2^2, 3^2 \dots ((p-1)/2)^2$  y por tanto, este también es el número de no-restos.

### **Previamente estudia esta propiedad:**

La ecuación  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  para un  $a$  dado, o no tiene solución, o tiene dos.

En efecto, si tiene una solución  $x_1$  con  $x_1^2 \equiv a \pmod{p}$  también será solución  $-x_1$  y sólo tenemos que demostrar que ambas son distintas. Es fácil: si fueran iguales tendríamos que  $2x_1=0$ , pero ni 2 ni  $x_1$  son divisores del cero, por ser  $p$  primo impar. La segunda solución la puedes expresar como  $p-x_1$

Por tanto, el número de restos cuadráticos no sobrepasará  $(p-1)/2$ . Es más, es igual que ese número, porque los restos de  $1^2, 2^2, 3^2 \dots ((p-1)/2)^2$  no se repiten, ya que una igualdad entre ellos haría que la ecuación  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  tuviera cuatro soluciones en lugar de dos.

Esta propiedad te ofrece un procedimiento para encontrar todos los restos cuadráticos en este caso, y es calcular los valores de  $1^2, 2^2, 3^2 \dots ((p-1)/2)^2$  y los resultados serán los restos cuadráticos, y los demás será no restos.

Hemos preparado una herramienta en hoja de cálculo alojada en esta dirección:

<http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm#restoscua>

Restos y no restos		
Módulo	31	
Restos	Raíz	No restos
1	1	3
2	8	6
4	2	11
5	6	12
7	10	13
8	15	15
9	3	17
10	14	21
14	13	22
16	4	23
18	7	24
19	9	26
20	12	27
25	5	29
28	11	30

Su primera prestación es la de encontrar el conjunto de restos y no restos para un módulo primo e impar.

En ella está implementado el procedimiento de ir calculando los valores de  $1^2, 2^2, 3^2 \dots ((p-1)/2)^2$ . La novedad de este esquema es que va situando los restos en una columna y los no restos en

otra.

En la imagen figuran los 15 restos módulo 31, sus raíces, y los 15 no restos. Para ver cómo lo logra tendrías que acceder al Basic, pero no lo analizaremos en este momento.

Su funcionamiento en esta parte es muy simple: escribes el nuevo módulo y después pulsas el botón de **Restos y no restos** para que aparezcan. Puedes alternar tus cálculos manuales con los de la hoja para entenderlo todo mejor y comprobar resultados.

En el siguiente apartado simplificaremos los cálculos necesarios para saber si un resto es cuadrático o no mediante un criterio debido a Euler.

## CRITERIO DE EULER

En la una entrada anterior iniciamos el estudio de los restos cuadráticos respecto a un módulo. Descubrimos un procedimiento algo lento para encontrar los restos y los no restos. En esta otra entrada simplificaremos algo el proceso y aprenderemos nuevos conceptos. Se aconseja leer previamente la primera entrada dedicada a este tema.

El recorrer todos los restos desde 1 hasta  $(p-1)/2$  puede hacerse muy pesado en el caso de valores muy grandes. Euler descubrió un criterio que nos ayuda a distinguir los restos de los no restos con un solo cálculo. Es este:

Si  $a$  es un resto cuadrático respecto a  $p$  (primo e impar) se cumple

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

Y si no lo es

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

Es una consecuencia del Teorema de Fermat:  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , luego, como  $p-1$  es par, podemos escribir

$$a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

De esta congruencia deducimos que uno de los paréntesis es congruente con cero, pero ambos no pueden serlo, porque entonces su diferencia, 2, cumpliría  $2 \equiv 0$  y eso es imposible para  $p$  primo impar. De hecho, si  $a$  es resto cuadrático, el que se cumple es el segundo, ya que si existe un  $x$  tal que  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  entonces  $a^{(p-1)/2} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  de nuevo por el Teorema de Fermat.

Como sólo se puede cumplir una congruencia, si  $a$  es no resto cuadrático, cumplirá la otra, con el -1.

Este criterio es bastante directo, para saber si un valor es resto cuadrático. Por ejemplo, ¿Es el 14 resto cuadrático respecto al 23?

$14^{(23-1)/2}=14^{11}$  Calculamos el resto de este último por potencias sucesivas:  $14^1 \equiv 14 \pmod{23}$ ,  $14^2 \equiv 12 \pmod{23}$ ,  $14^4 \equiv 12 \cdot 12 \equiv 6 \pmod{23}$ ,  $14^8 \equiv 6 \cdot 6 \equiv 13 \pmod{23}$ , luego  $14^{11} \equiv 13 \cdot 12 \cdot 14 \equiv -1 \pmod{23}$ , luego no es resto cuadrático.

La herramienta de hoja de cálculo que proponemos, en su tercera hoja, te realiza los cálculos la aplicación de este criterio:

<i>Criterio de Euler</i>		
$(p-1)/2$	8	
$a^{(p-1)/2}$	1	Es resto cuadrático

Es conveniente que lo intentes sin hoja de cálculo para practicar. Puedes usar la exponenciación modular (<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/03/de-la-multiplicacion-rusa-la.html>).

La usaremos en el siguiente ejemplo:

¿Es resto cuadrático el número 70 respecto al módulo 101?

El módulo 101 es primo e impar, luego podemos usar el criterio de Euler. Bastará elevar 70 a  $(101-1)/2=50$ .

Sabemos que  $50=32+16+2$ , luego vamos calculando:  
 $70^1 \equiv -31 \pmod{101}$ , :  $70^2 \equiv 31*31 \equiv -49 \pmod{101}$ ,  
 $70^4 \equiv 49*49 \equiv -23 \pmod{101}$ ,  $70^8 \equiv 23*23 \equiv 24 \pmod{101}$ ,  
 $70^{16} \equiv 24*24 \equiv -30 \pmod{101}$ ,  $70^{32} \equiv 30*30 \equiv -9 \pmod{101}$ , y  
ahora construimos el 50:

$70^{50} \equiv 70^{32}70^{16}70^2 \equiv -9*30*49 \equiv 1 \pmod{101}$ , luego según  
el criterio, 70 sí es resto cuadrático. Si lo compruebas  
con la herramienta que proponemos descubrirás que su  
raíz cuadrada es 26.

La aplicación de este criterio nos lleva a propiedades  
muy interesantes.

La primera es tan elemental que no tenemos que  
justificarla:

El producto de dos restos o de dos no-restos siempre  
da un resto, y el de resto con no resto produce un no-  
resto.

Es decir, poseen estructura alternada, por lo que es  
fácil representar los restos mediante el signo + y los no  
restos con el -, y así poder usar la regla de los signos.  
Se razona fácilmente a partir del criterio de Euler.

### **Consecuencia inmediata:**

El conjunto de restos cuadráticos forma un grupo  
multiplicativo en  $Z_p$

Por ejemplo, si  $m=11$ , los restos son 1, 3, 4, 5 y 9 y los no restos 2, 6, 7, 8 y 10 (o bien -1, -3, -4, -5 y -9). Los restos forman un grupo, como se puede verificar fácilmente.

En la segunda hoja de la herramienta que ofrecemos dispones de una calculadora para comprobar las afirmaciones anteriores.

Con esta calculadora puedes comprobar los productos entre Restos y No restos  
Escribe los valores de A y B

A	13	No resto
B	8	No resto
A*B	30	Resto

En particular puedes estudiar que si llamamos C al grupo de los restos cuadráticos, las clases laterales tipo  $a*C$  tienen cardinal  $(p-1)/2$  y que por tanto el índice de C respecto a  $Z_p$  es 2. Vemos una de esas clases. Multiplica el elemento 6 de  $Z_{11}$ , por todos los elementos de C, en este caso 1, 3, 4, 5, 9:  $6*1 \equiv 6 \pmod{11}$ ,  $6*3 \equiv 7 \pmod{11}$ ,  $6*4 \equiv 2 \pmod{11}$ ,  $6*5 \equiv 8 \pmod{11}$ ,  $6*9 \equiv 10 \pmod{11}$ . Han resultado valores distintos, luego el cardinal de  $6*C$  es  $(11-1)/2=5$

## Símbolo de Legendre

Esta estructura como grupo multiplicativo se expresa muy bien mediante el símbolo de Legendre (por comodidad tipográfica lo escribiremos como  $(m/p)$ , con los dos números en línea, como hace Apostol).

Llamamos Símbolo de Legendre a una función que asigna a cada par de valores  $m$  y  $p$ , este último primo e impar, los siguientes valores:

$(m/p)=1$  si  $m$  es resto cuadrático respecto a  $p$

$(m/p)=-1$  si  $m$  es no-resto cuadrático respecto a  $p$

$(m/p)=0$  en el caso particular en el que  $m$  sea múltiplo de  $p$ .

En realidad, si recordamos el criterio de Euler, podemos usar una fórmula directa para encontrar el valor de un símbolo de Legendre:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Según lo explicado anteriormente, es fácil ver que **esta función es multiplicativa**:

$$(m/p)(n/p)=(mn/p)$$



Esto tiene una consecuencia práctica, y es que se pueden eliminar cuadrados al calcular el símbolo de un número compuesto.

Nótese que el valor del símbolo de Legendre es una propiedad de las clases de restos y no de los números concretos, por lo que es fácil entender que si  $a \equiv b \pmod{p}$ . entonces  $(a/p) = (b/p)$

## PROPIEDADES DE LOS RESTOS CUADRÁTICOS

El criterio de Euler da lugar a propiedades interesantes de los restos cuadráticos respecto a ciertos tipos de primos. Los vemos:

-1 es un resto para todos los primos del tipo  $4N+1$  y no resto para los del tipo  $4n+3$

Es una consecuencia del criterio de Euler, pues  $(p-1)/2$  sería par en el primer caso, e impar en el segundo, luego al elevar -1 a esa cantidad producirá un 1 (ser resto) para  $p=4N+1$  y -1 (no resto) en el otro caso.

Esto quiere decir que la ecuación  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  tiene solución para  $p=4N+1$  y no la tiene en el segundo caso. Podemos expresarlo también como que 1 posee una raíz cuadrada entre las clases de restos módulo p

Podemos diseñar un pequeño esquema con la hoja de cálculo que usamos en esta serie:

Módulo	61
Raiz de -1	11

En la celda del 11 hemos escrito =RESTOCUAD(-1;61). Como este módulo es del tipo  $4N+1$ , obtenemos la solución 11, ya que  $11*11$  módulo 61 es igual a 60, es decir, la clase de restos -1

Si hubiéramos usado módulo 11, que es del tipo  $4N+3$ . Obtendríamos un cero, que es la señal de que -1 no es resto cuadrático:

Módulo	11
Raiz de -1	0

Esta propiedad se puede expresar así:

$$(-1/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

2 es resto cuadrático para todos los primos del tipo  $8N+1$  y  $8N+7$ , y no resto para los demás

También podemos, en nuestra hoja de cálculo, crear un esquema para comprobar esta propiedad siguiendo la estructura que usamos en la anterior.

Módulo	11
Raiz de 2	0

Vemos que 11 no pertenece al tipo  $8N+1$  ni al  $8N+7$ , y para el 2 no

devuelve raíz cuadrada (el cero es una señal)

Módulo	31
Raíz de 2	8

Sin embargo, al usar el módulo 31, que es del tipo  $8N+7$ , el 2 presenta raíz cuadrada 8, y es resto cuadrático.

No es sencilla la demostración. Tienes una en ***Fundamentos de la Teoría de los números*** de Vinogradov.

Encontrarás propiedades similares para el -3 y el 5 en el documento de Rafael Parra “Restos cuadráticos y Ley de reciprocidad cuadrática”)

<http://www.hojamat.es/parra/restocuad.pdf>. Las puedes comprobar con el esquema propuesto, sustituyendo el 2 por otros valores.

### **Ley de reciprocidad cuadrática**

La propiedad más importante de estos restos es la ley de reciprocidad cuadrática, enunciada y demostrada por Gauss en 1801 en su libro *Disquisitiones Arithmeticae*. Con palabras la podemos expresar así:

Dados dos primos impares  $p$  y  $q$ , si ambos pertenecen al tipo  $4k+3$ , entonces  $p$  es resto cuadrático módulo  $q$  si y sólo si  $q$  no lo es de  $p$ . Si alguno de los primos pertenece al tipo  $4k+1$  entonces o bien ambos son restos uno del otro, o bien ninguno lo es.

Expresada así o de forma similar la propiedad resulta oscura. Sin embargo su significado queda claro con el uso de los símbolos de Legendre. En ese caso la propiedad se reduce a esta identidad:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Así se explica mejor: Si uno de los dos,  $p$  o  $q$ , es del tipo  $4k+1$ , el exponente del  $-1$  será par y el segundo miembro valdrá  $1$ , con lo que los símbolos del primero serán ambos iguales a  $1$  (restos recíprocos) o bien  $-1$  (ninguno es resto).

Si ambos son del tipo  $4k+3$  el exponente será impar, el segundo miembro  $-1$  y los símbolos tendrán signo opuesto: Si uno de los primos es resto del otro, no se dará la reciprocidad.

En textos y documentos varios dispones de ejercicios sencillos que muestran la utilidad de esta propiedad. Nosotros la hemos incluido en nuestra hoja de cálculo.

Escribe dos números primos e impares			
	Valores	Tipo	
P	43	4N+3	
Q	37	4N+1	
Símbolos de Legendre		(P/Q)	-1
		(Q/P)	-1
<b>No son restos uno del otro</b>			

Al escribir los dos primos la hoja analiza si son del tipo  $4N+3$  o  $4N+1$ , calcula después los restos y comprueba la propiedad.

Como se trabaja con valores 1 y -1, algunos manuales expresan esta propiedad mediante esta otra identidad equivalente:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$$

Así se ve mejor cómo calcular un valor de  $(p/q)$  si se conoce el de  $(q/p)$ .

# NO DEJAREMOS LA HOJA

## UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Nos vamos a proponer la obtención de la unión y la intersección de dos conjuntos escritos en la hoja como dos columnas paralelas. Lo desarrollaremos en Excel sólo, para no duplicar las explicaciones, pero el contenido se puede adaptar a OpenOffice o LibreOffice. No se busca aquí la utilidad, sino la posibilidad de superar un reto. Lo que construyamos puede que aparentemente no sirva para nada.

Hemos preparado un esquema en el que a partir de la fila 7 se van escribiendo los conjuntos A y B con lo que deseamos operar. Después, con una simple pulsación de un botón, realizaremos las operaciones deseadas.

	Conjunto A	Conjunto B	$A \cup B$	$A \cap B$
Operación	a	u	a	a
	d	j	d	g
	e	y	e	h
	r	t	r	u
Borrar	g	h	g	j
	h	g	h	y
	u	fe	u	
	j	s	j	
	y	a	y	
	h		t	
			fe	
			s	

Intentamos en primer lugar resolver la cuestión sin el uso de macros, pero resultó un proceso tan complejo y artificioso que renunciamos a ello. Así, todo lo que sigue se basará en el lenguaje VBA de Excel. Como se observa en la imagen, se pueden usar números y también letras y palabras. Sólo hay que tener en cuenta que un espacio en blanco cuenta como un elemento, por lo que el borrado se debe realizar con el botón correspondiente o con la tecla Supr, sin escribir nada.

Otro detalle interesante es que en las operaciones se eliminan los elementos repetidos, logrando con ello una gran limpieza en la presentación. En un segundo paso puedes ordenar los resultados sin son más extensos.

Conjunto A	Conjunto B	$A \cup B$	$A \cap B$
2	1	2	3
3	3	3	5
5	5	5	4
4	7	4	7
5	11	6	9
6	4	7	
7	9	8	
8		9	
8		1	
7		11	
9			

## Procedimientos necesarios

### *Recorrido por un conjunto*

Para obtener la unión e intersección de dos conjuntos se requiere, en primer lugar, el poder recorrer un

conjunto del que no se sabe en principio cuántos elementos contiene. Para ello usaremos la idea de celda vacía. El recorrido se basará entonces en “avanzo mientras la celda no esté vacía”. Esta condición se puede verificar en VBA con la función `IsEmpty`, que nos devuelve `True` si la celda no contiene ningún dato. Con ella es fácil programar un recorrido:

***fila = 7***

***While Not IsEmpty(Cells(fila, columna)) And ...***  
(cualquier otra condición)

‘ Aquí las operaciones que deseemos realizar con el elemento.

***fila = fila + 1***

***Wend***

Este sencillo esquema se repetirá cada vez que realicemos una operación elemento a elemento: ver si un dato pertenece o no al conjunto, buscar repetidos, incorporar elementos nuevos y otros. Comenzamos por la fila 7, que es donde comienzan nuestros conjuntos y después se va bajando de fila hasta que no queden elementos.



Por ejemplo, la siguiente función ESTA nos devuelve True si un valor **n** pertenece al conjunto situado en la cierta columna

***Public Function esta(n, columna) As Boolean***

***Dim fila***

***Dim est As Boolean***

***est = False***

***fila = 7***

***While Not IsEmpty(Cells(fila, columna)) And Not est  
If n = Cells(fila, columna).Value Then est = True***

***fila = fila + 1***

***Wend***

***esta = est***

***End Function***

Es fácil identificar la estructura del recorrido por el conjunto. Esta función ESTA nos servirá para saber si podemos agregar un elemento nuevo a un conjunto mediante el procedimiento AGREGA, que servirá para ir incorporando términos a la unión y a la intersección.

***Sub agrega(n, columna)***

***Dim i***

***i = 7***

***While Not IsEmpty(Cells(i, columna))***

***i = i + 1***

***Wend***

***If Not esta(n, columna) Then Cells(i, columna).Value  
= n***

***End Sub***

Recorre el conjunto, y si no encuentra el elemento dado, baja una fila y lo incorpora.

Con los procedimientos de recorrido y agregación y la función ESTA podemos ya planificar nuestra tarea:

Se elige el primer conjunto

Se recorre, y para cada elemento:

(A) Si no está en la unión, se agrega (así evitamos repetidos)

(B) Se compara con todos los elementos del segundo (mediante un recorrido por el mismo) y si está repetido, se incorpora a la intersección si todavía no está.

Se repite la tarea con el segundo conjunto, pero esta vez no se busca la intersección, que ya estará resuelta.

Para entender el listado que sigue recuerda que los conjuntos están escritos en las columnas tercera y

cuarta, que la unión se escribe en la quinta y la intersección en la sexta.

Así quedaría:

**Option Explicit** 'Evita el uso de variables no dimensionadas

**Public Function esta(n, columna) As Boolean** ' Ya explicada. Determina si un elemento pertenece a un conjunto

**Dim fila**

**Dim est As Boolean**

**est = False**

**fila = 7**

**While Not IsEmpty(Cells(fila, columna)) And Not est**  
**If n = Cells(fila, columna).Value Then est = True**

**fila = fila + 1**

**Wend**

**esta = est**

**End Function**

**Sub agrega(n, columna)** 'También explicada: añade un elemento si aún no está

**Dim i**

***i = 7***

***While Not IsEmpty(Cells(i, columna))***

***i = i + 1***

***Wend***

***If Not esta(n, columna) Then Cells(i, columna).Value  
= n***

***End Sub***

***Sub union()*** 'Esquema general de trabajo. Se inicia al pulsar el botón "Operación"

***Dim i, j, n1, n2***

***Dim esinter As Boolean***

***i = 7***

***Call borrar 'Macro grabada aparte***

***While Not IsEmpty(Cells(i, 3)) 'Recorre el primer conjunto***

***'Se recorre la primera columna***

***n1 = Cells(i, 3).Value***

***Call agrega(n1, 5) 'Agrega el elemento a la unión***

***'se busca la intersección***

***j = 7***

***28***

```

esinter = False
While Not IsEmpty(Cells(j, 4)) And Not esinter 'Se
recorre el segundo conjunto
n2 = Cells(j, 4).Value
If n1 = n2 Then esinter = True
j = j + 1
Wend
If esinter Then Call agrega(n1, 6) 'Si está repetido se
agrega a la intersección
i = i + 1
Wend
i = 7
While Not IsEmpty(Cells(i, 4))
'Se recorre la segunda columna y se repite el
agregar a la unión.
n1 = Cells(i, 4).Value
Call agrega(n1, 5)
i = i + 1
Wend
End Sub

```

Si lo has entendido, intenta programar la diferencia entre dos conjuntos, los elementos que pertenecen a uno pero no al otro. Puedes repasar la hoja alojada en ([http://www.hojamat.es/blog/union de conjuntos.xlsm](http://www.hojamat.es/blog/union%20de%20conjuntos.xlsm)) y modificarla libremente.

## COMPROBACIÓN DE CONJETURAS

### GOLDBACH.

La formulación más simple de la Conjetura de Goldbach es:

***Todo número par mayor que 2 es suma de dos primos***

Fue propuesta por Goldbach el 7 de Junio de 1742, en una carta dirigida a Euler. En realidad, su propuesta se refería a la conjetura ternaria: "*Todo número impar es la suma de tres primos*" y Euler le respondió con la propuesta binaria que todos conocemos.

Ha sido comprobada hasta números muy grandes, pero no se ha podido demostrar. No obstante, se han logrado resultados provisionales:

Cualquier número par es suma de 6 o menos números primos.(Ramaré 1995)

Todo número par suficientemente grande es suma de un primo y del producto de dos primos.(Chen 1966)

*Todo número impar  $N$  mayor que 5 es suma de tres primos.* (Demostración de la conjetura ternaria a cargo de Vinogradov en 1937).

En esta entrada sólo nos plantearemos, como en toda la serie que vamos desarrollando sobre conjeturas, la comprobación de algunos aspectos de la misma mediante el uso de la hoja de cálculo.

## PRIMER NIVEL

Comprobaremos la conjetura en varios niveles distintos, según el uso que se haga del lenguaje de macros. En primer lugar lo efectuaremos con las técnicas usuales de las hojas de cálculo. Usaremos la hoja Conjeturas, alojada en la página

<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global>

(Búscala en la relación de herramientas)

Organizaremos la comprobación según un esquema similar a este:

Conjetura de Goldbach			
Número par mayor que 2		612	
2			
3			
5	607		
7			
11	601		
13	599		
17			
19	593		
23			
29			

Escribimos un número par mayor que 2 en una celda. En la imagen es el 612. Después ordenamos los números primos en columna, hasta el límite que queramos. Para ello escribimos el 2, debajo **primprox(2)** (función implementada en esta hoja, y que encuentra el primo siguiente a uno dado). Rellenamos hacia abajo y nos resultará la lista de primos.

En una segunda columna escribiremos una fórmula similar a la siguiente, que copiaremos de arriba a abajo:  
`=SI(Y(F15<=H$11/2;esprimo(H$11-F15));H$11-F15;"")`

En ella H11 es la celda donde hemos escrito el 612. En tu caso podrá ser otra. La F15 en nuestro esquema apunta al número primo que tiene a su izquierda. De esa forma, la podemos interpretar así: “Si el primo no llega a la mitad del número par probado (aquí el 612) y su diferencia con él es otro primo, escribo esa diferencia, pero en caso contrario dejo la celda en blanco”.



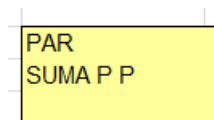
Es sencillo de entender y funciona escribiendo los pares de primos en los que se descompone el 612. En la imagen 5+607, 11+601, 19+593,...hasta un total de 26 pares. Si no logras ese número, deberás rellenar hacia abajo las dos columnas hasta llegar a la mitad de 612

Este esquema puede aclarar, probando con varios pares, el sentido de la conjetura. También te da confianza en ella, pues no sólo existe un par de primos para cada número par, sino muchos. ¡Pero no se ha probado aún!

Debto de este nivel podemos usar nuestro Buscador de Naturales

(<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador>)

Escribimos las condiciones



Significa que el número ha de ser PAR y suma de dos primos. La segunda es redundante si es cierta la conjetura, pero nos da un modo rápido de observar dos primos que hacen que se cumpla. En la imagen figuran las sumas de los números pares comprendidos entre 500 y 525. Solo nos da una solución. Puedes cambiar a

números más grandes para seguir comprobando lo conjetura,

Solución	Detalles
500	13 + 487
502	3 + 499
504	5 + 499
506	3 + 503
508	5 + 503
510	7 + 503
512	3 + 509
514	5 + 509
516	7 + 509
518	19 + 499
520	11 + 509
522	13 + 509
524	3 + 521

## NIVEL 2

4	1
6	1
8	1
10	2
12	1
14	2
16	2
18	2
20	2
22	3
24	3
26	3
28	2
30	3

Ya que con el esquema anterior nos han resultado varias descomposiciones en primos para cada número par, podíamos simplificar mucho si lo plasmáramos en una función. En la hoja de cálculo que estamos usando hemos implementado NUMGOLDBACH(N), que devuelve un cero si N no es par y el número de descomposiciones si es par. En el caso del 612 devuelve correctamente 26.

Aquí tienes los primeros resultados. Si la conjetura es cierta, deberán ser todos mayores que 0. Están recogidos en

<http://oeis.org/A045917>

Merece la pena recorrer la codificación de esta función y así entenderás mejor las cuestiones.

***Public Function numgoldbach(n)***

***Dim ng, i***

***If n <> 2 \* Int(n / 2) Then 'si es impar devuelve un  
cero (valor de ng)***

***ng = 0***

***Else***

***i = 2: ng = 0***

***While i <= n / 2 'si es par recorre todas las posibles  
sumas de primos***

***If esprimo(n - i) Then ng = ng + 1 'si el segundo  
sumando es primo, incrementa el contador ng***

***i = primprox(i) 'esta línea asegura que el primer  
sumando sea primo***

***Wend***

***End If***

***numgoldbach = ng***

***End Function***

### NIVEL 3

Podemos dejar que sea la hoja de cálculo la que recorra automáticamente los primeros números hasta un tope o hasta que **numgoldbach** dé un cero. Como lo segundo es imposible para números pequeños (ya está comprobada la conjetura), el resultado final será siempre un cero.

Podíamos usar un esquema similar al siguiente:

		Goldbach	
Tope		7800	
NUMGOLD		80	

Escribimos un tope, pulsamos el botón e irán apareciendo valores de Numgoldbach, ninguno nulo, hasta finalizar la búsqueda. Si uno fuera cero, se interrumpiría el proceso con un solemne mensaje. La programación del botón podría ser similar a esta:

***Sub buscagoldbach()***

***Dim i, g, p***

***p = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(5, 3).Value 'lee el tope***

***i = 4 'inicio búsqueda***

***g = 1'inicio valor de numgolbach***

```
While g <> 0 And i <= p  
i = i + 2 'busca de 2 en 2  
g = numgoldbach(i)  
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 3).Value = g  
'escribe el valor de g  
If g = 0 Then MsgBox ("¡Contraejemplo!") 'Esto no  
va a ocurrir  
Wend  
End Sub
```

## **Variantes**

### *Variante ternaria*

“Todo número impar mayor que 5 es la suma de tres primos”

No vamos a repetir con ella los tres niveles anteriores. El primer nivel necesitaría una estructura de datos tridimensional, poco intuitiva en una hoja de dos dimensiones. El tercero sería semejante al del primer caso. Así que sólo usaremos el Buscador y desarrollaremos un esquema con todas las posibles descomposiciones en tres sumandos primos:

## Buscador

Con estas capturas de pantalla se entiende bien la búsqueda:

Condiciones:

NO PAR
SUMA P P P

Resultado:

Solución	Detalles
501	3 + 7 + 491
503	2 + 2 + 499
505	3 + 3 + 499
507	2 + 2 + 503
509	3 + 3 + 503
511	3 + 5 + 503
513	2 + 2 + 509
515	3 + 3 + 509
517	3 + 5 + 509
519	3 + 7 + 509
521	3 + 19 + 499
523	3 + 11 + 509
525	2 + 2 + 521

## Con esquema

Escribe el número	29	Golbach para impares	
	13	11	5
	17	7	5
	19	5	5
	19	7	3
	23	3	3

Como en el caso anterior, no vamos a analizar si el número es impar o no. Simplemente hemos programado un botón que lo descompone en esos sumandos de todas las formas posibles (lo haremos con sumandos decrecientes)

Para quien le guste la programación, ahí tiene explicado el algoritmo que hemos usado:

***Sub goldbach3()***

***Dim fila, a, b, c, n***

***fila = 7***

***n = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 3).Value***  
***'lee el número, que se encuentra en C7***

***a = 2 'primer sumando primo***

***While a < n ' el primer sumando llega hasta n en lo posible***

***b = 2***

***While b < a ' el segundo es inferior al primero***

***c = n - a - b 'tercer sumando***

***If esprimo(c) And c <= b Then 'si el tercer sumando también es primo, se presenta el resultado***

***fila = fila + 1***

***ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 3).Value = a***

```
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 4).Value = b  
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 5).Value = c  
End If  
b = primprox(b) 'se incrementa el segundo primo  
Wend  
a = primprox(a) se incrementa el primero  
Wend  
End Sub
```

Como era de esperar, siempre aparecen los tres sumandos primos. Se deja a los lectores el definir una función que cuente las soluciones. Siempre existirá al menos una.

## **Expresión mediante equidistancia**

Un comentario a la entrada

<http://culturacientifica.com/2013/06/26/la-conjetura-de-goldbach/> me ha dado la idea de organizar una comprobación distinta.

Si la conjetura es cierta, para todo número par  $2N$ , si es la suma de dos primos  $p$  y  $q$ , con  $p > q$ , cumplirán que  $p+q=2N$ , o bien que  $p-N=N-q$ :



Todo número entero positivo mayor que 4 es equidistante de dos primos

Es fácil ver que es otra formulación distinta de la conjetura de Goldbach. En los párrafos anteriores hemos visto la consecuencia directa. A la inversa, si es cierto que todo  $N$  equidista de dos primos, dado un par  $2N$  aplicamos  $p-N=N-q$  para cierto par de primos, con lo que  $2N=p+q$ . El exigir que sea mayor que 4 es porque no habría primos inferiores para números menores.

Es muy fácil organizar la comprobación con esta variante. Lo efectuaremos en el Nivel 1, de cálculo manual:

Escribe el número	29		
1	28	30	
2	27	31	
3	26	32	
4	25	33	
5	24	34	
6	23	35	
7	22	36	
8	21	37	
9	20	38	
10	19	39	
11	18	40	
12	17	41	Si
13	16	42	
14	15	43	
15	14	44	

Escribimos la lista de números consecutivos 1, 2, 3,...y los sumamos y restamos con el número dado. Después, en la tercera columna, escribimos una fórmula similar a

=SI(Y(ESPRIMO(D9);ESPRIMO(E9));"SI";"") que nos devuelve un "SI" si los equidistantes son primos.

En la imagen,  $17=29-12$  y  $41=29+12$ .

## CONJETURA $N^2+1$

Es uno de los problemas de Landau, y en el momento de redactar este texto sigue sin conocerse si es verdadera o no la siguiente conjetura:

Existen infinitos primos de la forma  $n^2+1$

Hardy y Littlewood supusieron que la conjetura era verdadera, y aproximaron el número de tales primos menores que  $n$ ,  $P(n)$ , asintóticamente a

$$P(n) = C \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$$

Con  $C$  una constante adecuada.

El listado de los primeros primos de este tipo lo puedes consultar en <http://oeis.org/A002496>

2, 5, 17, 37, 101, 197, 257, 401, 577, 677, 1297, 1601, 2917, 3137, 4357, 5477, 7057, 8101, 8837, 12101, 13457, 14401,...

Si la conjetura es cierta, esta sucesión deberá poseer infinitos términos.

¿Qué estudios podríamos abordar sobre este tema con una hoja de cálculo?

El primer objetivo razonable es el de comprobar que, dado un número cualquiera, existe un número primo del tipo  $n^2+1$  que es mayor que él.

Usaremos la herramienta de hoja de cálculo **conjeturas**, alojada en

<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global>

Para encontrar ese primo mayor que el dado, reiteraremos el uso de la función PRIMPROX hasta que encontremos un número primo **p** tal que **p-1** sea un cuadrado.

(A) Planteamiento manual

Escribe un número entero positivo		1500
Próximo primo	¿Es del tipo $N^2+1$ ?	
1511		
1523		
1531		
1543		
1549		
1553		
1559		
1567		
1571		
1579		
1583		
1597		
1601		1601

Basta estudiar este esquema brevemente para descubrir su funcionamiento:

El primer número primo de la lista es el PRIMPROX(N), en la imagen 1511. Los

siguientes se obtienen como los próximos primos del de

la fila superior. Esta lista se puede extender hacia abajo todo lo que se desee.

En la segunda columna hemos usado una fórmula del tipo

`=SI(ESCUAD(C9-1);C9;"")`, es decir, si C9 u otro primo de la lista cumple que al restarle la unidad se convierte en un cuadrado, lo escribimos, y , si no, dejamos la celda en blanco. Así descubrimos que el primer primo de este tipo es 1601. Si la conjetura es cierta, siempre llegaremos a un número de ese tipo.

Este método puede necesitar muchas filas hasta dar con el primo esperado. Por eso, se puede plantear como una función:

## B) Estudio elemental con el Buscador

Basta elegir números grandes y buscar primos cuyo número anterior sea cuadrado.

### Condiciones

Buscamos desde el número	10000
Hasta el número	15000
<b>Con estas propiedades:</b>	
PRIMO ES CUADRADO(N-1)	

Buscamos, entre 10000 y 15000 los primos deseados. Resultarán los tres últimos términos de la sucesión anterior:

Solución
12101
13457
14401

Podemos elegir unos límites mayores, pero se tardará más tiempo en obtener la solución, Estos son los comprendidos entre 1000000 y 1100000:

Solución
1008017
1020101
1073297

Si al planteamiento le añadimos la condición EVALUAR RAIZ(N-1), nos dará en la columna de Detalles el valor de N en  $N^2+1$ :

Solución	Detalles
101	10
197	14
257	16
401	20
577	24
677	26

### (C) Estudio mediante una función

Si suponemos cierta la conjetura, para cada número existirá un primo mayor que él con la forma  $n^2+1$ . Entonces lo podemos plantear como una función. Su listado lo entenderás fácilmente:

**Public Function proxn2mas1(n)**

**Dim p**

**p = primprox(n)**

**While Not escuad(p - 1)**

**p = primprox(p)**

**Wend**

**proxn2mas1 = p**

**End Function**

De esta forma, la búsqueda manual que emprendimos en el caso anterior la podemos reducir al planteamiento de esta función:

Número N	Próximo primo $n^2+1$
1500	1601

Se comprende que para números grandes esta función tardará algo en calcularse. Lo hemos intentado con  $10^7$ :

Número N	Próximo primo $n^2+1$
10000000	10074277
	3174

Tarda unos segundos, aunque no es un retraso desesperante. Hemos añadido la raíz cuadrada del primo menos uno, 3174.

Lista de primos de este tipo

Con esa función ***proxn2mas1*** podemos reproducir toda la lista de OEIS. Basta escribir un 2, debajo de él ***proxn2mas1(2)*** y nos resultará un 5. Le aplicamos de nuevo ***proxn2mas1*** y obtendremos el 17, y así seguimos hasta donde deseemos.

2
5
17
37
101
197
257
401
577
677
1297
1601
2917
3137
4357
5477
7057

Si en lugar de comenzar con el 2 inicias con un número cualquiera, se escribirá la continuación de la lista, salvo quizás el primero, que no tiene que ser primo de ese tipo. Aquí tienes los siguientes a 10000:

10000
12101
13457
14401
15377
15877
16901
17957
21317
22501
24337
25601
28901
30977
32401
33857

## **Aproximación asintótica**

Para comprobar la aproximación de Hardy y Littlewood necesitamos contar los primos de este tipo anteriores a  $N$ . Algo parecido a la función  $\text{PRIME}(N)$ , pero quedándonos sólo con los primos de forma  $n^2+1$

Entenderás a la primera esta definición:

***Public Function ppn2mas1(n)***

***Dim pp, i***

***' para valores de n superiores s 2***

***i = 2: pp = 0***

***While i <= n***



```

pp = pp + 1
i = proxn2mas1(i)
Wend
ppn2mas1 = pp
End Function

```

Esta función cuenta los primos del tipo  $n^2+1$  inferiores o iguales a N. Como nos interesan valores grandes por cuestiones asintóticas, suponemos, para simplificar la programación, que N es mayor que 2. Observa esta tabla en la que se percibe que tratamos con una función escalonada, y que los cambios ocurren en 5 y 17, primos del tipo estudiado.

N	PPN2MAS1(N)
3	1
4	1
5	<b>2</b>
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2
15	2
16	2
17	<b>3</b>
18	3

Para comprobar la aproximación asintótica y evaluar la constante C crearemos una tabla a partir del 10 en progresión geométrica hasta llegar a 10000000:

N	PPN2MAS1(N)	RAIZ(N)/LN(N)	CONSTANTE C
10	2	1,373359738	1,45628268
100	4	2,17147241	1,842068074
1000	10	4,577865794	2,18442402
10000	19	10,85736205	1,749964671
100000	51	27,46719476	1,856760417
1000000	112	72,38241365	1,547337182
10000000	316	196,1942483	1,610648644

Hemos evaluado la constante C como cociente entre la función de distribución de los primos de tipo  $n^2+1$  inferiores a N y la aproximación  $RAIZ(N)/LN(N)$ . No usamos una herramienta adecuada, pero se ve que los valores de C presentan una cierta convergencia.

### Variante de la conjetura

La más sencilla es la que busca primos de la forma  $n^2+a$ . Podemos crear una función similar a la que hemos usado, pero añadiendo un parámetro A

**Public Function proxn2masa(n,a)**

**Dim p**

**p = primprox(n)**

**While Not escuad(p - a)**

**p = primprox(p)**

**Wend**

**proxn2masa = p**

**End Function**

Con esta función se puede comprobar que, dado cualquier valor de N (primo o no) y elegida una constante A, existe un número primo del tipo  $N^2+A$  superior a N

Observa un posible esquema de búsqueda:

Número N	Valor de A
300000	7
Primo superior del tipo $n^2+a$	
302507	
Primo menos A	
302500	
Raiz	
550	

En él elegimos N y A y se nos devuelve el primo adecuado y la raíz cuadrada de N-A

## CONJETURA DE POLIGNAC

Se llama **Conjetura de Polignac** a la enunciada por Alphonse de Polignac in 1849 y que se puede expresar así:

*Hay un número infinito de números primos  $(p, q)$  tales que  $p - q = k$ , siendo  $k$  un número par.*

Últimamente se ha hablado más de ella por algunos avances que se han producido y que pudieran llevar a su demostración

(Ver <http://gaussianos.com/de-70000000-700-en-seis-meses/> y

[http://en.wikipedia.org/wiki/Polignac%27s\\_conjecture](http://en.wikipedia.org/wiki/Polignac%27s_conjecture))

Dentro de esta conjetura, y para  $k=2$  se incluye la de los primos gemelos:

Existen infinitos pares de primos gemelos  $(p, p+2)$

([http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura de los n%C3%BAmoros primos gemelos](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_los_n%C3%BAmoros_primos_gemelos))

Pero también podríamos expresar lo mismo para pares del tipo  $(p, p+4)$ , “cousin primes” y los del tipo  $(p, p+6)$ , “sexy primes”.

Nosotros trabajaremos con el enunciado general, sobre los pares  $(p, p+k)$ , con  $k$  número par. Para ello,

usaremos el valor de  $k$  como entrada a algoritmos de búsqueda.

## Esquema sin macros

Para buscar estos pares  $(p, p+k)$  ambos primos podemos crear en la hoja Conjeturas

(<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global>)

una lista de números primos  $p$  en forma de columna. Para ello la iniciamos con el número que deseemos, generalmente grande, y después, en cada fila usamos la función PRIMPROX(N), siendo N el número

Espacio de trabajo			
Organiza aquí tus cálculos y esquemas			
Inicio	1000000		
Valor de k	2		
	p	p+k	ESPRIMO
	1000003	1000005	FALSO
	1000033	1000035	FALSO
	1000037	1000039	VERDADERO
	1000039	1000041	FALSO
	1000081	1000083	FALSO
	1000099	1000101	FALSO
	1000117	1000119	FALSO
	1000121	1000123	FALSO
	1000133	1000135	FALSO
	1000151	1000153	FALSO

contenido en la celda de arriba, con lo que para aumentar la lista bastará extender la fórmula hacia abajo. Después creamos una columna paralela formada por  $p+k$ . Por último, en una

tercera columna usamos la función ESPRIMO. De esta forma, la aparición del primer par con ambos primos se detectará por el valor VERDADERO de esa función. En la imagen hemos detectado el primer par de números gemelos después del número 1000000, el  $(1000037, 1000039)$ , Se comprende que si la conjetura es verdadera, prolongando las columnas lo que sea

necesario, encontraremos un par de primos con la diferencia que hayamos fijado.

Por ejemplo, aquí tienes los primeros primos diferenciados en 1000 que siguen a 10000000:

10000261	10001261	VERDADERO
----------	----------	-----------

La columna puede hacerse muy alta, y nos convendría también poder encontrar los pares buscados con una sola función.

## Estudio elemental con el Buscador

Elegimos un número par  $K$ , por ejemplo el 28, y basta buscar lo siguiente:

### Condiciones

```
PRIMO
ES PRIMO(N+28)
EVALUAR N+28
```

### Soluciones

En la siguiente tabla figuran las soluciones obtenidas entre 100000 y 101000:

Solución	Detalles
100333	100361
100363	100391
100483	100511
100519	100547
100621	100649
100741	100769
100801	100829
100981	101009
100999	101027

## **Función Polignac**

Para abreviar el proceso usaremos la función POLIGNAC(P;K), que hemos añadido a nuestra hoja cálculo **conjeturas**, enlazada más arriba.

Esta función actúa sobre un inicio **n** y una diferencia par **k**, y encuentra el primer número primo **p** posterior al inicio que forma par de primos con **p+k**. Basta leer los comentarios para entender su funcionamiento.

***Function polignac(n, k)***

***Dim novale As Boolean***

***Dim p, q***

***p = n 'Iniciamos la búsqueda en n***

***novale = True 'Variable para terminar la búsqueda***

***If  $k / 2 \lt \> k \setminus 2$  Then polignac = 0: Exit Function ‘Si  $k$  es impar, damos valor 0 a la función***

***While novale***

***p = primprox(p) ‘Buscamos el siguiente primo***

***If esprimo(p + k) Then q = p: novale = False ‘Si encontramos (p,p+k) paramos***

***Wend***

***polignac = q ‘Damos a la función el valor del primer primo del par***

***End Function***

Por ejemplo, deseamos comprobar la conjetura encontrando el primer par de números primos diferenciados en 2000 que sigue al inicio  $10^6$ . En la imagen, capturada de la hoja conjeturas.xslm tienes la respuesta: 1000121 es el primer primo tal que al sumarle 2000 se obtiene otro primo 1002121. El resto del esquema lo hemos organizado para que se obtengan varios pares en lugar de uno solo. A la derecha hemos incluido la prueba de que ambos son primos. Te invitamos a que construyas un esquema similar en la hoja ***conjeturas***.



Espacio de trabajo				
Organiza aquí tus cálculos y esquemas				
Número inicial	1000000			
Valor de k	2000			
	p	p+k	Son primos	
	1000121	1002121	VERDADERO	VERDADERO
	1000151	1002151	VERDADERO	VERDADERO
	1000289	1002289	VERDADERO	VERDADERO
	1000403	1002403	VERDADERO	VERDADERO
	1000427	1002427	VERDADERO	VERDADERO
	1000457	1002457	VERDADERO	VERDADERO

Como en todas las cuestiones, la hoja de cálculo puede fallar para números muy grandes, por lo que debemos acudir a programas más potentes. Elegimos PARI por ser gratuito. Podemos usar la siguiente función, a la que hemos añadido un “print” para que veas el resultado:

```
polignac(n,k)={local(p);p=nextprime(n);while(!isprime(p+k),p=nextprime(p+1)); return(p)}
{print(polignac(10^6,2000))}
```

Si lo ejecutas obtendrás el mismo número primo que con la hoja, 1000121:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
? \r ini.txt
Z1 = (n,k)->local(p);p=nextprime(n);while(!isprime(p+k),p=nextprime(p+1));return
(p)
1000121
?
```

También aquí puede fallar la función para números muy grandes, pero el margen es mayor que en Excel.

La idea es que si la conjetura es cierta (y la herramienta de cálculo lo admite), podemos elegir un número de inicio arbitrariamente grande y siempre tendremos un resultado.

## Lista de números primos gemelos, “cousin”, “sexy” y otros

Con esta función puedes crearte fácilmente una lista de primos gemelos. Basta usarla de forma recurrente en columna a partir del 1, y con una diferencia dada. En el esquema que adjuntamos más arriba usamos esta técnica:

Inicio	1	
Valor de k	2	
	p	p+k
	3	5
	5	7
	11	13
	17	19
	29	31
	41	43
	59	61
	71	73
	101	103
	107	109

El primer par de primos gemelos (3,5) se ha construido a partir del 1. Los siguientes, a partir del anterior, con la función polignac(p,k). Las columna de la derecha la programamos para que sume el valor de k a la de la izquierda.

Si la conjetura de Polignac es cierta, esta tabla tendría una altura infinita. No terminarían de aparecer pares.

Podemos construir de esta forma los pares de primos “cousin”, que se diferencian en 4.

Inicio	1	
Valor de k	4	
	p	p+k
	3	7
	7	11
	13	17
	19	23
	37	41
	43	47
	67	71
	79	83
	97	101
	103	107

De igual forma, los “sexy”:

Inicio	1	
Valor de k	6	
	p	p+k
	5	11
	7	13
	11	17
	13	19
	17	23
	23	29
	31	37
	37	43
	41	47
	47	53

Nada nos impide crear una lista personalizada. Por ejemplo, si has nacido en el año 1962, como es par, puedes crear pares de primos con esa diferencia:

Inicio	1	
Valor de k	1962	
	p	p+k
	11	1973
	17	1979
	31	1993
	37	1999
	41	2003
	67	2029
	101	2063
	107	2069
	127	2089
	137	2099

Llama la atención que el primer elemento del par no tiene que ser muy grande aunque k lo sea. Observa la lista de pares con una diferencia de 1000000:

Inicio	1	
Valor de k	1000000	
	p	p+k
	3	1000003
	37	1000037
	151	1000151
	193	1000193
	199	1000199
	211	1000211
	313	1000313
	367	1000367
	397	1000397
	409	1000409

## Otras posibilidades

No podemos construir tríos de primos de este tipo, porque siempre uno de ellos sería múltiplo de 3, pero sí

tríos de la forma  $(p, p+2, p+6)$ , o, en general  $(p, p+k, p+3k)$ . Para explorar un poco por este camino, bastaría sustituir la línea de Basic

If esprimo( $p + k$ ) Then  $q = p$ : novale = False

Por esta otra

If esprimo( $p + k$ ) And esprimo( $p + 3 * k$ ) Then  $q = p$ : novale = False

Si la conjetura de Polignac es cierta, estas búsquedas terminarán por dar un resultado. Observa el caso de  $n=1000000$  y  $k=1000$

Inicio	1000000		
Valor de k	2000		
	p	p+k	p+3k
	1000151	1002151	1006151
	1000721	1002721	1006721
	1001381	1003381	1007381
	1001549	1003549	1007549
	1003049	1005049	1009049
	1005359	1007359	1011359
	1005827	1007827	1011827
	1006433	1008433	1012433
	1006547	1008547	1012547
	1007609	1009609	1013609

Casi todos estos casos están publicados y no pasan de ser curiosidades derivadas de la conjetura que estudiamos. Si eliges un ejemplo inadecuado, como  $(p, p+2, p+4)$ , puede ocurrirte que se bloquee la hoja de cálculo y tengas que recurrir al Administrador de tareas para cerrarla.

Por el contrario, si consigues tríos no publicados, podrías intentar incluirlos en OEIS.

## SUCESIONES RECURRENTE

En la pasada temporada dedicamos varias entradas a las sucesiones definidas mediante una recurrencia de segundo orden. Ahora comenzaremos una serie sobre las de tercer orden. Entre ellas son muy populares las de Perrin y Padovan. Como en las anteriores, nuestro planteamiento no será teórico, pues ya existe mucho publicado sobre ellas. El objetivo será crear esquemas y cálculos que faciliten la comprensión de sus propiedades.

### SUCESIÓN DE PERRIN

La teoría fundamental sobre esta serie la puedes consultar en

<http://mathworld.wolfram.com/PerrinSequence.html>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Perrin\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number)

Aquí la describiremos con la ayuda de la herramienta que hemos ofrecido en entradas anteriores, alojada en

<http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2>

### Definición

Esta sucesión es recursiva de tercer orden homogénea, por lo que necesita tres valores iniciales y que  $X(n)$  dependa de los tres valores anteriores  $X(n-1)$ ,  $X(n-2)$  y  $X(n-3)$  mediante la relación

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + B \cdot x_{n-2} + C \cdot x_{n-3}$$

En este caso particular sólo depende de los dos últimos, y no de  $X(n-1)$ . Concretando:

Condiciones iniciales:  $x_0=3$   $x_1=0$   $x_2=2$  Ecuación de recurrencia:  $x_n=x_{n-2}+x_{n-3}$

Es como una sucesión del tipo Fibonacci pero “con retraso”, pues los que se suman no son los dos anteriores, sino los que están un paso más atrás.

En nuestra hoja de cálculo se define así (segunda hoja del libro):

Recurrencias lineales de tercer orden					
Coeficientes					
A	0	B	1	C	1
Valores Iniciales					
x0	3	x1	0	x2	2

El primer coeficiente es nulo, que es lo que produce el “retraso”, y debajo tienes los tres valores iniciales.



La sucesión resultante la vemos pulsando el botón correspondiente:

3
0
2
3
2
5
5
7
10
12
17
22
29
39
51
68
90

Esta popular sucesión la tienes disponible en <http://oeis.org/A001608>, donde les llaman números skiponacci, quizás por los saltos o retardos que presentan: 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853,...

### Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será  $X^3 - x - 1 = 0$ . Con el botón **Resolver** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

Ecuación característica		<input type="button" value="Resolver"/>
1ª Raíz real	1,324718	
Discriminante	-1,26463	
	Dos raíces complejas	
Z1=	-0,6624 0,56228	Z2= -0,6624 -0,5623

Coinciden con las soluciones que da WxMaxima

```
(%i5) algsys([x^3-x-1=0],[x]);
(%o5) [[x=-0.5622795120623 %i-0.66235897862237],[x=0.5622795120623 %i-0.66235897862237],[x=1.324718045112782]]
```

La solución real 1,32471...(aquí sólo aproximada) es el **número plástico**  $\psi$ , cuyo nombre se eligió como afín al número de oro o el de plata. En estas páginas puedes estudiarlo más a fondo:

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_pl%C3%A1stico](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_pl%C3%A1stico)

<http://revistasuma.es/IMG/pdf/57/055-064.pdf>

<http://cscmates.blogspot.com.es/2010/11/el-numero-de-plastico.html>

Orden	X(n)	$\psi^n$
0	3	1,000000
1	0	1,324718
2	2	1,754877
3	3	2,324718
4	2	3,079595
5	5	4,079595
6	5	5,404312
7	7	7,159189
8	10	9,483905
9	12	12,563499
10	17	16,643092
11	22	22,047401
12	29	29,206587
13	39	38,690488
14	51	51,253981
15	68	67,897066
16	90	89,944457
17	119	119,151031
18	158	157,841502
19	209	209,095461

Recordemos que, como en sucesiones anteriores, todo número de Perrin es combinación lineal de las potencias de las tres soluciones de la ecuación característica, pero las dos complejas tienen módulo menor que la unidad, por lo que sus potencias tenderán a cero en valor absoluto. **Por tanto, X(n) se acercará asintóticamente a  $\psi^n$**

Se puede construir una tabla doble en la que se observe este acercamiento:

A partir de un cierto orden basta redondear la potencia para obtener el número de Perrin correspondiente. Lo puedes comprobar en las últimas filas de la tabla.

## Función generatriz

Usando procedimientos similares a los que explicamos para las recurrentes de segundo orden, se puede demostrar que la función generatriz es

$$F(x) = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

Puedes comprobar que esta es la F.G. adecuada efectuando este desarrollo en PARI

```
write("sucesion.txt",taylor((3-x^2)/(1-x^2-x^3),x,20))
```

Te escribirá en un archivo *sucesión.txt* su desarrollo, y aparecerán como coeficientes los términos de la sucesión de Perrin:

$$3 + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 5x^6 + 7x^7 + 10x^8 + 12x^9 + 17x^{10} + 22x^{11} + 29x^{12} + 39x^{13} + 51x^{14} + 68x^{15} + 90x^{16} + 119x^{17} + 158x^{18} + 209x^{19} + O(x^{20})$$

## Sucesión de Perrin y números primos

La propiedad más conocida de estos números es que si  $p$  es primo,  $p$  divide a  $X(p)$ . Por ejemplo,  $X(11)=22$ , que es múltiplo de 11. Podemos construir una tabla en la que dividamos  $X(n)$  entre  $n$  y los cocientes enteros se corresponderán con los números primos:

A pesar de su carácter algo extraño, la propiedad ha sido demostrada para todos los números primos. La contraria no es cierta.  $X(n)$  puede ser múltiplo de  $n$  sin que este sea primo. A estos términos se les suele llamar pseudoprimos de Perrin (<http://oeis.org/A013998>):

271441, 904631, 16532714, 24658561, 27422714, 27664033, 46672291,...

n	X(n)	X(n)/n
0	3	
1	0	0
2	2	1
3	3	1
4	2	0,5
5	5	1
6	5	0,83333
7	7	1
8	10	1,25
9	12	1,33333
10	17	1,7
11	22	2
12	29	2,41667
13	39	3
14	51	3,64286
15	68	4,53333
16	90	5,625
17	119	7
18	158	8,77778
19	209	11

## Otras propiedades

La paridad de  $X(n)$  recorre el ciclo {1, 0, 0, 1, 0, 1, 1} Es fácil de ver: las tres primeras vienen determinadas por la definición (en color rojo en la imagen). Las siguientes

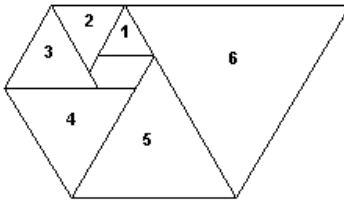
dependen de dos anteriores. Por tanto, existirá ciclo si se vuelve a repetir el par 1 0, y esto ocurre siete lugares más adelante (color verde):

1	0	0	1	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Para ampliar el tema puedes visitar

<http://www.mathpages.com/home/kmath345/kmath345.htm>

en el que se incluye la espiral triangular creada con estos números.



## Propiedades matriciales

Estas entradas sobre sucesiones recurrentes también se plantean el objetivo de un mayor conocimiento de las hojas de cálculo. Por eso vamos a aprovechar las propiedades matriciales de la sucesión de Perrin para repasar este tipo de funciones.

La primera propiedad matricial se resume en la siguiente fórmula para  $n > 2$ :

$$P(n) = \text{Traza} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Recuerda que la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

Para comprobarlo con una hoja de cálculo organizaremos este esquema:

	Potencia de n-1 de M			M				Potencia n de M			Traza
0	1	0		0	1	0		0	0	1	2
0	0	1		0	0	1		1	1	0	
1	1	0		1	1	0		0	1	1	

Comenzamos escribiendo a la izquierda la matriz M dos veces, y a la derecha las multiplicamos. Para ello usaremos la función matricial MMULT, pero como es de tipo matricial deberás seleccionar la matriz de la derecha (debajo del rótulo “Potencia n de M), después escribir una fórmula similar a esta: **=MMULT(C3:E5;G3:I5)**, tomando como rangos los de las matrices de la izquierda. Cuando escribas la fórmula no termines con **Intro**, sino con la combinación **Ctrl+Mayúsc+Intro**, para indicar que la fórmula es de tipo matricial. Notarás que lo has escrito bien porque la fórmula se verá entre corchetes.

A la derecha de las matrices puedes incluir la traza de la tercera, que en la imagen te da 2. Después copia la tercera sobre la primera matriz con copia *sólo de valores*, y te resultará el siguiente número de Perrin, en

este caso 3, porque esta propiedad genera la sucesión a partir del tercer término. Seguirían 2, 5, 5, 7, 10,...

Variante de la anterior expresión

Si en lugar de usar la traza empleamos un producto por la matriz (en vertical) (3, 0, 2), obtenemos tres términos en lugar de uno. La expresión sería ahora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(n) \\ P(n+1) \\ P(n+2) \end{pmatrix}$$

Bastaría borrar la traza en el anterior esquema y sustituirla por otro nuevo producto matricial con la (3, 0, 2). Lo dejamos como ejercicio. Aquí tienes la generación de los términos 5, 7 y 10

Potencia de n-1 de M			M	Potencia n de M			Términos				
1	1	1	0	1	0	1	2	1	3	n	5
1	2	1	0	0	1	1	2	2	0	n+1	7
1	2	2	1	1	0	2	3	2	2	n+2	10

## SUCESIÓN DE LAS VACAS DE NARAYANA

Proseguimos nuestro estudio de sucesiones recurrentes de tercer orden con la ideada por el hindú Narayana (siglo XIV), con la que intentaba calcular generaciones



de vacas, al igual que Fibonacci lo hacía con conejos. Planteó lo siguiente:

Una vaca tiene anualmente una cría. Cada una de ellas, cuando ya es novilla a los cuatro años, también tiene una cría anual ¿Cuántas vacas habrá a los 20 años?

En libros y webs de Historia de las Matemáticas puedes encontrar cómo lo resolvió a partir de sumas de números consecutivos, pero a nosotros nos interesa en este momento su carácter de sucesión recurrente.

En efecto, supongamos que nace la vaca en el año 1. Se pasará tres años sin parir, por lo que la sucesión deberá comenzar con 1, 1, 1, ... Al cuarto año tiene una cría, luego ya serán 2 vacas, y, como pare cada año, los siguientes números serán 3 y 4. Cuando la cría tiene 4 años, tendrá otra a su vez, y serán 6. En general, en cada generación habrá tantas vacas como las que haya actuales, más todas aquellas que ya tengan cuatro años, lo que nos lleva a que  $x_n = x_{n-1} + x_{n-3}$

Según esto, la sucesión de Narayana es recurrente de tercer orden, y entra dentro del ciclo que estamos desarrollando.

Para entender mejor cómo organizaremos el estudio, puedes leer la entrada

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/11/sucesion-de-perrin.html>

La definición de la sucesión, como todas las de su clase, se basa en dar la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales. Según lo explicado más arriba, son estas:

Condiciones iniciales:  $x_0=1$   $x_1=1$   $x_2=1$  Ecuación de recurrencia:  $x_n=x_{n-1}+x_{n-3}$

Acudiendo a la herramienta que usamos en esta serie (<http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2>)

tendremos:

### Planteamiento:

Coeficientes						
A	1		B	0	C	1
Valores iniciales						
x0	1		x1	1	x2	1

1
1
1
2
3
4
6
9
13
19
28
41
60
88
129
189

Resultado:

Coincide con la sucesión publicada en <http://oeis.org/A000930>

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745,...

### Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será  $X^3 - x^2 - 1 = 0$ . Con el botón **Resolver** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

**Ecuación característica** Resolver

**1ª Raíz real Z1= 1,465570**

**Discriminante -2,51255**

**Dos raíces complejas**

**Z2= -0,2328    0,79255            Z3= -0,2328    -0,7926**

## Con wxMaxima:

```
(%i1) algsys([x^3-x^2-1],[x]);
(%o1) [[x=1.465571205007825], [x=-0.79255199251545 %i -0.23278561593838], [x=0.79255199251545 %i -0.23278561593838]]
```

Esta situación la hemos visto en sucesiones anteriores, y es que  $X(n)$  debe coincidir con la suma de las tres raíces elevadas a  $n$ , pero como el módulo de las complejas es menor que 1,  $X(n)$  se acercará para valores grandes a  $1,46557^n$  (ver en <http://oeis.org/A000930> una aproximación más precisa), y que también  $X(n+1)/X(n)$  se acercará a ese valor 1,46557. Esto segundo lo puedes ver con la hoja creando una columna de cocientes:

13	1,44444444
19	1,46153846
28	1,47368421
41	1,46428571
60	1,46341463
88	1,46666667
129	1,46590909
189	1,46511628
277	1,46560847
406	1,46570397
595	1,46551724
872	1,46554622

## **Función generatriz**

Al igual que en las sucesiones recurrentes que ya hemos estudiado, podemos considerar una función generatriz para esta. Es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}$$

La comprobamos con PARI y vemos que su desarrollo contiene la sucesión en los coeficientes.

```
write("sucesion.txt",taylor(1/(1-x-x^3),x,20))
```

```
1 + x + x^2 + 2*x^3 + 3*x^4 + 4*x^5 + 6*x^6 + 9*x^7 +  
13*x^8 + 19*x^9 + 28*x^10 + 41*x^11 + 60*x^12 +  
88*x^13 + 129*x^14 + 189*x^15 + 277*x^16 + 406*x^17  
+ 595*x^18 + 872*x^19 + O(x^20)
```

En cada sucesión que estudiamos nos gusta destacar algún tipo de propiedades. En la de Narayana llaman la atención las de tipo combinatorio.

## **Relación con los números combinatorios**

Se **X(n)** equivale al número de composiciones (particiones con orden) del número n en sumandos 1 y 3. Por ejemplo, si X(7)=9, es porque existen 9 particiones ordenadas de este tipo del número 7: {1, 3, 3} {3, 1, 3} {3, 3, 1} {1, 1, 1, 1, 3} {1, 1, 1, 3, 1} {1, 1, 3, 1, 1} {1, 3, 1, 1, 1} {3, 1, 1, 1, 1} {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}

Con nuestra hoja “Cartesius” (no publicada) lo hemos reproducido fácilmente, con las instrucciones siguientes, que no explicaremos ahora:

XRANGO=7  
 XT=1,3  
 SUMA=7  
 REPITE

Aquí tenemos el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	3	3				
3	1	3				
3	3	1				
1	1	1	1	3		
1	1	1	3	1		
1	1	3	1	1		
1	3	1	1	1		
3	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1

Es otra forma de ver la recurrencia: estas nueve composiciones han resultado de añadir un 3 a las correspondientes a n=4, que son : {1, 3} {3, 1} y {1, 1, 1} y añadir un 1 a las correspondientes a n=6: {3, 3} {1, 1, 1, 3} {1, 1, 3, 1} {1, 3, 1, 1} {3, 1, 1, 1} {1, 1, 1, 1, 1, 1}, con lo que se cumple que  $C(7)=C(6)+C(4)$ . Esto ocurre para todo valor N, porque siempre podemos repartir sus composiciones entre las que terminan en 1 y las que lo hacen en 3, resultando así  $C(n-1)$  y  $C(n-3)$ .

## Desarrollo con binomiales

Si observas la tabla del desarrollo de  $X(7)$ , entenderás que está formada por permutaciones de dos elementos (1 y 3) tomados 3, 5 o 7 veces. Las permutaciones con repetición de dos elementos equivalen a números combinatorios, por lo que podemos plantear:

$$X(7) = \binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 5 + 3 = 9$$

En general se cumplirá:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{n/3} \binom{n-2i}{i}$$

Esto nos da un procedimiento para calcular directamente cualquier elemento de la sucesión de Narayana. La función en Basic de hoja de cálculo te lo resuelve:

**Public Function narayana(n)**

**Dim p, q, t, s, i**

**p = 0: q = n: t = 1**

**While p < q - 1**

**q = q - 2: p = p + 1 'Va incrementando el índice inferior y restando 2 al superior**

```

s = 1: For i = 0 To p - 1: s = s * (q - i) / (p - i): Next i
'Calcula el número combinatorio
t = t + s 'Suma los números combinatorios
Wend
narayana = t
End Function

```

Con ella podemos responder a la cuestión de Narayana, y es que a los 20 años habría 1278 vacas.

N	Narayana(N)
20	1278

## NÚMEROS “TRIBONACCI”

Los números “tribonacci” son análogos a los de Fibonacci, pero generados mediante recurrencias de tercer orden homogéneas. Existen muchas sucesiones con este nombre, según sean sus condiciones iniciales. Aquí comenzaremos con la contenida en <http://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html>, pero podemos cambiar más tarde si surgen propiedades interesantes para su estudio con hoja de cálculo.



En estos números la fórmula de recurrencia posee todos sus coeficientes iguales a la unidad

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + B \cdot x_{n-2} + C \cdot x_{n-3} \text{ se convertiría en } x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$$

Al igual que en el caso de Fibonacci, los dos valores iniciales también valen 1, y el tercero, 2, pero ya hemos explicado que existen otras variantes. Dejamos los enlaces de algunas de ellas:

<http://oeis.org/A000073> comienza con  $a(0)=a(1)=0$ ,  $a(2)=1$

<http://oeis.org/A000213> con  $a(0)=a(1)=a(2)=1$

<http://oeis.org/A001590> con  $a(0)=0$ ,  $a(1)=1$ ,  $a(2)=0$

<http://oeis.org/A081172> comienza con 1,1,0.

Y hay más.

Como ya hemos indicado, nosotros comenzaremos con:

Condiciones iniciales:  $x_0=1$   $x_1=1$   $x_2=2$  Ecuación de recurrencia:  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$

Los primeros términos son:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744, ... <http://oeis.org/A000073>

Como en otras entradas sobre el mismo tema, podemos acudir a nuestra herramienta de hoja de cálculo para sucesiones recurrentes

<http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2>

En la imagen puedes identificar los coeficientes y valores iniciales

Recurrencias lineales de tercer orden						
Coeficientes						
A	1		B	1	C	1
Valores iniciales						
x0	1		x1	1	x2	2

Con el botón “Ver sucesión” podremos obtener el listado de estos números:

1
1
2
4
7
13
24
44
81
149
274
504
927
1705
3136
5768
10609
19513
35890

### Ecuación característica

Al igual que en otras sucesiones recurrentes, su ecuación característica se formará a partir de sus coeficientes, en este caso todos iguales a 1, luego será  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

Con nuestra herramienta podemos encontrar sus raíces:

**Ecuación característica** Resolver

**1ª Raíz real Z1= 1,839290**

**Discriminante -1,47038**  
**Dos raíces complejas**

**Z2= -0,41965 0,606297      Z3= -0,41965 -0,6063**

La misma solución obtenemos con WxMaxima

```
(%i1) algsys([x^3-x^2-x-1],[x]);
(%o1) [[x=1.839286758257819],[x=-0.6062907292072 %i -0.41964337760708],[x=0.6062907292072 %i -0.41964337760708]]
```

Recordemos que los elementos de las sucesiones recurrentes se pueden expresar como suma de potencias de las tres soluciones, pero con estos números ocurre como con algunos similares (los de Fibonacci, Perrin o Narayana), y es que las raíces complejas, al tener módulo inferior a la unidad, tienden a cero si prolongamos la sucesión. Por ello, las potencias de la raíz real, 1,839286...generan con bastante aproximación los números Tribonacci, y lo que es lo mismo, esta constante coincidirá aproximadamente con el cociente entre dos de estos números consecutivos. Lo vemos con hoja de cálculo:

7	1,75
13	1,85714286
24	1,84615385
44	1,83333333
81	1,84090909
149	1,83950617
274	1,83892617
504	1,83941606
927	1,83928571
1705	1,83926645
3136	1,83929619
5768	1,83928571
10609	1,83928571
19513	1,8392874
35890	1,83928663
66012	1,83928671

Por ello, al número 1,839286...se le llama Constante Tribonacci.

### **Función generatriz**

Todas las variantes de las sucesiones Tribonacci comparten los mismos coeficientes de recurrencia, y por tanto también el denominador de su función generatriz. La que estamos estudiando en esta entrada, de inicio 1, 1, 2, se genera con la siguiente:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2 - x^3}$$

Al igual que con otras sucesiones, la comprobaremos con PARI:

```
write("sucesion.txt",taylor((x)/(1-x-x^2-x^3),x,20))
```

Te escribiré en un archivo *sucesión.txt* su desarrollo (este archivo lo deberás tener vacío en la misma carpeta que PARI), y aparecerán como coeficientes los términos de la sucesión Tribonacci:

$$x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 7x^5 + 13x^6 + 24x^7 + 44x^8 + 81x^9 + 149x^{10} + 274x^{11} + 504x^{12} + 927x^{13} + 1705x^{14} + 3136x^{15} + 5768x^{16} + 10609x^{17} + 19513x^{18} + 35890x^{19} + O(x^{20})$$

### Una excursión por la hoja de cálculo

Podemos usar la versión matricial de la generación de estos números para recordar algunos detalles sobre hojas de cálculo.

Es elemental comprobar que las ternas de números consecutivos de Tribonacci.  $T(n)$ ,  $T(n+1)$ ,  $T(n+2)$  pueden engendrar matricialmente la terna siguiente  $T(n+1)$ ,  $T(n+2)$ ,  $T(n+3)$ , mediante la siguiente fórmula matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T(n) \\ T(n+1) \\ T(n+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(n+1) \\ T(n+2) \\ T(n+3) \end{pmatrix}$$

Esta fórmula es adecuada para repasar las fórmulas matriciales de las hojas de cálculo. Comenzamos construyendo un esquema como el de la imagen:

Matriz				Tres elementos a(n), a(n+1), a(n+2)	Tres elementos a(n+1), a(n+2), a(n+3)
0	1	0		1	1
0	0	1	×	1	3
1	1	1		3	5

Para efectuar el producto matricial deberemos usar la función MMULTI, con parámetros la primera matriz y la columna de la primera terna:

`{=MMULT(D4:F6;H4:H6)}`

Observa que como multiplicamos rangos de celdas, usamos el separador :

Para que la hoja entienda que se trata de una multiplicación matricial, cuando termines de escribir la fórmula, en lugar de terminar con INTRO, usaremos **Ctrl+Mayúscula+INTRO**. La aparición de las llaves es la señal de que la fórmula ha sido introducida correctamente.

Una vez efectuado el cálculo sobre una terna, basta que copies el resultado como dato, usando **Copiar** y **Pegado especial** como valores, y proseguirán apareciendo ternas nuevas.

Uno de los autovalores de la matriz que hemos usado es la constante de Tribonacci, 1,839286...La razón es que el polinomio característico de la matriz es el mismo que el de la ecuación característica de la recurrencia,  **$x^3-x^2-x-1=0$** .

## Curiosidades

En esta serie sobre sucesiones recurrentes solemos presentar en cada una de ellas propiedades curiosas, no todas las conocidas, que llenarían libros, sino las que más nos llamen la atención o se adapten mejor a las herramientas que usamos. Para la de Tribonacci presentaremos una propiedad combinatoria.

Particiones de un número en sumandos no mayores que 3

Los números de Tribonacci (salvo los iniciales) cumplen que  $T(N)$  coincide con las particiones de  $N-1$  en sumandos que se pueden repetir, en cualquier orden y con los sumandos menores o iguales a 3. Por ejemplo,  $T(5)=7$ , que coincide con las particiones del número 4 en partes no superiores a 3:

Lo comprobamos con el listado obtenido con nuestra hoja no publicada “Cartesius”:

	X1	X2	X3	X4
1	1	3		
2	2	2		
3	3	1		
4	1	1	2	
5	1	2	1	
6	2	1	1	
7	1	1	1	1
8				
9				

Observamos que resultan 7 particiones distintas.

Para  $T(4)=4$  obtenemos el mismo resultado con particiones del número 3:

	X1	X2	X3	X4
1		3		
2		1	2	
3		2	1	
4		1	1	1
5				

La razón de que esto funcione así es que cualquier partición de este tipo con  $N$  elementos ha resultado a adjuntar un 1 a las particiones de  $N-1$ , un 2 a las de  $N-2$  y un 3 a las de  $N-3$ , con los que se cumple  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$ . Para que lo entiendas mejor hemos coloreado estos tres sumandos para el caso de  $T(6)=13$ :

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
2	3							
3	2							
1	1	3					2	$T(n-3)$
1	2	2					4	$T(n-2)$
1	3	1					7	$T(n-1)$
2	1	2			Total		13	$T(n)$
2	2	1						
3	1	1						
1	1	1	2					
1	1	2	1					
1	2	1	1					
2	1	1	1					
1	1	1	1	1				



## SUCESIÓN DE PADOVAN

En una entrada anterior estudiamos la sucesión de Perrin

(<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/11/sucesion-de-perrin.html>). La de hoy, de Padovan, es muy parecida, por lo que se recomienda leer antes la entrada enlazada. Recordamos:

La sucesión de Perrin es recursiva de tercer orden homogénea, por lo que necesita tres valores iniciales y que  $X(n)$  dependa de los tres valores anteriores  $X(n-1)$ ,  $X(n-2)$  y  $X(n-3)$  mediante la relación

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + B \cdot x_{n-2} + C \cdot x_{n-3}$$

En este caso particular sólo depende de los dos últimos, y no de  $X(n-1)$ :

Condiciones iniciales:  $x_0=3$   $x_1=0$   $x_2=2$  Ecuación de recurrencia:  $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$

Pues bien, la sucesión de Padovan es similar, pero con distintos valores iniciales:

$$x_0=1 \quad x_1=1 \quad x_2=1$$

Como con la anterior, podemos construirla con nuestra herramienta de hoja de cálculo adaptada a las sucesiones recurrentes de tercer orden.

(<http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2>)

1
1
1
2
2
3
4
5
7
9
12
16
21
28
37
49
65
86
114
151

Escribimos los coeficientes 0, 1,1 y los valores iniciales 1, 1, 1:

Recurrencias lineales de tercer orden					
Coeficientes					
A	<input type="text" value="0"/>	B	<input type="text" value="1"/>	C	<input type="text" value="1"/>
Valores iniciales					
x0	<input type="text" value="1"/>	x1	<input type="text" value="1"/>	x2	<input type="text" value="1"/>

Y obtenemos:

Son los números espirales de Padovan contenidos en <http://oeis.org/A134816>. Existen otras variantes de esta sucesión, pero nos dedicaremos en esta entrada a la que comienza con 1, 1, 1. Por el carácter de este blog, omitiremos propiedades gráficas, como la espiral de triángulos, que puedes consultar en otras páginas.

## Relaciones recurrentes

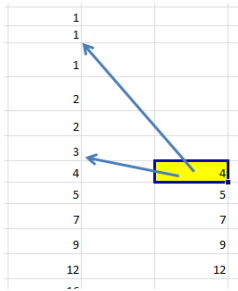
Para abreviar a los términos de esta sucesión los identificaremos como  $P(n)$ .

En muchas páginas web podrás encontrar otras relaciones recurrentes además de la de la definición,

$P(n)=P(n-2)+P(n-3)$ . Aquí sólo comentaremos alguna dejando como ejercicio el análisis de las demás.

(1)  $P(n)=P(n-1)+P(n-5)$

Se puede verificar por inducción: Se cumple en los primeros términos, como puedes comprobar con la misma hoja de cálculo:



### Extensión a $P(n+1)$

$P(n+1)=P(n-1)+P(n-2)=P(n-2)+P(n-6)+P(n-3)+P(n-7)=P(n)+P(n-4)$ , luego se cumple la inducción completa.

(2)  $P(n)= P(n-2)+P(n-4)+P(n-8)$

Sólo veremos los primeros términos con hoja de cálculo y dejaremos la demostración por inducción como ejercicio.

1	
1	
1	
2	
2	
3	
4	
5	
7	7
9	9
12	12
16	16
21	21
28	28

Hay más relaciones de este tipo. Las tienes en [http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n\\_de\\_Padovan](http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Padovan)

Una interesante es la que relaciona la sucesión de Perrin con la de Padovan:

$$\text{Perrin}(n) = P(n+1) + P(n-10)$$

Con nuestra hoja hemos construido este esquema para que compruebes que se cumple para los primeros términos. El justificarlo por inducción es fácil por compartir ambas sucesiones la misma fórmula de recurrencia.

Padovan	Perrin	PAV(n+1)+PAV(n-10)
1	3	
1	0	
1	2	
2	3	
2	2	
3	5	
4	5	
5	7	
7	10	
9	12	
12	17	17
16	22	22
21	29	29
28	39	39
37	51	51
49	68	68
65	90	90
86	119	119
114	158	158
151	209	209

## Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será  $x^3-x-1=0$ , es decir, la misma que para la sucesión de Perrin. Con el botón **Resolver** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

**Ecuación característica** Resolver

**1ª Raíz real**    1,324718

**Discriminante**    -1,26463

**Dos raíces complejas**

Z1= -0,6624    0,56228      Z2= -0,6624    -0,5623

La solución real 1,32471... es el **número plástico  $\psi$** , que ya presentamos en el estudio de la sucesión de Perrin. También la sucesión de Padovan se acerca progresivamente a las potencias de este número, como puedes ver en este cálculo realizado con nuestra hoja:

2	1,7549
2	2,3247
3	3,0796
4	4,0796
5	5,4043
7	7,1592
9	9,4839
12	12,5635
16	16,6431
21	22,0474
28	29,2066
37	38,6905
49	51,2540
65	67,8972
86	89,9446
114	119,1512

## **Función generatriz**

Usando procedimientos similares a los que explicamos para las recurrentes de segundo orden, se puede demostrar que la función generatriz es

$$F(x) = \frac{x + x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

Puedes comprobar que esta es la F.G. adecuada efectuando este desarrollo en PARI

```
write("sucesion.txt",taylor((3-x^2)/(1-x^2-x^3),x,20))
```

Crea un archivo de texto "sucesión.txt" en la misma carpeta de PARI y verás cómo te reproduce la sucesión:

$$x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 9x^{10} + 12x^{11} + 16x^{12} + 21x^{13} + 28x^{14} + 37x^{15} + 49x^{16} + 65x^{17} + 86x^{18} + 114x^{19} + O(x^{20})$$

Los coeficientes del polinomio reproducen la sucesión de Padovan, con el índice desfasado en 1 porque hemos comenzado con el valor 0.

## **Relación con cuestiones combinatorias**

Todas las sucesiones recurrentes suelen tener relación con particiones y composiciones (particiones con orden), porque su generación a partir de elementos anteriores puede coincidir. En el caso de la sucesión de Padovan también existen esas relaciones. Veamos:

$P(n)$  coincide con las composiciones de  $n+2$  en sumandos 2 y 3

En efecto,  $P(0)=P(1)=P(2)$  valen 1, que son las formas de descomponer 2, 3 y 4 en sumandos ordenados 2 y 3

2.  $P(3)=2$  porque  $5=2+3=3+2$ .  $P(4)=2$ , ya que  $6=3+3=2+2+2$ .

Con nuestra hoja Cartesius (aún no publicada) se pueden comprobar estos desarrollos. Por ejemplo, para el caso de 8, plantearíamos:

```
XRANGO=8
XT=2,3
SUMA=8
REPITE
```

Aunque no conozcas su sintaxis, basta explicarte que hemos pedido que desde 1 hasta 8, usando el conjunto  $\{2,3\}$  busque todas las sumas iguales a 8 con repetición.

Efectivamente, resultan  $4=P(6)$

X1	X2	X3	X4	X5
2	3	3		
3	2	3		
3	3	2		
2	2	2	2	

En general, cualquier suma correspondiente a  $N$  resultará de añadir un 2 a las composiciones de  $N-2$  y un 3 a las de  $N-3$ , por lo que su generación es idéntica a la de la sucesión de Padovan. Tal como nos ocurrió con la sucesión de Narayana,



(<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/01/sucesion-de-las-vacas-de-narayana.html>)

esta descomposición da lugar a la expresión de los números de Padovan como suma de números combinatorios.

En [http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan\\_sequence](http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence) tienes uno de ellos:

$$\sum_{2m+n=k} \binom{m}{n} = P(k - 2).$$

Así, por ejemplo, en el desarrollo para  $k=11$  con Cartesius vemos clara la descomposición en números combinatorios (recuerda que las permutaciones con repetición y dos elementos equivalen a esos números)

X1	X2	X3	X4	X5
2	3	3	3	
3	2	3	3	
3	3	2	3	
3	3	3	2	
2	2	2	2	3
2	2	2	3	2
2	2	3	2	2
2	3	2	2	2
3	2	2	2	2

$$\binom{5}{4} + \binom{4}{3} = \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 9 = P(9) = P(11 - 2)$$

Para quienes apreciáis las técnicas de programación, insertamos esta función por si queréis implementarla en vuestra hoja de cálculo:

***Public Function padovan(n)***

***Dim p, q, t, s, i, nn***

***nn = n + 2: p = Int(nn / 2): q = nn - 2 \* p: t = 0***

***While p >= q***

***s = 1: For i = 0 To q - 1: s = s \* (p - i) / (q - i): Next i***

***'Calcula el número combinatorio***

***t = t + s 'Suma los números combinatorios***

***p = p - 1: q = q + 2***

***Wend***

***padovan = t***

***End Function***

## LOS DIVISORES SON LOS PROTAGONISTAS

### FACTORES PRIMOS DE LA PARTE LIBRE

Ya vimos en otra entrada

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html>

que todos los números naturales poseen una parte cuadrada  $PC(N)$  y otra libre de cuadrados  $PL(N)$ . La primera contiene como divisores todos los de  $N$  que son cuadrados. Si un factor primo está elevado a un exponente par pertenecerá a la parte cuadrada, pero si es impar, el par mayor contenido en él pasará a la parte cuadrada, y quedará en la parte libre el mismo factor elevado a la unidad

Todos los factores primos de la parte libre de cuadrados están elevados a la unidad.

Puedes seguir la teoría en la citada entrada y también en nuestra publicación sobre funciones multiplicativas.

<http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf>

También puede ser interesante contar los factores primos de la parte cuadrada, sin repetición. Llamaremos

función  $Q(N)$  al resultado de contar esos primos. Así, por ejemplo, en el número  $2520=2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$  tendríamos: Parte cuadrada  $2^2 \times 3^2=36$ , Parte libre de cuadrados:  $2 \times 5 \times 7=70$ ,  $Q(2520)= 2$ , porque la parte cuadrada contiene dos primos distintos.

Los valores de esta función  $Q(N)$  los tienes en <http://oeis.org/A056170>

0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0,...

Puedes leer ahí algunos comentarios y desarrollos. El valor 0 aparece en los números libres de cuadrados. Verifícalo en la sucesión. Es sencillo de entender.

Presentarán valor 1 aquellos números cuya parte cuadrada posee un solo factor primo, como 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28...( <http://oeis.org/A190641>). El primer valor  $Q(n)=2$  ocurre en el 36, y, en general, esta función cuenta los factores no unitarios de  $N$ .

Aprenderás bastante si ejecutas y analizas este código PARI que engendra esos valores. Ahí te lo dejamos. Recuerda que OMEGA cuenta los factores primos sin repetirlos y que CORE es la parte libre.

```
{for(i=2,36,print1(omega(i/core(i))", "))}
```

Podíamos efectuar idéntica operación con la parte libre, contar sus factores primos. Llamaremos al resultado  $P(N)$ . Sus valores son:

0, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2,...y están contenidos en la sucesión OEIS <http://oeis.org/A162642>. En ella los valores 0 se corresponden con los cuadrados, porque en ellos la parte libre es 1 y no tiene factores primos.

Como en la anterior recomendamos la lectura del desarrollo de este enlace de OEIS y el que generes la sucesión mediante el código PARI

```
{for(i=1,36,print1(omega(core(i))", "))}
```

Recuerda que core es la parte libre de cuadrados

Las funciones  $P(N)$  y  $Q(N)$  no actúan sobre conjuntos disjuntos de factores y pueden contar ambas el mismo factor, como ocurría con el 2 en el ejemplo de más arriba, el del 2520, que pertenecía a la parte cuadrada y también a la libre. Por tanto, la suma  $P(N)+Q(N)$  es igual o mayor que  $OMEGA(N)$ . En la tabla siguiente podemos observar que en los números que contienen cubos, como 8, 24 y 27, presentan esa desigualdad  $P(N)+Q(N) > OMEGA(N)$ .

N	P(N)	Q(N)	OMEGA(N)
1	0	0	0
2	1	0	1
3	1	0	1
4	0	1	1
5	1	0	1
6	2	0	2
7	1	0	1
8	1	1	1
9	0	1	1
10	2	0	2
11	1	0	1
12	1	1	2
13	1	0	1
14	2	0	2
15	2	0	2
16	0	1	1
17	1	0	1
18	1	1	2
19	1	0	1
20	1	1	2
21	2	0	2
22	2	0	2
23	1	0	1
24	2	1	2
25	0	1	1
26	2	0	2
27	1	1	1

Puedes reflexionar sobre qué números presentan esa desigualdad además de los cubos.

### **P y Q como funciones aditivas**

En Teoría de Números una función **f(n)** se llama **aditiva** cuando se cumple

**F(ab) = f(a) + f(b)** siempre que a y b sean coprimos

En efecto, si a y b son coprimos, tanto su parte cuadrada como su parte libre poseerán factores primos diferentes en ambos números. Por tanto, P y Q aportarán al producto factores que no pertenecerán a la otra función. En ese producto figurarán los que aporta cada uno sin coincidencias, por lo que sus cuentas se

sumarán. Lo puedes verificar en la tabla de más arriba, por ejemplo:

$$P(2)=1, P(9)=0 \text{ y } P(2*9)=P(18)=1=P(2)+P(9)$$

Prueba también con otros pares (coprimos) y con  $Q(n)$ , y comprobarás la aditividad.

Al igual que las funciones multiplicativas, las aditivas se definen sólo para potencias de primos. En este caso la definición adecuada de  $Q(p^m)$  sería

$Q(p^m)=0$  si  $m=1$ , y  $Q(p^m)=1$  en los demás casos. Lo puedes expresar también como  $p^{\text{sg}(m-1)}$ , donde  $\text{sg}$  es la función signo, que vale 1 en los positivos y 0 en el cero.

Para la función  $P$  tendríamos la situación opuesta:

$P(p^m)=1$  si  $m$  es impar, y  $P(p^m)=0$  si  $m$  es par. También se puede resumir como  $P(p^m)=(m \bmod 2)$

La falta de simetría en las definiciones viene dada por el hecho de que si un primo está elevado a exponente 2 o mayor, se cuenta en  $Q$  y no en  $P$ , tanto si es par o impar.

### **La función $g(n)$ , los cuadrados y los primoriales.**

Hace unas semanas, navegando por Twitter encontré unos comentarios de Republic of Math (@republicofmath) sobre resultados relativos a esta

función. Me interesaron bastante y decidí estudiarla mediante hojas de cálculo, que es donde nos movemos en este blog. En la anterior entrada se incluyó un estudio sobre los factores primos de las partes cuadrada y libre como introducción al que se inicia hoy.

En dichos textos de Twiter se define  $g(n)$  como **el mínimo número que multiplicado por el factorial de  $n$  lo convierte en un cuadrado**. Ahora bien, según razonamos en la entrada

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html>

esa función  $g(n)$  es, simplemente **la parte libre de cuadrados del factorial de  $n$** . Si la parte libre la representamos como PL, la fórmula adecuada sería  **$g(n)=PL(n!)$** .

En lenguaje PARI esta función se representaría por  **$core(n!)$** , y así es como se ha engendrado la sucesión de valores de  $g(n)$  en <http://oeis.org/A055204>:

1, 2, 6, 6, 30, 5, 35, 70, 70, 7, 77, 231, 3003, 858, 1430, 1430, 24310, 12155, 230945, 46189, 969969, 176358, 4056234, 676039, 676039, 104006...

Desafortunadamente, en hoja de cálculo, si usamos la expresión equivalente con funciones nuestras: PARTELIBRE(FACT(N)), el cálculo se ralentiza hasta



llegar a hacerse inútil. Para conseguir la tabla que sigue, hemos tenido que esperar varios minutos.

N	G(N)
1	1
2	2
3	6
4	6
5	30
6	5
7	35
8	70
9	70
10	7
11	77
12	231

Para resolver esto, y entrando ya en un tema de algoritmos, podemos contar con una ayuda:

### Fórmula de Polignac

Esta útil fórmula la estudiamos en la entrada

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/02/formula-de-polignac.html>,

a la que remitimos para su definición y estudio.

La fórmula recorre todas las potencias de los factores primos menores que  $n$  y para cada una de ellas evalúa la parte entera del cociente de  $n$  entre cada una de las potencias.

$$r = \sum \left[ \frac{n}{p^i} \right]$$

El resultado equivale al exponente del factor primo dentro del factorial. Esto nos da una oportunidad para encontrar la parte libre de dicho factorial:

- Recorremos todos los números primos menores que  $n$
- A cada uno le aplicamos la fórmula de Polignac
- Si su exponente es par, pertenece a la parte cuadrada del factorial, y no nos interesa.
- Si es impar, pertenecerá la parte libre, es decir, a  $g(n)$ , tomándolo con exponente la unidad.

No es difícil programar como función estos cálculos. Este listado lo entenderás bien. Devuelve un cero si el número no es primo y su exponente dentro del factorial si lo es:

***Public Function polignac(n, p) n es el número y p el primo***

***Dim pol, pote***

***pol = 0 El valor se inicia en cero. Si no es primo p, se queda así***

***If esprimo(p) Then***

***pote = p Recorrerá las potencias de p menores que n***

***While pote <= n***

***pol = pol + Int(n / pote) Sumando de la fórmula de Polignac***

***pote = pote \* p Se pasa a otra potencia del primo.***

***Wend***

***End If***

***polignac = pol***

***End Function***

Puedes comprobar con esta fórmula la descomposición de 22! que publicamos en la entrada sobre Polignac:

$$22! = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Con esta función podemos encontrar los valores de la parte libre de cuadrados del factorial. En el ejemplo obtendríamos  $g(22) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 176358$ .

Seguimos las operaciones sugeridas más arriba: recorrer los primos y tomar tan sólo aquellos que presenten un valor impar en la fórmula de Polignac:

Este segundo listado es más simple, y nos da el valor de  $g(n)$ :

***Public Function g(n)***

***Dim i, s***

**s = 1**

**For i = 1 To n Recorre los menores que n, sean o no primos**

**If Not esnumpar(polignac(n, i)) Then s = s \* i  
Multiplica sólo los de exponente impar (si no es primo suma cero)**

**Next i**

**g = s**

**End Function**

Ahora el proceso es mucho más rápido. Este listado se ha conseguido en segundos:

N	G(N)
1	1
2	2
3	6
4	6
5	30
6	5
7	35
8	70
9	70
10	7
11	77
12	231
13	3003
14	858
15	1430
16	1430
17	24310
18	12155
19	230945
20	46189
21	969969
22	176358
23	4056234
24	676039
25	676039

A primera vista hay algo que llama la atención, y es que la función no es creciente, aunque sí tenga esa tendencia a la larga, y que el valor para un cuadrado **es idéntico al de su número anterior**. Esto último se comprende porque un cuadrado no aporta nada a la parte libre de cuadrados del factorial. El que no sea creciente se explica porque la aportación del nuevo número puede ser de exponente impar que se acumule a otro impar ya existente y que entre ambos formen uno par, que por ser cuadrado se elimina. Pensemos en esto con más detenimiento.

### **Proceso recursivo**

Si disponemos de la descomposición en factores primos de  $g(n)$  y la de  $n+1$  entenderemos mejor por qué la función  $g(n)$  a veces crece otras decrece y en algunos casos queda igual. Usaremos el siguiente esquema:

	Valor de N	15		
	Valor de g(n)	1430	[2,1][5,1][11,1][13,1]	
	Valor de n+1	16	[2,4]	
Números primos	Exponentes g(n)	Exponentes n+1	Exponentes g(n+1)	
2	1	4		1
3				
5	1			1
7				
11	1			1
13	1			1
17				
19				

En él hemos representado los exponentes (todos iguales a 1) de  $g(15)$  que es el producto  $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ . En la siguiente columna se han situado los exponentes de 16, que en este caso sólo figura el 4 correspondiente a  $2^4$ . Al pasar de  $15!$  a  $16!$ , el factor nuevo tiene exponente par, luego el exponente del 2 no cambia, con lo que  $g(15) = g(16) = 1430$ . Esto ocurriría en todos los cuadrados.

El valor de  $g(n)$  es igual al de  $g(n+1)$  cuando  $n+1$  sea un cuadrado.

Si  $n+1$  es un número primo, la situación es la opuesta, Observa el paso de 18 a 19:

	Valor de N	18		
	Valor de g(n)	12155	[5,1][11,1][13,1][17,1]	
	Valor de n+1	19	[19,1]	
Números primos	Exponentes g(n)	Exponentes n+1	Exponentes g(n+1)	
2				
3				
5	1			1
7				
11	1			1
13	1			1
17	1			1
19		1		1
23				

$g(18)=5*11*13*17$ . Como 19 es primo, no se combinará con los anteriores, y aparecerá como factor nuevo en  $g(19)= 5*11*13*17*19$ . Así ocurrirá con todos los números primos:

Si  $n+1$  es primo, se cumplirá  $g(n+1)=(n+1)*g(n)$

Recorre la tabla, detente en un número primo  $N$  y observarás que  $g(N)=g(N-1)*N$

En los demás casos, crece cuando el producto de los nuevos factores es superior al de los que se eliminan. Vemos dos ejemplos:

Paso del 19 al 20

	Valor de N	19		
	Valor de g(n)	230945	[5,1][11,1][13,1][17,1][19,1]	
	Valor de n+1	20	[2,2][5,1]	
Números primos	Exponentes g(n)	Exponentes n+1	Exponentes g(n+1)	
2		2		
3				
5	1	1		
7				
11	1			1
13	1			1
17	1			1
19	1			1
23				

Aquí los factores nuevos que aporta el 20 son 2 y 5. El 2 no cuenta porque está elevado al cuadrado, y se elimina. El 5 tampoco cuenta, porque con el 5 que ya está presente en g(19) forma un cuadrado y también se elimina. El resultado es que se pierde un 5 y la función disminuye.

Paso del 14 al 15

Aumenta, según el esquema. Estúdialo bien:

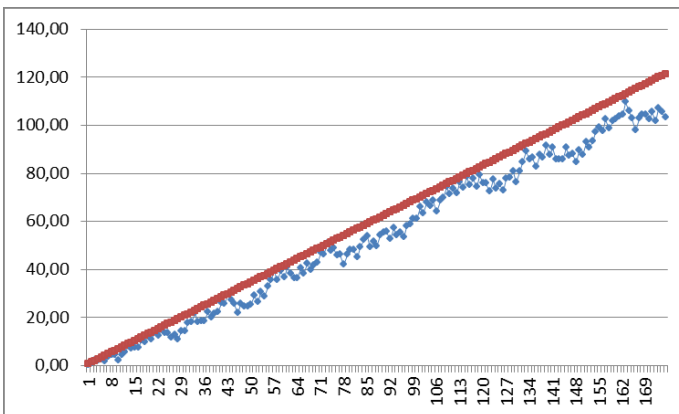
	Valor de N	14		
	Valor de g(n)	858	[2,1][3,1][11,1][13,1]	
	Valor de n+1	15	[3,1][5,1]	
Números primos	Exponentes g(n)	Exponentes n+1	Exponentes g(n+1)	
2	1			1
3	1	1		
5		1		1
7				
11	1			1
13	1			1
17				



## Ajustes de la función $g(n)$

La entrada anterior la dedicamos a la parte libre de cuadrados de los factoriales. La llamamos  $g(n)=\text{core}(n!)$  e indicábamos que sus valores estaban contenidos en <http://oeis.org/A055204>. En dicha página señala Charles R Greathouse IV que  $\log g(n) \sim n \log 2$ . Comencemos por ahí:

Como en la entrada anterior se ofrecía una forma de evaluar  $g(n)$ , podemos crear dos columnas paralelas, una con  $\log(g(n))$  y otra con  $n \cdot \log(2)$ . El gráfico correspondiente a los primeros números nos indica que esta aproximación es siempre por exceso, y con un ajuste bastante alto:  $R^2=0,99$



La función  $\log(g(n))$  tiende a infinito con  $n$  de forma sensiblemente lineal

No he encontrado desarrollo teórico sobre esta aproximación, pero es algo que llama la atención. También se puede expresar como  $g(n) \approx 2^n$ . También es sorprendente que  $g(n)$  se ajuste bastante bien al número de subconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos.

James Tanton propone como aproximación inferior en media  $g(n) \approx 1,85^n$ . ¿Qué podríamos afirmar nosotros con una hoja de cálculo? No mucho, pero lo intentaremos:

## Ajuste por mínimos cuadrados y Solver

Preparamos cuatro columnas de datos, en la imagen desde la I hasta la L

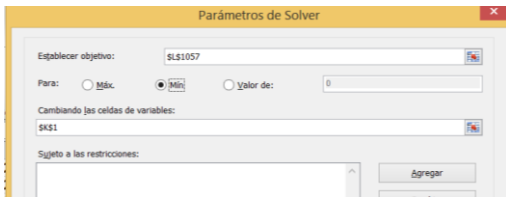
	I	J	K	L
1			2	
2	N	LOG(G(N))	N*LOG(K1)	DIF. CUAD.
3	1	0	0,30103	0,09061906
4	2	0,69314718	1,38629436	0,48045301
5	3	1,79175947	2,07944154	0,08276097
6	4	1,79175947	2,77258872	0,96202602

En la columna I escribimos los primeros números naturales, en la siguiente el logaritmo de  $G(N)$ , y su

aproximación mediante  $N \cdot \text{LOG}(2)$  en la columna K. Observa que el 2 está escrito en la celda K1. A continuación calculamos en la última columna la diferencia de ambas expresiones elevada al cuadrado. Esta columna la sumamos al final, en la imagen en la celda L1057.

	I	J	K	L
1053	1051	705,587936	728,497687	524,856669
1054	1052	700,015782	729,190834	851,183644
1055	1053	702,580732	729,883981	745,467437
1056	1054	709,541079	730,577128	442,515358
1057				402465,679
1058				

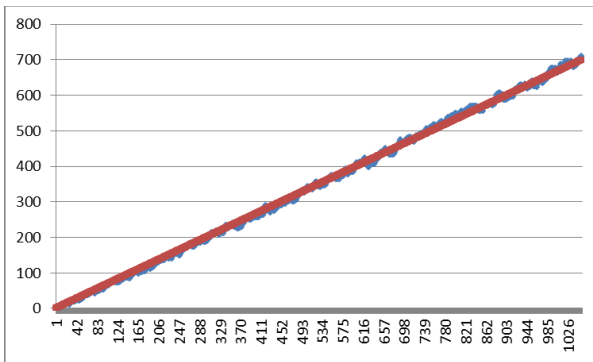
Ahora interviene Solver: le pedimos que elija el valor mínimo en la celda K1 (para sustituir el 2) que consiga minimizar la suma de diferencias al cuadrado contenida en L1057 con lo que habremos realizado un ajuste por mínimos cuadrados:



Nos da como mejor valor 1,94 aproximadamente, muy cercano al 2 de partida.

	I	J	K	L
1			1,94164652	
2		$N \cdot \text{LOG}(G(N))$	$N \cdot \text{LOG}(K1)$	DIF. CUAD.

Este pequeño cambio hace que el ajuste en el gráfico se aprecie mejor:



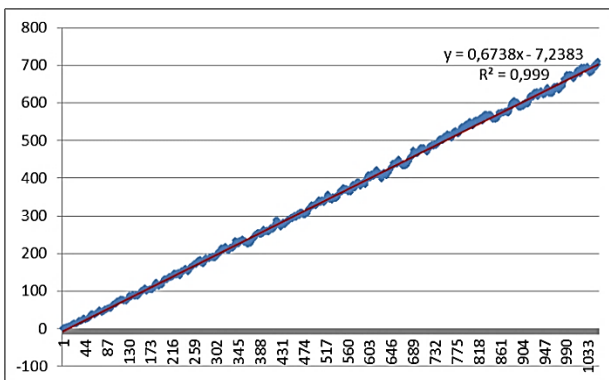
El ajuste no está sesgado como en el caso del 2.

Esta técnica que acabamos de usar es sencilla, pero no muy usada. La ventaja que tiene es que tú puedes elegir la función de ajuste, que en las líneas de tendencia está obligada a ser lineal, exponencial o potencial. Recuerda los pasos:

- Situamos en dos columnas paralelas la función a estudiar y la que deseamos sirva de ajuste
- Si la función de ajuste depende de unos parámetros, tomamos nota de en qué celdas están situados.
- Creamos una tercera columna con las diferencias al cuadrado entre las dos primeras. La sumamos en una celda cuya referencia recordaremos.

- Acudimos a Solver y solicitamos minimizar la celda de la suma de diferencias al cuadrado a partir de las celdas que contienen los parámetros. Se usará un Solver no lineal.
- Si el ajuste es posible, aparecerán los nuevos valores de los parámetros.

Podemos, por pura curiosidad, intentar un ajuste lineal al  $\text{LOG}(G(N))$  (neperiano). Resulta una coincidencia bastante fuerte, porque, además del sumando  $-7,2383$ , descubrimos que el coeficiente que da para la X es  $0,6738$ , que es el logaritmo de  $1,96$ , luego la expresión  $\log g(n) \sim n \log 2$  da un ajuste ligeramente superior.



## **Función $P(n)$ , la omega de $G(n)$**

En los tuits citados en las anteriores párrafos, de @republicofmath y @jamestanton en los que hemos basado los desarrollos de las mismas se introduce también la función  $P(n)$ , que es el número de factores primos de  $G(n)$ . Para entender mejor lo que sigue es conveniente releer los mismos.

## **$G(n)$ y el primorial**

Podemos conseguir otra aproximación comparando  $G(n)$  con los primoriales:

Recordamos que  $G(n)$  es la parte libre de cuadrados del factorial de  $n$ . Es un divisor del primorial  $n\#$ , que es el producto de todos los números primos menores o iguales que  $n$

(ver <http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/02/el-primorial.html>).

$G(n)$  elige del primorial sólo los factores primos que presentan exponente impar en  $n$ . Basta recordar los esquemas que usamos cuando presentamos la función:

	Valor de N	19		
	Valor de g(n)	230945	[5,1][11,1][13,1][17,1][19,1]	
	Valor de n+1	20	[2,2][5,1]	
Números primos	Exponentes g(n)	Exponentes n+1	Exponentes g(n+1)	
2		2		
3				
5	1	1		
7				
11	1			1
13	1			1
17	1			1
19	1			1
23				

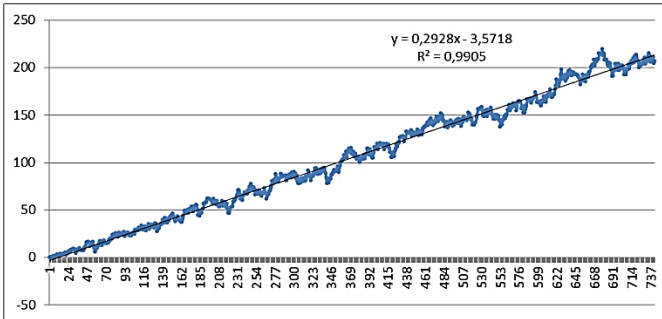
En el esquema, si multiplicamos los elementos de la primera columna nos resultará un primorial, y como en la segunda se marcan los que entran en  $G(n)$ , si sólo multiplicamos los que figuran con 1, resultará, como hemos afirmado, que  $G(n)$  es un divisor de  $n\#$ , y es claro que este, a su vez, es un divisor de  $n!$ . Esto nos lleva a unas acotaciones claras:

### **$G(n)$ divide a $n\#$ y este a $n!$**

Los cocientes tienen valores altos en el caso de los factoriales, como vemos en esta tabla.

N	G(N)	N#	N!	N#/G(N)	N!/G(N)
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1
3	6	6	6	1	1
4	6	6	24	1	4
5	30	30	120	1	4
6	5	30	720	6	144
7	35	210	5040	6	144
8	70	210	40320	3	576
9	70	210	362880	3	5184
10	7	210	3628800	30	518400
11	77	2310	39916800	30	518400
12	231	2310	479001600	10	2073600

Sin embargo, los correspondientes a  $N\#/G(N)$  parecen más asequibles a nuestro estudio. Sabemos que los logaritmos de los primoriales se ajustan bien al valor de  $N$ . Veamos el ajuste del logaritmo del cociente  $N\#/G(N)$



Así que  $\log(N\#/G(N))$  se acerca a  $0,2928N$  y  $\log(N\#)$  a  $N$ . Se tendrá entonces:

$$\log(G(N)) \approx \log(N\#) - 0,2928N \approx N - 0,29N \approx 0,7072N > N \log(2)$$

Hemos llegado a un ajuste muy cercano al que obtuvimos anteriormente, pero por exceso. Lo más llamativo es que los distintos logaritmos presentan una tendencia lineal.

### Las funciones P y Q aplicadas a $G(n)$

Si en lugar de multiplicar los factores primos de la parte libre de cuadrados del factorial, los contamos (función



OMEGA), obtendremos la función  $P(n)$ , que ya estudiamos en anterior entrada en su versión general.

Definiremos, pues,  $P(n)=\omega(\text{partelibre}(n!))$ . En código PARI se escribiría

$P(n) = \omega(\text{core}(n!))$

Así se han encontrado los primeros valores de  $P(n)$ : 0, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 6, 6, 7, 5, 5, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 7, 9,... recogidos en

<http://oeis.org/A055460>

Por ejemplo  $P(5)=3$ , porque  $5!=120= 2^3*3*5$  contiene tres factores primos con exponente impar. Sin embargo  $P(7)=2$  porque su factorial contiene primos elevados a un exponente par salvo el 5 y el 7.

En el Basic de las hojas de cálculo se evalúa esta función de forma idéntica a la de  $g(n)$ , usando la fórmula de Polignac, solo que se cuentan factores en lugar de multiplicarlos:

***Public Function p(n)***

***Dim i, s***

***s = 0***

***For i = 1 To n***

***If Not esnumpar(polignac(n, i)) Then s = s + 1***

***Next i***

121

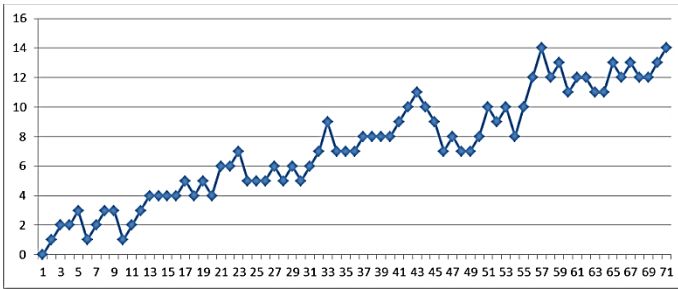
$$p = s$$

### ***End Function***

Así hemos reproducido sin dificultad los primeros valores:

N	P(N)
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	1
7	2
8	3
9	3
10	1
11	2
12	3
13	4
14	4
15	4
16	4
17	5
18	4
19	5
20	4

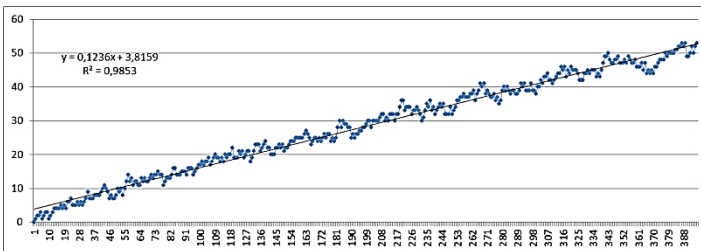
Al igual que  $g(n)$ , la función  $p(n)$  crecerá en los números primos y se mantendrá constante en los cuadrados. En los demás podrá aumentar o disminuir. Recorre la tabla para verificarlo.



Su crecimiento queda claro en el gráfico

### Ajustes de P(n)

Esta función presenta una clara tendencia lineal. Si aumentamos el número de términos y añadimos una línea de tendencia obtenemos un ajuste bastante bueno a una recta de pendiente 0,1236 con  $R^2=0,9853$



¿Podríamos afinar más?

En los tuits citados se sugiere un crecimiento potencial suave. Proponen la fórmula potencial  $P(n) \approx 123$

$0.307 \cdot n^{0.854}$ . Hemos creado dos columnas paralelas, una con  $P(8)$  y otra con la fórmula  $0.307 \cdot n^{0.854}$ .

N	P(N)	Aproximación
2	1	0,554904174
3	2	0,784512607
4	2	1,002992321
5	3	1,213553031
6	1	1,418010815
7	2	1,617529097
8	3	1,81291409
9	3	2,0047558
10	1	2,193503721
11	2	2,379511065

La hemos prolongado a más de 1000 filas y hemos pedido una función que no se suele usar mucho en las hojas de cálculo: COEFICIENTE.R2. Esta función te devuelve el coeficiente de determinación, que evalúa la parte explicada de la función  $P(n)$  mediante esa aproximación. Resulta, tal como afirman los autores,  $R^2=0,996998973$ , impresionante en su ajuste.

## Volvemos al Solver

Como uno de los objetivos de este blog es el aprendizaje del uso de las hojas de cálculo, acudimos a la herramienta Solver para ver si Excel (en este caso) puede aproximar los valores 0.307 y 0.854 de la fórmula. Al igual que operamos en la entrada anterior, asignamos dos celdas a estos parámetros, y los iniciamos, por ejemplo, en 0,3 y 0,8, a ver qué ocurre. A

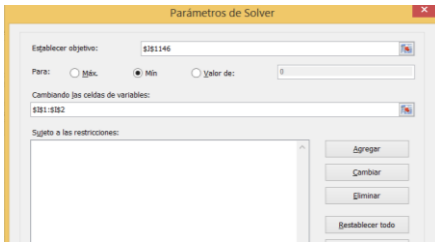
su derecha construimos la columna de las diferencias al cuadrado

Coefficiente	0,3
Exponente	0,8

CUAD de

N	P(N)	Aproximación	DIF
2	1	0,522330338	0,228168306
3	2	0,722467406	1,63208953
4	2	0,90942994	1,189343056
5	3	1,087169496	3,658920539
6	1	1,257888814	0,06650664
7	2	1,422982918	0,332948713

Sumamos la columna de diferencias en la celda J1146. Con todo ello acudimos a Solver para ponerlo a prueba:



La solución que nos da no es la óptima

Coficiente	0,345678878
Exponente	0,836752385

Para una herramienta no dedicada a usos científicos no está mal, pero vemos que no es fiable si se le exige mucho. Para comprobaciones serviría, pero sólo para eso.

## ANTISIGMA DE UN NÚMERO NATURAL

Al igual que se ha definido la función SIGMA(N) como la suma de todos los divisores de N (incluido él mismo), podemos definir la ANTISIGMA(N), que es la suma de los números menores que N y que no lo dividen, Por ejemplo, la antisigma de 8 sería la suma de  $3+5+6+7=21$ , y  $\text{sigma}(8)$  es igual a  $1+2+4+8=15$ .

Los valores de esta función antisigma son los siguientes, que están incluidos en

<https://oeis.org/A024816>

0, 0, 2, 3, 9, 9, 20, 21, 32, 37, 54, 50, 77, 81, 96, 105, 135, 132, 170, 168, 199, 217, 252, 240, 294, 309, 338, 350,...

Comprueba que para el 8 se da el valor de 21, que es el que hemos calculado.

No se debe confundir con la indicatriz de Euler, que cuenta los números primos con N. En la suma correspondiente al 8 figura el 6, que no divide al 8, pero tampoco es primo con él. Con estos números primos con N se puede formar también una suma. Nosotros, para entendernos, la llamaremos S\_EULER. Puedes consultar la página <https://oeis.org/A023896>. En el caso del 8, la suma sería  $1+3+7=11$  (por convención, se considera el 1 primo con todos los demás números. Esto facilita los cálculos). Es evidente que S\_EULER(N) será siempre menor o igual que ANTISIGMA(N), porque sus sumandos están incluidos en la otra suma.

La suma de SIGMA(N) y ANTISIGMA(N) es muy fácil de calcular, ya que se trata de sumar todos los números desde 1 hasta N, y esto sabemos que es igual a  $N(N+1)/2$ .

**Relación fundamental:**

$$\mathbf{SIGMA(N)+ANTISIGMA(N)=N(N+1)/2}$$

Si no se dispone de la función SIGMA, también se puede encontrar ANTISIGMA. Por ejemplo, puedes usar este código Basic de Excel:

**Public Function antisigma(n) 'suma los no divisores**  
**Dim i, a**

**a = 0**

**For i = 1 To n**

**If n / i <> n \ i Then a = a + i 'no es divisor de n, y se suma**

**Next i**

**End If**

**antisigma = a**

**End Function**

Si ya tienes implementada SIGMA, el desarrollo es mucho más simple:

**Public Function antisigma(n)**

**antisigma = n \* (n + 1) / 2 - sigma(n)**

**End Function**

Así lo haremos en PARI

$\text{antisigma}(x) = x * (x + 1) / 2 - \text{sigma}(x)$

Antisigmas calculables mediante una fórmula

Nos referimos a una fórmula sencilla, sin tener que proceder a una descomposición complicada en factores primos.



## Antisigma de un número primo

Si  $p$  es primo, es posible encontrar una fórmula para la antisigma. En efecto, por la relación anterior,

$$\text{antisigma}(p) = p(p+1)/2 - \text{sigma}(p) = p(p+1)/2 - (p+1) = (p^2 + p - 2 - 2p)/2 = (p^2 - p - 2)/2 = (p+1)(p-2)/2$$

Hemos usado el hecho de que la sigma de un primo  $p$  equivale a  $p+1$ , como es evidente.

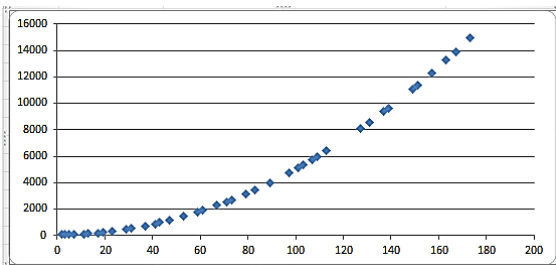
Así que si  $p$  es primo, es válida la fórmula

$$\text{antisigma}(p) = \frac{(p+1)(p-2)}{2}$$

Por ejemplo,  $\text{antisigma}(7) = 8 \cdot 5 / 2 = 20$ ,

$\text{antisigma}(13) = 14 \cdot 11 / 2 = 77$

Es curioso el hecho de que esta función sea evaluable directamente en este caso. Constituye una relación cuadrática, y su diagrama conjunto forma una parábola.



En los números compuestos hay que descomponer en factores primos previamente, y se pierde así una relación tan directa.

## Antisigma de una potencia de 2

Si  $N=2^k$ , entonces  $\text{sigma}(N)=1+2+4+8+\dots+2^k=(2^{k+1}-1)/(2-1)=2^{k+1}-1$ . Aplicamos la relación fundamental y nos queda:

$$\text{Antisigma}(2^k)=2^k(2^k+1)/2-(2^{k+1}-1)=(2^{2k}+2^k-2*2^{k+1}+2)/2=(2^{2k}-3*2^k+2)/2$$

$$(2^k-2)(2^k-1)/2=(N-1)(N-2)/2 \text{ y también } (2^{k-1}-1)(2^k-1)$$

(ver <http://oeis.org/A134057>)

La antisigma de una potencia de 2 es un número triangular. Si la potencia es N, su antisigma hemos visto que es  $(N-1)(N-2)/2$ , el triangular de orden N-1. Lo puedes comprobar en este listado:

$N=2^k$	$(N-1)(N-2)/2$
1	0
2	0
4	3
8	21
16	105
32	465
64	1953
128	8001
256	32385
512	130305
1024	522753
2048	2094081
4096	8382465
8192	33542145
16384	134193153
32768	536821761
65536	2147385345
131072	8589737985

## Antisigma de semiprimos con factores diferentes

Un caso también sencillo es el de semiprimos producto de dos primos diferentes. Si  $N=pq$ , con p y q primos, es

posible encontrar una fórmula sencilla para la antisigma. Los valores son los siguientes:

N	Antisigma(N)
6	9
10	37
14	81
15	96
21	199
22	217
26	309
33	513
34	541
35	582
38	681

Busquemos la fórmula que los genera: La sigma de un número primo  $p$  es  $p+1$ , luego de  $q$  será  $q+1$ . Como es una función multiplicativa, la sigma del producto equivaldrá a  $(p+1)(q+1)$  y por tanto la antisigma  $pq(pq+1)/2-(p+1)(q+1)$ . Parece que queda mejor así sin intentar simplificarla. La comprobamos:  $35=5*7$ , luego su antisigma será  $35*36/2-6*8=35*18-48=582$

### **Antisigma de la potencia de un primo**

Es otro caso sencillo. La sigma de una potencia de primo  $p^r$  viene dada por  $1+p+p^2+p^3+\dots+p^r$ , es decir:

$$\sigma(n) = \frac{p^{r+1}}{p-1}$$

Por tanto, la antisigma vendrá dada por

$$asig(n) = \frac{p^r(p^r + 1)}{2} \frac{p^{r+1}}{p-1}$$

Lo comprobamos: según el primer listado, la antisigma de 27 es 338, y según esta fórmula se obtendría

$$Asig(3^3) = 27 * 28 / 2 - (81 - 1) / 2 = 338$$

Algunas curiosidades sobre la antisigma

Se ha publicado algo, no mucho, sobre algunas propiedades y curiosidades acerca de la antisigma. Destacamos algunas y aportaremos otras.

### **Antisigmas cuadradas**

La antisigma de un número puede ser un cuadrado. Esto ocurre en los siguientes números: 1, 2, 5, 6, 14, 149, 158, 384, 846, 5065, 8648, 181166, 196366, 947545, 5821349, 55867168, 491372910, 4273496001, 40534401950, ... <http://oeis.org/A076624>

En el caso de números primos, como el 2 y el 5, deberemos resolver una ecuación diofántica de segundo grado, ya que  $(p+1)(p-2)/2 = k^2$ . Donovan Johnson ha encontrado la recurrencia que genera otros

casos en la página de OEIS enlazada. El siguiente primo sería 8946229758127349.

Nosotros también nos aproximaremos al tema mediante una ecuación de Pell. Transformamos la igualdad multiplicando todo por 4 y desarrollando:

$4p^2 - 4p - 8 = 8k^2$  Completamos un cuadrado y queda:  $(2p - 1)^2 - 8k^2 = 9$  Cambiamos de variables haciendo  $X = (2p - 1)/3$   $Y = k/3$ , obteniendo la ecuación de Pell

$$X^2 - 8Y^2 = 1$$

Tenemos una herramienta para resolver esta ecuación, en la dirección

<http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell>

Aplicándola para el caso  $D=8$  obtenemos varias soluciones para  $X$  e  $Y$ ,

3	1
17	6
99	35
577	204
3363	1189
19601	6930
114243	40391
665857	235416
3880899	1372105
22619537	7997214

Si a ellas añadimos la solución trivial  $X=1, Y=0$  y deshacemos el cambio  $X=(2p-1)/3$  mediante  $p=(3X+1)/2$ , obtendremos todas las soluciones para  $p$ . En la imagen que sigue hemos añadido una columna

para saber si son primos o no los valores obtenidos, y vemos (los de color rojo) que coinciden con los valores primos de la sucesión:

X	Y	p	Es primo
1	0	2	VERDADERO
3	1	5	VERDADERO
17	6	26	FALSO
99	35	149	VERDADERO
577	204	866	FALSO
3363	1189	5045	FALSO
19601	6930	29402	FALSO
114243	40391	171365	FALSO
665857	235416	998786	FALSO
3880899	1372105	5821349	VERDADERO
22619537	7997214	33929306	FALSO

Con una herramienta más potente podemos seguir con las iteraciones y llegar a la siguiente solución prima dada por Donovan Johnson e incluso sobrepasarla. No damos muchos detalles por no alargar. La iteración de Pell en este caso es (ver la teoría en <http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html>)

$$X_n = 3X_{n-1} + 8Y_{n-1}, Y_n = X_{n-1} + 3Y_{n-1}$$

La aplicamos reiteradamente en PARI comenzando con X=1 Y=0, y tomamos nota de las soluciones de X que son primas. Obtendremos un listado en el que aparecerán los cuatro primos obtenidos aquí, más el propuesto por Donovan Johnson, 8946229758127349, y alguno más.

## Programa en PARI

```
{x=1;y=0;for(n=1,60,m=(3*x+1)/2;if(isprime(m),print1(m,"  
, "));p=3*x+8*y;q=x+3*y;x=p;y=q)}
```

Resultado obtenido:

2, 5, 149, 5821349, 8946229758127349,  
13748537282247342677718149,  
828287615476676026361062299923143963349,  
32470531080787945457870876690417952137154149,

Aparecen tres nuevas y enormes soluciones. Este tipo de descubrimientos hacen que sigamos con estos temas a pesar del cansancio de los años.

## Antisigmas triangulares

Sólo hemos encontrado el caso ya estudiado de las potencias de 2. No parece que haya ningún número que no sea potencia de 2 y tenga antisigma triangular.

## Antisigmas primas

Estos son los números con antisigma prima: 3, 4, 10, 21, 34, 46, 58, 70, 85, 93, 118, 129, 130, 144, 178, 201, 226, 237, 262, 298, 310, 322, 324, 325, 333, 334, 346, 382, 406,... <http://oeis.org/A200981>

Sólo figura entre los primos el 3, porque si  $(p+1)(p-2)/2$  ha de ser primo, si  $p$  es mayor que 3 aparecerían dos factores al menos en la antisigma.

Llama la atención la abundancia de semiprimos. Según la fórmula que vimos en la entrada anterior, deberá darse la casualidad de que si  $N=pq$ , se dé que  **$pq(pq+1)/2-(p+1)(q+1)$**  sea primo. Por ejemplo,  $46=2*23$  y su antisigma sería  $46*47/2-3*24=1009$ , que es primo.

### **Antisigma y sigma coprimas**

Terminamos por ahora con otra curiosidad: Números en los que sigma y antisigma son primos entre sí:

4, 9, 10, 16, 21, 22, 25, 34, 36, 46, 49, 57, 58, 64, 70, 81, 82, 85, 93, 94, 100, 106, 118, 121, 129, 130, 133, 142, 144,...

Al principio parece que pertenecerán a ella los cuadrados, pero a partir de 196 hay muchos que no cumplen esta propiedad: 441, 1521, 1764, 3249, 3600,...

En esta sucesión todos son compuestos, pues un primo  $p$  tiene como sigma  $p+1$  y como antisigma  $(p+1)(p-2)/2$ , con lo que el factor  $(p+1)/2$  divide a ambas para un primo mayor que 2. Y en el caso del 2, su sigma es 3 y su antisigma 0, que no tiene divisores.



## RELACIONES ENTRE UN NÚMERO Y SU SIGMA

La función  $SIGMA(N)$ , en su versión más simple, equivale al resultado de sumar todos los divisores de  $N$ . A lo largo de los años de existencia de este blog hemos acudido muchas veces a ella, pero hoy la vamos a relacionar con los números poligonales. Muchos resultados están ya publicados, y otros los presentaremos por primera vez.

### **Sigma triangular**

Es fácil que  $SIGMA(N)$  sea un número triangular. Los números que cumplen esto los tienes publicados en <http://oeis.org/A045746>

1, 2, 5, 8, 12, 22, 36, 45, 54, 56, 87, 95, 98, 104, 116, 152, 160, 200, 212, 258, 328, 342, 356, 393, 427, 441, 473, 492, 531, 572, 582, 588, 660, 668, 672, 726, 740, 800, 843, 852, 858, 879, 908, 909, 910, 940, 962, 992,...

Es un estudio curioso el ver cómo son los números cuya sigma es triangular. Encontrando sus factores primos descubrimos que pueden ser de muchos tipos. Vemos algunos casos:

## N número primo

Sólo existen dos casos de número primo con sigma triangular, el 2 y el 5. No hay más. Analizamos:

En el caso de P primo,  $SIGMA(N)=P+1$ . Si esta expresión es triangular, se deberá cumplir que  $t=m(m+1)/2 - 1$  debe ser primo, es decir:  $t=(m^2+m-2)/2=(m-1)(m+2)/2$ , con  $m>1$ , ha de serlo. En ese caso debe quedar un solo factor en el producto del numerador.

Puede ocurrir uno de estos hechos: (a)  $m-1=1$ ,  $m=2$  y  $t=1*4/2=2$ , que sería el primer caso. (b)  $m-1=2$ ,  $m=3$ ,  $t=2*5/2=5$ , que sería la otra solución (c) Cualquier otro valor positivo de  $m$ , 4, 5, 6,...produciría dos factores mayores que 2, uno de ellos par, que al dividir entre 2, seguirían teniendo dos factores y  $t$  no sería primo.

Puedes comprobarlo con este programa en PARI:

```
{n=2;while(n<10^8,if(ispolygonal(sigma(n,1),3),print(n);n=nextprime(n+1))}
```

Esto no demuestra nada, pero sólo obtendrías como soluciones 2 y 5.

## N número triangular

Se han encontrado muchas soluciones de este caso, en el que un número triangular produce una sigma también triangular. Están publicadas en <http://oeis.org/A083674>

1, 36, 45, 23220, 105111, 135460, 2492028, 5286126, 6604795, 14308575, 45025305, 50516326, 54742416, 99017628,...

Entre ellos se presenta un caso muy curioso, y es que los números triangulares  $2492028=2232*2233/2$  y  $6604795=3634*3635/2$  tienen la misma suma de divisores, el triangular  $8386560=4095*4096/2$

Puedes reproducir la sucesión con PARI:

```
{(for (n=1,n=10^8,if(ispolygonal(n, 3) && ispolygonal(sigma(n), 3),print(n))))}
```

## N número cuadrado

Este caso no estaba publicado, y lo hemos hecho en <https://oeis.org/A256149> . Estos son los cuadrados cuya sigma es triangular:

1, 36, 441, 5625, 6084, 407044, 8444836, 17388900,  
35070084, 40729924, 57790404, 80138304,

537822481, 588159504, 659821969, 918999225,  
 1820387556, 2179862721, 2599062361, 5110963081,  
 28816420516, 36144473689, 46082779561,  
 55145598561, 147225690000, 163405126756,  
 216560860321, 406452151296, 919585102500

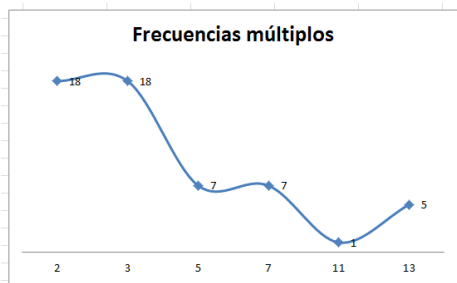
Por ejemplo, el cuadrado  $441=21^2$  tiene como suma de divisores el triangular

$$741=441+147+63+49+21+9+7+3+1=38 \cdot 39/2.$$

Hemos comprobado los primeros con Excel y después completado con este programa PARI

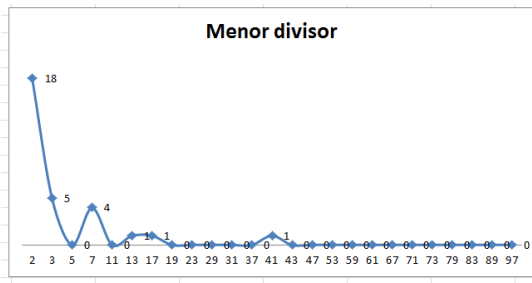
```
{for(i=1,10^6,n=i*i;if(ispolygonal(sigma(n), 3),print1(n,"
  ")))}
```

Un comentario de Alonso del Arte a propósito de la abundancia de múltiplos de 3 me dio la idea de tratar los distintos tipos de múltiplos como un perfil de frecuencias, como se obtiene, por ejemplo al estudiar la distribución de proteínas o de los genes. He aquí el resultado para los seis primeros primos:



Vemos que los más abundantes son los múltiplos de 2 y de 3, con sólo un caso para el 11. Interpreto que esta es una configuración típica de cuando el resultado es casual en gran parte. Cuanta menos teoría lo respalde, más abundarán los factores pequeños, que se prestan más a casualidades.

Una situación similar nos descubre la gráfica de los divisores mínimos de cada elemento:



En este caso llama la atención el valor de 41,  $36144473689=41^2 \cdot 4637^2$ , cuya suma de divisores es el triangular  $272233 \cdot 272234/2$ . Son hechos que aparecen porque todos los factores encajan, sin que nosotros podamos adivinarlo.

### N número oblongo

Esta posibilidad tiene su interés, porque nos encontraremos con los dobles de los números perfectos. No estaba publicada y la hemos presentado en <https://oeis.org/A256150>.

2, 12, 56, 342, 992, 16256, 17822, 169332, 628056,  
1189190, 2720850, 11085570, 35599122, 67100672,  
1147210770, 1317435912, 1707135806, 7800334080,  
11208986256, 13366943840, 17109032402,  
17179738112, 46343540900...

Hemos comprobado los primeros con Excel y después ampliado con este programa PARI porque resultan números demasiado grandes para una hoja de cálculo.

```
{for (i=1,i=10^6,n=i*(i+1);if(ispolygonal(sigma(n),  
3),print(n)))}
```

Es rápido por la forma de generar los oblongos  $n=i*(i+1)$  durante el proceso.

Entre ellos están los dobles de los perfectos, 12, 56, 992, 16256, 67100672,...que tienen la forma  $2^k(2^k-1)$  con el paréntesis un primo de Mersenne, y son oblongos. Para calcular su función sigma basta recordar que es una función multiplicativa y que al ser el paréntesis primo, su único divisor propio es 1:

$$\sigma(2^k) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

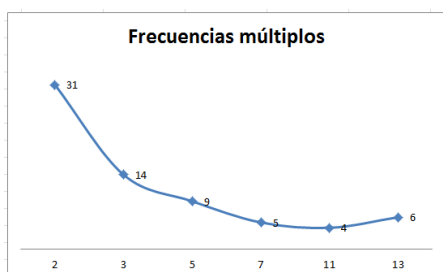
$$\sigma(2^k - 1) = 2^k - 1 + 1 = 2^k$$

Como ambos paréntesis representan primos entre sí, podemos multiplicar:

$$\sigma(2^k(2^k - 1)) = 2^k \times (2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} \times (2^{k+1} - 1)/2$$

Este resultado es triangular, luego pertenecerán a esta sucesión todos los dobles de perfectos.

Les hemos hecho el análisis de los múltiplos de los primeros primos con este resultado:



Los valores están de acuerdo con un proceso fuertemente influido por el azar. El valor para el 2 es lógico, porque todos los oblongos son pares.

Seguimos con otros casos:

### **Sigma cuadrada**

Busquemos ahora los casos en los que SIGMA(N) sea un número cuadrado.

La lista de todos ellos ya está publicada en <https://oeis.org/A006532>. Son estos:

1, 3, 22, 66, 70, 81, 94, 115, 119, 170, 210, 214, 217, 265, 282, 310, 322, 343, 345, 357, 364, 382, 385, 400, 472, 497, 510, 517, 527, 642, 651, 679, 710, 742, 745,

782, 795, 820, 862, 884, 889, 930, 935, 966, 970, 1004, 1029, 1066, 1080, 1092,...

Por ser SIGMA una función multiplicativa, y como el producto de dos cuadrados es otro cuadrado, se cumplirá (ver A006532) que si dos términos de esta sucesión son primos entre sí, su producto pertenecerá también a la sucesión. Por ejemplo, 3 y 70 son primos entre sí, y su producto, 210, también pertenece a las sucesión.

Nosotros ahora distinguiremos algunos casos y presentaremos sucesiones no publicadas.

En primer lugar nos preguntaremos si un número cuadrado puede tener su sigma también cuadrada. La respuesta es afirmativa.

### **Números cuadrados con sigma cuadrada**

Se conocen todos los casos, que están recogidos en

<https://oeis.org/A008848>

1, 81, 400, 32400, 1705636, 3648100, 138156516,  
295496100, 1055340196, 1476326929, 2263475776,  
2323432804, 2592846400, 2661528100, 7036525456,  
10994571025, 17604513124, 39415749156,  
61436066769, 85482555876, 90526367376,  
97577515876, 98551417041,...



Aquí se ve que son muy escasos, porque estamos exigiendo una condición fuerte.

En esta sucesión no hay cuadrados de números primos. Todos tienen al menos dos factores distintos. La razón es la siguiente: Si  $p$  es primo,  $\text{SIGMA}(p^2)=p^2+p+1$ . Si esta expresión ha de ser un cuadrado, se cumplirá  $p^2+p+1=m^2$ , con  $m>p$ . De ahí deducimos que  $p+1=m^2 - p^2 = (m+p)(m-p)$ , pero esto es imposible porque con tomar sólo  $m+p$  ya es mayor que  $p+1$ .

El caso contrario sí se puede dar: la sigma de 81 es  $11^2$  y la de 400,  $31^2$ . Es probable que sólo se den esos dos casos.

Tal como procedíamos en la anterior entrada, intentaremos buscar términos de la sucesión que sean triangulares, oblongos o de otro tipo. Primos no pueden ser porque  $\text{sigma}(p)=p+1$  si es primo, y tendríamos  $p+1=m^2$  y  $p=m^2-1=(m+1)(m-1)$  y no sería primo salvo el caso de 3.

### **Triangulares con sigma cuadrada**

Este caso no estaba publicado y hemos procedido a ello en <https://oeis.org/A256151>

1, 3, 66, 210, 820, 2346, 4278, 22578, 27966, 32131, 35511, 51681, 53956, 102378, 169653, 173755, 177906, 223446, 241860, 256686, 306153, 310866, 349866, 431056, 434778, 470935, 491536,...

Los hemos obtenido con Excel y con este programa de PARI:

```
{for(i=1,2*10^3,n=i*(i+1)/2;if(issquare(sigma(n)),print1(n,
", ")))}
```

Algunos de ellos son libres de cuadrados

3	[3,1]	
66	[2,1][3,1][11,1]	
210	[2,1][3,1][5,1][7,1]	

Como SIGMA es una función multiplicativa y todos los factores son primos, si un número es el producto de primos

$$N=p*q*r*s*..., \text{SIGMA}(N)=(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)...$$

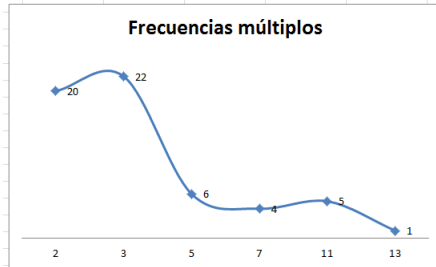
y deberá tener los factores primos “emparejados”, a fin de que se forme un cuadrado. Lo vemos con un ejemplo:

$$210=2*3*5*7,$$

$$\text{SIGMA}(210)=(2+1)(3+1)(5+1)(7+1)=3*4*6*8=3*3*2*2*2*2*2*2=24^2$$

Casi todos ellos son múltiplos de 2 o de 3, e incluso de ambos, como puedes ver en su perfil para los primeros primos:

2	11
3	1
5	23
7	17
11	47
13	223
17	31
19	79
23	53
29	269
31	71
37	151
41	167
43	1583
47	107
53	149
59	239
61	557
67	271
71	97
73	2663
79	179
83	2099
89	359
97	127
101	2549
103	233
107	191
109	439
113	1823
127	199
131	1187
137	2207
139	1259
149	293
151	607
157	631
163	4099
167	1049
173	4349
179	499
181	727
191	431
193	6983
197	3167
199	241
211	1907
223	349
227	911
229	919
233	1663



Un caso curioso que no es múltiplo de estos dos primos es el de 32131, producto de los primos 11, 23 y 127, que es triangular porque  $32131 = 11 \cdot 23 \cdot 127 = 253 \cdot 127 = 253 \cdot 254/2$ , y su sigma, por la propiedad multiplicativa, será  $\text{Sigma}(32131) = 12 \cdot 24 \cdot 128 = 2^{12} \cdot 3^2$ , número cuadrado. Se produce el emparejamiento de factores que vimos en anteriores párrafos.

### Semiprimos con sigma cuadrada

Si los semiprimos tienen los dos factores primos iguales, no presentan interés, ya que son cuadrados y hemos estudiado ese caso. Si sus factores son distintos,  $N = p \cdot q$  y  $\text{SIGMA}(N) = (p+1)(q+1)$  ha de ser un cuadrado. Esto exige que las partes libres de cuadrados de  $p+1$  y  $q+1$  sean iguales.

Los números que cumplen esto son:

22, 94, 115, 119, 214, 217, 265, 382, 497, 517, 527, 679, 745, 862, 889, 1174, 1177, 1207, 1219, 1393, 1465, 1501, 1649, 1687, 1915, 1942, 2101, 2159, 2201, 2359, 2899, 2902, 2995, 3007, 3143, ...

Se pueden reproducir con PARI

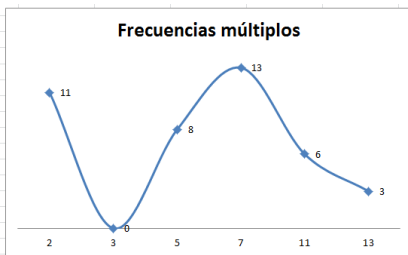
```
{for(i=1,10^4,if(omega(i)==2&&issquarefree(i)&&issquare(sigma(i)),print1(i, " "))}
```

También se encuentran con Excel si se dispone de las funciones adecuadas.

Los hemos publicado en

<https://oeis.org/A256152>

En su gráfico de múltiplos vemos que ningún elemento lo es de 3.



Ningún término es múltiplo de 3, por las razones que expondremos en el siguiente párrafo. Llama la atención el predominio de los múltiplos de 7. Una causa probable es que su sigma es 50, el doble de un cuadrado.

Esto nos invita a definir un primo asociado de otro si es el primero que multiplicado por él da un producto con sigma cuadrada. El 3 no tiene asociado, porque es el único primo del tipo  $k^2-1$ , ya que otro primo de ese tipo sería el producto de dos factores  $(k+1)(k-1)$  ambos mayores que 1. Esto nos lleva a que sigma(3) es cuadrada, y su único asociado sería él mismo, pero entonces el semiprimo  $3*3$  no entrarían en nuestro estudio.

Aquí tienes los primeros (el 3 no tiene y se ha asignado un 1)

1753, 1185703  
 2473, 1091033  
 3083, 1233599  
 3853, 2605303  
 4273, 1094143  
 5233, 1339903  
 5573, 2229599  
 5653, 2261599  
 5953, 1524223  
 6113, 1198343  
 6197, 1791221  
 6203, 3573503  
 6833, 1339463  
 7213, 2604253  
 7369, 1061279  
 7477, 2161141  
 7603, 15398099  
 7691, 3392171  
 8363, 1012043  
 8389, 1208159  
 8779, 1062379  
 8933, 1751063

Hemos probado a encontrar otro más además del 3 que no tenga asociado. Hemos usado PARI y nos ha resultado que hasta 10000 todos tienen asociado algún primo. Aquí tienes algunos cuyo asociado sobrepasa  $10^6$ :

Llama la atención el asociado a 7603

Es probable que sea cierta la conjetura de que todo primo mayor que 3 posee un asociado tal que su producto tenga sigma cuadrada.

Podemos intentar buscar situaciones nuevas. Nosotros no lo haremos, pero aquí tienes alguna propuesta por si deseas completarla y publicarla en OEIS:

Oblongos con sigma cuadrada

210, 930, 2652, 26082, 34782, 42642, ...

Triangulares con sigma oblonga

6, 28, 55, 496, 666, 780, 1540, 2145, 6441, 6903, 8128,...

Entre ellos están los números perfectos.

Intenta completarlas a más términos.

## SMARANDACHE Y KEMPNER

La función de Smarandache se define, para un número natural  $n$ , como el menor entero tal que su factorial es divisible entre  $n$ . La designaremos como  $S(n)$ . Por ejemplo, para  $n=12$ , el menor valor de  $k$  tal que  $k!$  sea divisible entre 12 es el 4, ya que  $4!=24$  es el menor factorial divisible entre 12. Lo expresaremos como  $S(12)=4$ . Es fácil que entiendas que  $S(6)=3$  o que  $S(7)=7$ . Plantéate otros ejemplos.

Esta función fue estudiada por Lucas y Kempner antes de que Smarandache le asignara su propio nombre. Por eso, la sucesión de sus valores recibe el nombre de “números de Kempner”, y es esta:

1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 4, 6, 5, 11, 4, 13, 7, 5, 6, 17, 6, 19, 5,  
7, 11, 23, 4, 10, 13, 9, 7, 29, 5, 31, 8, 11,...  
(<http://oeis.org/A002034>)

Aprovecha estos valores para comprobar la definición de la función en cada uno de ellos. Pronto descubrirás casos particulares, que podrás ampliar en la próxima entrada de este blog. Por ejemplo, adelantamos que el valor de  $S(p)$  para un número primo  $p$  es el mismo número:  $S(p)=p$  para  $p$  primo, o que  $S(n!)=n$ . Lo veremos más adelante.

En las dos primeras entradas de esta serie nos dedicaremos sólo a intentar construir algoritmos que reproduzcan los valores de la función. Comenzaremos por el más ingenuo y seguiremos con otros que contienen más artificio. Ante todo hay que notar que  $S(N) \leq N$ , ya que todo número es divisor de su propio factorial. Esto nos beneficia, porque las búsquedas terminan en  $N$ .

### **Algoritmo “ingenuo”**

Para encontrar el valor de  $S(n)$  bastará recorrer todos los factoriales desde 1 hasta  $n!$  y detenernos en el primero que sea múltiplo de  $n$ . El gran inconveniente de

este procedimiento es que pronto se sobrepasará la capacidad de cálculo de la herramienta que usemos, especialmente si es una hoja de cálculo. Lo intentamos para Excel:

***Public Function smar1(x)***

***Dim n, f***

***Dim seguir As Boolean***

***If x < 3 Then smar1 = x: Exit Function 'Para x=1,2  
S(x)=x***

***n = 1: f = 1 'Recorremos naturales desde 2 hasta x y  
f es su factorial***

***seguir = True 'variable para controlar el WHILE-  
WEND***

***While n <= x And seguir 'mientras no se llegue a n  
(cota natural) ni a la solución***

***n = n + 1: f = f \* n 'se incrementa n y su factorial***

***If f = Int(f / x) \* x Then seguir = False 'se ha llegado  
a un factorial divisible entre n***

***Wend***

***smar1 = n 'el valor de la función es el entero cuyo  
factorial es divisible***

***End Function***



El algoritmo es sencillo, pero como se usan factoriales, aunque sea de forma indirecta, comete errores muy pronto (en Excel): De hecho, los valores para  $n=23$  y  $n=29$  ya son erróneos (destacados en rojo en la imagen):

N	SMAR1(N)
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	3
7	7
8	4
9	6
10	5
11	11
12	4
13	13
14	7
15	5
16	6
17	17
18	6
19	19
20	5
21	7
22	11
23	19
24	4
25	10
26	13
27	9
28	7
29	20

Así no llegaremos muy lejos. Podíamos intentarlo en PARI a ver si funciona mejor (hemos eliminado los casos  $x=1,2$ ):

```
smar1(x)={local(n=1,f=1,s=1);while(n<=x&&f>0,n+=1;f*=n;if(f(x)==f,s=0));return(n)}
{for(i=3, 90, print1(smar1(i), ", "))}
```

Es el mismo algoritmo traducido a PARI. Para los 90 primeros casos funciona bien:

3, 4, 5, 3, 7, 4, 6, 5, 11, 4, 13, 7, 5, 6, 17, 6, 19, 5, 7, 11, 23, 4, 10, 13, 9, 7, 29, 5, 31, 8, 11, 17, 7, 6, 37, 19, 13, 5, 41, 7, 43, 11, 6, 23, 47, 6, 14, 10, 17, 13, 53, 9, 11, 7, 19, 29, 59, 5, 61, 31, 7, 8, 13, 11, 67, 17, 23, 7, 71, 6, 73, 37, 10, 19, 11, 13, 79, 6, 9, 41, 83, 7,...

Hemos probado el algoritmo para valores mayores y parece funcionar, pero nosotros deseamos mejorar el proceso para hoja de cálculo.

## **Algoritmo con el MCD**

Este algoritmo lo hemos creado para el blog, pero es posible que ya esté publicado con anterioridad. Así que no se reclamará ninguna autoría.

La idea base es la de que el número dado va tomando factores de los elementos del conjunto 1, 2, 3, 4, 5,... hasta agotarlos todos. Por ejemplo, para encontrar  $S(18)$  necesitamos contar con los factores 2, 3, 3. Si tomamos los primeros números, el 18 podrá tomar de cada uno de ellos el MCD. La idea que lo simplifica todo es que una vez encontrado un factor, dividimos entre él para ir disminuyendo el valor primitivo (en este caso el 18).

Lo vemos en esta tabla:

Primeros números	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MCD	1	2	3	1	1	3	1	2	9
Cociente	1 8	9	3	3	3	1	Se agota en 6, que es la solución		

Repetimos la idea: Elegimos un número, lo comparamos con 1, 2, 3, 4, 5,... dividiendo entre el MCD de ambos. Cuando el número llegue a 1, hemos terminado, y la solución será el último término de 1, 2, 3, 4, ... probado. Lo explicamos de nuevo con  $n=250$ . Si el MCD es 1, lo saltamos:

$MCD(250,2)=2$ , luego dividimos entre 2 y nos queda  $N=125$

El MCD con 3 y 4 es 1, luego los saltamos

$MCD(125,5)=5$ , dividimos  $N=25$

Saltamos a 10:  $MCD(25,10)=5$  y dividimos  $N=5$

Saltamos al 15:  $MCD(5,15)=5$ , y al dividir obtenemos  $N=1$ . Ya hemos terminado: la solución es 15:  $S(250)=15$

La ventaja de este método estriba en que no se multiplica, sino que se divide, con lo que los valores

disminuyen hasta 1, evitando el desbordamiento en hoja de cálculo. Aunque se puede usar el cálculo manual con la misma hoja (sería muy pedagógico intentarlo en la Enseñanza), hemos implementado la función SMAR2, mucho más rápida, al disminuir los datos y poder eliminar una sentencia IF:

***Public Function smar2(x)***

***Dim n, x1, m***

***If x < 3 Then smar2 = x: Exit Function***

***n = 1: x1 = x 'la variable x1 recoge los cocientes entre x y el MCD con 1, 2, 3, 4,...***

***While x1 > 1 'se sigue mientras el cociente no llegue a 1***

***n = n + 1 'nuevo valor para los primeros números***

***m = mcd(n, x1) 'encontramos el MCD***

***x1 = x1 / m 'no hay que usar un IF porque es divisible con seguridad***

***Wend***

***smar2 = n***

***End Function***

Con esta nueva implementación podemos calcular S(x) para valores mayores. Lo hemos intentado para comprobar que S(200001)=409 y se ha conseguido de

forma prácticamente instantánea. Coincide con el resultado obtenido con PARI.

El problema está en que necesitas la función MCD. Aquí tienes una:

***Public Function mcd(a1, b1)***

***Dim a, b, r***

***'Halla el MCD de a1 y b1***

***r = 1***

***a = a1***

***b = b1***

***If b = 0 Then b = 1***

***If a = 0 Then a = 1***

***While r <> 0***

***r = a - b \* Int(a / b)***

***If r <> 0 Then a = b: b = r***

***Wend***

***mcd = b***

***End Function***

Puedes estudiar esta versión muy sintética en PARI:

$a(n)=\{\text{local}(m=1,x=n);\text{while}(x>1,m++;x=x/\text{gcd}(x,m));m\}$

En la siguiente entrada experimentaremos con algoritmos basados en la descomposición factorial, siguiendo las ideas de Kempner y basados en las propiedades de la función que estudiamos.

### **Propiedades de la función $S(n)$**

En el anterior apartado evaluamos la función de Smarandache con hoja de cálculo y PARI sin usar la descomposición en factores primos del número. Ahora investigaremos su comportamiento respecto a la descomposición factorial.

Comenzaremos con casos particulares de valores de  $S(n)$ :

### **$S(p)=p$ si $p$ es primo**

Para que  $p$  divida a un factorial, este ha de contenerlo como factor, y en los  $p-1$  números anteriores no figura, luego hay que llegar a  $p$  y su factorial.

Recorre los valores de orden primo de los números de Kempner y observarás que el valor de la función de Smarandache en ellos coincide con el orden. Lo señalamos:

1, **2**, **3**, 4, **5**, 3, **7**, 4, 6, 5, **11**, 4, **13**, 7, 5, 6, **17**, 6, **19**, 5,  
7, 11, **23**, 4, 10, 13, 9, 7, **29**,...

## **$S(n!)=n$**

Es muy sencillo razonarlo. Observa que  $S(3!)=3$ ,  $S(4!)=S(24)=4, \dots$

Si  $n=p_1 p_2 p_3 \dots p_k$  con  $p_i$  primo y  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k$ ,  $S(n) = p_k$

En efecto, si tomamos el factorial del mayor primo, este incluirá como factores a todos los anteriores, y será el menor que sea divisible entre  $n$ . Elige números libres de cuadrados y lo comprobarás:  $S(15)=S(3*5)=5$ ,  $S(30)=S(2*3*5)=5$ ,  $S(70)=S(2*5*7)=7$

## **Si $n=p^k$ con $k \leq p$ , $S(n)=pk$**

Si  $n$  es potencia de un primo  $p^k$ , éste deberá figurar  $k$  veces en  $S(n)$ , pero la única forma de lograrlo es tomar  $p*p*p \dots k$  veces. Pero si  $k$  fuera mayor que  $p$  **podrían aparecer más factores "p"** y hay que tratarlo aparte.

Por ejemplo,  $S(49)$  ha de ser un factorial que contenga el 7 dos veces, pero el primero que cumple esto es el 14, que contiene el factor 7 en el mismo 7 y en el de 14, luego  $S(49)=7*2=14$ .

## Caso $n=p^k$ con $k>p$

En este caso pueden aparecer más factores antes de llegar a  $k$ . Lo vemos con un ejemplo:  $S(2^7)=S(128)$ . Aquí no hay que llegar a  $2^7$ , porque aparecen 7 factores con valor 2 mucho antes. Construimos un factorial:  $1*2*3*4*5*6*7*8*9\dots$ . En él aparece un 2 en el mismo 2,  $2^2$  en el 4,  $2^1$  en 6 y  $2^3$  en el 8, con lo que ya tenemos el 7:  $1+2+1+3=7$ . Por tanto  $S(128)=8$  y no 14.

El objetivo será, pues, ver qué exponente de  $p$  será el adecuado para acumular al menos el valor de  $k$ . En este ejemplo, con llegar a  $2^4$  ya conseguimos el 7.

Si conoces el tema, te habrás acordado de la Fórmula de Polignac para encontrar los exponentes de un factor primo dentro de un factorial

(ver

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/02/formula-de-polignac.html>)

$$r = \sum \left[ \frac{n}{p^j} \right]$$

Todo lo que sigue es de aplicación sólo al caso  $S(p^k)$ , con  $p$  primo y  $k>p$



## **Algoritmo con la fórmula de Polignac**

Hace tiempo que implementamos esta fórmula para hoja de cálculo:

```
Public Function polignac(n, p)  
Dim pol, pote  
pol = 0  
If esprimo(p) Then  
pote = p  
While pote <= n  
pol = pol + Int(n / pote)  
pote = pote * p  
Wend  
End If  
polignac = pol  
End Function
```

Podemos usarla y plantear que para un número dado vamos aplicando esa fórmula desde 1 hasta N, deteniéndonos cuando el exponente k de  $p^k$  sea inferior a lo que nos dé la fórmula de Polignac. Lo planteamos como una función de dos variables, el primo p y el exponente k. No analizaremos si p es primo y si k es entero.

**Public Function smar3(p, k) ‘Dos parámetros, el primo p y el exponente k**

**Dim n, s**

**Dim sigue As Boolean**

**If k <= p Then smar3 = p\*k: Exit Function ‘caso sencillo**

**n = 1: sigue = True: s = 1**

**While sigue And n <= p ^ k**

**If polignac(n, p) >= k Then sigue = False: s = n ‘paramos cuando se sobrepase el exponente**

**n = n + 1**

**Wend**

**smar3 = s**

**End Function**

Aquí tienes una tabla con casos en los que  $k > p$ , comparando con los resultados de SMAR2

Primo	Exponente	SMAR2	SMAR3
2	7	8	8
2	3	4	4
2	3	4	4
7	8	49	49
5	6	25	25
3	11	27	27
2	20	24	24
3	12	27	27

Kempner desarrolló un algoritmo para esta situación, pero como no lo hemos encontrado bien explicado y es complejo (téngase cuenta que se creó antes de la

existencia del cálculo automático), nos quedamos con los tres nuestros.

Lo puedes consultar en

<http://mathworld.wolfram.com/SmarandacheFunction.html>

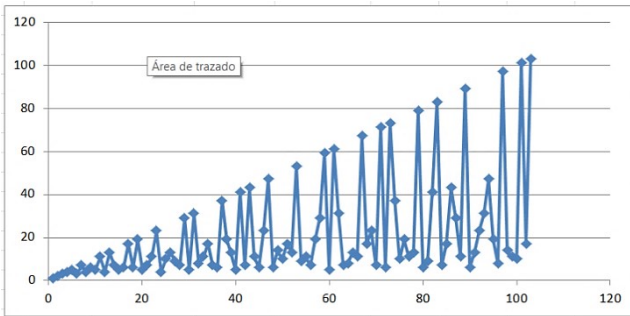
### **Caso general**

Si se ha resuelto el cálculo de  $S(p^k)$ , para calcular la función en un número cualquiera es fácil entender que se calculará para todas las potencias de primos contenidas en él, tomando después el máximo de los valores.

Esto supone mucha complicación, y como estamos muy satisfechos con nuestro algoritmo del MCD, nos quedamos con él.

### **Gráfica de la función de Smarandache**

Nos quedamos con nuestra función SMAR2 para crear un gráfico, por otra parte muy conocido, de la función de Smarandache:



Vemos que es lineal para los números primos, que la función está acotada por el valor de  $N$ , y que es totalmente oscilante. Algunos máximos intermedios se corresponden con dobles de primos y, en general, los semiprimos y libres de cuadrados suelen presentar valores altos en su entorno.

### **Asociado Kempner de un número entero**

En los dos apartados anteriores llamamos  $S(n)$  al menor número tal que su factorial sea múltiplo de  $n$ . Estudiamos los algoritmos para encontrar valores de esa función y algunas de sus propiedades. Nos basaremos en éstas para desarrollar el concepto de “asociado Kempner” de un número. Lo definiremos así:

$$A(n) = S(n)! / n$$

Es fácil ver que  $A(n)$  es el número que multiplicado por  $n$  lo convierte en el factorial mínimo que es divisible por  $164$

él. Si disponemos de  $S(n)$ , bastará encontrarle el factorial, que será múltiplo de  $n$  y por tanto podremos dividir.

Los resultados de esta operación los tienes en <http://oeis.org/A007672>

1, 1, 2, 6, 24, 1, 720, 3, 80, 12, 3628800, 2, 479001600, 360, 8, 45, 20922789888000, 40, 6402373705728000, 6, 240, 1814400, 1124000727777607680000, 1, 145152, 239500800, 13440, 180, 304888344611713860501504000000...

Sólo con recorrerlos brevemente descubrimos las oscilaciones enormes que existen entre cada término y el siguiente. La razón es obvia, y está basada en las propiedades de  $S(n)$ , de las que se derivan las de  $A(n)$ :

El asociado de un número primo  $p$  es  $A(p)=(p-1)!$

Porque  $S(p)=p$ , luego  $A(p)=p!/p=(p-1)!$

En la sucesión puedes comprobarlo:  $A(7)=720=6!$ ,  $A(11)=3628800=10!$

Esto nos indica que la sucesión no está acotada. Dada una constante cualquiera, existe un factorial que la sobrepasa.

El asociado de un factorial es igual a 1

Es evidente, porque  $S(n!)/n=n/n=1$

Ya tenemos aquí uno de los orígenes de las oscilaciones que se descubren en la sucesión.

### **Algoritmo de cálculo**

La existencia de términos muy grandes en la sucesión nos aconseja un algoritmo que no tenga, en lo posible, que usar factoriales. Aquí está muy indicado el que propusimos del MCD en la entrada anterior. Para un valor  $n$ , recorreremos el conjunto  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  y dividimos  $n$  entre el MCD de  $n$  y un elemento del conjunto, hasta convertirlo en 1. Aquí recorreremos los mismos pasos, pero **acumulando los cocientes obtenidos** multiplicados entre sí en una variable. Al final del proceso tendremos el producto de todos los factores que multiplicados por  $n$  lo convierten en  $S(n)!$  Sólo hay que cambiar unas líneas en el algoritmo que propusimos. Destacamos en rojo los cambios:

***Public Function asoc(x)***

***Dim n, x1, m, a***

***If x < 3 Then asoc = 1: Exit Function***

***n = 1: x1 = x: a = 1 'Introducimos una variable que recoja los cocientes n/m***

***While x1 > 1 'Estructura de algoritmo idéntica a la del cálculo de S(x)***

***n = n + 1***

$m = \text{mcd}(n, x1)$

$x1 = x1 / m$

$a = a * n / m$  'Se van multiplicando los cocientes para formar A(x)

**Wend**

**asoc = a**

**End Function**

N	A(n)
1	1
2	1
3	2
4	6
5	24
6	1
7	720
8	3
9	80
10	12
11	3628800
12	2
13	479001600
14	360
15	8
16	45

Con Excel el cálculo es prácticamente instantáneo para los primeros números naturales:

Al igual que procedimos con el algoritmo primitivo, podemos traducir también a PARI para poder llegar a números mayores sin el estorbo de la notación exponencial:

```
a(n)={local(m=1,x=n,as=1,p);while(x>1,m++;p=gcd(x,m);x=x/p;as*=m/p);as}
```

Destacamos en rojo las novedades. Los resultados para los primeros números los tienes en esta imagen

```
1, 1, 2, 6, 24, 1, 720, 3, 80, 12, 3628800, 2, 479001600, 360, 8, 45, 2092278988  
8000, 40, 6402373705728000, 6, 240, 1814400, 112400072777607680000, 1, 145152,  
239500800, 13440, 180, 304888344611713860501504000000, 4, 2652528598121910586363  
08480000000, 1260, 1209600, 10461394944000, 144, 20, 371993326789901217467999448  
150835200000000, 3201186852864000, 159667200, 3,  
?
```

Como era de esperar, coinciden con los publicados en A007672, y llegan más lejos.

## Iteración de la función $A(n)$

Con lo expuesto hasta ahora podemos esperar que si iteramos la función desde un valor inicial dado, la órbita que se produzca será totalmente oscilante. Sin embargo, ocurre lo contrario, que para cualquier número entero, la iteración sólo puede presentar uno de dos finales posibles: o termina teniendo todos sus términos iguales a la unidad, o se convierte en periódica de periodo 2. Lo estudiamos:

Dado un número natural cualquiera  $N$ , el valor de la función  $A(N)$  es divisor de  $S(N)!$ , ya que por definición,  $A(N)=S(N)!/N$ . Quiere decir que  $S(N)!$  es un factorial múltiplo de  $A(N)$ . Por tanto, si calculamos  $S(A(N))$  nos dará  $S(N)$  o un número menor, si existe un factorial múltiplo de  $A(N)$  que sea menor que  $S(N)$ . Por tanto:

$$S(N) \geq S(A(N))$$

Pueden ocurrir dos casos

(1) Si para un  $N$  se da que  **$S(N)=S(A(N))$** , al iterar y calcular  $A(A(N))$  resultará

$$A(A(N))=S(A(N))!/A(N)=S(N)!/(S(N)!/N)=N$$

Si  $S(N)=S(A(N))$ , resultará  $A(A(N))=N$  y la sucesión de iteraciones será periódica.



Esto ocurre, por ejemplo, para  $N=25$ , pues  $A(25)=145152$  y  $A(145152)=25$ . Los dos asociados tienen el mismo factorial mínimo común a ambos. La sucesión será periódica. Lo podemos ver con la hoja de cálculo y la función ASOC:

N	25
Primera iteración	145152
Segunda	25
Tercera	145152
...	25
	145152
	25
	145152
	25

(2) Si en un conjunto de iteraciones se da que  $S(N) > S(A(N))$ , los factoriales mínimos irán decreciendo, con lo que, o bien llegaremos a un número que produzca periodicidad como en el primer caso, o bien desembocaremos en  $1!=1$ , y a partir de él todos serán iguales a la unidad, porque  $S(1)=1$ .

Esto se da en todos los números primos, porque entonces  $A(P)=(P-1)!$  Y  $A(A(P))=A((P-1)!)=1$ . También en otros que no son primos, como el 21:  $A(21)=240$ , que es el cociente entre  $7!$  Y 21.  $A(240)=3$ , es decir  $6!/240$ . Seguimos iterando:  $A(3)=2$  y por último,  $A(2)=1$

Con la hoja:

N	21
Primera iteración	240
Segunda	3
Tercera	2
...	1
	1
	1
	1
	1

La mayoría de números desemboca en la unidad al iterar la función  $A(N)$ . Los únicos números que producen periodos de 2 términos son:

9, 16, 25, 45, 49, 63, 75, 80, 81, 99, 112, 117, 121, 125, 128, 147, 153, 169, 171, 175, 176, 207, 208, 225, 243, 245, 250, 256, 261, 275, 279, 289, 304, 315, 325, 333, 343, 361, 363, 368, 369, 375, 387, 405, 423, 425, 441, 464, 475, 477, 486, 495, 496, 500, 507, 512, 525, 529, 531, 539, 549, 560, 567, 575, 585, 592, 603, 605, 625, 637, 639, 640, ...

Los hemos generado con el programa PARI siguiente:

```
a(n)={local(m=1,x=n,as=1,p);while(x>1,m++;p=gcd(x,m);x=x/p;as*=m/p);as}
```

```
{for(i=1,10^3,m=i;v=1;while(m>1&&v,n=a(m);if(m==a(n),v=0;print1(i," ");m=n))}}
```

No hemos encontrado regularidades en estos números y sus asociados. Unos son cuadrados y otros no, en la mayoría de las veces un número y su asociado son coprimos, pero en otras tienen MCD mayor que 1, como

$MCD(495,80640)=3$ . Según hemos explicado anteriormente, ninguno es primo.

Lo que sí poseen todos es una parte cuadrada mayor que 1. Si fueran libres de cuadrados, se descompondrían en un producto de primos elevados todos a la unidad. Si los ordenamos de menor a mayor tendríamos  $N=p_1p_2p_3\dots p_k$  y según lo explicado en entradas anteriores,  $S(N)=p_k!$ , con lo que  $A(N)$  carecería de ese factor  $p_k$ , pero el factorial en que se basa ha de ser el mismo  $p_k!$  o inferior. El mismo no es, porque al carecer de ese factor primo, no es necesario llegar hasta  $p_k!$ . Por tanto,  $S(N)>S(A(N))$  y no puede pertenecer al conjunto. Como la relación es recíproca,  $A(N)$  tampoco puede ser libre de cuadrados:

Si  $N$  pertenece a la sucesión que estamos estudiando, ni él ni su asociado serán números libres de cuadrados.

No existe la propiedad contraria. Existen números no libres de cuadrados, como el 12, que no pertenecen a la sucesión.

## CUESTIONES SOBRE PRIMOS

### SUMA CON EL PRÓXIMO PRIMO

En estas dos entradas anteriores sumamos dos primos consecutivos e investigamos la naturaleza de esa suma y en algunos casos de su mitad (media de ambos).

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/06/suma-de-dos-numeros-primos-consecutivos.html>

[http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/06/suma-de-dos-numeros-primos-consecutivos\\_29.html](http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/06/suma-de-dos-numeros-primos-consecutivos_29.html)

Hoy podríamos buscar propiedades similares pero **sin exigir que el primer número del par sea primo**, pero sí usando el primer primo que le sigue (o que le antecede). Comenzaremos sumando cada número con el primer primo que le sigue e investigaremos si también es primo.

#### **Suma con el primo siguiente**

Dado un número natural cualquiera, buscaremos menor primo superior a él. Nuestra función de hoja de cálculo PRIMPROX(N) nos serviría en este caso, por lo que en

realidad estudiaremos la suma  $N + \text{PRIMPROX}(N)$ . La tienes contenida en la hoja Conjeturas.xlsm

<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/conjeturas.xlsm>

## **Búsqueda de primos**

Un número, si es primo, no puede formar otro primo sumado con el siguiente, salvo el caso de  $2+3=5$ , pero sí lo forma si no es primo. Buscamos, pues, números no primos que al sumarles el mínimo primo mayor que ellos sí produzcan suma prima. Por ejemplo, el 14 con su próximo primo 17 suma otro primo, el 31.

Los números con esta propiedad son

0,1, 2, 6, 8, 14, 18, 20, 24, 30, 34, 36, 38, 48, 50, 54, 64, 68, 78, 80, 84, 94, 96, 98, 104, 110,114, 124, 132, 134, 138, 144, 154, 156, 164, 174, 182, 188, 198, 208, 210, ...

En todos ellos al sumarles su próximo primo obtendremos otro número primo. Vemos que son frecuentes, pero otros muchos no cumplen la propiedad. Así, 24 sí la cumple, porque  $24+29=43$ , que es primo, pero  $22+23=45$ , que es compuesto. Es trivial descubrir que todos son pares salvo el caso especial 1.

En realidad estamos exigiendo otra propiedad, y es que si llamamos D a la diferencia entre N y su próximo primo, si sumamos D a 2N también resulta otro primo (no necesariamente PRIMPROX(2N)). Es fácil justificarlo y podemos representarlo en este tipo de esquema, que usaremos más adelante también, y que hemos implementado en hoja de cálculo para realizar pruebas. Insertamos el correspondiente al 38:

Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D
38	3	41
↓	↓	
Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D
76	3	79
		¿Es primo?
		VERDADERO
		Pero no ha de ser el próximo

Los números de la sucesión los hemos obtenido con Excel, pero puede resultar más sencillo acudir a PARI:

```
{for(i=0,10^3,k=i+nextprime(i+1);if(isprime(k),print1(i,"
"))))}
```

Su funcionamiento se entiende fácilmente. El único detalle a explicar es que para encontrar el próximo primo hay que basarse en i+1 y no en i.

Lo hemos usado para publicar la sucesión en <https://oeis.org/A249624>

También con nuestro Buscador se puede usar una condición bastante elegante:

```
es primo(n+primprox(n))
evaluar n+primprox(n)
```

El resultado coincide con los anteriores:

Es evidente que, salvo el caso 0 y 1 son todos pares, y algunos, como el 8 y el 64, potencias de 2. Podíamos afirmar que estos números son diferencias de primos, pero lo importante es que esas diferencias

Solución	Detalles
1	3
2	5
6	13
8	19
14	31
18	37
20	43
24	53
30	61
34	71
36	73
38	79
48	101
50	103

son **las mínimas posibles**, ya que no existen más primos entre ellos. Sin esa condición, estaríamos en las condiciones de la conjetura de Polignac, que afirma que para todo  $2k$  existen dos primos tales que  $q-p=2k$ . Entonces, si la conjetura es cierta, todos los pares cumplirían la condición impuesta.

Estos son los valores de esas diferencias:

1, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 5, 1, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 1, 3, 3, 3, 13, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 3, 5, 9, 3, 1, 3, 1, 7, 3, 1, 3, 3, 5, 5, 3, 1, 9, 13, 7, 1, 3, 3, 9, 3, 1, 1, 3, 7, 1, 3, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 5, 3, 1, 3, 7, 3, 3, 11, 5, 7, 3, 7, 1, 5, 11, 9, 3, 13,

3, 1, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 5, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 1, 5,  
1, 3, 9, 5, 7, 3, 1, 3, 3, 3, 7, 3, 7, 3, 11, 9, 5, 1, 5, 1, 9,  
13, 9, 7, 3, 13, 7, 1, 3, 13, 3, 7, 7, 3, 1, 3, 5, 5, 3, 1, 5, 3,  
3, 1,...

Parecen recorrer todos los números impares. En nuestra lista sólo se llega hasta el 13 ¿Aparecerán al final todos? ¿Podrá ser cualquier impar diferencia entre un número par y su próximo primo si ambos suman otro primo?

Hemos implementado una función que a cada número impar (no analizamos en ella si lo es o no) le hace corresponder el mínimo número natural que sumado con él produce un primo en el que la suma de ambos también es primo

***Public Function difconprim(n)***

***Dim i, d, dd, p***

***i = 2***

***d = 0***

***While d = 0 And i < 10 ^ 6***

***p = primprox(i)***

***If esprimo(p + i) And p - i = n Then d = i***

***i = i + 2***

***Wend***

***difconprim = d***

***End Function***



Recorre los números pares (variable  $i$ ) hasta un tope de  $10^6$  (para números mayores habría que aumentarlo) y estudia si el próximo primo  $p$  cumple que  $p+i$  es primo y la diferencia entre ambos es el número  $n$  dado. No está completo ni optimizado el código. Sólo pretendemos establecer una conjetura. Aquí tienes la tabla para los primeros números impares:

d	i
1	2
3	8
5	24
7	216
9	182
11	468
13	114
15	1136
17	1956
19	2484
21	1130
23	1338
25	3138
27	3272
29	1332
31	12858

Por ejemplo, para la diferencia 21 el primer número par que la produce es el 1130, en el que se dan estos datos:

		Es primo
Diferencia	21	
Número par	1130	
Siguiente primo	1151	VERDADERO
Suma prima	2281	VERDADERO

Si a 1130 le sumamos la diferencia 21 se convierte en el número primo 1151, cuya suma con el anterior  $1130+1151=2281$ , también es un número primo.

Puedes construirte un esquema similar. La función PRIMPROX la encontrarás en la hoja Conjeturas referenciada más arriba. El problema que se presenta es que las hojas de cálculo se ralentizan cuando el valor buscado tiene muchas cifras. Así, entre los números impares menores que 100 la solución mayor es la correspondiente al 97, que es nada menos que 3240996. Lo puedes ver en este esquema:

		Es primo
Diferencia	97	
Número par	3240996	
Siguiente primo	3241093	VERDADERO
Suma de primos	6482089	VERDADERO

Para paliar esta lentitud hemos realizado también la búsqueda con PARI

```
difconprim(n)={local(i=2,d=0,p=2);while(d==0&& i<10
^7,p=nextprime(i);if(isprime(i+p)&&(p-
i==n),d=i);i+=2);return(d)}
```

```
{k=1;while(k<100,write("final.txt",k,"
",difconprim(k));k+=2)}
```

Si tienes preparado en la misma carpeta un archivo de nombre "final.txt", este código te crea en él un listado similar al que sigue (hemos recortado la parte de los números anteriores a 100)

81	404860
83	990054
85	404856
87	370286
89	1467990
91	1468296
93	370280
95	370278
97	3240996
99	838250

Parece que nos podemos atrever a expresar una conjetura:

Cualquier número impar es diferencia entre cierto número y su próximo primo, en el caso en el que la suma de ambos también sea prima.

### **Suma con el primo anterior**

Hemos estudiado la suma de un número con su próximo primo y encontramos los números en los que esa suma es prima. La misma cuestión se puede

abordar si le sumamos el anterior primo más cercano. Lo desarrollaremos en esta entrada. Al igual que con el próximo primo se puede plantear que sea prima la suma con el anterior. Hay muchas soluciones. Las primeras son:

3, 4, 6, 10, 12, 16, 22, 24, 30, 36, 42, 46, 50, 54, 56, 66, 70, 76, 78, 84, 90, 92, 100, 114, 116, 120, 126, 130, 132, 142, 144, 156, 160, 170, 174, 176, 180, 186, 192, 196, 202, 210, 220, 222, 226, 232, 234, 240, 246, 250, 252, 276, 280, 282, 286, 288, 294, 300, 306, 310...

Todos ellos, salvo los primeros casos especiales, son pares, como era de esperar. Si les sumamos el primo más cercano por la izquierda el resultado también es primo. Así, 282 tiene como primo anterior el 281, y la suma de ambos, 563, es prima. Los hemos publicado en <https://oeis.org/A249666>

Para obtenerlos con PARI sólo efectuaremos un pequeño cambio:

```
{for(i=3,10^3,k=i+precprime(i-1);if(isprime(k),print1(i," ")))}
```

También podemos expresar esta propiedad con un esquema similar al de la cuestión anterior:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N
151 ←	5 ←	156
↓	↓	↓
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N
→ 307 ←	5 ←	312
¿Es primo? VERDADERO		
Pero no ha de ser el próximo		

Vemos el ejemplo de 156, en el que se cumple que tanto N-D como 2N-D son primos.

Al igual que en la cuestión anterior, podemos obtener un listado de las diferencias entre el número natural dado y su anterior primo (con suma de ambos prima)

### Diferencias

2 1 1 1 3 1 3 3 1 1 5 1 3 3 1 3 5 3 3 5 1 1 3 3 1 3 7 13 3  
1 3 5 5 3 3 1 3 1 5 1 3 3 11 9 11 3 3 1 1 5 9 1 5 3 1 3 5  
1 7 13 3 7 9 13 3 9 3 3 1 5 5 3 3 3 7 3 5 9 1 1 3 1 3 3 7  
3 1 3 1 3 3 5 15 17 5 3 9 3 3 9 1 3 3 11 1 3 3 1 1 5 1 7 7  
5 9 1 5 5 3 1 3 7 1 3 7 13 5 9 3 7 1 5 5 9 3 3 7 3 9 13 15  
1 9 3 3 1 7 7 5 3

También aquí nos podemos preguntar si están todos los números enteros positivos impares en la lista. Conjeturamos que sí, y hemos confeccionado un listado similar al del caso precedente, en el que encontramos para cada caso el valor del número que consigue una suma prima en las condiciones dadas y que la diferencia con el sumando primo sea la dada.

## Primera ocurrencia de diferencia dada

3	10
5	36
7	120
9	220
11	210
13	126
15	538
17	540
19	2496
21	1690
23	1350
25	3162
27	3298
29	1356
31	5622
33	1360
35	12888
37	30630
39	16180
41	16182
43	28272
45	28274
47	25518

En este caso también formularemos una conjetura:

Cualquier número impar es diferencia entre cierto número y su anterior primo, en el caso en el que la suma de ambos también sea prima.

## Números que cumplen ambas condiciones

Basta recorrer las dos listas de números que hemos considerado para darnos cuenta de que existe una intersección entre ambas. Son aquellos números que forman suma prima tanto con el siguiente primo como con el precedente. Son estos:

6, 24, 30, 36, 50, 54, 78, 84, 114, 132, 144, 156, 174, 210, 220, 252, 294, 300, 306, 330, 360, 378, 474, 492, 510, 512, 528, 546, 560, 594, 610, 650, 660, 690, 714, 720, 762, 780, 800, 804, 810, 816, 870, 912, 996, 1002, 1068, 1074, 1104, 1120, 1170, 1176, 1190, ...

Por ejemplo, dado el número 996, su siguiente primo es 997 y su suma, 1993, es un número primo. En dirección opuesta, el primo precedente a 996 es 991, y su suma, 1987, también es prima. Los hemos publicado en <https://oeis.org/A249667>

Los hemos encontrado con hoja de cálculo y con PARI (Código PARI)

```
{for(i=3,2*10^3,k=i+nextprime(i+1);q=i+precprime(i-1);if(isprime(k)&&isprime(q),print1(i," "))}
```

También para ellos es válido el esquema que estamos usando, en este caso, doble:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D
997	← 5 ←	1002	7 →	1009
↓	↓	↓	↓	
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D
1999	← 5 ←	2004	7 →	2011
¿Es primo? VERDADERO				¿Es primo? VERDADERO

Es evidente que, salvo en los primeros términos de la sucesión, las diferencias son impares (en el ejemplo 5 y 7). Convierten el par de números primos 997 y 1009 en el par de abajo (1999,2011) mediante una traslación de valor 1002. Estos hechos son meras curiosidades sin valor teórico, pero quedan visualmente muy bien.

***¿Existirán términos de esta sucesión en los que la diferencias con los primos más cercanos sean iguales?*** Es un caso interesante, pues el número dado sería el promedio de dos números primos consecutivos y su doble también, pero no necesariamente consecutivos.

Es evidente que sí existen, como sería el caso del 144 cuyos primos más próximos son 139 y 149, cumpliéndose que  $144-139=149-144=5$  y que tanto  $144+139=283$  como  $144+149=293$  son primos.

No cansamos con un nuevo código. Sólo señalaremos que los números buscados son

6, 30, 50, 144, 300, 560, 610, 650, 660, 714, 780, 810, 816, 870, 1120, 1176, 1190, 1806, 2130, 2470, 2490,



2550, 2922, 3030, 3240, 3330, 3390, 3480, 3600, 3620,  
3840, 4266, 4368,...

( <https://oeis.org/A249676>)

Todos ellos son compuestos que equivalen al promedio entre dos primos consecutivos y que con ambos forman suma prima. Para ellos el esquema propuesto se hace más simétrico:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D
557	← 3	560	3 →	563
↓	↓	↓	↓	
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D
1117	← 3	1120	3 →	1123
¿Es primo? VERDADERO	N y 2N son promedio de un par de primos			¿Es primo? VERDADERO
	1117+563=	1680	Triple de N	
	1123+557=	1680	Triple de N	

## NÚMEROS ESPECIALES

### NÚMEROS ESPECIALES, PRODUCTO ESPECIAL

Esta entrada y las siguientes tienen el doble objetivo de presentar unas curiosidades numéricas (algo intrascendentes) y analizar cómo organizar búsquedas de cierto tipo intentando dar con el algoritmo más rápido posible, ya que llegan fácilmente al orden de  $10^7$ . Comenzamos con un ejemplo:

#### **Números triangulares que son producto de triangulares**

Muchos números triangulares son producto de otros dos también triangulares. Por ejemplo,  $45=15*3$ ,  $210=21*10$ , todos triangulares. Los tienes publicados en <https://oeis.org/A188630>

36, 45, 210, 630, 780, 990, 1540, 2850, 3570, 4095, 4851, 8778, 11781, 15400, 17955, 19110, 21528, 25200,...

Esta búsqueda está resuelta, pero imagina que la deseamos reproducir. No es fácil, porque para cada número natural deberíamos buscar lo siguiente:

186

- Ver si ese número **N** es triangular
- En caso afirmativo, recorrer todos sus divisores **d**.
- Para cada uno de ellos, investigar si tanto **d** como **N/d** son ambos triangulares, y en caso afirmativo, **parar la búsqueda** para ese valor **N** y proseguir con **N+1**.

Es fácil darse cuenta de que se perderá mucho tiempo recorriendo números de uno en uno, que no son triangulares o bien que no poseen muchos divisores triangulares (o ninguno). Con búsquedas de ese tipo, llamemos “ingenuas”, nuestro ordenador se pasaba minutos y minutos cuando llegaba a números grandes. Una solución es encaminar la búsqueda para que, hasta donde sea posible, sólo se recorran los números de cierto tipo. En el caso de triangulares, cuadrados, oblongos o primos, es posible realizar ese filtro. Lo concretamos:

### **Generación de triangulares**

Los números que usaremos, salvo los primos, se pueden engendrar a partir de los precedentes. Comenzaremos en esta entrada por explicar distintas formas de generar algunos tipos de números, y así ya las tenemos preparadas para cuestiones posteriores.

En el caso de los triangulares manejamos dos variables: Número N e incremento D. Comenzamos haciendo  $N=1$  (primer triangular) e incremento  $D=2$ , para que  $1+2$  genere el siguiente triangular, el 3. Luego, en cada paso, N se convierte en  $N+D$  y D en  $D+1$ . Así funciona, ya que los números triangulares se forman añadiendo una fila con un elemento más.



Observa estos valores, generados con hoja de cálculo:

	Número N Triangular	Incremento D	
	1	2	
	3	3	
Los triangulares	6	4	Los incrementos crecen
se incrementan	10	5	en una unidad en cada paso
en D	15	6	
	21	7	
	28	8	
	36	9	

Recordamos: Los triangulares se generan tomando incrementos con una unidad más en cada paso. Ya utilizaremos esto más adelante.

## Generación de cuadrados

Aquí tenemos dos soluciones, ambas prácticas, según el contexto, para recorrer sólo números cuadrados: la primera es trivial, declarar una variable  $k$  y luego usar  $k^2$  en los cálculos. Está bien, pero a veces es lenta y no admite con facilidad ciertas acotaciones. La segunda es similar a la de los triangulares, pero incrementando  $D$  en  $D+2$ , en dos unidades en lugar de en una.



Observa el esquema:

	Número N cuadrado	Incremento D			
	1	3			
	4	5			
Los cuadrados	9	7	Los incrementos crecen		
se incrementan	16	9	en dos unidades en cada paso		
en D	25	11			
	36	13			
	49	15			
	64	17			

Para quienes conozcáis estas propiedades, esto parecerá trivial, pero no está mal recordarlo, porque más adelante dará velocidad a nuestras búsquedas.

## Generación de oblongos

Un número es oblongo cuando tiene la forma  $N=k(k+1)$ , es decir, doble de un triangular. Es fácil ver que el siguiente oblongo será  $(k+1)(k+2)$ . Su diferencia  $(k+1)(k+2)-k(k+1) = 2(k+1)$ , es decir, **el doble del mayor en el producto**, luego el incremento adecuado será par y crecerá de 2 en 2. Esto nos permite generar oblongos: comenzamos con  $N=2$  y  $D=4$ , Así generamos los siguientes:  $N=2+2*2=6$ ,  $N=6+2*3=12$ ,  $N=12+2*4=20, \dots$  También podemos declarar una variable y después trabajar con  $k*(k+1)$ . Así hemos procedido en nuestra primera búsqueda con hojas de cálculo.

Número N oblongo	Incremento D
2	4
6	6
12	8
20	10
30	12
42	14
56	16
72	18

Así que, mientras los cuadrados se generan sumando impares, los oblongos sumando pares (y los triangulares sumando todos)

## **Caracterización de estos números**

Necesitaremos también en las búsquedas que emprenderemos una forma de caracterizar estos números, cómo saber si un resultado es cuadrado u oblongo, por ejemplo. Aunque es sencillo y conocido, lo recordamos aquí:

Para saber si un número natural es cuadrado, la mejor prueba es que la parte entera de su raíz cuadrada, elevada a su vez al cuadrado, nos dé como resultado el número primitivo. En hoja de cálculo:

***Public Function escuad(n) As Boolean***

***If n < 0 Then***

***escuad = False***

***Else***

***If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False***

***End If***

***End Function***

Si trabajas con las celdas, sin macros, el procedimiento es el mismo, pero con distinto lenguaje. Si tienes, por ejemplo, en la celda C12, un número del que deseas saber si es cuadrado, escribe en otra celda esta fórmula: =SI((ENTERO(RAIZ(C12)))^2=C12;1;0), y te devolverá un 1 si es cuadrado y un 0 si no lo es.

La caracterización de un número como triangular se basa en lo anterior, ya que ser triangular N es equivalente a que  $8*N+1$  sea cuadrado. Por tanto, podemos definir esta función:

***Function estriangular(n) As Boolean***

***If escuad(8 \* n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False***

***End Function***

En lenguaje de celdas sería algo más complejo:

=SI((ENTERO(RAIZ(C12\*8+1)))^2=C12\*8+1;1;0),

Por último, los oblongos, al ser doble de triangulares, se descubren fácilmente:

***Public Function esoblongo(n) As Boolean***

***If escuad(4 \* n + 1) Then esoblongo = True Else esoblongo = False***

***End Function***

Sin macros,

=SI((ENTERO(RAIZ(C12\*4+1)))^2=C12\*4+1;1;0)



## Algoritmos de búsqueda

Ya podemos pasar a nuestras búsquedas. Comenzaremos generando la sucesión <https://oeis.org/A188630>, con la que comenzamos esta entrada: Números triangulares que son producto de otros dos triangulares. Nos organizaremos así:

Iniciamos triangulares:  $N=3$ ,  $D=3$  (Comenzamos por el 3)

1 Mientras no lleguemos al tope que nos hayamos marcado

Iniciamos otros triangulares para ver si son divisores:  
 $K=3$ ,  $P=3$

2 Mientras no lleguemos a  $N$  ni encontremos un producto de triangulares

Para cada  $K$  vemos si:

1.-Es divisor de  $N$

2.- Si el cociente  $N/k$  es triangular

Si cumple ambas condiciones, cerramos la búsqueda para  $N$  e imprimimos.

Si no, generamos otro triangular convirtiendo  $K$  en  $K+P$  y  $P$  en  $P+1$

Fin de 2 Mientras

Generamos otro triangular convirtiendo N en N+D y D en D+1

Fin del 1 Mientras

Hemos comenzado los triangulares en el 3 para evitar trivialidades.

Para quienes no manejen mucho los algoritmos puede resultar complicado, pero hay que repasar hasta entenderlo. Se puede traducir al Visual Basic de Excel:

***Sub productriang()***

***Dim i, j, k, p, c***

***i = 3: j = 3 Iniciamos la búsqueda en 3, para eliminar trivialidades***

***While i <= 10 ^ 4***

***k = 3: p = 3: c = 0 También iniciamos los divisores en 3***

***While c = 0 And p < i***

***If i / k = i \ k And estriangular(i / k) And i / k > 1 Then  
c = k***

***En la línea anterior buscamos que sea divisor, cociente triangular y no trivial***

***If c <> 0 Then MsgBox (i) Si cumple todo, presentamos el resultado***

***k = k + p: p = p + 1 Generamos el siguiente divisor***

***Wend***

***i = i + j: j = j + 1 Generamos el siguiente triangular***

**Wend**  
**End Sub**

Elimina comentarios, copia el resto como rutina para Visual Basic y al ejecutar verás aparecer los valores 36, 45, 210,...

Si te apetece explorar, aquí tienes la versión para PARI  
**{i=3;j=3;** Iniciamos la búsqueda en 3, para eliminar trivialidades

**while(i<=10^4,k=3;p=3;c=0;** También iniciamos los divisores en 3

**while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&ispolygonal(i/k,3)&&i/k>1,c=k);**

En la línea anterior buscamos que sea divisor, cociente triangular y no trivial

**if(c>0,print1(i, " "));** Si cumple todo, imprimimos

**k+=p;p+=1);** Generamos el siguiente divisor

**i+=j;j+=1)** Generamos el siguiente triangular}

Igualmente, si eliminas los comentarios y ejecutas este código PARI verás reproducida la sucesión <https://oeis.org/A188630>

```
? \r ini.txt
36, 45, 210, 630, 780, 990, 1540, 2850, 3570, 4095, 4851, 8778,
? "
```

Nos hemos detenido mucho en la generación de algunos tipos de números, su caracterización y en la estructura general del algoritmo de búsqueda, pero en las siguientes entradas nos servirá todo esto para entender mejor los procesos.

## **Números triangulares como producto de otros**

En los párrafos anteriores planteamos el problema de buscar los números triangulares que son a su vez producto de otros dos triangulares. Presentamos una forma de generar cuadrados, oblongos y triangulares de la forma más rápida posible, ya que estas búsquedas se hacen lentas para números grandes, y construimos un algoritmo para generar estos números, contenidos en la sucesión de OEIS <https://oeis.org/A188630>

En esta entrada generaremos triangulares con otros tipos de números, y llegaremos a sucesiones que permanecían inéditas hasta ahora.

Triangulares producto de dos cuadrados

Aquí no hay que buscar mucho, ya que basta considerar que el número que cumple esto es aquel que

es cuadrado (producto de cuadrados) y triangular a la vez. Esto está muy estudiado. Son estos:

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,... y está publicados en

<https://oeis.org/A001110>

Vemos, pues, otros casos.

### **Triangulares que son producto de un triangular y un cuadrado**

Ahora tenemos ocasión de aplicar lo expuesto en la entrada anterior: cómo generar de forma rápida cuadrados y triangulares y cómo saber si son o no de ese tipo. Si esto te quedó claro, entenderás el algoritmo que sigue. Primero en Visual Basic de Excel:

***Sub productriang()***

***Dim i, j, k, p, c***

***i = 3: j = 3 Generamos el primer triangular***

***While i <= 10 ^ 4***

***k = 3: p = 3: c = 0 Aquí generamos posibles divisores triangulares***

***While c = 0 And p < i Cuando c<>0 se para la búsqueda y se comunica el resultado***

***If i / k = i \ k And escuad(i / k) And i / k > 1 Then c = k***

**La línea de arriba investiga si  $k$  es divisor y si  $i/k$  es cuadrado**

**If  $c \neq 0$  Then MsgBox (i)**

**$k = k + p$ :  $p = p + 1$  Genera el siguiente posible divisor triangular**

**Wend**

**$i = i + j$ :  $j = j + 1$  Genera el siguiente triangular para seguir buscando**

**Wend**

**End Sub**

Si repasas la entrada anterior, es el mismo algoritmo propuesto en ella, pero cambiando **estriangular( $i/k$ )** por **escuad( $i/k$ )**. Puedes repasar los comentarios que se incluían. Con un ligero cambio en el código, hemos situado los resultados en columna:

300
1176
3240
7260
14196
25200
29403
41616
64980

A partir de este valor se produce desbordamiento, por lo que acudimos a PARI y al código

**{ $i=3$ ;  $j=3$ ;**

**while( $i \leq 10^6$ ,  $k=3$ ;  $p=3$ ;  $c=0$ ;**

**while( $k < i$  &&  $c == 0$ , if( $i/k == i \setminus k$  && issquare( $i/k$ ) &&  $i/k > 1$ ,  $c = k$ );**

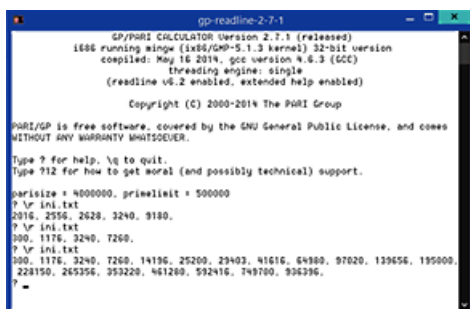
```

if(c>0,print1(i," "));
k+=p;p+=1);
i+=j;j+=1)
}

```

No insertamos comentarios porque es el mismo que presentamos en la entrada anterior, salvo el uso de la función *issquare* (“es cuadrado”)

Con él puedes obtener los primeros números triangulares que son producto de un triangular y un cuadrado:



```

gp-readline-2-7-1
GP/PARI CALCULATOR Version 2.7.1 (released)
1688 running mingw (ix86/GMP-5.1.3 kernel) 32-bit version
compiled: May 16 2014, gcc version 4.8.3 (GCC)
Threading engine: single
(readline v6.2 enabled, extended help enabled)

Copyright (C) 2000-2014 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and comes
WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primeslimit = 500000
? \r ini.txt
2016, 2556, 2628, 3240, 9180.
? \r ini.txt
300, 1176, 3240, 7260.
? \r ini.txt
300, 1176, 3240, 7260, 14196, 25200, 29403, 41616, 64980, 97020, 139656, 195000,
228150, 265356, 353220, 461280, 592416, 749700, 936396.
-

```

300, 1176, 3240, 7260, 14196, 25200, 29403, 41616, 64980, 97020, 139656, 195000, 228150, 265356, 353220, 461280, 592416, 749700, 936396, 1043290, 1155960, 1412040, 1708476, 2049300, 2438736, 2881200, 3381300, 3499335, 3943836, 4573800,...

Esta sucesión no se había publicado, y lo hicimos en <http://oeis.org/A253650>

Si los escribimos en columna podemos desarrollarlos como producto del tipo deseado:

Triangular	Cuadrado	Triangular
300	100	3
1176	196	6
3240	324	10
7260	484	15
14196	676	21
25200	900	28
29403	9801	3
41616	1156	36
64980	1444	45
97020	1764	55
139656	2116	66
195000	2500	78

Antes de seguir adelante, hay que advertir que estas descomposiciones en producto no tienen que ser únicas. Por ejemplo, 2881200 admite estos dos productos:  $3 \cdot 960400$  y  $300 \cdot 9604$ , ambos formados por un triangular y un cuadrado. Por eso en la tabla se puede tener la falsa idea de que el factor triangular es más pequeño que el cuadrado. No es así, sino que hemos detenido la búsqueda al encontrar un ejemplo.

### Una curiosidad

Los números triangulares de esta sucesión, tendrán, como todos la forma  $T(P) = P(P+1)/2$ . Pues bien, ni  $P$  ni  $P+1$  pueden ser primos, porque si se descompone en un producto de un triangular y un cuadrado, tendríamos  $P(P+1) = k(k+1)m^2$  y si  $P$  o  $P+1$  fueran primos, tendrían que dividir a  $k$  o a  $k+1$  o a  $m$ , y los tres son menores



que P. Estúdialo. Lo vemos en una tabla con los primeros casos:

Triangular	P	Factores(P)	P+1	Factores(P+1)
300	24	[2,3][3,1]	25	[5,2]
1176	48	[2,4][3,1]	49	[7,2]
3240	80	[2,4][5,1]	81	[3,4]
7260	120	[2,3][3,1][5,1]	121	[11,2]
14196	168	[2,3][3,1][7,1]	169	[13,2]
25200	224	[2,5][7,1]	225	[3,2][5,2]
29403	242	[2,1][11,2]	243	[3,5]
41616	288	[2,5][3,2]	289	[17,2]
64980	360	[2,3][3,2][5,1]	361	[19,2]
97020	440	[2,3][5,1][11,1]	441	[3,2][7,2]
139656	528	[2,4][3,1][11,1]	529	[23,2]
195000	624	[2,4][3,1][13,1]	625	[5,4]

### Subconjunto interesante

Los números triangulares de orden  $k^2-1$ , siendo  $k$  impar y mayor que 1, pertenecen a esta sucesión. En efecto, si  $k$  es impar tendrá la forma  $2m+1$ , luego el orden del triangular será

$$(2m+1)^2-1=4m^2+4m.$$

El triangular formado sobre él tendrá la forma  $((2m+1)^2*(4m^2+4m)/2$  y se puede descomponer en un cuadrado y un triangular:  $4(2m+1)^2 * m(m+1)/2$ .

Otra forma de expresarlo es que son triangulares construidos sobre 8 veces otro número triangular, ya que  $4m^2+4m=8*(m(m+1)/2)$ . Estos números los tienes en <http://oeis.org/A185096>

Casi todos los elementos de la sucesión tienen esta forma: 300, 1176, 3240, 7260, 14196, 25200,... y pertenecen a la sucesión <http://oeis.org/A083374> pero otros no, como 29403, 1043290 y 3499335.

## **Triangulares que son producto de un triangular y un primo**

En esta búsqueda nos organizaremos de forma similar a la precedente pero al llegar a investigar si  $(i/k)$  es cuadrado o triangular, deberemos sustituirlo por la pregunta de si es primo. Esta es más difícil de responder, pero disponemos de la función ***isprime*** en PARI y de ***esprimo*** en nuestra hoja Conjeturas

(<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global>)

Puedes adaptar el algoritmo usado en la búsqueda anterior cambiando esas funciones: Observa que ahora, con lo explicado antes, las operaciones se entienden mejor, por lo que omitimos los comentarios y usamos color rojo en las novedades. Para hoja de cálculo podría servir esta rutina de Visual Basic:

**Sub productriang()**

**Dim i, j, k, p, c**

**i = 3: j = 3**

**While i <= 10 ^ 3**

**k = 3: p = 3: c = 0**

**While c = 0 And p < i**

**If i / k = i \ k And esprimo(i / k) And i / k > 1 Then c = k**

**If c <> 0 Then MsgBox (i)**

**k = k + p: p = p + 1**

**Wend**

**i = i + j: j = j + 1**

**Wend**

**End Sub**

En PARI

```
{i=3;j=3;while(i<=10^6,k=3;p=3;c=0;while(k<i&& c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=k);if(c>0,print1(i," , "));k+=p;p+=1);i+=j;j+=1)}
```

Los triangulares obtenidos son, en este caso, los siguientes:

6, 15, 21, 45, 66, 78, 105, 190, 210, 231, 435, 465, 630, 861, 903, 1035, 1326, 2415, 2556, 2628, 3003, 3570, 4005, 4950, 5460, 5565, 5995, 7140, 8646, 8778, 9870, 203

12246, 16471, 16836, 17205, 17391, 17766, 20100,  
22155, 26565, 26796, 28680, 28920, 30381, 32131,  
33411, 33930, 36856, 40755,...

(los publicamos en <http://oeis.org/A253651>)

Podíamos pensar que, al ser el segundo factor primo, el primero será el máximo divisor triangular propio que tiene el número que se descompone (ver <http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/02/de-los-trianguulares-alojados-los-primos.html>). Esto es así en la gran mayoría de casos. Así, 4005 se descompone como  $45 \cdot 89$ , siendo 45 es el máximo divisor triangular propio de 4005 y 89 un factor primo. Sin embargo, en el número 3570, su divisor triangular máximo es 595, que daría lugar al producto  $3570 = 595 \cdot 6$ , y el 6 no es primo. El producto válido sería  $3570 = 210 \cdot 17$ , que sí es primo.

### **Triangulares producto de triangular y oblongo**

Estos son los primeros:

6, 36, 120, 210, 300, 630, 1176, 2016, 3240, 3570,  
4950, 7140, 7260, 10296, 14196, 19110, 23436, 25200,  
32640, 39060, 41616, 52326, 61776, 64980, 79800,  
97020, 116886, 139656, 145530, 165600, 195000,

228150, 242556, 265356, 304590, 306936, 349866,  
353220, 404550, 426426, ...

Si recuerdas la caracterización de los oblongos en la entrada anterior, entenderás este código en PARI:

```
{i=3;j=3;  
while(i<=10^6,k=2;p=4;c=0;  
while(k<i&&c==0,if(i/k==\k&&issquare(4*(i/k)+1)&&i/  
k>1,c=k);  
if(c>0,write1("final.txt",i,", "));  
k+=p;p+=2);  
i+=j;j+=1)  
}
```

Destacamos que el doble de cualquiera de estos números tiene la forma  $N=P(P+1)Q(Q+1)$ . Así,  $2 \cdot 2016 = 4032 = 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9$ . Al contrario, como uno de los factores es oblongo, el producto será par y se podrá dividir entre dos y su mitad será producto de dos triangulares.

Todos los términos no nulos de la sucesión A083374 (6, 36, 120, 300, 630, 1176, 2016, 3240,...) pertenecen a esta, pues si tienen la forma  $n^2(n^2-1)/2$  se pueden descomponer en el oblongo  $n(n+1)$  y el triangular  $n(n-1)/2$ , o bien el oblongo  $n(n-1)$  y el triangular  $n(n+1)/2$ .

Hemos publicado esta sucesión en

<http://oeis.org/A253652>

### **Triangulares producto de un cuadrado y un primo**

Al llegar a este punto simplificamos la exposición, ya que tendrás una buena idea de cómo se generan. Los triangulares que se forman multiplicando un cuadrado y un primo son estos:

28, 45, 153, 171, 300, 325, 496, 2556, 2628, 3321, 4753, 4851, 7381, 8128, 13203, 19900, 25200, 25425, 29161, 29403, 56953, 64980, 65341, 101025, 166753, 195625, 209628, 320400, 354061, 388521, 389403, 468028, 662976, 664128, 749700, 750925, 780625, 781875, 936396,...

Entre los números encontrados figuran los perfectos 28, 496, 8128, ... <https://oeis.org/A000396>

La razón es que estos números tienen la forma  $2^{k-1}(2^k-1) = 2^k(2^k-1)/2$ , y son, por tanto, triangulares. Además, como  $(2^k-1)$  es primo de Mersenne en esta expresión,  $k$  ha de ser impar, y  $k-1$ , par, con lo que  $2^{k-1}$  es un cuadrado y  $(2^k-1)$  un primo, cumpliéndose así la condición.

Para no cansar más con este tema, sólo incluimos el código PARI:

PARI

```
{i=3;j=3;
while(i<=10^6,k=4;p=5;c=0;
while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=
k);
if(c>0,write1("final.txt",i," "));
k+=p;p+=2);
i+=j;j+=1)
}
```

Pues ya está bien. Ahora te toca a ti. ¿Sabrías prolongar las siguientes sucesiones con las técnicas que hemos desarrollado en las dos entradas?:

Triangulares producto de un cuadrado y un oblongo:  
120, 300, 378, 528, 990, 1176, 2016,...

Y por último, los triangulares producto de un oblongo y un primo: 6, 10, 36, 66, 78, 210, 276, ...

### **Con números cuadrados**

Proseguimos el tema de buscar números especiales que son producto de dos factores también especiales. Hemos estudiado algunas variantes con triangulares, cuadrados, oblongos y primos. En esta entrada

descompondremos cuadrados como producto de otros dos de algún tipo especial.

Un caso que no necesita estudio es el de cuadrados producto de cuadrados, pues esta condición la cumplen todos salvo los cuadrados de primos. Así que pasamos a otros productos. En todos ellos exigiremos que **los factores del producto sean distintos**, para evitar trivialidades, ya que si son iguales su producto sería cuadrado sin necesidad de buscar más.

Los algoritmos de esta entrada se basarán todos en la generación de cuadrados mayores que 1 que ya estudiamos, es decir, iniciar  $P=4$  y  $K=5$  y después, en cada pasada del bucle, hacer  $P=P+K$  y  $K=K+2$ , ya que sabemos que los incrementos de los cuadrados crecen de 2 en 2.

### **Producto de triangulares distintos**

Hemos encontrado esta sucesión, que contiene muchos cuadrados de términos de <https://oeis.org/A175497>:

900, 7056, 32400, 44100, 88209, 108900, 298116,  
705600, 1368900, 1498176, 2924100, 5336100,  
8643600, 8820900, 9217296, 10432900, 15210000,  
24147396, 37088100, 50893956, 50979600, 52490025,  
55353600, 80568576, 114704100, 160123716,  
200930625, 219632400, 265559616, 268304400,  
296528400, 394657956,...



Pronto se llega a números grandes, por la fuerte condición que les exigimos. Por ejemplo, 88209 es el cuadrado de 297, y se puede descomponer en el producto de dos triangulares distintos:  $88209=29403*3$  y 29403 es el triangular número 242 ( $29403=242*243/2$ ) y 3 es el segundo ( $3=2*3/2$ ).

Hemos comprobado los cálculos con dos métodos. Aquí tienes el de PARI

***{i=4;j=5;*** ‘Inicia cuadrados

***while(i<=5\*10^8,k=3;p=3;c=0;*** ‘Inicia factores triangulares

***while(k<sqrt(i)&&c==0,if(i/k==i\k&&ispolygonal(i/k,3)&&i/k>1,c=k);***

‘Sólo llegamos en la búsqueda hasta la raíz cuadrada, para que ambos factores sean distintos

***if(c>0,print(i);write1("final.txt",i," ");*** ‘Si  $c>0$  se ha encontrado una solución

***k+=p;p+=1);***

***i+=j;j+=2)***

***}***

Ambos factores triangulares han de tener algún factor en común para que se forme un cuadrado.

900	3 [3,1]	300 [2,2][3,1][5,2]
7056	6 [2,1][3,1]	1176 [2,3][3,1][7,2]
32400	10 [2,1][5,1]	3240 [2,3][3,4][5,1]
44100	36 [2,2][3,2]	1225 [5,2][7,2]
88209	3 [3,1]	29403 [3,5][11,2]
108900	15 [3,1][5,1]	7260 [2,2][3,1][5,1][11,2]
298116	21 [3,1][7,1]	14196 [2,2][3,1][7,1][13,2]
705600	28 [2,2][7,1]	25200 [2,4][3,2][5,2][7,1]
1368900	6 [2,1][3,1]	228150 [2,1][3,3][5,2][13,2]
1498176	36 [2,2][3,2]	41616 [2,4][3,2][17,2]
2924100	45 [3,2][5,1]	64980 [2,2][3,2][5,1][19,2]
5336100	55 [5,1][11,1]	97020 [2,2][3,2][5,1][7,2][11,2]
8643600	3 [3,1]	2881200 [2,4][3,1][5,2][7,4]
8820900	300 [2,2][3,1][5,2]	29403 [3,5][11,2]
9217296	66 [2,1][3,1][11,1]	139656 [2,3][3,1][11,1][23,2]
10432900	10 [2,1][5,1]	1043290 [2,1][5,1][17,2][19,2]
15210000	78 [2,1][3,1][13,1]	195000 [2,3][3,1][5,4][13,1]
24147396	91 [7,1][13,1]	265356 [2,2][3,6][7,1][13,1]

Sus partes libres de cuadrados serán iguales, ya que es la única forma de que al final resulte un cuadrado. Lo puedes comprobar con algunos ejemplos de la tabla. Por ejemplo, 705600 es el triangular número 1187, y se descompone en el triangular 28, con parte libre 7, y el triangular  $25200 = 60^2 \cdot 7$ , que tiene también un 7 como parte libre.

### Cuadrados producto de dos oblongos distintos

Este caso es equivalente al que exige que un cuadrado sea igual a cuatro veces el producto de dos triangulares distintos. Así, si el cuadrado 3600 es el producto de los dos oblongos  $6 = 2 \cdot 3$  y  $600 = 24 \cdot 25$ , también cumple, como es evidente, que su cuarta parte es el producto de dos triangulares  $3600/4 = 900 = 3 \cdot 300$ .

Los primeros cuadrados que cumplen esto son:

144, 3600, 4900, 28224, 129600, 166464, 176400, 352836, 435600, 1192464, 2822400, 5475600, 210

5654884, 5992704, 11696400, 21344400, 34574400, 35283600, 36869184, 41731600, 60840000, 96589584, 148352400, 192099600, 203575824, 203918400, 209960100, 221414400, 322274304, 458816400,...

Aquí tienes la descomposición en producto de oblongos de los primeros:

144	2 [2,1]	72	[2,3][3,2]
3600	6 [2,1][3,1]	600	[2,3][3,1][5,2]
4900	2 [2,1]	2450	[2,1][5,2][7,2]
28224	12 [2,2][3,1]	2352	[2,4][3,1][7,2]
129600	20 [2,2][5,1]	6480	[2,4][3,4][5,1]
166464	2 [2,1]	83232	[2,5][3,2][17,2]
176400	72 [2,3][3,2]	2450	[2,1][5,2][7,2]
352836	6 [2,1][3,1]	58806	[2,1][3,5][11,2]
435600	30 [2,1][3,1][5,1]	14520	[2,3][3,1][5,1][11,2]
1192464	42 [2,1][3,1][7,1]	28392	[2,3][3,1][7,1][13,2]
2822400	56 [2,3][7,1]	50400	[2,5][3,2][5,2][7,1]
5475600	12 [2,2][3,1]	456300	[2,2][3,3][5,2][13,2]
5654884	2 [2,1]	2827442	[2,1][29,2][41,2]
5992704	72 [2,3][3,2]	83232	[2,5][3,2][17,2]
11696400	90 [2,1][3,2][5,1]	129960	[2,3][3,2][5,1][19,2]
21344400	110 [2,1][5,1][11,1]	194040	[2,3][3,2][5,1][7,2][11,1]

Como todos son pares, ya tienen un factor común, y como en el caso anterior, sus partes libres de cuadrados han de ser iguales.

Los puedes conseguir en PARI con

```
{i=4;j=5;while(i<=5*10^8,k=2;p=4;c=0;while(k<sqrt(i)
&& c==0,if(i/k==i\k&&issquare(4*i/k+1)&&i/k>1,c=k);if
(c>0,print(i));k+=p;p+=2);i+=j;j+=2)}
```

Si usamos nuestra imaginación podemos recorrer muchas variantes, pero nos quedaremos con esta última:

## Cuadrados producto de triangular y primo

9, 196, 225, 900, 2601, 3249, 4225, 15376, 53361, 88209, 136161, 176400, 181476, 191844, 324900, 450241, 461041, 1032256, 2152089, 2873025, 3960100, 7027801, 8643600, 11826721, 12744900, 17791524, 19193161, 28515600, 43956900, 45360225, 61230625, 63282025, 96216481, 108680625,...

Aquí es como si el número primo aportara el factor que se necesita para convertir un triangular en un cuadrado. Por tanto, el factor primo es igual a la parte libre de cuadrados del otro factor triangular.

Número	Factor triangular	Factor primo	Parte libre de cuadrados del triangular
9	3	3	3
196	28	7	7
225	45	5	5
900	300	3	3
2601	153	17	17
3249	171	19	19
4225	325	13	13
15376	496	31	31
53361	4851	11	11
88209	29403	3	3
136161	3321	41	41
176400	25200	7	7
181476	2556	71	71
191844	2628	73	73

Por tener esta propiedad disponemos de dos códigos distintos para encontrar esos números. Uno es el “largo”, que sigue lo explicado en estas entradas:

```
{i=4;j=5;  
while(i<=5*10^8,k=3;p=3;c=0;
```

212

```

while(k<i&&c==0,if(i/k==i\k&&isprime(i/k)&&i/k>1,c=
k);
if(c>0,print(i);print1(i, ", "));
k+=p;p+=1);
i+=j;j+=2)
}

```

Podemos usar este otro, mucho más corto, pero que no nos ordena los números en orden creciente:

```

{i=1;j=2;while(i<=10^5,m=core(i);if(isprime(m),print1
(i*m, ", "));i+=j;j+=1)}

```

Como hemos indicado, se podría seguir con otros casos. Intenta reproducir este:

Cuadrados producto de un triangular y un oblongo

36, 900, 3600, 7056, 15876, 41616, 44100, 54756, 69696, 108900,...

## FORMAS DE SER UN NÚMERO EQUILIBRADO

Números digitalmente equilibrados en base 10

Si se efectúa una búsqueda por Internet con la expresión “balanced number” aparecen muchos  
213

sentidos distintos para el calificativo “equilibrado” referido a los números naturales. Unos son más simples que otros y algunos se refieren a una clase especial de números, como los primos o los triangulares. Todos ellos tienen en común que nos permiten un desarrollo elemental, ya que el uso de algoritmos sencillos y de una hoja de cálculo permitirá aclarar algunos conceptos.

Resumiendo, nos hemos encontrado con estos significados de la palabra “equilibrado”:

### **Con cifras**

Un número es equilibrado en un sistema dado de numeración si (distintas definiciones):

- (a) Todos sus dígitos aparecen con la misma frecuencia. Es popular el caso del sistema binario, en el que se exige que aparezcan el mismo número de 1 que de 0.
- (b) Aparecen todos los dígitos posibles una vez.
- (c) Posee el mismo número de dígitos pares que impares, o bien los pares figuran un número impar de veces y los impares un número par.
- (d) Números de tres cifras en las una de ellas es promedio de las otras.

(e) Los primeros  $n$  dígitos tienen la misma suma que los  $n$  siguientes (en números de  $2n$  cifras)

### **Con clases especiales de números:**

(a) Primo equilibrado es aquel que es promedio de su primo anterior y el siguiente. Esta definición se puede extender a otras clases de números.

Comenzamos hoy con el primer caso: “Todos sus dígitos aparecen con la misma frecuencia”. Para no perder generalidad usaremos como parámetro la base de numeración. Esto nos exige que los algoritmos que usemos no se basen en el valor de los dígitos, sino en su representación tomando las cifras como símbolos.

### **Números digitalmente equilibrados**

Si en una base dada de numeración un número se representa con unos dígitos tomados todos con la misma frecuencia, diremos que es “digitalmente equilibrado” Por ejemplo, 172712 es equilibrado en base 10 y 50 lo es en base 3, ya que  $50_{(10)}=1212_{(3)}$ , equilibrado en el 1 y el 2.

Estudiaremos algunas cuestiones sobre ellos

- Número total de equilibrados con un número dado de cifras.

- Función que nos devuelva si un número es equilibrado o no.
- Uniremos después los dos conceptos para comprobar cálculos o para averiguar cuantos equilibrados hay en un intervalo.

Si tomamos un número de dígitos determinado (divisor en este caso del total de dígitos), el número de posibles equilibrados no es difícil de calcular, pues es una cuestión combinatoria. En el caso de no concretar qué dígitos son, las formas equilibradas de llenar un número de  $m$  cifras con  $n$  dígitos equilibrados será un caso de permutaciones con repetición, en el que cada dígito se repite  $m/n$  veces. Lo representaremos con la función FEQ (formas equilibradas de aparecer). Su expresión es fácil de conseguir:

$$FEQ(m, n) = \frac{m!}{(m/n)!^n}$$

Por ejemplo, con 6 dígitos en total y el uso de sólo 3 resultarán

$$FEQ(6,3)=(6!)/(6/3)!^3 =720/8=90 \text{ formas}$$

En el caso del ejemplo lo hemos comprobado con nuestra hoja Combimaq, resultando, efectivamente, 90 casos



3	3	1	2	2	1		87
3	3	2	1	1	2		88
3	3	2	1	2	1		89
3	3	2	2	1	1		90

Desarrollo de esta función con hoja de cálculo

Con este código se evita el uso de factoriales:

***Function feq(m, n)***

***Dim q, i***

***Dim a, p***

***q = m \ n: If q <> m / n Then feq = 0: Exit Function***

***a = m: p = a***

***For i = 1 To n***

***For j = q To 2 Step -1***

***vale = False***

***While Not vale***

***If p / j = p \ j Then***

***p = p / j: vale = True***

***Else***

***a = a - 1: p = p \* a***

***End If***

***Wend***

***Next j***

***Next i***

***If a > 1 Then For i = a - 1 To 2 Step -1: p = p \* i: Next i  
feq = p  
End Function***

Estas son las formas de aparecer, pero existe otra variable, y es el número de dígitos totales que usaremos. En el ejemplo hemos usado implícitamente los dígitos 1, 2, 3, pero pueden ser otros. Si deseamos estudiar el problema en base diez, esos serían los dígitos totales a considerar. Por tanto, la función FEQ se deberá multiplicar ahora por todas las combinaciones de k dígitos tomados de n en n. Es decir, el número total, NEQ será

$$NEQ(m, n, k) = \frac{m!}{(m/n)!^n} \binom{k}{n}$$

Nótese que k ha de ser mayor o igual que n, lo que producirá algunos huecos en la distribución de estos números equilibrados. Lo veremos en otra entrada.

Desafortunadamente este valor incluye el cero como primer dígito en algunos casos, por lo que lo que solemos entender siempre como número de dígitos se puede falsear, pero el resultado es bastante aproximado al del uso común. La solución pasa por considerar sólo tramas de números con el mismo número de dígitos. Lo vemos:

Por ejemplo, desde 1000 hasta 9999 (cuatro dígitos), existen 4788 equilibrados (ya veremos más adelante cómo se han contado), y esta fórmula, aplicada a  $m=4$ ,  $n=1, 2$  o  $4$  (sus divisores) y  $k=10$  nos da como resultado

$$\text{NEQ}(4;4;10)+\text{NEQ}(4;2;10)+\text{NEQ}(4;1;10) = 5040+270+10= 5320$$

La discrepancia consiste en que este segundo cálculo incluye ceros a la izquierda, y el otro no. Por tanto, bastará repartir 5320 entre 10 dígitos y después multiplicar por 9:

$$5320 \cdot 9 / 10 = 4788$$

Algoritmo para distinguir si un número es digitalmente equilibrado.

Lo construiremos para bases de numeración entre 2 y 16, pues los casos de bases mayores no tienen el mismo interés. Trabajaremos con caracteres, y no con números, para poder usar los dígitos ABCDEF del sistema hexadecimal. Disponemos desde hace tiempo de la función que expresa un número en cualquier base. Por si no la hemos publicado nunca, la copiamos aquí. Es el primer paso para averiguar si un entero es equilibrado o no, expresarlo en una base dada:

***Public Function exprebase(n, b) As String***

***Dim c\$(16)***

***Dim m, p, r***

***Dim expres\$***

***c\$(0) = "0"***

***c\$(1) = "1"***

***c\$(2) = "2"***

***c\$(3) = "3"***

***c\$(4) = "4"***

***c\$(5) = "5"***

***c\$(6) = "6"***

***c\$(7) = "7"***

***c\$(8) = "8"***

***c\$(9) = "9"***

***c\$(10) = "A"***

***c\$(11) = "B"***

***c\$(12) = "C"***

***c\$(13) = "D"***

***c\$(14) = "E"***

***c\$(15) = "F"***

***c\$(16) = "G"***

***expres\$ = ""***

***m = n***

***While m > 0***

```
p = Int(m / b)  
r = m - p * b  
expres = c$(r) + expres  
m = p  
Wend  
expresbase = expres  
End Function
```

No la explicamos con detalle. Basta recordar la forma de pasar un número de base decimal a otra base. Lo importante es que para saber si un número es equilibrado hemos de usar sus dígitos uno a uno, y esta función lo consigue.

Una vez expresado un número en la base deseada, el problema de saber si es equilibrado o no es una cuestión de estructura de un conjunto de símbolos, independientemente de si son números o no. El algoritmo para averiguarlo puede ser el siguiente (en Basic de las hojas de cálculo):

(Está preparado para bases del 2 al 16, las más usuales, y no más de 16 dígitos)

***Public Function esequilibrado(n, b) As Boolean 'n es el número y b la base***

***Dim c(17) 'memorias para recoger los contadores de dígitos***

***Dim i, nc, co, cc, j***

***Dim s\$, ca\$***

***Dim esq As Boolean***

***For i = 0 To 16: c(i) = 0: Next i 'Pone las memorias a cero***

***s\$ = exprebase(n, b) 'Expresa el número en la base dada, como cadena de caracteres***

***nc = Len(s\$)***

***For i = 1 To nc 'Recorre todos los dígitos***

***ca\$ = Mid\$(s\$, i, 1)***

***co = Asc(ca\$) 'carácter a estudiar***

***If co >= 48 And co <= 57 Then co = co - 47***  
***'Convierte símbolos en códigos del 1 al 16***

***If co >= 65 And co <= 70 Then co = co - 54***

***c(co) = c(co) + 1 'Añade el código a su memoria***

***Next i***

***es = True***

***j = 1***

***While c(j) = 0: j = j + 1: Wend 'se salta las memorias vacías***

***i = j***

***cc = c(j)***

***While es And i <= 16***

***If c(i) > 0 And cc <> c(i) Then es = False 'Si dos frecuencias son distintas, ya no es equilibrado***

***i = i + 1***

***Wend***

***esequilibrado = es***

***End Function***

Con esta función podemos crear listas de números equilibrados. Aquí tienes los primeros en base 2:

Número	En base 2
1	1
2	10
3	11
7	111
9	1001
10	1010
12	1100
15	1111
31	11111
35	100011
37	100101
38	100110
41	101001
42	101010
44	101100
49	110001
50	110010
52	110100
56	111000
63	111111

También se puede usar una función de N que cuente los equilibrados hasta N. Podría ser esta:

***Public Function ceq(m, n)***

***Dim i, c***

***c = 0***

***For i = 1 To m***

***If esequilibrado(i, n) Then c = c + 1***

***Next i***

223

**ceq = c**

***End Function***

No necesita explicación.

### **Equilibrados en base 10**

Con la función CEQ podemos investigar cuántos equilibrados existen en base 10 en los distintos tramos de números:

**Hasta el 99 todos son equilibrados.** Lo son los de una cifra, y todos los de dos. Basta recorrerlos.

El 100 es el primer número no equilibrado en base 10.

**En cada centena del 100 al 1000 aparecen 73 equilibrados,** o lo que es lo mismo, hay 27 que no lo son. La razón es clara: el primer dígito es obligado en una centena, y un número será equilibrado si todos sus dígitos son iguales, es decir, un solo caso (por ejemplo, de 300 a 400 será el 333), o bien todos son diferentes, y como tenemos uno obligado, los otros dos aparecerán de  $9 \cdot 8 = 72$  formas distintas, lo que suma 73.

Así que del 100 al 1000 contaremos  $73 \cdot 9 = 657$  equilibrados. Ya llevamos del 1 al 1000  $657 + 99 = 756$ . Compruébalo con la función  $CEQ(1000;10)=756$

Observa cómo resultaría el 73 de la función NEQ:

224



$$(NEQ(3;3;10)+NEQ(3;1;10))/10 = (720+10)/10=73$$

En cada millar aparecen 532 equilibrados

Para reproducir este número usamos la función NEQ:

$$NEQ(m, n, k) = \frac{m!}{(m/n)!^n} \binom{k}{n}$$

Ahora bastará aplicarla a  $m=4$ ,  $n=4,2,1$  (divisores del 4) y  $k=10$ :

$NEQ(4,4,10)+NEQ(4,2,10)+NEQ(4,1,10)=5040+270+10=5320$ , y como en cada tramo el primer dígito es obligado, dividiremos entre 10, quedando  $5320/10=532$ .

El mismo desarrollo admitirían los tramos de 10000 en 10000. Dejamos solo el desarrollo numérico:

$NEQ(5,5,10)+NEQ(5,1,10)=30240+10=30250$  y dividiendo entre 10: 3025 por tramo.

Lo puedes comprobar en un tramo concreto con la función que cuenta equilibrados:

$$CEQ(30000;10)-CEQ(20000;10)=11594-8569=3025$$

Comprueba que los tramos de 100000 poseen 16291 equilibrados.

Hemos descubierto que la función que cuenta los equilibrados menores o iguales a un número en base 10

es lineal a trozos, pues presenta el mismo incremento en los tramos que poseen igual número de cifras.

## **Otros números digitalmente equilibrados**

### *Equilibrados en otras bases*

Estudiábamos en la anterior entrada los números digitalmente equilibrados en base 10. Descubrimos que su distribución es lineal en tramos entre múltiplos de potencias de 10, y presentamos funciones para descubrir si un número es equilibrado o no y poder contarlos. Ampliamos ahora el concepto a digitalmente equilibrados en otras bases.

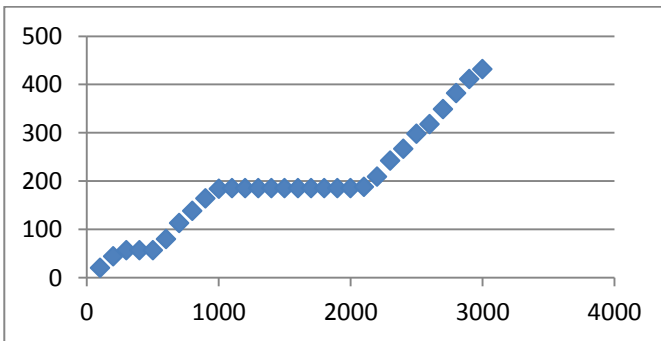
### *Equilibrados binarios*

Serán aquellos que presenten los unos y ceros con la misma frecuencia (y también todo unos o todo ceros). Seguimos aquí con el problema de los ceros a la izquierda, que no nos deben confundir. Con la función presentada en la anterior entrada,  $\text{esquilibrado}(N,2)$  podremos encontrar los primeros:

N	Exprebase(N,2)
1	1
2	10
3	11
7	111
9	1001
10	1010
12	1100
15	1111
31	11111
35	100011
37	100101
38	100110
41	101001
42	101010
44	101100
49	110001
50	110010
52	110100

Vemos que presentan o todo 1 o la mitad 1 y la otra mitad 0. Obsérvese que este concepto es más general que el presentado en <http://oeis.org/A031443>

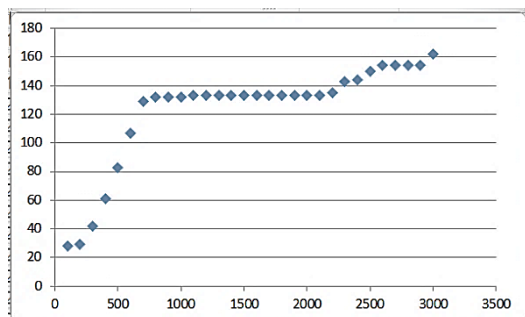
Si contamos los equilibrados anteriores a un número con la función CEQ (ver entrada anterior) observamos que la distribución es lineal a trozos, con intervalos constantes. Lo vemos en el siguiente gráfico, construido sobre periodos de 100 en 100:



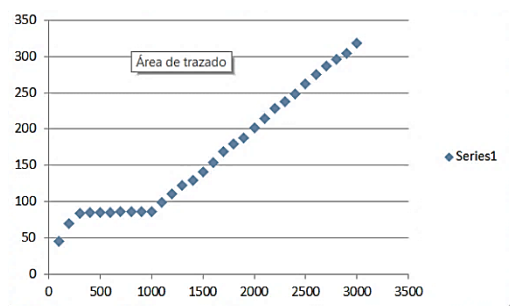
Los periodos constantes se corresponden con intervalos que van desde una potencia par de 2 a otra

impar, porque entonces los números tendrían un número impar de cifras y sólo admitirían la solución 1111... En el gráfico se distinguen los comprendidos entre 256 y 512, y más arriba el que va de 1024 a 2048.

Idéntico fenómeno se percibe en otras bases. Por ejemplo, en base 3 la distribución sería



Y en base 4:



*Con pares e impares*

Hemos leído otra definición de equilibrado en base 10: es aquel número que contiene el mismo número de

dígitos pares que de impares. También es un problema combinatorio.

En primer lugar hay que considerar que el número total de dígitos de estos números ha de ser par. Tal como consideramos en el primer caso de esta serie, habrá que comenzar por contar las distintas distribuciones de PAR e IMPAR que se pueden dar. Por ejemplo, con seis cifras se pueden presentar así: PPPIII, PPIPII, PPIIPI, PPIIIP, PIPPII, PIPIIP, PIIPPI,....Son permutaciones con repetición de dos símbolos tomados de seis en seis, es decir:  $6!/(3!3!)=20$ , y después rellenar los elementos P e I con los cinco casos de cada clase, es decir con variaciones con repetición de cinco elementos tomados las veces necesarias. Aquí sería  $20*5^3*5^3=312500$

En general, para n pares y n impares:

$$N(n, n) = \frac{(2n)!}{n! n!} 5^{2n}$$

Por ejemplo, con cuatro cifras nos resultaría  $24/(2*2)*5^4=3750$  y con dos:  $2/(1*1)*5^2=50$ .

Estas fórmulas contienen los casos en los que el cero es la cifra inicial y el número de cifras disminuye en una unidad. La comprobación y en su caso corrección de esto la podemos efectuar contando los equilibrados entre dos números.

## Descubrimiento de equilibrados

Otro enfoque es el de descubrir si un número de 2n cifras es equilibrado en este sentido. Podríamos recorrer sus dígitos y ver si el carácter PAR y el IMPAR se equilibran. Llegaríamos a un algoritmo semejante al siguiente:

***Public Function esequilibrado(n) As Boolean ' se  
podrá borrar***

***Dim par, impar***

***Dim i, nc, co***

***Dim s\$, ca\$***

***par = 0: impar = 0*** 'Contadores de cifras pares e  
impares

***s\$ = Str\$(n)*** 'En las cuatro líneas siguientes  
convertimos el número en string

***nc = Len(s\$)***

***s\$ = Right\$(s\$, nc - 1)***

***nc = nc - 1***

***If nc / 2 <> nc \ 2 Then esequilibrado = False: Exit  
Function*** 'Número impar de cifras

***For i = 1 To nc***

***ca\$ = Mid\$(s\$, i, 1)***

***co = Asc(ca\$) - 48*** 'Se halla el valor del dígito

```

If  $co / 2 = co \setminus 2$  Then  $par = par + 1$  Else  $impar =$ 
impar + 1 'Se acumula el contador
Next  $i$ 
If  $par = impar$  Then  $esequilibradop = True$  Else
esequilibradop = False
End Function

```

Con esta función es fácil contar equilibrados en un intervalo

```

Public Function  $contareq(m, n)$ 
Dim  $a, c$ 
If  $m > n$  Then  $a = m: m = n: n = a$ 
 $c = 0$ 
For  $a = m$  To  $n$ 
If  $esequilibradop(a)$  Then  $c = c + 1$ 
Next  $a$ 
 $contareq = c$ 
End Function

```

Por el problema del cero inicial, esta función contará menos casos que la anterior de tipo combinatorio. Lo vemos en esta tabla:

Número 2N de cifras	Mínimo	Máximo	Combinatoria	Contador	Diferencia
2	10	99	50	45	5
4	1000	9999	3750	3375	375
6	100000	999999	312500	281250	31250

Para dos cifras el desfase es de 5, correspondiente a los casos 01, 03, 05, 07, 09.

Para cuatro cifras es de 375, que coincide con este cálculo:  $3!/(2!1!)*5^3=375$  y para seis cifras con  $5!/(3!2!)*5^5=31250$ . Te dejamos razonar esto y descubrir una relación existente en la tabla.

### **Otras definiciones**

Aún hemos encontrado más definiciones de números equilibrados. Las dejamos ahí por si las deseas estudiar:

- Un número es equilibrado cuando el número de veces que aparece en él una cifra par es IMPAR, y el número de cifras impares es PAR.
- Un número de tres cifras es equilibrado si la de las decenas es el promedio de las otras dos.
- La misma definición anterior, pero sin exigir que sean las decenas.

Hasta es posible que te inventes alguna nueva definición. Esto es como un juego.



## Equilibrados como media de números semejantes

Existen números equilibrados que son media entre el anterior y el posterior de la misma clase. Así, un número primo es equilibrado si es promedio de sus dos primos contiguos. Por ejemplo, 257 es media de su anterior 251 y el posterior 263, que por cierto también es primo equilibrado. Los tres primos componentes de la terna formarán, pues, una progresión aritmética.

Los primos equilibrados los tienes en <http://oeis.org/A006562>

5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977, ...

Si dispones de las funciones ESPRIMO, PRIMANT y PRIMPROX, ), es fácil encontrarlos.

Las tienes en

<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global> )

Por ejemplo, con esta función:

***Public Function equiprimo(n)***

***If esprimo(n) And n = (primprox(n) + primant(n)) / 2***

***Then equiprimo = True Else equiprimo = False***

***End Function***

Con ella es fácil reproducir la lista:

5
53
157
173
211
257
263
373
563
593
607
653
733
947
977

Las diferencias, salvo en el 5, son múltiplos de 6. La razón es que a partir del 5 todos los primos son del tipo  $6n+1$  o  $6n+5$ . En las ternas que se forman tienen que ser todos del mismo tipo, ya que si el primero es  $6n+1$  y el segundo  $6m+5$ , el tercero tendría el tipo  $6m+5+(6k+4)=6h+3$ , no primo. Igualmente, si el primero es tipo  $6n+5$  y el segundo  $6m+1$ , el tercero sería  $6m+1+(6h+2)$ . Lo puedes ver con  $Z_6$ : Si el primero tuviera resto 1 y el último resto 5, el promedio presentaría resto 3 y no sería primo. Igual con los otros casos. Una consecuencia curiosa de esto es la sucesión publicada en <http://oeis.org/A101597>, que cuenta el número de compuestos comprendidos entre el primo equilibrado y sus contiguos, y es claro que todos los elementos tienen el valor 5, 11, 17,...es decir, un múltiplo de 6 menos 1.

Se ha conjeturado que existen infinitos primos equilibrados.

## Otros números equilibrados

### *Con cuadrados*

Ningún cuadrado como tal puede ser equilibrado, ya que  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$  y  $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ . Igual le ocurre a los triangulares, ya que, por definición, la diferencia entre el triangular de orden  $n$  y su anterior es precisamente  $n$ , y con su posterior,  $n+1$ . No busques equilibrados entre números poligonales o procedentes de valores numéricos de polinomios.

Así que tendremos que ir visitando otros tipos de números hasta dar con aquellos que presenten elementos equilibrados.

### *Libres de cuadrados*

Este tipo de números sí admite equilibrados. Los tienes en <http://oeis.org/A245289>

2, 6, 14, 17, 19, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 53, 55, 58, 66, 70, 78, 86, 89, 91, 94, 102, 106, 110, 114, 130, 138, 142, 158, 161, 163, 166, 170, 178, 182, 186, 194, 197, 199, 202, 210, 214, 218, 222, 230, 233, 235, 238,...

Los hemos reproducido con hoja de cálculo, incorporando sus factores primos, y nos ha llamado la 235

atención que en la terna de libres de cuadrados consecutivos figuran muchos primos, lo que hace que el M.C.D. de los integrantes de la terna sea frecuentemente un 1.

Terna de libres de cuadrados equilibrados			Descomposición en factores primos			
29	30	31		[29,1]	[2,1][3,1][5,1]	[31,1]
33	34	35	[3,1]	[11,1]	[2,1][17,1]	[5,1][7,1]
37	38	39		[37,1]	[2,1][19,1]	[3,1][13,1]
41	42	43		[41,1]	[2,1][3,1][7,1]	[43,1]
51	53	55	[3,1]	[17,1]	[53,1]	[5,1][11,1]
53	55	57		[53,1]	[5,1][11,1]	[3,1][19,1]
57	58	59	[3,1]	[19,1]	[2,1][29,1]	[59,1]
65	66	67	[5,1]	[13,1]	[2,1][3,1][11,1]	[67,1]
69	70	71	[3,1]	[23,1]	[2,1][5,1][7,1]	[71,1]
77	78	79	[7,1]	[11,1]	[2,1][3,1][13,1]	[79,1]
85	86	87	[5,1]	[17,1]	[2,1][43,1]	[3,1][29,1]
87	89	91	[3,1]	[29,1]	[89,1]	[7,1][13,1]
89	91	93		[89,1]	[7,1][13,1]	[3,1][31,1]
93	94	95	[3,1]	[31,1]	[2,1][47,1]	[5,1][19,1]

Hemos buscado factores comunes en muchas ternas, hasta  $10^8$ , y sólo hemos encontrado el 2. No parece que tengan en común los factores 3, 5 o 7. Si aparece este caso, será para números muy grandes. Con PARI hemos obtenido listados de ternas con M.C.D. igual a 2, pero no para valores mayores. No tenemos respuesta para la cuestión de si terminarán apareciendo.

```

gp-readline-2-7-1
237518, 237522, 237526, 2
251474, 251478, 251482, 2
334518, 334522, 334526, 2
342662, 342666, 342670, 2
331670, 331674, 331678, 2
393322, 393326, 393330, 2
483378, 483382, 483386, 2
481318, 481322, 481326, 2
508074, 508078, 508082, 2
540022, 540026, 540030, 2
604874, 604878, 604882, 2
611170, 611174, 611178, 2
782970, 782974, 782978, 2
780222, 780226, 780230, 2
800018, 800022, 800026, 2
839418, 839422, 839426, 2
863718, 863722, 863726, 2
865970, 865974, 865978, 2
914874, 914878, 914882, 2
927618, 927622, 927626, 2
931018, 931022, 931026, 2
938594, 938598, 938602, 2
982374, 982378, 982382, 2
988474, 988478, 988482, 2

```

## *Semiprimos equilibrados*

También se pueden encontrar ternas de semiprimos consecutivos que formen progresión aritmética, con lo que el central de la terna sería un semiprimo equilibrado. Son estos:

34, 86, 94, 122, 142, 185, 194, 202, 214, 218, 262, 289, 302, 314, 321, 358, 371, 394, 407, 413, 415, 422, 446, 471, 489, 493, 497, 517, 535, 562, 581, 586, 626, 634, 669, 687, 698, 734, 785, 791, 815, 838, 842, 922, 982, 989, 1042, 1057, 1079, 1135, 1138,...

<http://oeis.org/A213025>

Podemos investigar aquí también qué factores comunes tienen estas ternas de semiprimos. Hemos encontrado ternas con el factor 2 en común:

289154, 289166, 289178, 2  
774142, 774154, 774166, 2  
838582, 838594, 838606, 2  
844114, 844126, 844138, 2  
900142, 900154, 900166, 2  
989474, 989486, 989498, 2

En ellas los otros factores que acompañan al 2 son ternas de primos equilibrados.

### *Esfénicos equilibrados*

Existen esfénicos (productos de tres primos distintos) que son equilibrados, es decir, que forman ternas en progresión aritmética con el anterior y el posterior esfénico. Forman esta sucesión:

186, 370, 406, 418, 518, 582, 602, 710, 786, 814, 826, 830, 942, 978, 994, 1010, 1034, 1070, 1162, 1310, 1374, 1394, 1570, 1630, 1686, 1758, 1886, 1978, 2014, 2114, 2158, 2270, 2274, 2278, 2294, 2438, 2510, 2534, 2570, 2630, 2666, 2690, 2774, 2778, 2782, 2806, ...

Entre ellos figura el año 2014, que ya se comentó en su día que formaba una terna de esféricos con el 2013 y el 2015.

Siguiendo con la idea de estudiar el MCD de los tres elementos de la terna, aquí encontramos una gran variedad de números primos como resultado, entre ellos 705, 710 y 715 con factor común 5, o 3311, 3322 y 3333 con el 11. Al tener tres factores es más fácil obtener estos resultados.

Podríamos estudiar la misma cuestión con números formados por el producto de cuatro primos distintos, y también encontraríamos equilibrados:

1518, 1554, 2190, 2590, 3354, 4710, 4970, 5810, 7566, 8170, 10506, 11110, 11346, 12194, 12610, 13706, 14098, 15690, 16874, 17574, 18538, 18734, 19830, ...

No hemos querido seguir para no cansar a los lectores. Si estudias el código PARI que hemos usado puedes proseguir el estudio en esa dirección, cambiando el 4 por 5, 6 o 7.

```

is4prim(n)=if(n>0,omega(n)==4&&bigomega(n)==4,0)
next4prim(n)={local(k=n+1);while(!is4prim(k),k+=1);k}
prec4prim(n)={local(k=n-1);while(!is4prim(k)&&k>0,k-
=1);k}
{for(i=1,10^4,if(is4prim(i)&&2*i==          next4prim(i)+
prec4prim(i),print(i)))}

```

## MISCELÁNEA

### BIENVENIDA AL 2015

Todos los años por estas fechas solemos saludar al nuevo año con cálculos curiosos referentes a su número. También es tradicional que nuestro colaborador Rafael Parra Machío nos envíe un estudio más profundo, acompañado de alguna explicación teórica monográfica. Este año, por circunstancias personales, no le va a ser posible, pero recordamos algunos de esos documentos, incluidos en nuestra página [hojamat.es](http://www.hojamat.es).

<http://www.hojamat.es/parra/PROPIEDADES2014.pdf>

<http://hojamat.es/parra/prop2013.pdf>

<http://www.hojamat.es/parra/prop2012.pdf>

Nosotros nos moveremos en un nivel más bajo, resaltando algunos desarrollos curiosos basados en el número 2015. Su único objetivo es entretener y abrir caminos para quien desee profundizar, pero con ellos no aprenderéis muchas más Matemáticas.



## Nuestro desarrollo preferido

Todos los meses de diciembre incluimos en la portada de hojamat.es el desarrollo del nuevo año que nos llame más la atención. En el 2014 fue

$$2014 = 5^5 - 5555/5$$

Para el 2015 lo tenemos muy fácil, pues su desarrollo en factores primos nos brinda un producto capicúa en sus cifras. Lo elegimos este año como el preferido:

$$2015 = 13 \times 5 \times 31$$

Es simple y simétrico, construido sólo con las tres primeras cifras impares, por lo que supera en atractivo a los siguientes.

Derivado de él tenemos otro que depende de dos potencias de 2:

$$2015 = (2^5 - 1)(2^6 + 1)$$

También merece ser destacado como el anterior, ya que su estructura es igualmente sencilla y simétrica, aunque en menor grado que la precedente.

Muy sintético y atractivo es este desarrollo, formado por tres números consecutivos:

$$2015 = 31 \times (32 + 33)$$

Presentados estos desarrollos, pasamos a capítulos ya conocidos por los años anteriores:

### Curiosidades

Como todos los números naturales, 2015 es suma de tres triangulares y de cuatro cuadrados.

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema de los cuatro cuadrados](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_cuadrados)

[http://es.wikipedia.org/wiki/Número triangular](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular)

Aquí tienes una suma con tres triangulares:

$$2015 = T_{28} + T_{32} + T_{46} = 28 \times 29 / 2 + 32 \times 33 / 2 + 46 \times 47 / 2$$

2015 se puede expresar de muchas formas como suma de cuatro cuadrados. Presentamos algunas:

$$2015 = 15^2 + 19^2 + 23^2 + 30^2 = 14^2 + 17^2 + 21^2 + 33^2 = 15^2 + 18^2 + 25^2 + 29^2 = \dots$$

Estas que siguen las he descubierto en <http://oeis.org/> y después las he adaptado:

2015 equivale a la sexta parte del número triangular 12090 = 155 \* 156 / 2. Por tanto se cumple que 2015 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... 155) / 6.

Esta es sorprendente: 2015 es el promedio de los 77 primeros cuadrados: 2015 = (1 + 4 + 9 + 16 + ... 5929) / 77, porque 2015 = 78 \* (77 \* 2 + 1) / 6

Si a 2015 le restas todas las potencias de 4 que puedas ( $4^1, 4^2, \dots, 4^5$ ), siempre resulta un número primo: 2011, 1999, 1951, 1759, 991.

2015 es un número de Lucas-Carmichael. Si a sus factores primos 5, 13 y 31 les sumas 1, resultan 6, 14 y 32, divisores del 2016.

2015 se puede expresar como una diferencia de cubos de números enteros positivos:  $2015 = 14^3 - 9^3$

La suma de las cifras de 2015 (8) coincide con el número de sus divisores, {2015, 403, 155, 65, 31, 13, 5, 1}

Si llamamos PHI a la indicatriz de Euler, 2015 cumple que  $\text{PHI}(2015) = \text{PHI}(2017) - \text{PHI}(2016)$ , ya que  $144 = 2016 - 576$

### **Otras curiosidades**

2015 es un número libre de cuadrados, pero la suma de sus factores primos,  $13 + 5 + 31 = 49$ , es el cuadrado de 7.

El mayor divisor de 2015 es 403, número heptagonal que proviene de un producto palindrómico:  $403 = 13 \times 31$

Todos los divisores de 2015 son impares, libres de cuadrados y suman 2688. Sus cuadrados suman 4252040.

2015 no puede ser desarrollado como suma de tres cubos

Sistemas de numeración

2015 es palindrómico en base 2:

$$2015_{(10)} = 11111011111_{(2)}$$

Esto proviene de que  $2015 = 2^{11} - 2^5 - 2^0$

2015 se expresa en base 4 como un número concatenado consigo mismo:

$$2015_{(10)} = 133133_{(4)}$$

Esto es porque hemos señalado que

$$2015 = (2^5 - 1)(2^6 + 1).$$

Desarrollamos:

$$(2^5 - 1)(2^6 + 1) =$$

$$(4^2 + 3 \times 4 + 3)(4^3 + 1) = 4^5 + 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 4^2 + 3 \times 4 + 3$$

Por una razón similar, también tiene forma de número concatenado en base 8:

$$2015_{(10)} = 3737_{(8)}$$

$$(2^5 - 1)(2^6 + 1) = (3 \times 8 + 7)(8^2 + 1) = 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 3 \times 8 + 7$$

Por último, en base 12 concatena cifras dobles:

$$2015 = 11BB_{(12)}$$

2015 con las cifras de números notables:

244

En los últimos años hemos incluido, cuando ha sido posible, la expresión del año nuevo con cifras de números notables. En el presente hemos ampliado el catálogo y acompañamos cada cálculo con un enlace a la teoría de ese número notable:

PI

$$\pi \approx 3, 14159265358979323846$$

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_%CF%80](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80)

Con las primeras cifras de PI:

$$2015=(3+1+41)\times 59-(2+6+5+3)\times 5\times 8$$

E

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757 \dots$$

<http://mathworld.wolfram.com/e.html>

Con las primeras cifras de E:

$$2015=271\times 8-(2+81)-(8+2)-(8+4)\times 5$$

PHI

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989\dots$$

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_%C3%A1ureo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo)

Con las primeras cifras del número de oro PHI (solución de  $X^2-x-1=0$ ):

$$2015=1618+0+339+8\times 8-(7-(49+8))/(9+48))$$

Número de plata

Es una solución de la ecuación  $X^2-2x-1=0$

$$\delta_s = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 210\dots$$

<http://mathworld.wolfram.com/SilverRatio.html>

Desarrollo con las primeras cifras:

$$2015=2414-(2\times(1+35)\times 6-(23+7+3))$$

Número de bronce

Es una solución de la ecuación  $X^2-3x-1=0$

<http://matematicaseducativas.blogspot.com.es/2012/10/el-numero-de-oro-y-otros-numeros.html>

The image shows a screenshot of the WolframAlpha interface. At the top, the WolframAlpha logo is visible. Below it, the search bar contains the input  $(3+\sqrt{13})/2$ . The search bar also includes the text "Wolfram|Alpha Computational Knowledge Engine" and a star icon. Below the search bar, there are icons for "Examples" and "Random". The main content area shows the input  $\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$  and its decimal approximation:  $3.302775637731994646559610633735247973125648286922623106355226\dots$ . There is a "More digits" button next to the decimal approximation.

$$2015=3302-((77+56+3+7)\times(7+3)/(1+9)\times 9)$$

246

## Número plástico

Es la solución real de la ecuación  $X^3-x-1=0$ . Lo presentamos en nuestra entrada

<http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/11/sucesion-de-perrin.html>

```
(%i5) algsys([x^3-x-1=0],[x]);
(%o5) [[x=-0.5622795120623 %i-0.66235897862237], [x=0.5622795120623 %i-0.66235897862237], [x=1.324718045112762]]
```

$$2015=1324+718+0-(45-1 \times (1+2+7))-8)$$

## Otros desarrollos curiosos

Se lleva bien con las cifras de los primeros primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29:

$$2015=2357-111-(3+1) \times (71+9)+2+3 \times 29$$

Va creciendo del 1 al 10:  $2015=(1+2+3+4+5+6) \times (7+89)-1-0$

Al 2015 lo engendra el año anterior:  $2015=2014-2+0-1+4$

No podían faltar los pandigitales:

$$2015=(7+91+0) \times (2+8+5+6)-43$$

$$2015=2 \times (39+0+4+5) \times (8+6+7)-1$$

$$2015=(4+1+57)/2 \times 68-(3+90)$$

Tampoco olvidamos los monocifra. Unos resultan más cortos y otros más largos, porque no es tarea fácil y a veces no se pueden simplificar las expresiones.

$$2015=999+999+9+9-9/9$$

$$2015=(8\times 8+8/8)\times(8+8+8+8-8/8)$$

$$2015=7\times 7\times 7\times 7-7\times 7\times 7-7\times 7+7-7/7$$

$$2015=(6+6+6)\times(6+666)/6-6/6$$

$$2015=(55+5\times 5)\times 5\times 5+(5+5+5)$$

$$2015=(4\times 4\times 4+4/4)\times(4\times(4+4)-4/4)$$

$$2015=(33+33-3/3)\times(33-3!/3)$$

$$2015=2222-222+22-2-2-2-2/2$$

$$2015=(11\times(11+1+1)+11+1)\times(11+1+1)$$

### Autogeneraciones

El 2015 se autogenera con más o menos truco:

$$2015=2015-2\times 0\times 15$$

$$2015=(2+0+152+0+1)\times(5+2+0+1+5)$$

$$2015=(20-15)\times((20+1+52+0)\times(1+5)-20-15)$$

$$2015=2015\times(2\times(0+1+5+2)-0-15)$$



## AUTONÚMEROS

### **Autonúmeros o números colombianos**

Estos números, llamados también de Devlali, fueron descritos por el matemático indio Kaprekar (el de la constante 6174,

[http://es.wikipedia.org/wiki/Constante\\_de\\_Kaprekar](http://es.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Kaprekar)).

Son muy conocidos por haberlos presentado Martin Gardner en uno de sus libros. En esta dirección puedes leer su artículo.

<http://librosdemates.blogspot.com.es/2013/01/viajes-por-el-tiempo-y-otras.html>

Su definición es algo extraña, porque son aquellos números enteros positivos que **no pueden ser expresados como la suma de otro entero con la suma de sus cifras** (Kaprekar llamó a esta operación **digitadición**). Por ejemplo, 20, no puede generarse con números más pequeños a los que les sumamos sus cifras. Con los de una cifra se ve que es imposible, y con los de dos:  $11+1+1=13$ ,  $12+1+2=15$ ,  $13+1+3=17$ ,  $14+1+4=19$ ,  $15+1+5=21$ , y el resto tampoco daría como resultado 20.

Con esta definición se comprende que existan infinitos tipos de autonúmeros, dependiendo de la base elegida, y así se ha demostrado. Nosotros nos limitaremos a la base 10. En este caso los tienes en [http://en.wikipedia.org/wiki/Self\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Self_number) y son estos:

1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, ...

También los puedes estudiar en <http://oeis.org/A003052>

Estos números proceden de una criba. Puedes ir calculando todos los resultados posibles si se suma cada número con la suma de sus dígitos en la base dada. Resultarían estos:

2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, ..., que están contenidos en <http://oeis.org/A176995> y los que nos ocupan serían su complemento.

### **Algoritmo de fuerza bruta**

Una cuestión interesante es cómo saber si un número es autonúmero o no. El primer acercamiento a este tema puede consistir en recorrer todos los números inferiores a  $N$ , añadirles la suma de sus cifras y comprobar si el resultado es  $N$ . Desembocamos entonces en la programación con hojas de cálculo. Necesitaríamos:

- La función SUMACIFRAS
- Un bucle que recorra los números k de 1 a N y que pare si el resultado de  $k + \text{sumacifras}(k)$  es N.
- Si la prueba anterior es positiva, declaramos que el número N no es autonúmero, y si es negativa para todos los números inferiores a N, diremos que sí lo es.

La función SUMACIFRAS debemos tenerla publicada en algún documento. Por si no fuera así, la reproducimos en Basic de hoja de cálculo:

***Public Function sumacifras(n)***

'No analiza si el número es entero positivo

***Dim h, i, s, m***

***h = n 'De la variable h se irán extrayendo las cifras***

***s = 0 'Esta variable recogerá la suma de cifras***

***While h > 9 'Bucle para extraer las cifras una a una***

***i = Int(h / 10)***

***m = h - i \* 10***

***h = i***

***s = s + m 'La nueva cifra se suma a la variable***

***Wend***

251

***s = s + h 'La cifra residual se suma a la variable  
sumacifras = s  
End Function***

Una vez tenemos la función sumacifras podemos organizar el test en forma de función booleana:

***Public Function esauto(n)  
Dim es As Boolean  
Dim k***

***es = True 'Se declara de entrada que el número es  
"colombiano"***

***k = 0 'Comenzamos a recorrer los números  
menores que n***

***While k < n And es 'No paramos hasta llegar a n o  
hasta que es sea falso***

***If k + sumacifras(k) = n Then es = False 'Si hay  
igualdad, paramos y declaramos "False"***

***k = k + 1***

***Wend***

***esauto = es 'La función recoge el valor de es  
End Function***

Aplicamos esta función a los primeros números y obtendremos el valor VERDADERO en los autonúmeros:

1	VERDADERO
2	FALSO
3	VERDADERO
4	FALSO
5	VERDADERO
6	FALSO
7	VERDADERO
8	FALSO
9	VERDADERO
10	FALSO
11	FALSO
12	FALSO
13	FALSO
14	FALSO
15	FALSO
16	FALSO
17	FALSO
18	FALSO
19	FALSO
20	VERDADERO
21	FALSO
22	FALSO

Por ejemplo, busquemos el primer autonúmero que sigue a 1000:

1000	FALSO
1001	FALSO
1002	FALSO
1003	FALSO
1004	FALSO
1005	FALSO
1006	VERDADERO
1007	FALSO
1008	FALSO
1009	FALSO
1010	FALSO

Resulta ser el 1006.

## ***Test de Kaprekar***

El anterior algoritmo recorre demasiados números y es ineficiente para enteros grandes. El mismo Kaprekar demostró un test en el que sólo hay que analizar enteros no superiores al número de dígitos. Lo copiamos de la página [http://www.numbersaplenty.com/set/self\\_number/](http://www.numbersaplenty.com/set/self_number/)

Define the functions

$$\begin{aligned}d(n) &= \text{the number of digits of } n, \\r(n) &= 1 + ((n - 1) \pmod{9}), \\h(n) &= \begin{cases} r(n)/2 & \text{if } r(n) \text{ is even,} \\ (r(n) + 9)/2 & \text{if } r(n) \text{ is odd.} \end{cases}\end{aligned}$$

Then a number  $n$  is self if, for every  $k = 0, 1, \dots, d(n)$ , it holds

$$\text{sod}(|n - h(n) - 9 \cdot k|) \neq h(n) + 9 \cdot k$$

where  $|x|$  denotes the absolute value of  $x$ .

Lo hemos implementado como función para Excel. No detallamos el código. Sólo lo copiamos con algún comentario:

***Public Function esauto2(n)***

***Dim nc, a, r, h, k***

***Dim es As Boolean***

```

'número de cifras
a = 1: nc = 0
While a <= n
a = a * 10: nc = nc + 1
Wend
'Se preparan las variables del test de Kaprekar
If nc = 0 Then esauto2 = False: Exit Function
r = 1 + ((n - 1) Mod 9)
If r / 2 = r \ 2 Then h = r / 2 Else h = (r + 9) / 2
'Bucle del test
es = True
k = 0
While k <= nc And es
If sumacifras(Abs(n - h - 9 * k)) = h + 9 * k Then es =
False
k = k + 1
Wend
esauto2 = es
End Function

```

Hemos preparado un esquema en el que se puede elegir el inicio y compara las dos funciones, ESAUTO y ESAUTO2. Por si se hubiera deslizado algún error se han efectuado varias comprobaciones y coinciden ambas funciones, pero con gran lentitud en la primera.

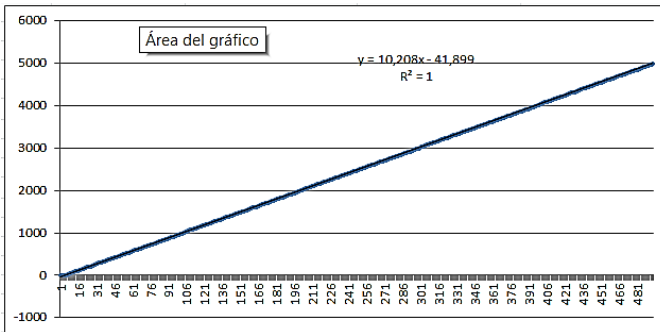
	ESAUTO(N)	ESAUTO2(N)
100199	VERDADERO	VERDADERO
100200	FALSO	FALSO
100201	FALSO	FALSO
100202	FALSO	FALSO
100203	FALSO	FALSO
100204	FALSO	FALSO
100205	FALSO	FALSO
100206	FALSO	FALSO
100207	FALSO	FALSO
100208	FALSO	FALSO
100209	FALSO	FALSO
100210	VERDADERO	VERDADERO
100211	FALSO	FALSO
100212	VERDADERO	VERDADERO

En la siguiente entrada justificaremos este test ofreciendo simultáneamente otro similar.

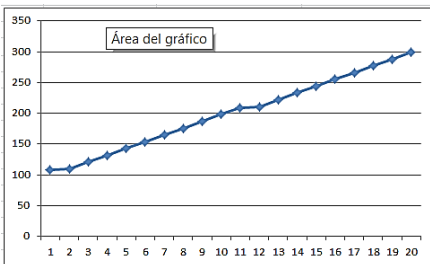
## Distribución de los autonúmeros

Es fácil ver que el incremento entre dos autonúmeros consecutivos es frecuentemente 11. Por ello esperamos tramos lineales en su distribución. Los veremos creando un gráfico con los primeros, pero si elegimos un gráfico con muchos puntos, se nos presenta una distribución prácticamente lineal, con pendiente 10,2, cercana al 11, que como hemos visto, aparece en muchos tramos.





Para ver mejor los tramos lineales elegimos un rango de números más pequeño:



Normalmente el salto de 11 se produce porque equivale a rebajar en una unidad las decenas cuando es posible. Así la suma total se rebaja en 11. Si el primero es autonúmero puede obligar a que el segundo también lo sea, pues si éste admitiera una suma, al rebajar esa unidad podría no ser autonúmero el primero. Esto vale sólo para la mayoría de los casos. No es una regla general. Ocurre algo parecido con 101, 1001, 10001, ... Estos números nos aparecerán en la siguiente entrada.

Hay una forma sencilla de engendrar autonúmeros (no todos), y es comenzar por 9 y después usar la fórmula recurrente

$$C_k = 8 \cdot 10^{k-1} + C_{k-1} + 8$$

El siguiente número sería  $8 \cdot 10 + 9 + 8 = 97$ , el siguiente  $800 + 97 + 8 = 905$ .

Con hoja de cálculo es fácil construir esta generación recurrente. Inténtalo si quieres. En la imagen hemos añadido a la derecha la función **esauto**.

	<b>9</b>	VERDADERO
10	<b>97</b>	VERDADERO
100	<b>905</b>	VERDADERO
1000	<b>8913</b>	VERDADERO
10000	<b>88921</b>	VERDADERO
100000	<b>888929</b>	VERDADERO
1000000	<b>8888937</b>	VERDADERO
10000000	<b>88888945</b>	VERDADERO

En párrafos anteriores descubrimos que todos los números se pueden clasificar en *generados* por la digitación de Kaprekar y *autonúmeros*, que no pueden ser generados. Nos dedicaremos en primer lugar a los generados, y con ellos descubriremos algo más sobre los autonúmeros.

## Números generados

Señalamos que los números 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,... (<http://oeis.org/A176995>) son los complementarios de los autonúmeros. Todos ellos se pueden expresar como  $N + \text{SUMACIFRAS}(N)$ , por lo que Kaprekar les llamó “generados”. A este número  $N$  le podemos llamar **generador** del mismo, pero desafortunadamente no es único, por lo que no podemos considerarlo una función dependiente del número. En efecto, existen números, como el 103, que poseen más de un desarrollo de este tipo, ya que  $103 = 92 + 9 + 2$  y también  $103 = 101 + 1 + 1$ .

Podíamos definir una función GENERADOR si para cada  $N$  eligiéramos el mayor  $K$  que cumple que  $K + \text{SUMACIFRAS}(K) = N$ , y asignar el valor 0 como generador de los autonúmeros. Así sí sería una función. La función AUTO descrita más arriba y debidamente adaptada nos servirá para este propósito:

**Public Function generador(n)**

**Dim k, g**

**g = 0**

**While k < n**

**If k + sumacifras(k) = n Then g = k**

**k = k + 1**

**Wend**

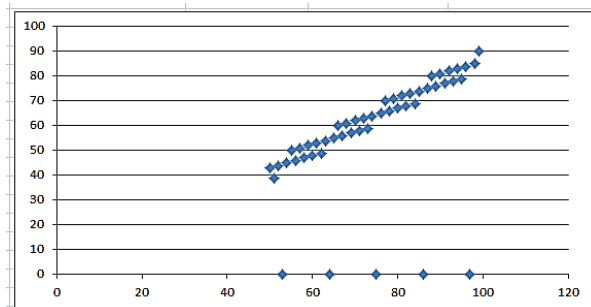
**generador = g**

**End Function**

En esta tabla puedes comprobar que si a cada número de la derecha le sumas la suma de sus cifras, resulta el de la izquierda, salvo el caso del autonúmero 97 al que le hemos asignado un cero.

N	Generador(N)
90	81
91	77
92	82
93	78
94	83
95	79
96	84
97	0
98	85
99	90
100	86
101	100

Si construimos un diagrama de dispersión entre N y su generador, obtenemos un resultado similar a este:



Abajo los puntos de valor 0 representan a los autonúmeros, y los de arriba parecen presentar pautas lineales escalonadas, pero es una ilusión, ya que esos tramos no se podrían solapar. Lo que ocurre es que en este proceso los números consecutivos aparecen muy cercanos, y dan la impresión de sucederse. Analizaremos estos números con más detalle.

Si representamos un número  $N$  de  $k+1$  cifras en base 10, lo estamos generando mediante un polinomio del tipo

$$N = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$$

Si ahora le sumamos sus cifras (digitación) se convertirá en

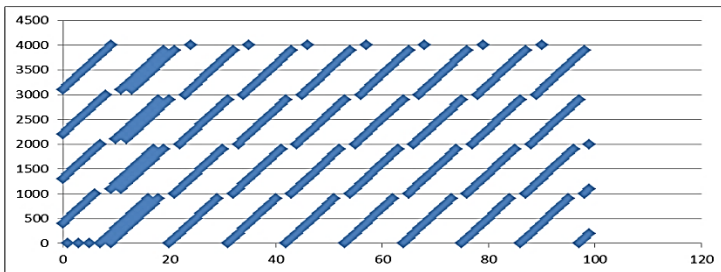
$$N = 2a_0 + 11a_1 + 101a_2 + 1001a_3 \dots + 100 \dots 01a_k$$

Todos los números generados se podrán expresar de esta forma, y los autogenerados, no.

Según esta fórmula, los dobles de las cifras 1...9 serán todos números generados, y si dos generados se diferencian sólo en una unidad en las decenas, sus generados se diferenciarán en 11, como ya hemos observado. Si se diferencian en una unidad de las centenas, sus generados se diferenciarán en 101, y así.

Estas correspondencias también se dan en casi todos los autonúmeros, pues van la par de estos. No se da en todos.

En este gráfico hemos descompuesto cada autonúmero en relación con los menores de 100, y vemos una repetición de tramos lineales a unas alturas de 1001, 2002, 3003 y 4004. Esto es consecuencia de la fórmula que hemos desarrollado.



## Fundamento del algoritmo de Kaprekar

### La fórmula

$$N = 2a_0 + 11a_1 + 101a_2 + 1001a_3 \dots + 100 \dots 01a_k$$

nos da una forma paralela a la de Kaprekar para decidir si  $N$  es autonúmero en pocos pasos (es el mismo proceso con otra orientación). Observa que todos los coeficientes son congruentes con 2 módulo 9, con lo que si llamamos  $G$  al posible generador de  $N$  y  $SC(G)$  a la suma de sus cifras, se cumplirá que  $N \equiv 2SC(G) \pmod{9}$ . Para saber esto no hacía falta la fórmula, pues como 262

G es congruente con  $SC(G)$  módulo 9 y se cumple que  $N=G+SC(G)$ , es evidente que N será congruente con el doble de  $SC(G)$ .

Como 2 es primo con 9, en la ecuación  $N \equiv 2SC(G) \pmod{9}$  se podrá encontrar una solución S, con lo que  $G=9*k+S$  para valores de k no superiores al número de cifras. Lo vemos con el 30: Si  $N=30$ , será  $30 \equiv 3 \equiv 2*SC(G)$ . En este caso  $SC(G) \equiv 6$ , porque  $6+6 \equiv 3 \pmod{9}$ . De esta forma G puede ser 6, 15 o 24. Recorremos de mayor a menor y descubrimos que el 24 vale, porque  $24+2+4=30$ , luego 30 no es autonúmero, sino generado.

Probamos con un número mayor, como 4327, del que ya sabemos por otros medios que es autonúmero:

Hallamos el resto módulo 9 de 4327 (puedes dividir mentalmente o usar la función RESIDUO de Excel) y resulta ser 7. Planteamos  $7 \equiv 2SC(G) \pmod{9}$ . También, mentalmente, vemos que  $SC(G) \equiv 8 \pmod{9}$ . Por tanto, vamos restando de 4327 números del tipo  $9*k+8$  hasta ver si la suma de las cifras de la diferencia es ese número:

K=0:  $4327-8=4321$ , y su suma de cifras no es 8.

K=1:  $4327-17=4310$  y no suman 17

K=2:  $4327-26=4301$ . No suman 26,

K=3:  $4327-35=4292$ . No vale

Acabamos con  $k=4$ , porque la suma de cifras ya no puede ser mayor:

K=4:  $4327-44=4283$ , de suma 17, luego tampoco es válido.

Hemos comprobado, con la misma técnica de Kaprekar y distinta presentación, que 4327 es autonúmero. No puede ser generado.

Para los aficionados a la programación, esta es la función que podemos usar:

***Public Function esauto3(n)***

***Dim nc, a, r, h, k***

***Dim es As Boolean***

***'número de cifras***

***a = 1: nc = 0***

***While a <= n***

***a = a \* 10: nc = nc + 1***

***Wend***

***'módulo 9***

***r = n Mod 9***

***For k = 0 To 8: If (r - 2 \* k) Mod 9 = 0 Then h = k***

***k = 0: es = True***



```

While k <= nc And es
If sumacifras(n - 9 * k - h) = 9*k+h Then es = False
k = k + 1
Wend

esauto3 = es
End Function

```

Hemos construido un esquema de hoja de cálculo en el que vemos la equivalencia de las tres funciones que hemos programado en estas entradas. En la imagen tienes un ejemplo:

N	ESAUTO(N)	ESAUTO2(N)	ESAUTO3(N)
1928	FALSO	FALSO	FALSO
1929	FALSO	FALSO	FALSO
1930	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
1931	FALSO	FALSO	FALSO
1932	FALSO	FALSO	FALSO
1933	FALSO	FALSO	FALSO
1934	FALSO	FALSO	FALSO
1935	FALSO	FALSO	FALSO
1936	FALSO	FALSO	FALSO
1937	FALSO	FALSO	FALSO
1938	FALSO	FALSO	FALSO
1939	FALSO	FALSO	FALSO
1940	FALSO	FALSO	FALSO
1941	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
1942	FALSO	FALSO	FALSO
1943	FALSO	FALSO	FALSO

## Sucesiones recurrentes de números generados

Kaprekar estudió también las sucesiones que se forman si a un número cualquiera le vamos aplicando la digitación tanto a él como a los resultados sucesivos. Por ejemplo, si comenzamos con el 12 tendríamos la sucesión 12, 15, 21, 24, 30,... Evidentemente es infinita, creciente y todos sus elementos, salvo quizás el primero, son generados. Kaprekar destacó que si restamos el último del primero y sumamos las cifras del último, resulta la suma de cifras de todos ellos. Por ejemplo, aquí,  $30 - 12 + 3 = 21 = 1 + 2 + 1 + 5 + 2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 0$

Aunque el autor le dio mucha importancia, basta recorrer la generación para darse cuenta de su validez:  $12 + 3 + 6 + 3 + 6 = 30$ , luego al restar resultarán las sumas de cifras menos la del último. Es una obviedad.