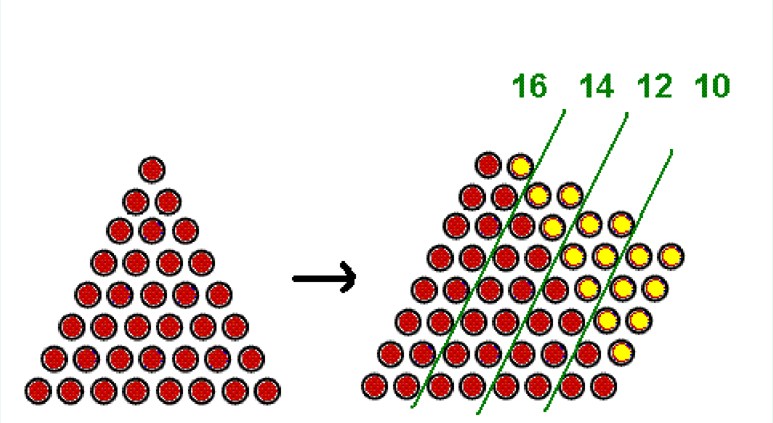
Números y hoja de cálculo VI



Curso 2013-14

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Llegamos al sexto volumen de los resúmenes anuales del blog “Números y hoja de cálculo” con la apertura de nuevos temas que continuaremos en un futuro.

El primero, de las sucesiones recurrentes de segundo orden ha constituido todo un ciclo, en el que hemos presentado los ejemplos más representativos, salvo la de Fibonacci, que por su popularidad no vimos necesario incluir, pero de la que no descartamos futuros desarrollos. Para el curso siguiente quedarán las recurrentes de tercer orden.

La comprobación de conjeturas con hoja de cálculo nos parece una idea que dará bastante juego, porque es una forma sencilla de internarse en cuestiones profundas. El título es falaz, porque una conjetura no se puede comprobar con esta herramienta. Sólo se pretende aclarar conceptos.

Contiene este volumen unas entradas teóricas sobre permutaciones y ciclos. Con ello no abandonamos la Combinatoria, aunque se percibe que los contenidos preferidos en estas publicaciones son los números poligonales y los primos.

Contenido

TABLA DE CONTENIDO

SEGUIMOS CON LOS POLIGONALES

Los números poligonales y en especial los triangulares y cuadrados son fuente continua de cuestiones y curiosidades. Siempre han estado presentes en volúmenes anteriores y creemos que volverán en los sucesivos. Algunas cuestiones implican el uso del sistema de numeración decimal, lo que resta universalidad a lo estudiado, pero sus posibilidades hecen que sigamos trabajando con cifras,

TRIANGULARES DE LADO PAR

Los números triangulares 3, 10, 21, 36,…son aquellos cuyo número de orden es par: 3=T(2)=2*3/2; 10=T(4)=4*5/2; 21=T(6)=6*7/2,…Si aplicamos la expresión algebraica de un número triangular, la de estos será

$T(2n)=2n(2n+1)/2=n(2n+1)=2n^2+n$

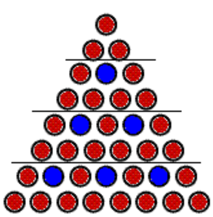
Los podemos encontrar con nuestro ***Buscador de Naturales***, (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) exigiendo que los números se expresen como $2n^2+n$

CUADRATICO 2 1 0

Así obtenemos

Solución	Detalles
3	2* 1^2 + 1 * 1 + 0
10	2* 2^2 + 1 * 2 + 0
21	2* 3^2 + 1 * 3 + 0
36	2* 4^2 + 1 * 4 + 0
55	2* 5^2 + 1 * 5 + 0
78	2* 6^2 + 1 * 6 + 0

Los podemos representar como formados por filas de triángulos de 3 elementos separados por otros elementos aislados. En la imagen hemos representado el 36, es decir T(8)



Observa que está formado por 10 triángulos de tres elementos y 6 puntos aislados. Nos sugiere que un número triangular de orden par equivale a triangular de orden mitad multiplicado por 3 más su triangular anterior, es decir:

$T(2n)=3T(n)+T(n-1)$

Es fácil demostrarlo por inducción:

$T(2)=3*T(1)+T(0)=3*1+0=3$;
$T(4)=3*T(2)+T(1)=3*3+1=10$…

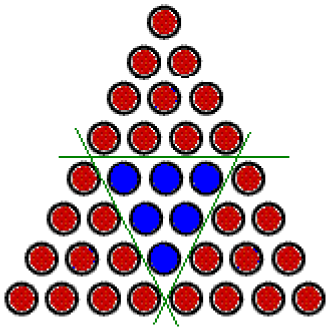
Probemos con $T(2(n+1))=T(2n)+(2n+1)+(2n+2)$ por definición de número triangular. Si aceptamos la hipótesis para n, tendremos:

$T(2(n+1))=3*T(n)+T(n-1)+(n+1+n+1+n+1)+n=3*T(n)+3*(n+1)+T(n-1)+n=3*T(n+1)+T(n)$, luego la hipótesis se cumple para n+1.

La fórmula $T(2n)=3T(n)+T(n-1)$ es válida

Adaptamos una demostración visual contenida en

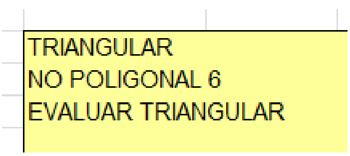
http://math.berkeley.edu/~rbayer/09su-55/handouts/ProofByPicture-printable.pdf



Así se ve mejor la relación.

En realidad, estos números **son los triangulares que no pueden ser hexagonales**. Se sabe que todo hexagonal es triangular, porque su expresión es H(n)=n(2n-1)=2n(2n-1)/2=T(2n-1), pero el número de orden del triangular es 2n-1, impar, luego los que no son hexagonales formarán la sucesión que estamos estudiando: 3, 10, 21, 36,…, que está contenida en http://oeis.org/A014105

Con el Buscador se puede expresar muy bien esta idea:



Indica que han de ser triangulares pero no hexagonales, y calcula sus órdenes, que resultan ser pares, como era de esperar:

Solución	Detalles
3	Orden triangular: 2
10	Orden triangular: 4
21	Orden triangular: 6
36	Orden triangular: 8
55	Orden triangular: 10
78	Orden triangular: 12
105	Orden triangular: 14
136	Orden triangular: 16
171	Orden triangular: 18

Expresión como resta entre una suma de pares y otra de impares

En la página OEIS enlazada se destacan estas relaciones:

3=4-1

10=6+8-1-3

21=8+10+12-1-3-5

36=10+12+14+16-1-3-5-7

No se justifican, y esto es una invitación a que lo hagamos nosotros. En primer lugar generalizamos. Llamamos a nuestra sucesión TT(n)

TT(n)=T(2n)=SP(2(n+1),n)-SI(1,n)

Con **SP(2(n+1),n)** deseamos expresar que se toman **n** números pares a partir de **2(n+1)** y con **SI(1,n)** que se suman los primeros **n** impares. Lo intentamos demostrar por inducción:

TT(n+1)=TT(n)+2n+1+2n+2, como ya sabemos por los párrafos anteriores. Si usamos la hipótesis para n queda:

TT(n+1)=2(n+1)+2(n+2)+…+2(2n)-1-3-5-7…- (2n-1)+2n+1+2n+2

Para construir la nueva suma de pares hay que añadir 2(2n+1)+2(2n+2) y eliminar 2(n+1). La diferencia es 4n+2+4n+4-2n-2=6n+4, que ha de salir de los nuevos sumandos 2n+1+2n+2=4n+3, que equivalen a 6n+4-(2n+1), siendo el paréntesis el nuevo impar que habría que restar, luego la estructura de la fórmula se mantiene y es correcta.

Usamos el álgebra

TT(n)=T(2n)=n(2n+1)=$2n^2$+n

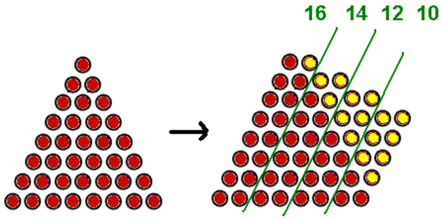
SP(2(n+1),n)=(2(n+1)+2(2n))*n/2=$3n^2$+n

SI(1,n)=n^2 como es sabido.

Por tanto, se verifica la diferencia.

Demostración visual

Ahí te la dejamos para el caso de 36. Analízala e intenta reproducirla para otros casos:



Esta construcción sólo es posible porque el triángulo es de orden par.

Otros desarrollos

Se cumple que **TT(n)=T(2n)=3+7+11+15+…(4n-1)**, es decir, que es la suma de impares tomados de 4 en 4 a partir de 3. Si sabes verlo, en la anterior imagen se muestra esa suma con claridad. Puedes justificarlo algebraicamente:

3+7+11+15+…(4n-1)=(3+4n-1)*n/2=(4n+2)*n/2=n(2n+1)=TT(n)

Este desarrollo se puede escribir así: **TT(n)=2^2-1^2+4^2-3^2+6^2-5^2+8^2-7^2…,** que es una forma elegante de terminar este tema.

TRIANGULARES Y CUADRADOS CON PIEZAS

Quien ha entrado en el mundo de la programación elemental sabe qué es la operación de *concatenar* cadenas (“strings”): situar sus caracteres uno detrás del otro. Si lo representamos por &, equivaldría a que “Pablo “&”Pérez”= “Pablo Pérez”. En las hojas de cálculo disponemos de la función CONCATENAR, que une varios textos de celdas en uno

=CONCATENAR(A12;B22;G1).

Más difícil es concatenar números naturales, de forma que el resultado sea otro verdadero número en el que cada cifra tenga su valor relativo. Una forma se basa en esta función CONCATENAR. Para ello debemos convertir los números en cadenas, con la función TEXTO, después, concatenarlos, y finalmente, usar la función VALOR para devolverles el carácter numérico. Tiene un inconveniente, y es que TEXTO ha de ir acompañado de un formato, y esto lo complica todo. En PARI no existe ese problema, por lo que puedes definir la concatenación entre números mediante

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))

Un método más matemático, y es el que adoptaremos para la hoja de cálculo es el de multiplicar el número de la izquierda por una potencia de 10 adecuada y sumar luego el de la derecha. Así, concatenar 255 con 182 equivaldría al número 255*10^3+182=255182

¿Qué exponente ha de tener esa potencia de 10? El número de cifras del que está a la derecha. Para encontrar ese número podemos usar el logaritmo decimal, de esta forma: =ENTERO(LOG(N;10))+1. Por tanto, una concatenación numérica vendría dada por la fórmula

CONCAT(A;B)=A*10^((ENTERO(LOG(B;10))+1))+B

Esta fórmula fallaría para B=0, por lo que habría que retocarla con un condicional, pero no lo haremos. Basta que se sepa que existe esa función numérica, y en la práctica usaremos una rutina en Basic.

Se producen muchas curiosidades cuando concatenamos números naturales. Veamos algunas. Es evidente que nos movemos en cuestiones curiosas y no teóricas. Comenzamos generando números triangulares. Ya veremos más adelante otros casos.

Estudiamos algunas concatenaciones concretas:

Producir triangulares

Intentaremos concatenar un número **n** consigo mismo o con otros relacionados con él a fin de conseguir un número triangular. Por ejemplo, 426 concatenado consigo mismo produce el triangular 426426. Para entender mejor lo que sigue, recuerda que todo número triangular se puede expresar como N(N+1)/2, es decir, la mitad de un oblongo N(N+1). En este caso, 426426=923*924/2

Triangular concatenando n//n

En primer lugar probaremos a concatenar un número consigo mismo para producir un triangular. Ya están publicados en http://oeis.org/A068899

55, 66, 5050, 5151, 203203, 255255, 426426, 500500, 501501, 581581, 828828, 930930, 39653965, 50005000, 50015001, 61566156, 3347133471, 5000050000, 5000150001, 6983669836, 220028220028, 500000500000, 500001500001…

Si te llaman la atención los ejemplos del tipo 500…500 y 500…1500…1, piensa que no son nada extraordinarios:

500500=1000*1001/2, que es un triangular

50015001=10001*10002/2 es otro. Investiga casos similares.

Triangular concatenando 2n//n

De esta forma se generan los siguientes:

21, 105, 2211, 9045, 222111, 306153, 742371, 890445, 1050525, 22221111, 88904445, 107905395, 173808690, 2222211111, 8889044445, 12141260706, 15754278771, 222222111111, 888890444445, 22222221111111, 36734701836735, 65306123265306, 88888904444445, 163718828185941…

¿Es siempre triangular 2222…1111…? Sí, porque sus dobles se descomponen como 4444…2222=6666..6*6666…7, es decir, números oblongos formados por productos de números consecutivos. En lo que sigue acudiremos varias veces al hecho de que el doble de un triangular es un oblongo, k(k+1).

Se puede demostrar que cada vez que se añade la cifra a los factores aparecen 4444..2222. Lo razonamos con 666*667=444222 pero para más cifras se comprende igual: En efecto, si 666*667=444222, al añadir una cifra tenemos:

6666*6667=(6000+666)(6000+667)=36000000+6000*1333+666*667=

43998000+444222=44442222.

Observa que si aumentamos las cifras, 1333 se convertiría en 133….33 y el sumando final 43998000 en 4399…8000… con lo que el efecto de reconstruir 44444 y 2222 sería el mismo.

Algo similar ocurre con la subsucesión 9045, 890445, 88904445,…engendrada por los oblongos 134*135, 1334*1335, 13334*13335,…Son casualidades que ocurren al dividir las potencias de 10 en tercios o en sextos.

Si deseas reproducir los resultados puedes usar este código en PARI

```
concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^5,a=concatint(2*n,n);if(istriang(a),print(a
))))}
```

La función ***istriang*** usa la propiedad de que ocho veces un triangular más la unidad es un número cuadrado

(fácil: $n(n+1)/2*8+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, un cuadrado)

Hemos publicado esta sucesión en https://oeis.org/A226742

Concatenación inversa n//2n

¿Y si concatenáramos en sentido contrario, primero el número y después su doble? Pues, aunque menos llamativo, también se construyen triangulares. Son estos:

36, 1326, 2346, 3570, 125250, 223446, 12502500, 22234446, 1250025000, 2066441328, 2222344446, 2383847676, 3673573470, 125000250000, 222223444446, 5794481158896, 12500002500000, 12857132571426, 22222234444446, 49293309858660…

Intenta razonar la aparición de estos números, con un método similar al usado en el anterior caso: 36, 2346, 223446, 22234446,… es porque sus dobles se descomponen como 666…68*666…69. Observa también esta otra subsucesión: 125250, 12502500, 12500025000, que provienen de los oblongos 500*501, 5000*5001,…¿Y el resto? Te lo dejamos por si encuentras una pauta.

Código PARI para este caso:

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)

{for(n=1,10^7,a=concatint(n,2*n);if(istriang(a),print(a))))}

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A226772

Concatenación n//n+1

También se producen números triangulares:

45, 78, 4950, 5253, 295296, 369370, 415416, 499500, 502503, 594595, 652653, 760761, 22542255, 49995000, 50025003, 88278828, 1033010331, 1487714878, 4999950000, 5000250003, 490150490151, 499999500000, 500002500003, 509949509950, 33471093347110, 49999995000000, 50000025000003, 69834706983471…

Se destaca el subconjunto 45, 4950, 499500,….y es porque sus dobles son 9999…*10000… y también los 5253, 502503, 50035003…¿En qué se parecen entre sí?

Puedes reproducirlos con este código PARI

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)

{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(istriang(a),print(a)))}

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A226788

Con n+1//n resultan verdaderos monstruos

21, 26519722651971, 33388573338856, 69954026995401, 80863378086336,…

A partir de este último no se han podido encontrar más para n<10^10, o resultados menores que 10^20. Quizás con una herramienta o equipo más potentes se pueda hallar alguno más fuera de esa acotación. Los lectores quedáis invitados a intentarlo. Podéis usar este código PARI

```
concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
istriang(x)=issquare(8*x+1)
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(istriang(a),print(a)))}
```

Si disponéis de MATHEMATICA también bastará adaptar este otro, añadido por T.D. Noe a A226789:

TriangularQ[n_] := IntegerQ[Sqrt[1 + 8*n]]; t = {}; Do[s = FromDigits[Join[IntegerDigits[n+1], IntegerDigits[n]]]; If[TriangularQ[s], AppendTo[t, s]], {n, 100000}]; t (* T. D. Noe, Jun 18 2013 *)

No vamos seguir las concatenaciones de este tipo. Las dejamos para quien le apetezca encontrar más ejemplos curiosos. Sí podíamos seguir jugando con las cifras, pero con otras estructuras. Seguimos buscando triangulares.

Otras concatenaciones para triangulares

No hemos intentado todavía concatenar un número con su reverso. Por ejemplo, 59 con 95 forman el triangular 5995. Intentamos una búsqueda por ahí. Antes de presentar resultados hay que advertir que los terminados en 0, como 90, producen resultados ambiguos, en este caso 990. Por eso restringiremos la búsqueda a números no múltiplos de 10. En ese caso resultan estas soluciones:

55, 66, 5995, 8778, 617716, 828828, 35133153, 61477416, 1264114621,…, que forman una subsucesión de http://oeis.org/A003098

Un resultado curioso es si concatenamos un número n por la izquierda con 10*n, porque en ese caso resulta un número duplicado con un cero en el centro. Hemos encontrado estos, que resultan muy vistosos:

41041, 66066, 165301653, 56661056661, 3719010371901, 276816602768166, 13776656013776656, 28265441028265441, 41631576041631576, 47337278047337278, 55666611055666611, 82189446082189446, 91836735091836735, 118525260118525260, 196059210196059210…

Evitamos seguir insistiendo en el tema. Con estos ejemplos nuestros lectores pueden abordar otras búsquedas.

Piezas para cuadrados

Vamos a intentarlo con cuadrados. Este tema está más estudiado, y ya hay más casos publicados en OEIS. Los recorremos.

n//n

Es difícil que un número concatenado consigo mismo produzca un cuadrado. Los pocos casos que aparecen ya están publicados:

1322314049613223140496,
2066115702520661157025,
2975206611629752066116,
4049586776940495867769,
5289256198452892561984,… http://oeis.org/A092118

La razón de que se descubran tan pocos es la siguiente: el número concatenado n//n es en realidad **n*(10^c+1)**, siendo **c** el número de cifras de **n**, por lo que **n<10^c**. Por ejemplo, 7878=78*(10^2+1)=78*101. Si deseamos que n//n sea un cuadrado, 10^c+1 ha de contener algún cuadrado como factor, porque si es libre de cuadrados, es imposible que **n** aporte los factores que quedan para completar un cuadrado, puesto que es menor que 10^c.

Habrá que buscar números del tipo 10^k+1 que no sean libres de cuadrados.

Si factorizamos, por ejemplo, desde 11 hasta 10^50+1, descubrimos que sólo en cuatro casos contiene un cuadrado (copiamos la tabla parcialmente)

100000000001=11^2*23*4093*8779

1000000000000000000001=7^2*11*13*127*2689*459691*909091

1000000000000000000000000000000001=7*11^2*13*23*4093*8779*599144041* 183411838171

1000000000000000000000000000000000000001=7*11*13^2*157*859*6397*216451*1058313049*388847808493.

Para completar un cuadrado como el que se pide, **n** deberá contener los factores primos que **no figuran al cuadrado** (la parte libre) y además, si acaso, otros factores adicionales elevados al cuadrado. Ya vimos en su día que si multiplicamos N por la parte libre de N conseguiremos el mínimo múltiplo cuadrado de N

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html).

Cumplido esto, deberá tener el número de cifras adecuado. Por ejemplo, en el primer caso

N=23*4093*8779*k^2 y si queremos que tenga 11 cifras, el valor mínimo de k es 4, con lo que nos da la primera solución: n=23*4093*8779*16=13223140496, que engendra el cuadrado **1322314049613223140496**, primer término de http://oeis.org/A092118

Si tomamos k=5 obtenemos el segundo término: n=20661157025, que engendra el segundo cuadrado **2066115702520661157025**

Para k=6 se engendra el tercer cuadrado: **29752066115702479339** y para k=7, 8 o 9 se engendran los términos cuarto a sexto. A partir de este valor se sobrepasan las cifras.

Así que el caso 100000000001 engendra seis términos.

Pasamos al siguiente:

10000000000000000000001=7^2*11*13*127*2689*459691*909091

El valor adecuado de n será del tipo n=11*13*127*2689*459691*909091*k^2

Para k=1 y k=2 no se llega al número de cifras mínimo. Para k=3 nos resulta el séptimo término: 18367346938775510204118367346938775510204 1.
No están publicados más términos. Para k=4, 5 y 6 nos resultan términos inéditos:

32653061224489795918432653061224489795918 4

51020408163265306122551020408163265306122 5

73469387755102040816473469387755102040816 4

No deseamos marear a nuestros lectores, por lo que no abordamos los siguientes casos. Sólo dejamos una muestra:

132231404958677685950413223140496132231404958677685950413223140496

2n//n

Se puede seguir el mismo razonamiento y descomponer en factores los números del tipo 2*10^c+1 que contienen cuadrados

20000000000000000001=3*7^2*83*1663*985694468327

2000000000000000000000000000000001=3*43^2*245169227*1470638299531951365929

Con el primero

326530612244897959216326530612244897 96

734693877551020408236734693877551020 41

130612244897959183686530612244897959184

Con el segundo

2163331530557057869118442401298001081665765278528934559221200649 00

2617631151974040021633315305570581308815575987020010816657652785 29

3115197404002163331530557057869121557598702001081665765278528934 56

3656030286641427798810167658193621828015143320713899405083829096 81

4240129799891833423472147106544082120064899945916711736073553272 04

4867495943753380205516495402920502433747971876690102758247701460 25

5538128718226068144943212547322882769064359113034072471606273661 44

6252028123309897241752298539751223126014061654948620876149269875 61

7009194159004867495943753380205523504597079502433747971876690102 76

7809626825310978907517577068685783904813412655489453758788534342 89

8653326122228231476473769605192004326663061114115738236884802596 00

Los primeros están publicados en

http://oeis.org/A115529

n//2n

No explicamos ya el procedimiento. Los candidatos son:

12=2^2*3

1000000000000000000000002=2*3*7^2*19961*1704003
0781111603

10000000000000000000000000000000000000000000
000000000000002=2*3*89^2*
353891*184629530872289*322031275472311276888 6
882952137673

Con el primero obtenemos el 36=6^2

Con el segundo:

816326530612244897959216326530612244897959 18
4

18367346938775510204082367346938775510204081
64

32653061224489795918368653061224489795918367
36

Y con el tercero, verdaderos gigantes:

50498674409796742835500568110087110213356899
38139123848001009973488195934856710011362201
7422042671379876278247696 00

Publicados en http://oeis.org/A115527

Concatenación con diferencias constantes

Casi todos los casos están estudiados. Aquí ya no disponemos del análisis de los factores de 2*10^c+1 o similares. Sólo podemos acudir a la búsqueda, porque al añadir un sumando al número todo el planteamiento anterior falla.

n//n+1

Los primeros ejemplos los buscaremos con hoja de cálculo (no mostraremos el código) y con PARI.

N	N//N+1	Raíz
183	183184	428
328	328329	573
528	528529	727
715	715716	846
6099	60996100	7810
13224	1322413225	36365
40495	4049540496	63636

Hemos añadido la raíz cuadrada de la concatenación. Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A030465 y llama a los primeros números de Sastry.

El código PARI adecuado es

concatint(a,b)=eval(concat(Str(a),Str(b)))
{for(n=1,10^7,a=concatint(n,n+1);if(issquare(a),print(a)))}

N+1//n

Los primeros ejemplos son

N	N//N+1	Raíz
81	8281	91
8241	82428241	9079
9801	98029801	9901

También publicado en http://oeis.org/A054214

Adapta tú el código PARI para encontrar más.

n//n+2

El número par 7874 es el más pequeño que cumple que concatenado con el siguiente par 7876 produce un cuadrado: 78747876=8874^2. Este caso ya está publicado en http://oeis.org/A115426.

n+2//n

Es el problema simétrico del anterior y también está estudiado en http://oeis.org/A115431

Aquí paramos, porque otras concatenaciones resultan menos atractivas. No obstante, con lo que ya has leído puedes emprender búsquedas por tu cuenta.

Consideremos el conjunto de divisores de un número natural N que son cuadrados perfectos. Sabemos que el mayor de ellos es la **parte cuadrada** del número), a la que designaremos como PC(N).

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html)

Si descomponemos N en factores primos

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \dots {p_k}^{a_k} \quad (1)$$

para encontrar la parte cuadrada basta elevar a cada factor primo al mayor número par contenido en cada uno de los exponentes, es decir

$$PC(p^r) = p^{r-r\ MOD\ 2} \qquad (2)$$

Así, por ejemplo, para encontrar la parte cuadrada de $26460=2^2*3^3*5*7^2$ bastará truncar cada exponente a un número par, con lo que quedaría PC(26460)= $2^2*3^2*7^2$=1764. A la raíz cuadrada de esa parte se le suele llamar **Raíz Interna** del número N

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/12/emparedado-de-cuadrados-2.html)

En este caso la raíz interna de 26460 sería 42=2*3*7.

Todo esto lo recordamos para poder estudiar mejor los divisores cuadrados de un número. Se pueden considerar las siguientes afirmaciones:

Los divisores cuadrados de N coinciden con los de su parte cuadrada.

Si k es divisor cuadrado de N, todos sus exponentes en (1) serán pares, pero ninguno sobrepasará al correspondiente en PC(N), luego será también divisor de esa parte cuadrada. Inversamente, todo divisor de PC(N) lo es también de N.

El número de divisores cuadrados de N coincide con el de los divisores de la raíz interna de N.

Esto es así porque si extraemos la raíz cuadrada a todos los divisores cuadrados de N, es claro que permanecerán los mismos factores primos pero con sus exponentes reducidos a la mitad, que es la misma operación sufrida por la raíz interna.

En el ejemplo elegido, si esa raíz interna es 42, poseerá ocho divisores, por ser igual a 2*3*7 (aplicando la fórmula del número de divisores resultaría (1+1)(1+1)(1+1)=8). Efectivamente, si buscamos todos los divisores cuadrados de 26460 nos resultan estos ocho: 1764, 441, 196, 49, 36, 9, 4 y 1, que son los cuadrados de los divisores de 42: 42, 21, 14, 7, 6, 3, 2 y 1

Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores cuadrados de N y los divisores de su raíz interna, de forma que cada uno de los primeros es el cuadrado de otro del segundo conjunto.

Por ejemplo, para N=1200, su parte cuadrada es 400, su raíz interna 20, y se da la correspondencia entre los divisores de 20 y los divisores cuadrados de 20.

400	20
100	10
25	5
16	4
4	2
1	1

Esto nos da, como hemos visto, un procedimiento para contar los divisores cuadrados de un número, pero también para sumarlos, si recordamos la fórmula de la función sigma_2, que suma los cuadrados de los divisores

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/03/la-familia-de-las-sigmas-2.html)

$$\sigma_2(N) = \prod \frac{{p_i}^{2(e_i+1)} - 1}{{p_i}^2 - 1}$$

Aplicamos esa fórmula a la raíz interna. Esto es importante, porque esa raíz determina el número de divisores cuadrados. En nuestro ejemplo lo haríamos así:

SDC(26460)=(2^4-1)/(2^2-1)* (3^4-1)/(3^2-1)* (7^4-1)/(7^2-1)=5*10*50=2500

Comprueba: 1764+441+196+49+36+9+4+1=2500

Si deseas comprobar este resultado con otros números, con este codigo PARI puedes sumar todos los divisores cuadrados:

print(sumdiv(26460,d,d*issquare(d)))

Sustituyes el ejemplo 26460 por otro número cada vez que lo desees.

Con el Basic de las hojas de cálculo también lo puedes calcular mediante esta función:

public function sumdivcuad(n)
dim i,p,a,s

p=1

```
s=0
for i=1 to sqr(n)
a=i*i
if n/a=n\a then s=s+a
next i
sumadivcuad=s
end function
```

Por último, el Buscador nos proporciona un planteo muy intuitivo:

Buscamos desde el número	**1**
Hasta el número	**26460**

Con estas propiedades:

CUADRADO
DIVISOR 26460
EVALUAR TOTALES

Recorre los números desde 1 hasta 26460 y busca cuadrados que sean divisores de ese número, sumando después los resultados.

Solución	Detalles
1	1
4	5
9	14
36	50
49	99
196	295
441	736
1764	2500

Se repite el resultado de 2500.

Comprueba de varias formas que el número 84000 posee sólo seis divisores cuadrados cuya suma es 546. Usa también la fórmula basada en sigma_2 ((2^6-1)/(2^2-1)*(5^4-1)/(5^2-1)=21*26=546)

Como otras variantes de la función sigma, esta suma de divisores cuadrados es una función multiplicativa, por lo que basta definirla para p^r, siendo p un factor primo. Para ello, según (2) tomamos como exponente de su raíz interna (r – r MOD 2)/2, con lo que la suma de los divisores cuadrados será

$$SDC(p^r) = \frac{p^{2\left(\frac{r-r\,mod\,2}{2}+1\right)} - 1}{p^2 - 1}$$

Por ejemplo, la suma de divisores cuadrados de $2048=2^{11}$ será igual a (2^12-1)/(2^2-1)=4095/3=1365. Comprobamos: 1024+256+64+16+4+1 = 1365.

En el caso particular de que r sea igual a 2 o a 3 la suma de divisores cuadrados será p^2+1. Es muy fácil razonarlo y lo usaremos más adelante.

Otro caso particular se da cuando la raíz interna está libre de cuadrados, tipo RI(N)=p*q*r*s…, la suma buscada será $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)(1+s^2)$…Sería el caso, por ejemplo, del número 60500, cuya parte cuadrada es 12100 y la raíz interna 110=2*5*11, libre de cuadrados, por lo que la suma de divisores cuadrados de 60500 debería ser $(1+2^2)(1+5^2)(1+11^2)$=5*26*122=15860. En efecto, los divisores cuadrados de 60500 suman

12100+3025+484+121+100+25+4+1=1586

SUMA DE DIVISORES CUADRADOS

Engendramos cuadrados

La siguiente sucesión presenta varias propiedades respecto a la suma de los divisores cuadrados que merece la pena destacar

1764, 60516, 82369, 529984, 2056356, 2798929, 3534400, 18181696, 38900169, 96020401, 97121025, 335988900, 455907904, 457318225, 617820736, 1334513961, 1599200100, 2176689025, 3279852900, 4464244225, 8586616896…

(publicada en https://oeis.org/A232554)

Todos ellos son cuadrados tales que la suma de sus divisores cuadrados, incluidos ellos mismos, también es un cuadrado. Sí, puedes volver a leerlo si no lo has captado. En la siguiente tabla puedes comprobar esta propiedad:

A(n)	Factores	Raiz	sigma_2	Raiz	Factores
1764	[2,2][3,2][7,2]	42	2500	50	[2,1][5,2]
60516	[2,2][3,2][41,2]	246	84100	290	[2,1][5,1][29,1]
82369	[7,2][41,2]	287	84100	290	[2,1][5,1][29,1]
529984	[2,6][7,2][13,2]	728	722500	850	[2,1][5,2][17,1]
2056356	[2,2][3,2][239,2]	1434	2856100	1690	[2,1][5,1][13,2]
2798929	[7,2][239,2]	1673	2856100	1690	[2,1][5,1][13,2]
3534400	[2,6][5,2][47,2]	1880	4884100	2210	[2,1][5,1][13,1][17,1]
18181696	[2,6][13,2][41,2]	4264	24304900	4930	[2,1][5,1][17,1][29,1]
38900169	[3,8][7,2][11,2]	6237	45024100	6710	[2,1][5,1][11,1][61,1]
96020401	[41,2][239,2]	9799	96079204	9802	[2,1][13,2][29,1]
97121025	[3,6][5,2][73,2]	9855	113635600	10660	[2,2][5,1][13,1][41,1]
335988900	[2,2][3,2][5,2][13,2][47,2]	18330	488410000	22100	[2,2][5,2][13,1][17,1]
455907904	[2,6][17,2][157,2]	21352	607622500	24650	[2,1][5,2][17,1][29,1]
457318225	[5,2][7,2][13,2][47,2]	21385	488410000	22100	[2,2][5,2][13,1][17,1]
617820736	[2,6][13,2][239,2]	24856	825412900	28730	[2,1][5,1][13,2][17,1]
1334513961	[3,8][11,2][41,2]	36531	1514610724	38918	[2,1][11,1][29,1][61,1]
1599200100	[2,2][3,2][5,2][31,2][43,2]	39990	2313610000	48100	[2,2][5,2][13,1][37,1]
2176689025	[5,2][7,2][31,2][43,2]	46655	2313610000	48100	[2,2][5,2][13,1][37,1]
3279852900	[2,2][3,2][5,2][23,2][83,2]	57270	4747210000	68900	[2,2][5,2][13,1][53,1]
4464244225	[5,2][7,2][23,2][83,2]	66815	4747210000	68900	[2,2][5,2][13,1][53,1]
8586616896	[2,6][3,8][11,2][13,2]	92664	13011964900	114070	[2,1][5,1][11,1][17,1][61,1]

En la primera columna figuran los elementos de la sucesión. Hemos prescindido del 1, que también cumpliría la misma propiedad. En la siguiente su descomposición en factores primos, que ya analizaremos. Como en el caso anterior sugeríamos sumar los divisores cuadrados mediante la función **sigma_2** aplicada a la raíz interna, hemos calculado dicha suma en las siguientes columnas, comprobando mediante su raíz cuadrada que se trata de cuadrados perfectos. Finamente también se han calculado los factores de esas raíces.

Se pueden generar con este código en lenguaje PARI:

```
{for(n=1,10^5,m=n*n;k=sumdiv(m,d,d*issquare(d));if
(issquare(k)&&k>>1,print(m)))}
```

También podemos usar el Buscador para comprobar si algún número de la sucesión cumple lo exigido. Lo vemos para 60516:

Buscamos desde el número	**1**
Hasta el número	**60516**

Con estas propiedades:

CUADRADO
DIVISOR 60516
EVALUAR SITOTAL CUADRADO

Busca números cuadrados divisores de 60516, los va sumando y avisa si una suma es cuadrada. El resultado es:

Solución	Detalles
1	1 es cuadrado
4	5
9	14
36	50
1681	1731
6724	8455
15129	23584
60516	84100 es cuadrado

Por tanto, 60516 cumple lo exigido.

Factorización

Podemos observar que ningún término de la sucesión es potencia de un solo primo.

Con dos factores primos distintos sólo se dan tres casos, que puedes buscar en la tabla, y los primos que intervienen son 7, 41 y 239, curiosamente pertenecientes a la sucesión de primos p para los que p^2+1 no está libre de cuadrados

(ver el documento de Rafael Parra http://hojamat.es/parra/NumerosLDC.pdf

y la sucesión https://oeis.org/A224718).

En el caso de los tres citados, 7^2+1=2*25^2, 41^2+1=2*29^2 y 239^2+1=2*13^4. Si ahora los multiplicamos dos a dos, obtendremos un factor 2*2=4 multiplicado por dos cuadrados, luego será cuadrado perfecto, como se pedía.

Otra curiosidad es que las sumas de cuadrados son todas pares y muchas de ellas múltiplos de 100. Sus raíces son pares hasta donde hemos buscado. Queda ahí abierta una cuestión para estudiarla con más ciencia que nosotros.

Sucesión derivada

Si multiplicamos los términos de esta sucesión por otro número **libre de cuadrados** resultará otra sucesión formada por números **no cuadrados** con suma de divisores cuadrados propios **que resulta ser cuadrada**:

3528, 5292, 8820, 10584, 12348, 17640, 19404, 22932, 24696, 26460, 29988, 33516, 37044, 38808, 40572, 45864, 51156, 52920, 54684, 58212, 59976, 61740, 65268, 67032, 68796, 72324, 74088, 75852, 81144, 82908, 89964, 93492, 97020…(publicada en https://oeis.org/A232555)

Podemos construir todos los múltiplos de ese tipo hasta una cota, por ejemplo un millón y después ordenarlos en sucesión. Así lo hemos hecho y casi todos los primeros son múltiplos de 1764.

En realidad esta sucesión es parte de otra más amplia en la que aparecen todos los casos, y no sólo estos múltiplos que hemos considerado. Son estos:

Números cuya suma de divisores cuadrados propios es otro cuadrado mayor que 1

900, 3528, 4900, 5292, 8820, 10404, 10584, 12348, 17640, 19404, 22932, 24696, 26460, 29988, 33516, 37044, 38808, 40572, 45864, 51156, 52920, 54684, 58212, 59976, 61740, 65268, 67032, 68796, 72324, 74088, 75852, 79524, 81144, 81796, 82908, 89964, 93492, 97020…(publicada en https://oeis.org/A232556)

En ellos la suma de divisores cuadrados propios es otro cuadrado. Por ejemplo, la suma en el caso de 5292 es 1764+441+196+49+36+9+4+1=2500=50^2,

que también es un cuadrado.

Aunque los hemos buscado con funciones de hoja de cálculo, se puede intentar también con PARI. Prueba si quieres este código:

```
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d)*(d<n));if(issquare(k)&&k>>1,print(n)))}
```

Todos los encontrados son múltiplos de 4 y al menos poseen tres factores primos distintos. De ellos, algunos son también cuadrados:

900, 4900, 10404, 79524, 81796, 417316, 532900, 846400, 1542564, 2464900, 3232804, 3334276, 3496900, 12432676, 43850884, 50836900, 51811204, 71470116, 107453956, 236975236, 253892356, 432889636, 544102276, 864948100, 1192597156, 1450543396, 1554094084, 2024820004, 2165413156…(publicada en https://oeis.org/A232557)

No son cuadrados el resto: 3528, 5292, 8820, 10584, 12348,…que resultan ser los múltiplos de la primera sucesión que ya tratamos.

Resumimos:

Sucesiones de cuadrados

(1) Pueden formar un cuadrado sumándoles todos sus divisores cuadrados propios. Nos resultaría la primera sucesión: 1764, 60516, 82369, 529984,…(A232554)

(2) Forman un cuadrado sólo la suma de divisores propios, sin sumarles el número dado. Tendríamos la sucesión: 900, 4900, 10404, 79524, 81796,…(A232557)

Sucesiones de no cuadrados

(3) Números cuyos divisores cuadrados suman otro cuadrado. Son 3528, 5292, 8820, 10584,…(A232555) Son múltiplos de elementos de la sucesión (1)

Sin condicionamiento

(4) La unión de la sucesión (2) con la (3) (A232556)

Formamos palindrómicos

Con la suma de divisores cuadrados podemos formar números palindrómicos. Es una simple curiosidad, pero está inédita, que sepamos. Hay dos formas, con divisores cuadrados propios o con todos:

Con divisores propios

Estos son los números en los que la suma de divisores cuadrados propios es un número palindrómico de al menos dos cifras (para eliminar casos triviales):

144, 324, 1089, 1936, 5929, 13225, 30752, 46128, 58564, 76880, 92256, 107632, 125316, 138384, 149769, 153760, 154449, 169136, 199888, 215264, 230640, 261392, 292144, 322896, 338272, 342225, 353648, 378225, 399776, 405769, 445904, 461280, 476656, 507408, 522784, 538160, 568912, 584288, 599664,…

(Los hemos publicado en https://oeis.org/A232892)Si expresamos el resultado en una tabla de dos columnas, vemos los resultados palindrómicos a la derecha:

144		66
324		131
1089		131
1936		626
5929		171
13225		555
30752		20202
46128		20202
58564		15251
76880		20202
92256		20202
107632		20202
125316		48784

Llama la atención la frecuencia con la que aparece el valor 20202, y prolongando la tabla veríamos muchos más. La razón de esto es que el primer caso, $30752=2^5*31^2$, tiene como divisores cuadrados 15376+3844+961+16+4+1=20202, que provienen de los factores 2^4*31^2 =15376 y entonces, si multiplicamos ese número por factores libres de cuadrados se volverá a dar el mismo caso. En efecto, según la tabla, los siguientes son: 46128=15376*3, 76880=15376*5, 92256=15376*6, 107632=15376*7,…

La pregunta es por qué no funciona este razonamiento en los primeros casos de la tabla. La respuesta es que esos números son cuadrados y si los multiplicamos por un libre de cuadrados, se convertirían ellos mismos en divisores cuadrados propios, y eso alteraría la suma.

Un código PARI para encontrarlos puede ser

reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d)*(d<n));if(palind(k),print(n)))}

Con todos los divisores cuadrados

Los primeros números con esta propiedad son

15376, 30752, 46128, 76880, 92256, 107632, 153760, 169136, 199888, 215264, 230640, 261392, 292144, 322896, 338272, 353648, 399776, 445904, 461280, 476656, 507408, 522784, 538160, 568912, 584288, 599664, 630416, 645792, 661168, 707296, 722672, 784176, 814928, 845680, 876432, 891808, 907184, 937936, 953312, 999440,…

(Los hemos publicado en https://oeis.org/A232893)

Todos producen la suma de cuadrados 20202, que ya vimos, y todos son múltiplos del primero 15376 con cociente libre de cuadrados. Esta situación llega hasta el número 2217121, que ya no es múltiplo de 15376 y la suma palindrómica que produce es 2217122, ya que sus únicos divisores cuadrados son él mismo y la unidad.

Código PARI:

```
reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)
{for(n=1,10^5,k=sumdiv(n,d,d*issquare(d));if(palind(k),print(n)))}
```

Otras sumas

Podemos intentar lograr números de otros tipos, como triangulares u oblongos, pero los resultados son tan abundantes que pierden su interés. En el caso de los oblongos los primeros resultados son múltiplos de 144. Ahí tienes una exploración.

IGUALDAD DE SUMAS DE CUADRADOS CON ESCALÓN

Repasando algunas propiedades curiosas me encontré en hojamat.es con esta:

$365=10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$

La pregunta inmediata que me surgió fue la de si existían otros números con la misma propiedad o similar. Los encontré en OEIS (http://oeis.org/) pero no descubriré dónde por ahora, aunque los lectores experimentados sabrán hallarlos. Con esto quiero aclarar que lo que consigamos está ya descubierto, pero el objetivo (tan frecuente en este blog) es intentar la concurrencia de métodos y el uso de la hoja de cálculo.

Nos acercaremos al problema con el planteamiento de dos preguntas:

¿Existen más números en los que la suma de tres cuadrados consecutivos coincida con los dos siguientes?

¿Qué ocurrirá si aumentamos o disminuimos el número de cuadrados?

Es probable que hayas pensado en el $25=3^2+4^2=5^2$, luego parece que sí existen casos similares. Lo vemos.

Acercamiento con la hoja de cálculo

Si concretamos un número de inicio **n** y un número de cuadrados igual a **k+1** en el primer miembro y a **k** en el segundo, con estas sencillas líneas podemos descubrir si existen otros casos:

For i=1 to 10000 (por ejemplo)
‘calcula el primer miembro

```
a = 0
For l = 0 To k
a = a + (i + l) ^ 2
Next l
'calcula el segundo miembro
b = 0
For l = k + 1 To 2 * k
b = b + (i + l) ^ 2
Next l
'Los compara y si son iguales lo comunica
If a = b Then
Msgbox(n)
Msgbox(a)
End If
Next i
```

Hemos tomado como tope 10000, pero después habrá quizás que ampliar. Implementa esto como rutina en tu hoja de cálculo y descubrirás que para cada k existe una solución y sólo una. Recogemos en una tabla los primeros resultados:

k	n	a
1	3	25
2	10	365
3	21	2030
4	36	7230
5	55	19855
6	78	45955
7	105	94220

Ahora ya descubrimos que los resultados coinciden con los recogidos en http://oeis.org/A059255, pero no podemos dejarlo así, porque en la tabla aparecen números triangulares y múltiplos de 5. Algo habrá detrás. Intentamos descubrirlo.

Un poco de Álgebra

Si sospechamos que las soluciones son únicas para cada valor de **k**, es probable que exista una relación algebraica sencilla. En efecto, aunque los principios son algo farragosos, con paciencia algebraica llegaremos a la meta. No damos todos los detalles y te dejamos practicar:

Primera suma de cuadrados A

Suponemos que comienza en n y termina en n+k (k+1 sumandos), es decir:

$$A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots (n+k)^2$$

Segunda suma de cuadrados B

$$B = (n+k+1)^2 + (n+k+1+1)^2 + (n+k+1+2)^2 + \cdots (n+k+1+k-1)^2$$

Observa cómo lo hemos escrito, para que te aproveches de la fórmula para la suma de números naturales consecutivos.

Desarrolla cada suma separando los coeficientes de $\mathbf{n^2}$, de **n** y los independientes. Como esta tarea te puede llevar a la desesperación, usa las dos populares fórmulas:

$$1 + 2 + 3 + \cdots k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Calcula A-B para igualarla a cero y ve encontrando los coeficientes:

De $\mathbf{n^2}$ te deberá resultar **a=1**. Es fácil verlo.

De **n**, si sabes usar la primera fórmula ofrecida, con algún retoque, te dará $\mathbf{b=-2k^2}$

El coeficiente independiente es un poco más complejo de encontrar correctamente. Puedes usar la suma de cuadrados de los primeros naturales. Deberá resultar $\mathbf{c=-2k^3-k^2}$

Así que la ecuación para calcular **n** quedaría así:

$$n^2 - 2k^2n - 2k^3 - k^2 = 0$$

Su discriminante es el cuadrado de 2k(k+1), lo que nos garantiza una solución entera. Tomamos la positiva y, efectivamente **n=k(2k+1)**, que es el número triangular de orden 2k, como habíamos sospechado al principio.

Para cada valor de k, la igualdad de cuadrados pretendida ocurre para n=k(2k+1), el número triangular correspondiente a 2k, y es por tanto la solución única.

Hemos resuelto con rigor lo que sospechábamos tras el uso de la hoja de cálculo. Esto es imprescindible: las herramientas informáticas sólo proponen o dan pistas, pero no demuestran nada. A veces olvidamos esta limitación.

Expresión de la suma

Ahora podemos calcular el valor de las dos sumas. Sustituimos k(2k+1) en una de ellas, y sacando factor común nos resulta $A(k)=k(k+1)(2k+1)(12k^2+12k+1)/6$. Por ejemplo, para k=3 resulta

3*4*7*(12*9+12*3+1)=2030.

El problema se ha reducido a una cuestión algebraica.

Carácter de múltiplos de 5

Es fácil ver que aunque la expresión propuesta tiene denominador 6, su resultado será entero, porque ese ha sido su origen, y porque los factores k(k+1)(2k+1) garantizan un factor 2 y un 3. Estúdialo, que no es difícil de descubrir.

¿De dónde sacamos el factor 5?

Lo podemos ver mediante congruencias módulo 5. El valor de k puede presentar respecto al 5 los restos 0, 1, 2, 3 o 4.

Resto 0: En ese caso **k** contiene el factor 5

Resto 1: El factor $12k^2+12k+1$ será múltiplo de 5

Resto 2: Contamos con el factor 2k+1

Resto 3: El factor $12k^2+12k+1$ sería congruente con 12*9+12*3+1=108+36+1=145, múltiplo de 5

Resto 4: Nos proporciona el factor deseado el valor de k+1

En todos los casos la suma de cuadrados será un múltiplo de 5.

Hemos terminado con éxito. Nuestras sospechas tenían fundamento y la sucesión 25, 365, 2030, 7230, 19855, 45955, 94220, 176460… representa simplemente los distintos valores de un polinomio de quinto grado definido sobre los números naturales.

Y SEGUIMOS CON PRIMOS Y DIVISORES

IDENTIDAD DE CIFRAS CON EL MDI

Observa esta sucesión de números

12, 18, 36, 54, 60, 72, 90, 108, 126, 132, 144, 156, 162, 180, 198, 204, 216, 228, 234, 240, 252, 270, 276, 306, 320, 324, 342, 348, 360, 372, 378, 396, 414, 420, 432, 450, 504, 516, 522, 540, 558, 594, 612, 624, 630, 636, 660,…

Si los divides entre 2 todas las veces posibles, el cociente (que es su mayor divisor impar o MDI) presenta la misma suma de cifras que el número original. Por ejemplo, las cifras de 660 suman 12. Lo voy dividiendo entre 2: 660, 330, 165, y el cociente 165 también tiene unas cifras que suman 12.

Al igual que hicimos en la entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/12/mayor-divisor-propio-con-la-misma-suma.html,

aprovecharemos esta cuestión para repasar algunas cuestiones teóricas.

El mayor divisor impar (MDI(N)) de un número par N es siempre divisor propio, y la relación entra ambos es la de $N=MDI(N)*2^k$, siendo k el mayor exponente posible tal que 2^k divide a N y recibe el nombre de *valuación* de N respecto a 2

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/12/volvemos-visitar-al-mayor-divisor-impar.html)

Si B es el mayor divisor impar de A se cumple $A=B*2^k$ siendo k la valuación de A respecto a 2. En el caso que nos ocupa A sería par y k>0

Condición necesaria de igualdad de sumas

Busquemos números pares que presenten la misma suma de cifras que su mayor divisor impar (MDI)

Si dos números presentan la misma suma de cifras es que son congruentes módulo 9, según vimos en la entrada referida más arriba.

Por tanto tendremos, $N \equiv MDI(N)$ (mod 9, o lo que es igual, N-MDI(N) ha de ser múltiplo de 9. Sustituimos N por $MDI(N)*2^k$ y obtenemos: $MDI(N)*2^k-MDI(N)=MDI(N)(2^k-1)$ ha de ser múltiplo de 9.

Pueden ocurrir tres hechos para que esto se cumpla:

(a) Si MDI(N) es múltiplo de 9, se cumple seguro, y como N es par, habrá en la sucesión múltiplos de 18. Compruébalo: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162…

Unos términos de la sucesión serán múltiplos de 18

(b) Si MDI(N) es múltiplo de 3 pero no de 9, (2^k-1) ha de ser múltiplo de 3, lo que ocurre para k=0, 2, 4, 6, y los pares, porque $2^{2n}-1=M(2^2-1)=M*3$. Otra forma de verlo consiste en tener en cuenta que en este caso $2^k\equiv 1$ (mod 3, es decir, que 1 ha de ser resto potencial de 2^k respecto a 3, y eso sólo ocurre en los pares: $2^0\equiv 1$, $2^1\equiv 2$, $2^2\equiv 1$, $2^3\equiv 2$, $2^4\equiv 1$,…Luego si MDI(N) es múltiplo de 3 pero no de 9, k ha de ser par.

Otros se compondrán de un múltiplo de 3 que no lo es de 9 multiplicado por una potencia par del número 2

Entre los primeros están 12, 60, 132, 156,…

Hay que recordar que estas condiciones son necesarias pero no suficientes. El número 48 se descompone como $48=3*2^4$, y sin embargo no cumple la igualdad de suma de cifras: las del 48 suman 12 y las de su mayor divisor impar, 3.

(c) Si MDI(N) no es múltiplo de 3, entonces 2^k-1 lo ha de ser de 9, y esto sólo ocurre si k es múltiplo de 6, ya que, recorriendo los restos potenciales del 2 módulo 9 obtenemos:

Restos potenciales			
Exponente	Número	Resto	Con signo
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	4
3	8	8	-1
4	16	7	-2
5	32	5	-4
6	64	1	1
7	128	2	2
8	256	4	4
9	512	8	-1
10	1024	7	-2
11	2048	5	-4
12	4096	1	1
13	8192	2	2
14	16384	4	4
15	32768	8	-1
16	65536	7	-2
17	131072	5	-4
18	262144	1	1
19	524288	2	2

Esta imagen procede de nuestra herramienta

http://hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/hoja/potenciales.xls o su correspondiente para OpenOffice ***potenciales.ods***.

En ella puedes observar que sólo los exponentes que son múltiplos de 6 producen un resto potencial igual a 1.

En la sucesión aparecerán números cuyo MDI no sea múltiplo de 3 y cuya valuación respecto al 2 sea múltiplo de 6.

Es el caso de 320, 1216, 1600, 2240…

Una cuestión de hoja de cálculo

Hemos clasificado los términos de la sucesión que estamos estudiando en tres tipos distintos. Creemos que nuestro razonamiento es correcto, pero ¿y si hubiera un error?¿y si apareciera un número que no obedeciera a estos tipos?. Podríamos obtener cuatro listas distintas, una, la general que hemos presentado arriba, y otras tres que corresponderían a los tipos presentados. Serían estas (sólo escribimos los primeros términos y se supone que incluimos sólo los que cumplen la condición de igualdad de suma de cifras):

General: 12, 18, 36, 54, 60, 72, 90, 108, 126, 132, 144, 156, 162, 180, 198, 204, 216, 228, 234, 240,…

Tipo A (MDI múltiplo de 9): 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252…

Tipo B (MDI múltiplo de 3 pero no de 9): 12, 60, 132, 156, 204, 228, 240, 276, 348, 372, 420,…

Tipo C (MDI no múltiplo de 3): 320, 1216, 1600, 2240,… (de estos hay menos)

12	18	12	320
18	36	60	1216
36	54	132	1600
54	72	156	2240
60	90	204	
72	108	228	
90	126	240	
108	144	276	
126	162	348	
132	180	372	
144	198	420	
156	216	516	
162	234	624	
180	252	636	
198	270	660	
204	306	708	
216	324	732	

En la imagen están los cuatro tipos en columna, para valores inferiores a 3000. Ahora unificamos las tres últimas y las ordenamos de menor a mayor. Así obtenemos dos listas idénticas, que constituyen nuestra comprobación para elementos menores que 3000.

Esto no prueba nada, pero aprovecha el manejo de la hoja de cálculo en una cuestión teórica.

12	12
18	18
36	36
54	54
60	60
72	72
90	90
108	108
126	126
132	132
144	144
156	156
162	162
180	180
198	198
204	204
216	216

Si te has iniciado al lenguaje PARI, muy útil en las cuestiones que estudiamos, puedes comprobar la lista anterior con estas líneas:

mdi(n)= n / 2^valuation(n, 2)

digsum(n)={local (d, p); d=0; p=n; while(p, d+=p%10; p=floor(p/10)); return(d)}

{for (n=2, 10^3,m=mdi(n);if(digsum(n)==digsum(m)&&m<>n,print(n)));}

Hemos usado este código para publicar nuestra sucesión, que estaba inédita, en http://oeis.org/A230354

IDENTIDAD CON OTRAS PARTES DEL NÚMERO

Estudiamos en el apartado anterior la coincidencia en la suma de cifras de un número par con su mayor divisor impar. Probemos ahora con otras funciones.

Con la parte libre

Si no recuerdas qué son la parte cuadrada y la parte libre de un número natural puedes consultar

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html

Si tomamos números no libres de cuadrados, su parte libre será distinta de ellos, y podemos plantear también la igualdad de suma de cifras. Son estos:

12, 24, 60, 100, 120, 132, 150, 156, 200, 204, 228, 240, 264, 276, 300, 320, 348, 372, 420, 500, 516, 552, 600, 624, 636, 660, 700, 708, 732, 744, 780, 912, 1000, 1014, 1050, 1056, 1068, 1092, 1100,…

Se pueden encontrar conel Buscador. Estas serían las condiciones:

NO LIBREDECUADRADOS
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(N/PARTECUAD(N))

Y el resultado:

Solución
12
24
60
100
120
132
150
156
200
204
228
240

Todos ellos contienen un cuadrado mayor que 1, por lo que su parte libre será menor que ellos. Por ejemplo, la parte libre de 1200 es 3, porque 1200=3*20^2. Se cumple que la suma de cifras de 1200 es también 3.

N será igual a N=PL(N)*k^2, con lo que la condición ahora será PL(N)(k^2-1) es múltiplo de 9 (representamos la parte libre mediante el símbolo PL).

Aquí hay una novedad respecto al anterior apartado, y es que PL(N) no puede ser múltiplo de 9, pues contendría un cuadrado, luego sólo lo podría ser de 3 y

(k^2-1) aportaría el otro 3, o bien PL(N) no es múltiplo de 3, con lo que (k^2-1) debería serlo de 9. Analizamos:

(A) PL(N) es múltiplo de 3 y (k^2-1) también

Para que se cumpla la segunda condición basta con que k no sea múltiplo de 3, como puedes razonar fácilmente. Esto ocurre, por ejemplo en el 156=4*39, en el que el cuadrado 4 no es múltiplo de 3 y la parte libre 39 sí lo es.

(B) Si PL(N) no es múltiplo de 3, (k^2-1) lo será de 9

En ese caso k^2 será congruente con 1 módulo 9

Ocurre en los términos 100, 200, 320, 500, 700, 1000, 1100, 1216, 1300, 1400, 1700, 1900, 2023, 2200, 2240, 2300, 2432, 2600…

En ellos el valor de k puede ser 8, 10, 17, 19, 26… que son los números cuyo cuadrado es congruente con 1 módulo 9 (http://oeis.org/A056020).

Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A230355

El código para obtenerlos en PARI es muy parecido al del anterior caso:

digsum(n)={local (d, p); d=0; p=n; while(p, d+=p%10; p=floor(p/10)); return(d)}

```
{for (n=2,
10^3,m=core(n);if(digsum(n)==digsum(m)&&m<>n,print(n)));}
```

Con la parte cuadrada

De forma simétrica, si tomamos números no cuadrados, que son distintos de su parte cuadrada, podremos plantear también la identidad de la suma de cifras. Resultan ser estos:

10, 18, 27, 40, 45, 54, 63, 72, 90, 108, 117, 126, 135, 153, 160, 162, 171, 180, 207, 216, 220, 234, 243, 250, 252, 261, 270, 304, 306, 315, 333, 342, 351, 360, 405, 414, 423, 432, 450, 490, 504, 513, 522, 531, 540, 603, 612, 621, 630, 640, 702, 711, 720, 801, 810, 931…

Con el Buscador resultan fácilmente.

Condiciones

NO CUADRADO
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(PARTECUAD(N))

Se entienden bien sin más explicación.

Resultado

Solución
10
18
27
40
45
54
63
72
90
108
117
126
135

Si tomamos, por ejemplo, 270, su parte cuadrada es 9 y la suma de cifras es también 9. Entre ellos están los de la forma N*10 con N cuadrado, en los que la igualdad de sumas de cifras es trivial.

Siguiendo el mismo razonamiento de casos anteriores, si denominamos PC(N) a la parte cuadrada de N, tendremos que la diferencia entre ambos ha de ser múltiplo de 9:

N-PC(N)=PC(N)*(PL(N)-1), siendo PL(N) la parte libre, ha de ser múltiplo de 9. Al analizarlo, las consideraciones son inversas a las del caso anterior:

(1) PC(N) múltiplo de 3

En ese caso también lo será de 9, y la parte libre puede ser cualquiera. En la sucesión figurarán múltiplos de 9 que no sean cuadrados, pero no todos, porque la condición no es suficiente: 99 es múltiplo de 9, no es cuadrado, pero sus cifras suman 18 y las de su parte cuadrada 9. Son congruentes módulo 9, pero no iguales.

(2) PC(N) no múltiplo de 3

En ese caso, PL(N) -1 será congruente con 9, y eso sólo ocurre en los números del tipo 9k+1 que sean libres de cuadrados: 1, 10, 19, 37, 46, 55, 73, 82, 91, 109, 118…

N	PC(N)	PL(N)
10	1	10
18	9	2
27	9	3
40	4	10
45	9	5
54	9	6
63	9	7
72	36	2
90	9	10
108	36	3
117	9	13
126	9	14
135	9	15
153	9	17
160	16	10
162	81	2
171	9	19
180	36	5
207	9	23
216	36	6
220	4	55
234	9	26
243	81	3
250	25	10

En esta tabla tienes analizados los primeros ejemplos: si en la segunda columna no figura un múltiplo de 9, entonces en la tercera aparecerán 1, 10, 19,…55,…

Con el lenguaje PARI se buscan estos números de forma similar a la del anterior caso, sustituyendo ***m=core(n)*** por ***m=n/core(n)***, Los tenemos publicados en http://oeis.org/A230356

Último ejemplo

Números compuestos que coinciden en su suma de cifras con su función SOPF (suma de factores primos tomados sin repetición)

22, 94, 105, 114, 136, 140, 160, 166, 202, 222, 234, 250, 265, 274, 346, 355, 361, 382, 424, 438, 445, 454, 516, 517, 526, 532, 562, 634, 702, 706, 712, 732, 812, 913, 915, 922, 1036, 1071, 1086, 1111…

Lo habrás adivinado ya. La hemos publicado en http://oeis.org/A230357

Código PARI

```
sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1,
matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }

digsum(n)={local (d, p); d=0; p=n; while(p, d+=p%10;
p=floor(p/10)); return(d)}

{for (n=4,
2*10^3,m=sopf(n);if(digsum(n)==digsum(m)&&m<>n
,write1("final.txt",n,", ")));}
```

Otros ejemplos ya publicados

Números de Smith

En ellos la suma de sus cifras coincide con las de sus factores primos tomados con repetición, como el 666, cuyas cifras suman 18 y las de su desarrollo en factores primos 2*3*3*37 también: 2+3+3+3+7=18. Los tienes en http://oeis.org/A006753

Números “hoax” (o engañosos)

Poseen la misma propiedad pero tomando los primos sin repetir. 424=2^3*53 y las sumas de cifras son: 4+2+4=10. 2+5+3=10, tomando el 2 una sola vez. También están publicados en http://oeis.org/A019506

Si te pones a ello podrás descubrir más ejemplos.

PRIMO Y SU NÚMERO DE ORDEN

En el mes de septiembre, en un diálogo a través de Twiter, Benjamin Vitale

(http://benvitalenum3ers.wordpress.com/) me hizo notar que 3559 es el número primo de número de orden 499, y que ambos números tienen la misma suma de cifras, 22. Ya sabéis que en este blog respondemos, cuando es posible, a todas las ideas que nos llegan con una cuestión a resolver, y no es la primera vez que estas nos llegan de Ben Vitale. En este caso podría ser:

¿Qué detalles pueden tener en común un número primo y su número de orden en la lista de los mismos?

En sus cifras

Coincidencia entre cifras

No sólo pueden coincidir en la suma de sus cifras. Será relativamente fácil que lo hagan en la última cifra. En efecto, los primos 17, 31, 83, 109, 157, 563, 587, 599, 661, 811, 823, 859, … Por ejemplo, el 17 es el primo número 7 y 31 el número 11. Puedes estudiarlos mejor en http://oeis.org/A085598

Es más difícil que ambos números coincidan en sus dos últimas cifras. Los primeros números que cumplen esto son (los presentamos por pares, número de orden y primo):

(243,1543), (519, 3719), (589, 4289), (703, 5303), (741, 5641), (823, 6323), (901, 7001), (959, 7559), (973, 7673), (1033, 8233), (1081, 8681), (1197, 9697), (1223, 9923), (1443, 12043), (1477, 12377), (1491, 12491),(1541, 12941), (1723, 14723) (1751, 14951)…

En todos ellos coinciden las dos últimas cifras del primo y de su número de orden. Para encontrarlos necesitamos dos funciones: CORTACIFRAS y PRIMONUM.

Cortar cifras

La primera no es difícil de programar en cualquier lenguaje. Su misión es seleccionar algunas cifras de la expresión decimal de un número. La versión más simple, sin control de errores, es esta:

CORTACIFRAS(P,M,N)=(P MOD 10^N)\10^(M-1),

en la que P es el número, M el inicio del corte y N el final, ambos incluidos (pueden ser iguales y entonces se corta una sola cifra). El significado de la fórmula es que calculas el módulo o residuo de P respecto a 10^N y el resultado lo divides de forma entera entre 10^(M-1)

Si del número 288762 deseas seleccionar las cifras que van de la segunda a la quinta deberás efectuar estos cálculos:

288762 MOD 10^5 = 88762 y ese número lo divides sin decimales entre 10^(2-1), es decir 8876.

En hoja de cálculo se expresaría así:

=COCIENTE(RESIDUO(288762;10^5);10).
Compruébalo.

En PARI es más sintético: (288762%10^5)\10

Encontrar el número primo dado su número de orden

Esta función PRIMONUM es más difícil de conseguir. En PARI está yá implementada: ***prime(k),*** pero no para números grandes***.*** En el resto del texto usaremos esta notación prime(k) que resulta muy sintética. En hoja de cálculo no está disponible de entrada, aunque sí en algún complemento. Un código que resulta un poco lento podría ser este:

```
Public Function primonum(n)
Dim p, c, i

'encuentra el primo cuyo número de orden es n
c = 0: i = 2
While c < n
If esprimo(i) Then c = c + 1: p = i
i = i + 1
Wend
primonum = p
End Function
```

Para quienes siguen este blog no será muy difícil encontrar la función ***esprimo***.

Con estas dos funciones y una estructura tipo FOR_NEXT puedes encontrar los primos deseados. Hemos usado también este programa en PARI:

cutdigit(a,p,q)=(a%10^q)\10^(p-1)

{for(n=5,5000,p=prime(n);if(cutdigit(p,1,2)==cutdigit(n,1,2),print(p)))}

En primer lugar hemos definido ***cutdigit*** para seleccionar cifras y después la hemos usado entre 1 y 2 para averiguar si coinciden las cifras en ***k*** y ***prime(k)***

Hemos publicado la tabla para prime(k) en https://oeis.org/A232102 y la de k ya estaba publicada en https://oeis.org/A067838

Modificando lo anterior podemos buscar la igualdad en las tres últimas cifras. Los resultados son estos:

(1491, 12491), (1723, 14723), (4119, 39119), (4437, 42437), (6347, 63347), (6931,69931), (7817, 79817), (9551, 99551), (12083, 129083), (12637, 135637), (13647, 147647), (15103, 165103), (16637, 183637), (17181, 190181),…

Los números primos los hemos publicado en https://oeis.org/A232104 y sus números de orden los tienes en https://oeis.org/A067841

Con cuatro tenemos que forzar la máquina, porque en Basic resulta lento y en PARI la función prime(k) sólo está definida hasta un tope, que en nuestro caso se supera después de obtener el primo número 24833. Hemos tenido que acudir a la función primenext (o nuestra primprox), pero no daremos detalles. El resultado es, para los números de orden:

9551, 15103, 18697, 23071, 24833, 48229, 53853, 58681, 83819, 91617, 93909, 107647, 115259, 120487, 126497, 156991, 160681, 162857, 177477, 181833, 189143, 194229, 208679, 213703, 221569,…

Y para los números primos:

99551, 165103, 208697, 263071, 284833, 588229, 663853, 728681, 1073819, 1181617, 1213909, 1407647, 1515259, 1590487, 1676497, 2116991, 2170681, 2202857, 2417477, 2481833, 2589143, 2664229, 2878679, 2953703, 3071569,…

Las hemos incorporado a https://oeis.org/A232189 y https://oeis.org/A232188 respectivamente.

No seguimos presentando sucesiones, por nuestro deseo de no cansar. Sólo destacaremos que los primos 1407647 y 1515259, de órdenes respectivos 107647 y 115259 son los primeros en presentar una coincidencia de cinco cifras, y prime(303027)=4303027, prime(440999)=6440999 son los primeros en coincidir en seis.

De los de coincidencia en siete cifras damos el primero: prime(5517973)=95517973, pero le siguen más. Hay que forzar el PARI y con las hojas de cálculo mejor lo olvidamos.

Coincidencia total

Existen primos cuyo número de orden constituye todo su final en cifras. Son los llamados ***primos automórficos***, y están publicados en http://oeis.org/A046883. Por ejemplo, el primo número 9551 resulta ser 99551 y el 303027, 4303027, coincidencia en las últimas cifras.

Operaciones con cifras

Las coincidencias en la suma de cifras similares a las de 499 y 3559 están recogidas en http://oeis.org/A033548 y reciben el nombre de “primos de Honaker”. Puedes ver en la siguiente dirección un ejemplo notable de este tipo de primos:

http://primes.utm.edu/curios/page.php/37778931862957154241011.html

Con nuestro Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) podemos reproducir esta sucesión de primos de Honaker. Las condiciones serían:

```
es sumacif(n)=sumacif(primoene(n))
evaluar primoene(n)
```

Son fáciles de entender, porque son cercanas al lenguaje natural. Con ellas se obtiene la sucesión deseada en la segunda columna:

Solución	Detalles
32	131
56	263
88	457
175	1039
176	1049
182	1091
212	1301
218	1361
227	1433
248	1571
293	1913
295	1933

Hemos investigado las coincidencias en el producto de cifras, pero no presenta gran interés, ya que las cifras 0 aumentan las posibilidades de coincidencia. Te lo dejamos como propuesta. Los primeros son: 17, 181, 409, 443, 491, 601, 809, 1013, 1069,…

Está publicadas relaciones basadas en la concatenación de cifras:

Concatenar p y prime(p) y que resulte un primo:

A084667: La concatenaciones primeras son (separamos con un guión el número de orden y el primo) 2-3, 4-7, 6-13, 12-37, 17-59, 18-61, 23-83, 27-103, 30-113, 35-149, 36-151,…

Concatenación inversa

A084669: Si invertimos la concatenación también obtenemos ejemplos:

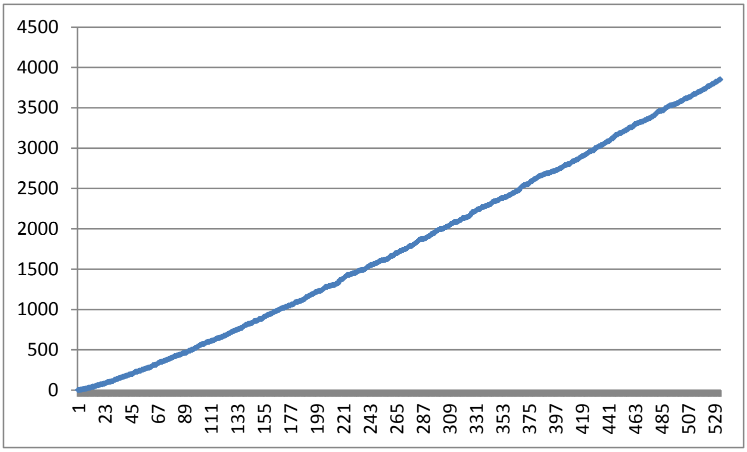
5-3, 23-9, 67-19, 73-21, 157-37, 307-63, 389-77, 419-81, 449-87, 587-107,…

Hemos investigado también las diferencias entre prime(k) y k, pero o están publicadas o carecen de interés.

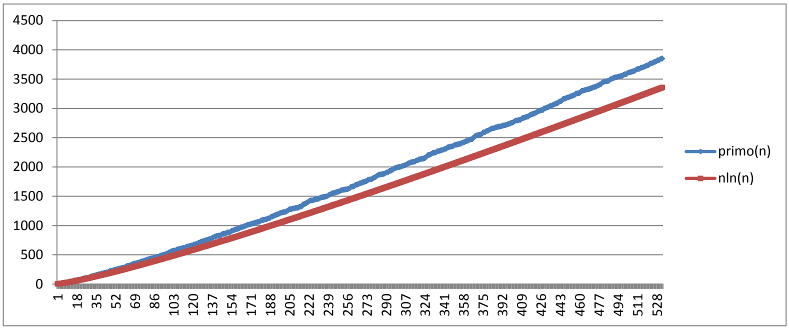
RESTOS EN LA FUNCIÓN PRIMO(N)

Seguimos con nuestra tendencia a jugar y experimentar con los conceptos matemáticos. Ahora lo haremos con la enumeración de los números primos, por la que asignamos a cada número natural N el número primo que ocupa el lugar N en su orden natural. Esta función así construida la podemos llamar PRIMO(N), prime(n) en inglés, o, como hemos usado este año en el blog, PRIMNUM(N). Para simplificar la escritura usaremos P(N).

Esta función, como es de esperar, está bien estudiada. En http://oeis.org/A000040 tienes muchos detalles. Si la representamos (de forma falsamente continua) notamos que es casi lineal, con concavidad hacia arriba.



En la página de OEIS citada se incluye la propiedad de que P(n) es siempre mayor que **nln(n)**. En efecto, si representamos ambas funciones en un mismo gráfico, observamos que son muy similares. Ambas tienden “suavemente” a infinito conjuntamente con **n**.



Relaciones lineales

Esto nos va a servir para lo siguiente: Para cualquier valor de N, podemos encontrar el cociente entero P(N)\N y el resto correspondiente. Por ejemplo, P(22)=79, porque este es el primo que ocupa el lugar 22. Podemos expresarlo así: 79=3*22+13. Esto siempre es posible, y el cociente entero será igual o mayor que 1, porque P(N)>N. Aquí nos interesará el resto 13.

Todo número primo se puede expresar mediante el cociente entero entre su número de orden y el resto correspondiente.

En la gráfica esto equivaldría a dibujar una línea recta que corta exactamente a la gráfica de los primos en el punto (N,P(N)).

Restos posibles

El resto de la división entera entre un primo y su número de orden puede presentar muchos valores distintos. Vemos algunos de los primos publicados:

2, 3, 11, 13, 37, 43, 1087, 64591, 64601, 64661,… se caracterizan porque su resto respecto a su número de orden es 1. Por ejemplo, 64661 es el primo número 6466 y se cumple que 64661=6466*10+1. Estos números primos los tienes en http://oeis.org/A048891

También aparecen restos 2 (ver http://oeis.org/A156152).

Por ejemplo, P(73)=367=73*5+2. Y también 3 (A171430) o resto -1 (A052013)

¿Aparecerán todos los restos si recorremos los números primos y los dividimos entre sus números de orden? En http://oeis.org/A004648 tienes su enumeración ordenada:

0, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 5, 9, 9, 1, 2, 1, 2, 5, 8, 7, 10, 11, 10, 13, 14, 17, 22, 23…

Al recorrer los primeros 1000 primos echamos de menos algún resto, como el 18 o el 20 ¿acabarán apareciendo? Para averiguar esto usaremos una técnica similar a otras que han aparecido en este blog: fijamos un número grande, como el 10^6, y para cada valor de resto que elijamos, por ejemplo ese 18 que no aparece, recorremos todos los primos menores que el tope y les calculamos su resto respecto al número de orden. Si aparece el que queremos, ya lo hemos encontrado; si no, aumentamos el tope. Lo podemos construir en el Basic de las hojas de cálculo:

Public Function primoresto(n)
Dim a, i, p, r
a = 2: i = 1: r = -1: p = -2 Iniciamos la lista de primos y la variable r a -1
While p <> n And i <= 10 ^ 6 Bucle hasta la solución o hasta el tope
p = a - i * Int(a / i) Buscamos el resto entre el primo a y su orden i
If p = n Then r = a Si el resto coincide con el número propuesto, ya tenemos solución
i = i + 1 Si no, avanzamos en la lista de primos
a = primprox(a)
Wend

primoresto = r
End Function

Si la función devuelve el valor -1, es que no se ha encontrado solución y hay que subir el tope. Con esta función y con Excel, que es una hoja rápida, hemos encontrado estos valores:

Posible resto	Mínimo primo que produce este resto
1	3
2	5
3	7
4	379
5	23
6	401
7	61
8	59
9	29
10	67
11	71
12	467
13	79
14	83
15	179
16	431
17	89
18	176557
19	191
20	24419
21	491
22	97
23	101
24	499
25	1213
26	3169
27	3191
28	523
29	229
30	3187
31	223
32	3203
33	8609
34	3163
35	251
36	176509
37	257
38	24509
39	263
40	3253
41	269
42	547
43	3347
44	1304867
45	293
46	571

Llama la atención el mínimo primo que presenta resto 18. Efectivamente, 176557 es el primo número 16049 y el cociente entre ellos es 11 y el resto 18, como cabía esperar. Más impresionante es el correspondiente a 44, nada menos que 1304867. Para avanzar más hemos traducido el algoritmo a PARI

```
resprime(n)={local(a,i,r,p);a=2;i=1;r=-1;p=-2;while(p<>n&&i<=10^6,p=a%i;if(p==n,r=a);i+=1;a=nextprime(a+1));return(r)}
```

```
{for(i=1,50,print(resprime(i)))}
```

Con él, subiendo el tope a 10^8, hemos descubierto que el resto 110 no aparece hasta el primo 514279133

¿Existirá siempre un número primo que produzca un resto igual a un número que elijamos? No lo sabemos. Lo dejamos como conjetura:

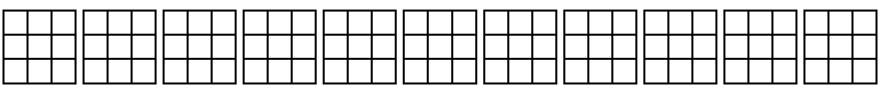
Conjetura: Para cada número natural n>1 existe un número primo P(k) 0que produce un resto respecto a k igual a n.

Si alguien sabe algo más lo publicaremos como extensión.

NÚMEROS CONSECUTIVOS LIBRES DE CUADRADOS

Comenzamos como en otras ocasiones con una pequeña alineación de cuadrados y una cuestión sobre ellos. En el momento de escribir este primer párrafo no sabemos a dónde nos llevará la misma, pues hemos querido construir el estudio así, como en un camino al azar. Concretamos:

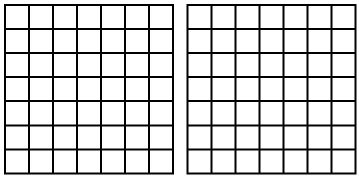
Imagina un conjunto de cuadrados alineados, por ejemplo 11 cuadrados de 3 por 3:



$9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9 = 99$

Si le quitamos un cuadrado pequeño, ¿se podrá construir con los 98 que quedan otra alineación de cuadrados de lado mayor que la unidad?

En este caso la respuesta es afirmativa, basta observar la imagen:



49+49 = 98

En otros casos es negativa: 48 está formado por tres cuadrados de 4 por 4 y si le quito una unidad resulta el número primo 47 que no permite nada de eso.

¿Qué pares de números consecutivos permiten ambos su descomposición en un conjunto de cuadrados iguales o en un solo cuadrado?

Tenemos definiciones para esta situación, pero para no complicarla en exceso exigiremos otra condición, y es que el número de cuadrados que entran en la alineación **no sea en sí mismo un cuadrado**. De esta forma podemos llegar a un terreno teórico más simple. En efecto, si consultas nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre.html

te darás cuenta de que los sumandos cuadrados serán **la parte cuadrada** del número total, y la expresamos como PC(N). Entonces PC(99)=9 y PC(98)=49 y el número de cuadrados (él mismo no cuadrado) será **la**

parte libre de cuadrados, expresada como PL(N). En nuestro ejemplo PL(99)=11 y PL(98)=2.

Así que reformulamos la pregunta:

¿Qué pares de números consecutivos son ambos no libres de cuadrados?

(Es decir, que su parte cuadrada no sea la unidad)

Si se dispone de la función **partecuad(n)**, la parte libre se encontrará como el cociente entre n y su parte cuadrada. En la entrada siguiente a la enlazada tienes un código en Basic de hoja de cálculo que te lo resuelve

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre-solucion.html)

Si ya se tiene implementada esa función, bastará esta búsqueda:

For i=1 to 1000 (u otro tope)
If partecuad(i)>1 and partecuad(i+1)>1 then msgbox(i)
Next i

Así los hemos buscado de forma algo más ordenada y los primeros pares obtenidos han sido

8	9
24	25
27	28
44	45
48	49
49	50
63	64
75	76
80	81
98	99
99	100
116	117
120	121
124	125
125	126
135	136
147	148
152	153
168	169

Observa que entre ellos está el par (98, 99) del ejemplo. Prueba con otros: 80 son 5 cuadrados de 4 por 4 y 81 un cuadrado de 9 por 9, 75 equivale a 3 cuadrados de 5 por 5 y 76 contiene 19 cuadrados de 2 por 2.

Con nuestro Buscador es sencillo encontrarlos.

Condiciones

ES PARTECUAD(N)>1
ES PARTECUAD(N+1)>1
EVALUAR N+1

Resultados

Solución	Detalles
8	9
24	25
27	28
44	45
48	49
49	50
63	64
75	76
80	81
98	99
99	100
116	117

En PARI la parte libre la da la función ***core(n)*** y por tanto la parte cuadrada equivale a n/core(n). Así se entiende fácilmente este código:

{for (n=1, 10^3,if(n/core(n)>1&&(n+1)/core(n+1)>1,print(n)));}

Los elementos menores de cada par los tienes recogidos en http://oeis.org/A068781. Ahí se destacan propiedades que comentaremos más adelante.

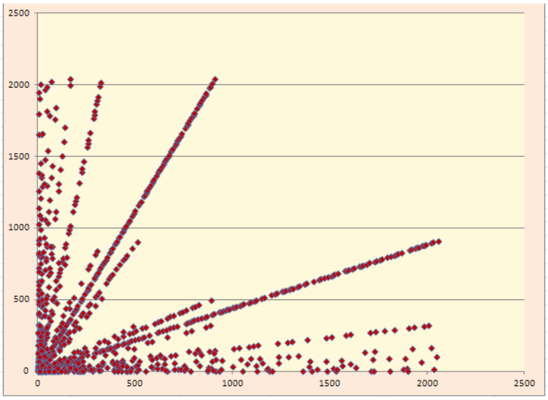
Variedad en las partes libres

Es interesante ampliar la tabla anterior con las partes libres de cada uno de los números de estos pares. No nos cabe aquí la gran variedad de resultados que se producen. Aunque sea reduciendo el tamaño, incluimos algunos de los casos:

X	Y	a	b
8	9	2	1
24	25	6	1
27	28	3	7
44	45	11	5
48	49	3	1
49	50	1	2
63	64	7	1
75	76	3	19
80	81	5	1
98	99	2	11
99	100	11	1
116	117	29	13
120	121	30	1
124	125	31	5
125	126	5	14
135	136	15	34
147	148	3	37
152	153	38	17
168	169	42	1
171	172	19	43
175	176	7	11
188	189	47	21
207	208	23	13
224	225	14	1
242	243	2	3
243	244	3	61
244	245	61	5
260	261	65	29
275	276	11	69
279	280	31	70
288	289	2	1
296	297	74	33
315	316	35	79
324	325	1	13
332	333	83	37
342	343	38	7

Vemos que los pares de partes libres a y b presentan gran variedad de valores, unos similares entre sí, como 2 y 3, otros muy lejanos, como 127 y 3 y otros que contienen la unidad.

Podemos representarlos en un diagrama de dispersión y nos llevamos una gran sorpresa:



Aparentemente todas las partes libres a y b pertenecen a familias que están relacionadas entre ellas **por el mismo coeficiente lineal b/a**. Para salir de dudas creamos una quinta columna con esos cocientes y vemos que ¡ES FALSO! **No existe esa relación lineal**. Es sólo aproximada.

Por ejemplo, la línea marcada fuertemente con pendiente similar a ½ está formada por estos valores de b/a que son todos cercanos a 4/9, pero ninguno igual.

Hemos ordenado la tabla según valores para que destaque mejor la no igualdad en los cocientes.

0,44450641
0,44450736
0,44450768
0,44450834
0,44450867
0,44450969
0,44451039
0,4445111
0,44451146
0,44451183
0,44451295
0,44451333
0,44451411
0,4445145
0,4445149
0,44451655
0,4445174
0,44451783
0,44451827

Observando cuidadosamente los valores de b/a cuya similitud ha engañado a nuestra vista, se descubre que están cerca de estos cocientes de cuadrados: 4/25, 9/16, 4/9, 9/4, 16/9, 25/4,…

Si nos paramos a pensar, este hecho tiene una explicación fácil: todos los números que estamos encontrando satisfacen una ecuación de este tipo: $\mathbf{aX^2-bY^2=1}$, siendo **a** y **b** las partes libres y X^2 y Y^2 las cuadradas. Dividiendo entre **a** y despejando queda:

$$X^2 - \frac{b}{a}Y^2 = \frac{1}{a} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{X^2 - {}^1\!/_a}{Y^2}$$

Por tanto, existe una pequeña diferencia entre el cociente b/a y ese otro cociente entre dos cuadrados. No había lugar para la sorpresa (nuestros lectores verán que cumplimos la idea de recorrer este tema a la aventura)

A veces se da la identidad entre las partes libres. Por ejemplo, 49 y 50 se corresponden con 7^2*1 y 5^2*2 y el par 1681=41^2*1 y 1682=29^2*2. Pues bien, dejamos para otro apartado el estudiar esta afirmación: *si existe un par de valores X^2, Y^2 que cumple esta ecuación para unos coeficientes* ***a*** *y* ***b****, entonces existen infinitos.*

Entra Pell en acción

Todo el análisis de la parte libre de estos números depende de las soluciones de la ecuación

$$aX^2 - bY^2 = 1$$

Como todas las ecuaciones diofánticas de grado dos, no es fácil de resolver, pero desde Gauss sabemos que habrá que acudir a la ecuación de Pell

(http://hojamat.es/parra/pell.pdf http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html)

No he encontrado muchas referencias sobre la ecuación que hemos planteado, pero consultando páginas como

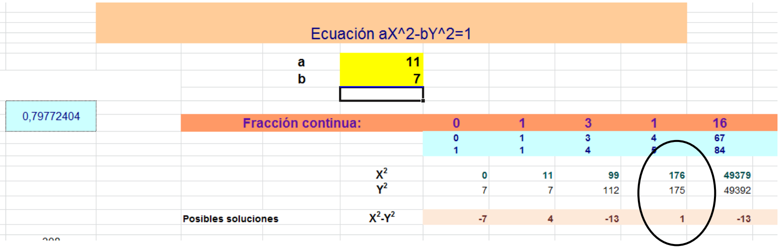
http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation2ndPowers.html y otras similares he podido diseñar una herramienta en hoja de cálculo que nos permitirá resolverla. Los hechos en que se basa son:

(a) Para resolver $aX^2-bY^2=1$ la tratamos como una ecuación de Pell, desarrollando en fracciones continuas la raíz cuadrada de b/a (o la inversa, da igual). Obsérvese que a y b deberán ser primos entre sí para que exista solución. Por ejemplo, para resolver $11X^2-7Y^2=1$ desarrollaremos la raíz cuadrada de 11/7, 0,7977240352.

Hemos preparado la hoja de forma que debajo de cada convergente se calcule el valor de aX^2-bY^2 para encontrar una posible solución. La tienes alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#ecuadio

(De las herramientas que figuran en esa página eleige la correspondiente a esta ecuación)



Ecuación aX^2-bY^2=1							
	a	11					
	b	7					
0,79772404	Fracción continua:		0	1	3	1	16
			0	1	3	4	67
			1	1	4	5	84
		X^2	0	11	99	176	49379
		Y^2	7	7	112	175	49392
	Posibles soluciones	X^2-Y^2	-7	4	-13	1	-13

Vemos que ha encontrado la solución 176 y 175, en la que $176=11*4^2$ y $175=7*5^2$. Este procedimiento, **si existe solución**, la suele dar en las primeras convergentes. Si proseguimos la búsqueda hacia la derecha encontraremos más soluciones. La siguiente es

$86486576=11*2804^2$ y $86486575=7*3515^2$.

3	1	16
2173	2804	47037
2724	3515	58964
51941219	86486576	24337273059
51941232	86486575	24337273072
-13	1	-13

La hoja de cálculo no da para mucho más, pero por la periodicidad del desarrollo en fracciones continuas de un radical cuadrático, sabemos que se repetirá el valor 1 en los cálculos. En este caso cada seis convergentes. La siguiente solución será:

1
1968404
2467525
42620757379376
42620757379375
1

Aunque nuestro cálculo se interrumpa, hemos conseguido descubrir que si entre los pares pertenecientes a nuestro conjunto se da un juego de partes libres (a, b), (en nuestro ejemplo 11 y 7), **existirán infinitos pares con ese mismo par de partes libres**.

Otro ejemplo: para 3 y 7 encontramos los pares (27,28) (332667, 332668), (4024611387, 4024611388) y (48689748233307, 48689748233308) Nuestra hoja abandona aquí. Es una lástima que no podamos seguir, pero si dispusiéramos de una fórmula de recurrencia podríamos acudir a instrumentos de cálculo más potentes que nos dieran las restantes soluciones.

(b) Las fórmulas de recurrencia que permiten encontrar todas las soluciones que deseemos las hemos implementado siguiendo las ideas contenidas en el documento http://bratu.oltenia.ro/GAUSS.pdf, del que reproducimos la recurrencia que nos interesa:

Gauss's Theorem For a binary quadratic form: $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, where we suppose $(a,b,c) = 1$, if the linear transform of matrix $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ is automorphic, then:

$$\alpha = \frac{t - bu}{2} \quad ; \quad \beta = -cu$$
$$\gamma = au \quad ; \quad \delta = \frac{t + bu}{2} \qquad (2)$$

where $t, u \in Z$, such that they verify the Pell's diophantic equation:

$$t^2 - du^2 = 4 \qquad (3)$$

and d is the discriminant of the form. The converse of this theorem holds too

Hemos adaptado las fórmulas a nuestro caso, en el que b=0, y parece funcionar muy bien (nos queda alguna duda teórica, pero en esta aventura llegaremos a donde podemos, ya se advirtió). El cálculo de las fórmulas de recurrencia se ha implantado debajo del desarrollo de la ecuación de Pell. Es un algoritmo paralelo, en el que en lugar de desarrollar la raíz de b/a se efectúa con el discriminante de la ecuación.

Discriminante	84							
Raíz	9,16515139							
			Fracciones continuas			9	6	18
			X	0	1	9	55	999
			Y	1	0	1	6	109
						-3	1	-3

Con él se obtienen las dos soluciones **t** y **u**, en nuestro ejemplo 55 y 6.

Una vez obtenidos esos coeficientes, se construye con ellos una matriz de recurrencia según el recorte de documento insertado más arriba (adaptado al caso b=0) y después se aplica en la parte inferior a la obtención de las siguientes soluciones:

Fórmulas de recurrencia

		X0	Y0	Matriz de recurrencia	
Primer 1	4	2	3	55	84
				36	55
Segundo 1	2	55	6		

Siguientes soluciones		Valores de aX^2 y bY^2	
2	3	28	27
218	333	332668	332667
23978	36627	4024611388	4024611387
2637362	4028637	4,86897E+13	4,86897E+13
290085842	443113443	5,89049E+17	5,89049E+17
31906805258	48738450093	7,12631E+21	7,12631E+21
3,50946E+12	5,36079E+12	8,62141E+25	8,62141E+25
3,86009E+14	5,89638E+14	1,04302E+30	1,04302E+30
4,24574E+16	6,48548E+16	1,26184E+34	1,26184E+34

Se han reproducido las soluciones escritas más arriba, pero pronto aparecen en coma flotante. No importa, porque hemos obtenido lo fundamental, y es la matriz de recurrencia. Efectivamente, obtendríamos con ella lo siguiente:

$X_n=X_{n-1}*55+Y_{n-1}*36$

$Y_n=X_{n-1}*84+Y_{n-1}*55$

Así podemos pasar a otro instrumento más potente, como el lenguaje PARI.

```
{x=2;y=3;for(i=1,7,x0=x;x=55*x0+36*y;y=84*x0+55*y;print(7*x*x);print(3*y*y))}
```

Y obtenemos más pares debidamente escritos:

```
332668
332667
4024611388
4024611387
48689748233308
48689748233307
589048570101942748
589048570101942747
7126309552403555125948
7126309552403555125947
86214092375929639811770108
86214092375929639811770107
1043018082437687230039239634588
1043018082437687230039239634587
```

El único problema es que hay que cambiar ocho parámetros para cada caso, pero como se trata sólo de satisfacer una curiosidad, tampoco se va a plantear en muchas ocasiones.

Lo importante es que en nuestro conjunto hemos descubierto la existencia de infinitas familias, cada una con infinitos elementos, según los valores de las partes libres.

El conjunto que estamos tratando, el de los pares de números consecutivos ambos con parte cuadrada no trivial, está contenido en http://oeis.org/A068781, y en los comentarios incluidos se indican brevemente algunas propiedades que vamos a desarrollar aquí:

Números con fórmula determinada

En la página enlazada se destaca que todos los números naturales de la forma $4k^2+4k$ pertenecerán a esos pares como primer elemento (Amarnath Murthy).

Se ve que contienen una parte cuadrada de al menos 4 y que su siguiente es $4k^2+4k+1 = (2k+1)^2$, cuya parte cuadrada es él mismo. Se observa también que $4k^2+4k=8(k(k+1)/2)$, o lo que es lo mismo, que es 8 veces un número triangular. Así que si multiplicamos por 8 los números 1, 3, 6, 10, 15 se obtendrán 8, 24, 48, 80 y 120, que pertenecen todos al conjunto y es fácil ver que siguen la recurrencia X(n+1)=X(n)+8(n+1), lo que los convierte en una progresión aritmética de segundo orden.

Los números del tipo $4k^2+4k$ pertenecen al conjunto.

Siguiendo un razonamiento similar, pertenecerán al conjunto los pares del tipo (n^4+2n^2) y (n^4+2n^2+1), y en general los $(n^{2k}+2n^k)$ y $(n^{2k}+2n^k+1)$.

Desarrollamos algunos ejemplos. Son pares del conjunto

(16+2*4, 16+2*4+1)=(24,25)

(81+2*9, 81+2*9+1)=(99,100)

(256+2*16, 256+2*16+1) = (288,289)

Observa ahora el segundo elemento de este tipo de pares, $(2k+1)^2$. Es interesante demostrar la sugerencia que sobre ellos contiene la página citada. Imagina que multiplicamos ese cuadrado por un impar del tipo 4m+1. El resultado sería

$(4m+1)(2k+1)^2=(4m+1)(4k^2+4k+1)=16mk^2+16km+4m+4k^2+4k+1=4H+1$

Esto nos dice que esa expresión contiene el cuadrado $(2k+1)^2$, pero si le restamos 1, la diferencia 4H contiene el cuadrado 4, luego ambos forman un par perteneciente al conjunto.

Si el cuadrado de un número impar lo multiplicas por otro impar del tipo 4m+1, obtienes el segundo elemento de uno de los pares del conjunto.

Revisa la lista y localizarás los productos 9, 9*5=45, 9*9=81, 9*13=117,… así como 49, 49*5=245,… todos como segundo elemento del par.

Si usáramos un impar del tipo 4m+3 en ese caso aparecería un primer elemento de par. Se demuestra de forma similar:

$(4m+)(2k+1)^2=(4m+3)(4k^2+4k+1)=16mk^2+16km+4m+12k^2+12k+3=4H+3$

Él mismo contiene el cuadrado $(2k+1)^2$, pero si le sumamos una unidad se convertirá en 4H+4=4(H+1) y también tendrá l divisor cuadrado 4.

Si el cuadrado de un número impar lo multiplicas por otro impar del tipo 4m+3, obtienes el primer elemento de uno de los pares del conjunto.

En este caso figurarán como primeros elementos 9*3=27, 9*7=63, 9*11=99,… como segundo elemento del par.

Todos los números del tipo (n+1)(n-1) pertenece al conjunto si uno al menos de los factores no está libre de cuadrados.

Es fácil verlo. Si uno de los factores contiene un divisor cuadrado, el producto también lo tendrá, luego es un candidato a figurar en el conjunto. Pero su consecutivo es $n^2-1+1=n^2$, luego también cumple tener una parte cuadrada no trivial. De ese tipo son: 8, 63, 80,…

Progresiones aritméticas en el conjunto.

Labos Elemer descubre en la página citada que existe en ese conjunto muchas progresiones aritméticas. Él da como ejemplo (36n+8, 36n+9). Intentaremos descubrir algunas.

Imagina un par cualquiera, (aX^2, bY^2). Calculemos el mínimo múltiplo común a X^2 y a Y^2, llamémosle H (no tiene que ser el mínimo. Nos vale cualquier múltiplo).

Tendrá entonces a forma $H=mX^2$ y también $H=nY^2$. Si sumamos un múltiplo de H a ambos elementos del par tendremos: $kH+ aX^2$, $kH+ bY^2$ o bien $k(m+a) X^2$, $k(n+b)Y^2$. Estos nuevos elementos seguirán siendo consecutivos y con parte cuadrada mayor que 1, luego pertenecerán también al conjunto. Como k es variable, desembocaremos en una progresión aritmética.

Vemos un ejemplo. Tomamos un par de la tabla, como $98=2*7^2$ y $99=11*3^2$. Un múltiplo común de 7^2 y 3^2 es su producto 441, luego si a ambos les sumamos ese número reiteradamente resultarán más pares del conjunto:

(98, 99), (539, 540), (980, 981), (1421, 1422),…

Múltiplos de los términos

Hemos explorado la posibilidad de que si un número pertenece al conjunto como primer elemento del par o como segundo, exista un múltiplo suyo que también pertenezca.

En el caso del primero creemos que existe siempre un múltiplo suyo que también forma un par similar, pero lo dejamos como conjetura porque no podemos probarlo. Aquí tienes los primeros resultados. En la tabla figura el primer término del par y junto a él el número mínimo por el que debemos multiplicarlo para que resulte un múltiplo perteneciente al conjunto:

8	3
24	2
27	5
44	10
48	6
49	2
63	5
75	5
80	10
98	10
99	5
116	10
120	3
124	5
125	3
135	5
147	5

Por ejemplo, 116 y 117 forman par, porque ambos tienen una parte cuadrada mayor que 1: la de 116 es 4 y la de 117 es 9. Si, según la tabla, multiplicamos por 10, 1160 y 1161 también forman un par del conjunto, porque ambos también tienen parte cuadrada mayor que 1 (en este caso, valen también 4 y 9, pero es una casualidad)

Con el segundo término hemos realizado pruebas también y parece ser que todos ellos poseen un múltiplo perteneciente al conjunto también como segundo término del par.

Lo dejamos como conjetura.

SUMA DE DOS NÚMEROS PRIMOS CONSECUTIVOS

¿Qué ocurre si sumamos dos primos consecutivos mayores que 2?

En primer lugar, nunca da un semiprimo: ambos son impares, luego la suma tendrá el factor 2. Por otra parte, la suma es el doble de su media aritmética, que por estar entre ellos no será un número primo, luego aportará a la suma al menos dos factores primos más, por lo que nunca será semiprimo.

Según sean ambos primos del tipo 4k+1 o 4k+3, se puede obtener un múltiplo de 4 o uno de 2 que no sea de 4. Es curioso ver que si la diferencia entre ellos no es múltiplo de 4, la suma sí lo es. Al contrario, si la diferencia entre ellos es divisible entre 4, la suma no lo será. Intenta razonarlo, que no es difícil. Por ejemplo, 7+11=18, que no es múltiplo de 4, mientras que 11-7 sí lo es. Por contra, 17 y 19 se diferencian en 2 y su suma 36 es múltiplo de 4.

Sucesión de sumas

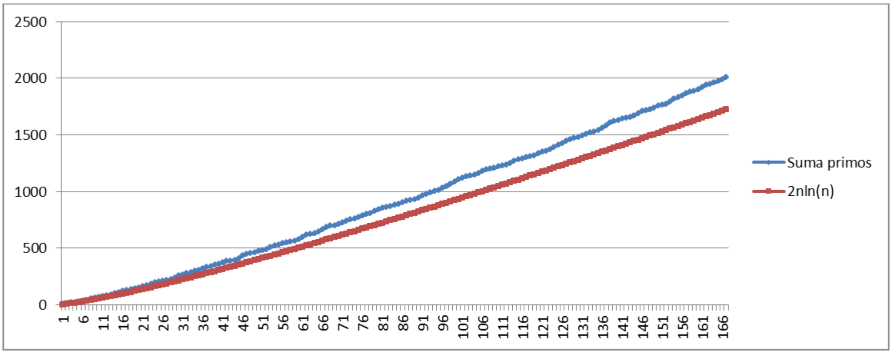
Al contrario ¿Qué números pares son suma de números primos consecutivos? Tienes el resultado, con el añadido del 5, en http://oeis.org/A001043

5, 8, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 52, 60, 68, 78, 84, 90, 100, 112, 120, 128, 138, 144, 152, 162, 172, 186, 198, 204, 210, 216, 222, 240, 258, 268, 276, 288, 300, 308…

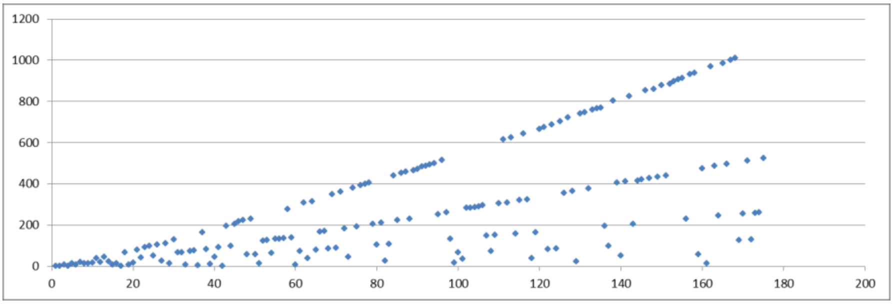
(En todas las sucesiones incluiremos sólo el primo más pequeño del par. El otro lo puedes encontrar con las funciones PRIMPROX o NEXTPRIME).

Prescindiendo del 5, caso aislado, podemos encontrar algunas características interesantes:

Su gráfica está muy bien aproximada por defecto mediante **2nln(n)**. Esto ocurre porque nln(n) es cota inferior cercana de la función prime(n), y al sumar primos consecutivos se aproxima como si fuera el doble.



Si prescindimos del 5, todos serán pares y tendrán un Mayor divisor impar (MDI) que siempre será propio. El gráfico de los MDI es este



La primera rama se corresponde con los MDI cuando el 2 está elevado a la unidad, la segunda para los múltiplos de 4 y así hasta abajo.

Estaba inédita la sucesión de las valuaciones de esas sumas respecto a 2:

3, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 3, 7, 1, 4, 3,… y la hemos publicado en https://oeis.org/A237881 con la inclusión del caso 2+3

Charles R Greathouse IV ha añadido las acotaciones **a(n) << log n**; en particular, **a(n) <= log_2 n + log_2 log n + O(1)**.

En PARI se podría buscar así:

```
{for(i=1,200,k=valuation(prime(i)+prime(i+1),2);print1(k,", "))}
```

Observando la gráfica de más arriba nos podemos preguntar con qué frecuencia aparecen los valores 1, 2, 3,… en la sucesión, para un rango determinado.

Para valores naturales, los números con valuación 0 tendrán frecuencia doble que los de valuación 1, y estos el doble que los de valuación 2, aproximadamente. Aquí tienes la distribución de frecuencias para números inferiores a 10000:

Valuación	Fecuencia
0	5000
1	2500
2	1250
3	625
4	313
5	156
6	78
7	39
8	20
9	10
10	5
11	2
12	1
13	1

La explicación de la tabla es muy sencilla: tendrán valuación 0 los números impares menores que 10000, que son 5000. Los de valuación 1 serán números doble de un impar, por lo que estos no podrán pasar de 2500. Así podemos ir razonando: valuación 2 la tendrán los números que son cuádruples de un impar, en total 1250, y así hasta el final:

En los números naturales, cada valuación presenta una frecuencia doble respecto a la siguiente (salvo redondeos)

¿Ocurrirá lo mismo con nuestra sucesión en la que las valuaciones se aplican sobre sumas de primos consecutivos? En principio no lo esperamos, pero vamos a experimentarlo.

Valuación	Fecuencia
0	1
1	21086
2	14417
3	7286
4	3597
5	1802
6	917
7	457
8	224
9	104
10	52
11	34
12	12
13	5

Hemos recogido las valuaciones de todas las sumas tipo prime(i)+prime(i+1) menores de 50000, con este resultado:

La valuación 0 corresponde al caso 2+3.

Llama la atención que se cumple aproximadamente el hecho de que cada valor tenga el doble de frecuencia que el siguiente salvo el de 1, cuyo valor 21086 no se aproxima al doble de la siguiente, 14417. La razón es que la suma de primos del tipo 4k+1 con los de 4k+3 produce un exceso de múltiplos de 4.

La suma es cuadrado

En http://oeis.org/A061275 se recogen los casos en los que la suma de dos primos consecutivos da un cuadrado:

17, 47, 71, 283, 881, 1151, 1913, 2591,… (primer primo del par)

Por ejemplo, $17+19=36=6^2$.

Igualmente $47+53=100=10^2$, $71+73=144=12^2$

El cuadrado será par, y por tanto un múltiplo de 4. Si un elemento del par de primos es del tipo 4n+1, el otro deberá ser de la clase 4n+3, para que no resulte un múltiplo de 2 que no lo sea de 4, y así impida que resulte un cuadrado. Como los primeros se pueden descomponer en sumas de cuadrados, un elemento del par tendrá siempre la forma $A^2-B^2-C^2$. Por ejemplo, en el par (103049, 103067), $103067=454^2-157^2-280^2$.

Suma triangular

Están contenidos en https://oeis.org/A225077:

17, 37, 59, 103, 137, 149, 313, 467, 491, 883, 911, 1277, 1423, 1619, 1783, 2137, 2473, 2729, 4127, 4933, 5437, 5507, 6043, 6359, 10039, 10453, 11717,…

Así, el par de primos gemelos (2087,2089) tiene como suma 41616=288*289/2, que es el triangular número 288.

Suma doble de un cuadrado

Este caso es interesante porque en ellos la media aritmética de los dos primos consecutivos sería un cuadrado. Así ocurre con 1087 y 1091, cuyo promedio es 1089, el cuadrado de 33.

En ese caso un primo es n^2-k y el otro n^2+k. Si k=1 tendríamos un par de primos gemelos. Sólo hemos encontrado el par (3,5), cuya media es el cuadrado de 2. No puede haber más, porque para que n^2-1 sea primo, ha de ser n-1=1 y eso sólo ocurre en n=2 y el par (3,5).

Los términos de esta sucesión son

3, 7, 61, 79, 139, 223, 317, 439, 619, 1087, 1669, 2593, 3593, 4093, 5179, 6079, 8461, 12541, 13687, 16633, 19037, 19597, 25261, 27211, 28219, 29581, 36857, 38011, 39199, 45361, 46649, 47521, 51977, 56167… https://oeis.org/A225195

Forman una subsucesión de http://oeis.org/A053001, que contiene los números primos mayores que son anteriores a un cuadrado. Los que estudiamos aquí cumplen esa condición, porque al ser el cuadrado la media entre dos primos consecutivos, el menor de ellos tendrá la propiedad pedida en A053001.

Otros casos

La suma puede ser una potencia perfecta:

3, 17, 47, 61, 71, 107, 283, 881, 1151, 1913, 2591, 3527, 4049, 4093, 6047, 7193, 7433…

https://oeis.org/A091624

Como casos particulares están publicados los cuadrados (http://oeis.org/A061275) y los cubos (https://oeis.org/A061308)

O el doble de una potencia perfecta:

3, 7, 61, 79, 139, 223, 317, 439, 619, 1087, 1669, 1723, 2593, 3593, 4093, 5179, 6079, 8461, 12541, 13687, 16633, 17573, 19037, 19597,…

En este caso la media de los dos primos será una potencia perfecta, y ambos se pueden representar por k^m-h y k^m+h, con k y h coprimos y no siendo h una potencia de exponente m (¿por qué?)

No es difícil encontrarlos. Con esta línea de PARI lo consigues.

```
{forprime(i=3,10^6,k=(i+nextprime(i+1))/2;if(ispower(k),print(i,", ")))}
```

(La hemos publicado en https://oeis.org/A242380)

Un caso particular interesante es cuando la media es un cubo. Los primos consecutivos serían del tipo k^3-h y k^3+h, con k y h coprimos y no siendo h un cubo. De esto también se deduce que un elemento de la sucesión es el mayor primo anterior a un cubo, y que por tanto pertenece también a la secuencia

http://oeis.org/A077037

Son estos:

61, 1723, 4093, 17573, 21943, 46649, 110587, 195103, 287491, 314423, 405221, 474547, 1061189, 1191013, 1404919, 1601609, 1906621, 2000371, 2146687, 2196979, 3241783, 3511799, 4912991, 5268017, 6229501, 6751267, 6858997, 7077883, 11239421, 20346407, 21951997, 26198063,…

Los puedes reproducir con PARI

{for(i=3,3*10^7,if(isprime(i),k=(i+nextprime(i+1))/2;if(ispower(k,3),print(i,", "))))}

(publicados desde este blog en

https://oeis.org/A242382)

En realidad se pueden probar otros casos por puro entretenimiento, y después incorporarlos a OEIS para que queden en esa extensa base de datos. Pueden ser estos:

Media oblonga

Se conocen ya los primos consecutivos cuya suma es un número oblongo (del tipo n(n+1) o bien doble de un triangular). Están contenidos en

http://oeis.org/A154634.

Los que aportamos desde este blog son aquellos cuya media es oblonga:

5, 11, 29, 41, 53, 71, 239, 337, 419, 461, 503, 547, 599, 647, 863, 1051, 1187, 1481, 1721, 1801, 2549, 2647, 2969, 3539, 4421, 6317, 7129, 8009, 10301, 12653, 13567, 14033, 17291, 18353, 19181, 19457, 20021, 22943, 23561, 24179, 27059, 29063, 29753, 31151, 33301…

(https://oeis.org/A242383)

Una propiedad curiosa es que están contenidos en http://oeis.org/A161550. La razón es que si un número primo pertenece a la sucesión que presentamos, en la que su media con el próximo primo es un oblongo del tipo $n(n+1)=n^2+n$, es claro que será el máximo primo inferior a n^2+n, que es la definición de A161550. Por el contrario, un término de esta sucesión no tiene que cumplir nuestra condición. Así, el 19 es el máximo primo inferior a $4^2+4=20$, pero su media con el siguiente primo no es 20: (19+23)/2=21.

Los puedes encontrar con PARI:

{for(i=3,10^5,if(isprime(i),k=(i+nextprime(i+1))/4;if(issquare(8*k+1),print1(i,", ")))))}

En el código se buscan pares de primos cuya suma dividida entre 4 produzca un triangular. Es otra forma de definirlos.

Suma del tipo n*(n+2)

Estos números del tipo n*(n+2) se pueden expresar también como $(n+1)^2-1$. Salvo el caso n=1 ninguno puede ser primo. No es muy frecuente el que dos primos consecutivos produzcan este tipo de número. Los primeros son estos:

3, 11, 59, 139, 179, 311, 419, 541, 919, 1399, 1621, 2111, 3119, 5099, 6379, 8059, 8839, 9377, 15661, 16007, 16741, 17107, 21011, 21839, 23539, 24419, 28081, 30011, 31489, 33533, 35617, 37811, 39461, 41759, 44699, 45293, 60899, 68819, 71059, 78007, 83639, 84457, 86111, 87767, 92867, 99901,…

Según el párrafo anterior se pueden ir sumando los pares de números primos consecutivos, sean p y q, y exigir que p+q+1 sea un cuadrado. Así los hemos encontrado con hoja de cálculo y con PARI:

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(issquare(k+l+1),print1(k,", "));k=l)}

Si efectuamos las sumas entre los pares de números consecutivos encontrados, es evidente que n*(n+2) será par, luego n también lo será. Si elegimos un número primo de la sucesión, por ejemplo el 2111, su próximo primo será 2113, y su suma 4224 es igual a 64*(64+2), con n=64, par.

Media del tipo n*(n+2)

Es un caso similar al anterior, pero con cambios importantes. Los primeros primos que cumplen esto son

13, 97, 113, 193, 283, 397, 479, 673, 953, 1439, 1597, 2297, 2699, 3469, 4219, 4483, 5323, 7219, 8273, 9209, 9403, 10799, 12097, 13219, 14879, 15373, 15619, 21313, 23399, 26237, 27883, 32029, 32749, 34217, 37243, 39989, 41203, 42433, 43669, 46219, 55219, 60509, 62497, 72353, 75619, 93001,…

El código para encontrarlos es

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(issquare((k+l)/2+1),print1(k,", "));k=l)}

En ellos la media de los dos consecutivos incrementada en una unidad se convierte en un cuadrado. Por ejemplo, el primo consecutivo a 9209 es 9221. Su media 9215 y si le sumamos una unidad resulta 9216=96^2

Por último, capicúas

Terminamos con dos ejemplos más. El primero recoge los pares de primos cuya suma es capicúa de al menos dos cifras:

109, 211, 347, 409, 1051, 1493, 2111, 2273, 3167, 4219, 4441, 10099, 10853, 10903, 11353, 11909, 12823, 12973, 13421, 13831, 14543, 14639, 20551, 21011, 21347, 21661, 21863, 22271, 23581, 23981, 30047, 30557, 31259, 31307, 31963, 32069, 32213, 32467, 32869, 33029, 33479, 33587, 34487, 34693, 34847, 40351, 41011, 41617, 41911, 42169, 43427, 43481, 43987, 44491, 44647, …

Encontrarlos con PARI es algo más complicado: la función reverse invierte el orden de las cifras del número y la palind devuelve VERDADERO si el número tiene al menos dos cifras y es igual a su simétrico en cifras. El resto es fácil de entender:

reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))

palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(palind(k,l),print1(k,", "));k=l)}

Los tienes en https://oeis.org/A242386

Con media capicúa

Con una codificación similar se pueden encontrar aquellos primos consecutivos cuya media es capicúa:

97, 109, 281, 359, 389, 409, 509, 631, 653, 691, 743, 827, 857, 907, 937, 967, 1549, 2111, 2767, 4219, 4441, 7001, 9007, 9337, 9661, 10099, 11503, 12919, 13421, 16759, 17569, 21011, 21611, 23831, 26261, 26861, 28181, 29287, 29483, 30497, 31307, 32213, 33029, 33629

reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))

palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(palind(k+l),print1(k,", "));k=l)}

(https://oeis.org/A242387)

SUCESIONES RECURRENTES

RECURRENCIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

En este blog no hemos tratado mucho las relaciones de recurrencia. Iniciamos ahora el estudio de un caso particular de las mismas, más por los casos curiosos que presenta que por su estudio teórico, que se puede desarrollar en otras publicaciones

(http://mathworld.wolfram.com/LinearRecurrenceEquation.html)

Llamaremos relación de recurrencia lineal de segundo orden a la que existe entre los términos de una sucesión si reviste esta forma:

$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+a_3$

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro y sumado un tercer número. Como hemos indicado que nuestras pretensiones no son teóricas, nos dedicaremos tan sólo al caso en el que $a_3=0$, es decir, a *relaciones lineales de segundo orden homogéneas*, pues en ellas encontraremos bastantes hechos curiosos.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Una sucesión definida por recurrencia vendrá dada así por el conjunto de valores iniciales y el de coeficientes, siendo conveniente fijar también el número de términos. Así se concreta, por ejemplo, en Mathematica, la función **LinearRecurrence**, y así lo trataremos más adelante.

Estas sucesiones reciben el nombre de “sucesiones de Horadam” y se caracterizan por estar determinadas por esos cuatro parámetros dentro de una recurrencia de segundo orden homogénea. Así, la sucesión de Fibonacci es Horadam(0,1,1,1), porque los parámetros se escriben en orden inverso a como lo hacemos aquí. Sólo estudiaremos algunos casos, pues el tema es muy amplio y con muchas sucesiones interesantes.

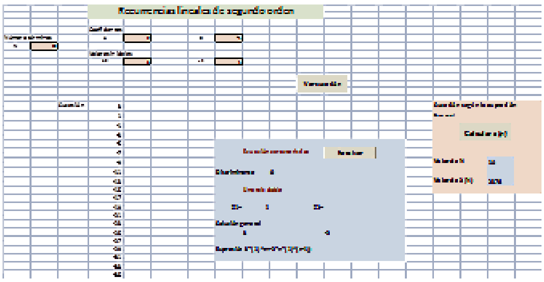
Generación con hoja de cálculo

Aprovechando la recursividad del Basic de las hojas de cálculo se pueden definir funciones que devuelvan el valor de x(n). El problema que tienen es que funcionan mientras no se llene la pila de datos (ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/03/funciones-recursivas-en-las-hojas-de.html). En este caso podrían tener esta estructura:

```
Public Function recurre(c1, c2, d1, d2, n)
Dim r
If n = 0 Then
r = d1
ElseIf n = 1 Then
r = d2
Else
r = c1 * recurre(c1, c2, d1, d2, n - 1) + c2 * recurre(c1, c2, d1, d2, n - 2)
End If
recurre = r
End Function
```

La tienes implementada en la hoja ***recurre_lineal***, que ofrecemos en http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Para evitar el problema del llenado de la pila de recursividad, hemos preparado un generador muy simple de estas sucesiones, en la hoja mencionada, con el que practicaremos algunos conceptos y que no usa la recursividad para evitar ese problema:



Basta estudiar la imagen para entender que hay que escribir el número de términos, los coeficientes, aquí llamados A y B y los valores iniciales. Para fijar ideas, generaremos los números de Pell, dados por la ecuación $\mathbf{x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}}$ con las condiciones iniciales $\mathbf{x_0=0}$ y $\mathbf{x_1=1}$. Todos ellos se pueden identificar en la imagen:

			Coeficientes					
Número términos			A	2		B	1	
N	20							
			Valores iniciales					
			X0	0		x1	1	

Con el botón ***Ver sucesión*** generamos los 20 primeros términos, que están ya publicados en http://oeis.org/A000129 y se nos indica que son los denominadores del desarrollo de los convergentes a raíz de 2 mediante fracciones continuas.

Sucesión	0
	1
	2
	5
	12
	29
	70
	169
	408
	985
	2378
	5741
	13860

Tenemos así una herramienta muy simple para inventarnos sucesiones, independientemente de su importancia matemática. Por ejemplo, llamaremos sucesión "sorpresa" a la engendrada mediante A=2, B=-1, $X_0=0$, $X_1=1$. Te dejamos que averigües su desarrollo y en qué consiste la sorpresa.

Ecuación característica

Existe un procedimiento simple para intentar expresar **X(n)** en función de **n** en sucesiones definidas por recurrencias de segundo orden: *la ecuación característica*. Puedes estudiarla en cualquier manual o página web específica, como

(http://people.uncw.edu/tompkinsj/133/recursion/homogeneous.htm)

En esencia este método consiste en:

(1) Dada la relación

$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

planteamos la ecuación de segundo grado

$x^2-a_1x-a_2=0$

(2) Si las soluciones de esa ecuación son distintas, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, la expresión buscada será

$x(n)= (x_1)^n$ o $x(n)= (x_2)^n$

o bien una combinación lineal de ambas:

$x(n)= C_1(x_1)^n+C_2(x_2)^n$

Las soluciones pueden ser reales o complejas.

(3) Si las soluciones de esa ecuación son dobles e iguales a $\mathbf{x_1}$ la expresión buscada será

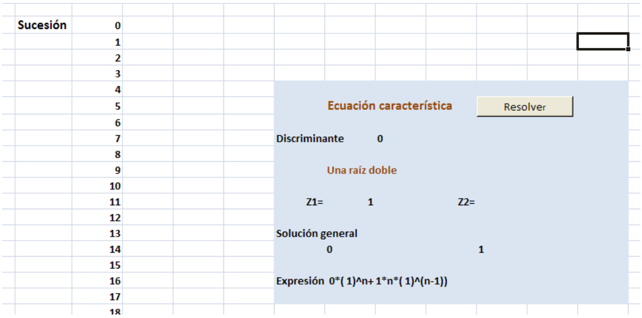
$x(n)= (x_1)^n$ o $x(n)= n(x_1)^{n-1}$

o bien una combinación lineal de ambas:

$x(n)= C_1(x_1)^n+C_2n(x_1)^{n-1}$

(4) En ambos casos, los coeficientes C_1 y C_2 se calcularán a partir de los valores iniciales.

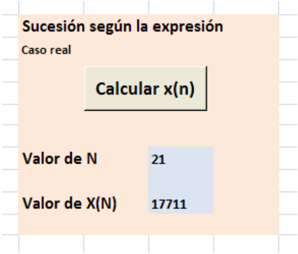
La herramienta que ofrecemos plantea y resuelve la ecuación característica de la sucesión que definamos. En el desarrollo de la fórmula general de x(n) no se ha desarrollado el caso de raíces complejas, ya que no compensaba el trabajo en una programación complicada, dado que nuestras pretensiones son meramente divulgativas.



Se comienza calculando el discriminante para ver si es el caso de raíz doble o no. Después se encuentran las soluciones de la ecuación característica y en el caso real se escribe la expresión general de x(n). En la imagen se observa la solución para la sucesión que llamamos "sorpresa", que resulta representar la sucesión de números naturales. Si simplificas la expresión de abajo resulta ser **x(n)=n**.

Valores según la expresión general

Por último, en el caso de raíces reales, se ofrece una calculadora de los valores de x(n) dado el valor de n. En la imagen puedes ver el cálculo del término 21 de la sucesión de Fibonacci, que resulta tener el valor de 17711.



Hasta aquí las definiciones y la presentación de la herramienta implementada en hoja de cálculo. Recordaremos ahora cómo es su función generatriz antes de pasar al estudio de sucesiones particulares.

Función generatriz

No es difícil encontrar la función generatriz en este caso (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/03/funciones-generatrices-en-combinatoria.html) y http://eliatron.blogspot.com.es/2009/01/sucesiones-recurrentes-funciones.html).

Siguiendo el procedimiento explicado en el blog del segundo enlace, bastará aplicar lo siguiente:

Si representamos la sucesión por x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, …, su F.G. se construirá tomándolos como coeficientes de un polinomio:

$F(x)=x_0+x_1x+x_2x^2+x_3x^3+x_4x^4+\dots$

$-a_1xF(x)= -a_1x_0x-a_1x_1x^2-a_1x_2x^3-a_1x_3x^4-a_1x_4x^5+\dots$

$-a_2x^2F(x)= -a_2x_0\, x^2-a_2x_1x^3-a_2x_2x^4-a_2x_3x^5-a_2x_4x^6+\dots$

Sumando miembro a miembro

$F(x) \quad -a_1xF(x) \quad -a_2x^2F(x) \quad = \quad x_0+(x_1-a_1x_{0)}x+(x_2-a_1x_1-a_2x_{0)}x^2+(x_3-a_1x_2-a_2x_{1)}x^3+(x_4-a_1x_3-a_2x_{2)}x^4+\dots \quad = \quad x_0+(x_1-a_1x_{0)}x$

Todos los paréntesis son nulos por la definición de la congruencia. Despejando F(x) tendremos:

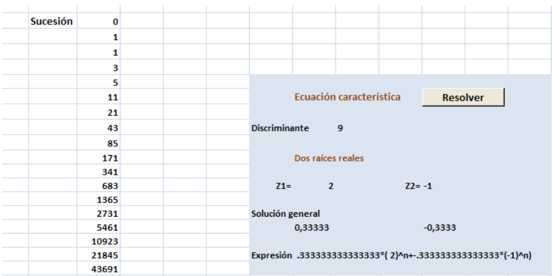
$$F(x) = \frac{x_0 + (x_{1-}a_1x_0)x}{1 - a_1x - a_2x^2}$$

Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, si la hacemos comenzar por 0, tendríamos $x_0=0$, $x_1=1$, $a_1=1$, $a_2=1$ y nos daría

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Usaremos esta expresión en las siguientes sucesiones que estudiemos. Hasta aquí la primera aproximación al tema.

Probemos con algunos valores de los coeficientes y valores iniciales. Imagina que hacemos A=1, B=2, X_0=0, X_1=1 (Horadam(0,1,2,1). Acudimos a nuestra herramienta en hoja de cálculo ya presentada y obtenemos:



Esta sucesión, llamada de Jacobsthal, la tienes en http://oeis.org/A001045

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691,…

0	
1	1
1	1
3	11
5	101
11	1011
21	10101
43	101011
85	1010101
171	10101011
341	101010101
683	1010101011
1365	10101010101
2731	101010101011
5461	1010101010101
10923	10101010101011

Si visitas la página indicada te abrumará la cantidad de propiedades e interpretaciones que presenta esta sucesión.

Con la resolución de la ecuación característica, e interpretándola correctamente, obtendrás la expresión del término general

$$X(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

Por ejemplo, el término décimo será (2^10-1)/3=1023/3=341, como puedes observar en la tabla. A partir de esta expresión es fácil entender que el cociente X(n+1)/X(n) tiende a 2 al crecer n.

En binario puedes representarte mejor esta relación. El numerador tendrá la expresión 10000….001 para n par y 111…111 para n impar (sería un repunit). Al dividir entre 3, las expresiones que resultan para los términos de la sucesión estarán formadas por unos alternados con ceros, salvo si acaso el primero. Por tanto, todos equivaldrán a sumas de potencias alternas de 2 terminando al final en 1. Por ejemplo, $85=2^6+2^4+2^2+1$.

Puedes sumar mentalmente en binario dos términos consecutivos y observarás que te van saliendo ceros hasta llegar a un último 1 a la izquierda. Más claro:

La suma de dos términos consecutivos X(n)+X(n+1) equivale a 2^n

Basta estudiar un poco esta expresión para darnos cuenta de que cada término se aproxima al doble del anterior, una vez por la izquierda y la siguiente por la derecha, acercándose al límite del doble exacto. Lo puedes comprobar en esta tabla de cocientes:

0	
1	
1	1
3	3
5	1,66667
11	2,2
21	1,90909
43	2,04762
85	1,97674
171	2,01176
341	1,99415
683	2,00293
1365	1,99854
2731	2,00073
5461	1,99963
10923	2,00018
21845	1,99991
43691	2,00005
87381	1,99998
174763	2,00001
349525	1,99999
699051	2

Podemos concretar más:

Cada término se diferencia en una unidad con el doble del anterior. Concretamente, $X(n+1)=2X(n)+(-1)^n$

En efecto:

X(n+1)-2X(n)= (2^(n+1)-(-1)^(n+1))/3 - (2^(n+1)-2*(-1)^n)/3 = (2*(-1)^n-(-1)^(n+1))/3 =(2*(-1)^n+(-1)^n)/3 = (-1)^n, luego la diferencia es 1 en valor absoluto.

Esta es otra forma de demostrar que el cociente X(n+1)/X(n) tiende a 2 al crecer n.

Algunas propiedades

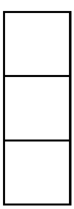
-El que la diferencia entre 3X(n) y 2^n sea sólo la unidad, nos vale para descomponer una fila del triángulo de Pascal en tres sumandos, dos de ellos X(n) y el otro una unidad mayor o menor. Por ejemplo, la fila 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 se puede descomponer usando x(7)=43:

1+7+21+35+35+21+7+1=(1+7+35)+(35+7+1)+(21+21)= 43+43+42

- El producto de dos términos consecutivos es un número triangular:

Si $X(n+1)=2X(n)+(-1)^n$,el producto
X(n)*X(n+1)=2X(n)*(2X(n)+(-1)^n)/2 tendrá la forma de la mitad del producto de dos números consecutivos,

que es la definición de un número triangular. Quizás lo entiendas mejor con un ejemplo: 43691*87381 es un producto de ese tipo y lo podemos escribir como 87381*87382/2

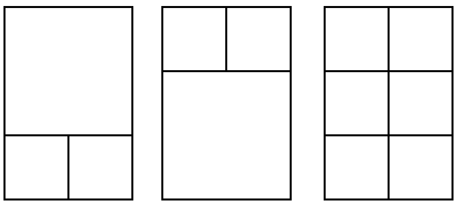


- El término X(n) con n>1 equivale al número de teselaciones de un rectángulo de 3 por n-1 con baldosas de 1 por 1 y 2 por 2.

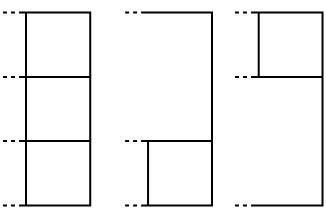
Lo podemos demostrar por inducción. Para n=2

X(2)=1 y coincide con la única forma de teselar así un rectángulo de 3 por 1, ya que sólo se podrían emplear teselas 1 por 1 y no hay otra posibilidad.

Para n=3, X(3)=3, que cuenta las posibles teselaciones de un rectángulo de 2 por 3. Efectivamente, serían 3 las posibilidades con baldosas de 1 por 1 y de 2 por 2:



Procedamos a la inducción. Imaginemos que X(n-1) representa las teselaciones de este tipo en un rectángulo de 3 por n-2. Al añadirle una columna más al rectángulo sólo hay tres posibilidades:



En la primera los tres cuadrados no pueden completar una baldosa de 2 por 2, luego no añaden ni quitan posibilidades, es decir, que el número de teselaciones de este tipo coincidirá con X(n-1).

n	X(n)	S(n)
0	0	0
1	1	1
2	1	2
3	3	5
4	5	10
5	11	21
6	21	42
7	43	85
8	85	170
9	171	341
10	341	682
11	683	1365
12	1365	2730
13	2731	5461
14	5461	10922

En las otras dos posiciones es obligado completar a 2 por 2, y de una forma única, luego el número total será X(n-2). Como hay dos posiciones, el número total será X(n)=X(n-1)+2X(n-2), que es precisamente l definición de la sucesión. La propiedad es cierta.

Dejamos como ejercicio demostrar una variante: X(n) es el número de teselaciones del rectángulo de 2 por n-1 mediante fichas de dominó de 1 por 2 y cuadrados de 2 por 2.

- Suma de la sucesión: La suma de los n primeros términos de la sucesión equivale al valor de X(n+1) si n es par y a X(n+1)-1 si es impar, es decir S(n)=X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$.

Observando la tabla se comprueba esta propiedad para los primeros términos:

Sólo nos quedaría completar la inducción:

Si S(n)=X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$, al sumarle un nuevo término X(n+1) nos daría S(n+1)=2*X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$= X(n+2)+(-1)$^{n+1 \bmod 2}$.

Omitimos los detalles del encaje exacto de la paridad de n en la demostración.

- La función generatriz de esta sucesión es x/(1-x-2*x^2), como puedes comprobar con este desarrollo en PARI

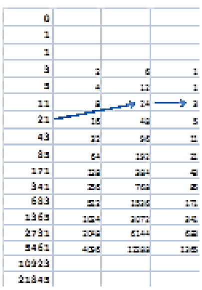
```
write("sucesion.txt",taylor(x/(1-x-2*x^2),x,20))
```

x + x^2 + 3*x^3 + 5*x^4 + 11*x^5 + 21*x^6 + 43*x^7 + 85*x^8 + 171*x^9 + 341*x^10 + 683*x^11 + 1365*x^12 + 2731*x^13 + 5461*x^14 + 10923*x^15 + 21845*x^16 + 43691*x^17 + 87381*x^18 + 174763*x^19 + O(x^20)

Según la teoría explicada anteriormente, basta aplicar la fórmula general:

$$F(x) = \frac{x_0 + (x_1 - a_1 x_0)x}{1 - a_1 x - a_2 x^2} = \frac{0 + (1-0)x}{1 - 1x - 2x^2} = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$$

Y sigue sorprendiéndonos



0			
1			
1			
3	2	6	1
5	4	12	1
11	8	24	3
21	16	48	5
43	32	96	11
85	64	192	21
171	128	384	43
341	256	768	85
683	512	1536	171
1365	1024	3072	341
2731	2048	6144	683
5461	4096	12288	1365
10923			
21845			

La imagen que adjuntamos contiene una propiedad nueva de esta sucesión: Hemos tomado el término 3 y en la tercera columna lo hemos ido multiplicando por las distintas potencias de 2, con lo que obtenemos la suma de un término más avanzado con el correspondiente a la potencia.

Se ha destacado que 3*2^3=24=21+3=X(7)+X(4).

Sigue bajando por la tabla y descubrirás nuevas sumas de este tipo. Ahora, haz lo mismo con el 5 o con el 11 y resultarán relaciones nuevas. Todas ellas se resumen en esta:

X(n)+X(n+2k+1)=X(2k+2)*2^(n-1)

(Se supone que al primer término lo consideramos X(1) y no X(0))

Por ejemplo, en la de la figura:

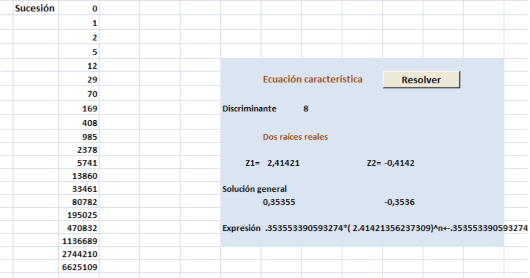
X(4)+X(7)=X(4)*2^3=3+21=24.

Otra: X(5)+X(10)=X(6)*2^4=5+171=176=11*16

Esta propiedad, expresada con otros índices, ha sido propuesta por Paul Curtz en http://oeis.org/A001045

NÚMEROS DE PELL

Tomamos como coeficientes de recurrencia A=2 y B=1. Es decir, que X(n+1)=2X(n)+X(n-1). Si como valores iniciales tomamos 0 y 1 resultan **los números de Pell** o números lambda (Horadam(0,1,1,2).



http://oeis.org/A000129

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832,…Los representaremos como P(n)

Como su nombre indica, contiene soluciones de la ecuación de Pell $\mathbf{x^2-2y^2=1}$. En concreto, los valores P(2n+1), es decir 0, 2, 12, 70, 408, 2378,…corresponden con los valores de Y en la solución. Con nuestras hojas de cálculo ***pell.xls*** y ***pell.ods***

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#ecuadio)

lo puedes comprobar, como se refleja en la imagen:

X	Y	
3	**2**	**+1 ó -1**
17	12	1
99	70	1
577	408	1
3363	2378	1
19601	13860	1
114243	80782	1
665857	470832	1
3880899	2744210	1
22619537	15994428	1

Si tomáramos como valores iniciales $X_1=1$ y $X_2=1$, resultaría una sucesión complementaria:

1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 114243, 275807,…

X	Y	
1	**1**	**+1 ó -1**
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1
1393	985	-1
3363	2378	1
8119	5741	-1
19601	13860	1
47321	33461	-1
114243	80782	1
275807	195025	-1

Observa que aquí los términos de índice impar se corresponden con los valores de X en la solución de la ecuación: 1, 3, 17, 99, 577,…La llamaremos sucesión Pell2 y la representaremos como P'(n)

Así que ya sabes por qué se eligió el nombre de "números de Pell". Ambas sucesiones también contienen las soluciones de $\mathbf{x^2-2y^2=-1}$.

En la imagen queda claro que los términos de índice 2n en ambas sucesiones son soluciones con -1 en el segundo miembro. Según eso, los números de PELL recogen todos los casos en los que 2k^2±1 es un cuadrado, porque es como despejar la X en la ecuación de Pell.

Te dejamos que saques tus consecuencias, o busques otras correspondencias en http://oeis.org/A000129 y en http://oeis.org/A001333. Una muy interesante es que

P(n+1)=P(n)+P'(n)

En efecto, se cumple para los primeros valores (ver tabla anterior) 3+2=5, 7+5=12, 17+12=29,…luego bastará comprobarlo por inducción.

P(n+2)=2P(n+1)+P(n)=2(P(n)+P’(n))+P(n-1)+P’(n-1)=P(n+1)+P’(n+1)

Intenta justificar esta otra: **P(n+1)=P’(n+1)-P(n)** Los primeros cálculos en la tabla serían: 3-1=2, 7-2=5,17-5=12,…

De ellas dos resultaría una tercera: **2P(n+1)=P’(n+1)+P’(n)**

Ambas sucesiones también intervienen en las fracciones continuas del desarrollo de la raíz de 2. Todo esto ocurre porque en ambos casos la generación de numeradores y denominadores **siguen la misma ley de recurrencia**. Lo vemos en nuestras herramientas ***fraccont.xls*** y ***fraccont.ods***

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#algoritmo)

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
1,00000000	1,50000000	1,40000000	1,41666667	1,41379310	1,41428571	1,41420118	1,41421569	1,41421320	1,41421362

Fórmula general

Acudimos al estudio de la ecuación característica, que vemos presenta dos soluciones reales: 2,4142 (uno más la raíz de 2) y –0,4142 (uno menos la raíz de 2) e interpretando los coeficientes de abajo resulta:

$$P(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

Comprueba: Para n=0 resulta P(0)=0, para n=1, P(1)=1, y además P(2)=2, P(3)=5,…

Al tener la segunda potencia una base menor que la unidad en valor absoluto, si n tiende a infinito, ese sumando tiende a cero, con lo que es fácil ver que

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} \to 1+\sqrt{2}$$

Puedes crear una columna de cocientes en hoja de cálculo para comprobarlo.

1	
2	2
5	2,5
12	2,4
29	2,41666667
70	2,4137931
169	2,41428571
408	2,41420118
985	2,41421569
2378	2,4142132
5741	2,41421362
13860	2,41421355
33461	2,41421356
80782	2,41421356
195025	2,41421356
470832	2,41421356
1136689	2,41421356
2744210	2,41421356
6625109	2,41421356

Para la sucesión complementaria Pell2 la fórmula que resulta es

$$P'(n) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

Para n=0 te resulta 1, para n=1, P’(1)=1, para x=2, P’(2)=3, y así con todos.

Con la primera fórmula para X(n) se puede demostrar esta identidad:

$P(n+1)P(n-1)-P(n)^2=(-1)^n$

Aquí tienes la comprobación con hoja de cálculo:

X(n)	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
X(n+1)X(n-1)		0	5	24	145	840	4901	28560	166465	970224	5654885	
X(n)^2		1	4	25	144	841	4900	28561	166464	970225	5654884	
Diferencia		-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	

Función generatriz

Con el procedimiento general explicado en la primera parte del tema deduciremos que

$$P(x)=\frac{x_0+(x_1-a_1x_0)x}{1-a_1x-a_2x^2}=\frac{0+(1-0)x}{1-2x-x^2}=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

Una curiosa propiedad

La cifra de las unidades de los distintos términos de la sucesión de Pell recorre el conjunto ordenado {0, 1, 2, 5, 2, 9, 0, 9, 8, 5, 8, 1} Lo puedes comprobar con los primeros: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461,…Para asegurarse de que es un fenómeno periódico, en el que se repiten resultados en el mismo orden basta saber que el valor de cada uno sólo depende de los dos anteriores, por tratarse de las unidades (si fueran decenas por ejemplo, se verían alteradas por los arrastres).

Si x(n) termina en una cifra K y x(n+1) en otra H, x(n+2) deberá terminar necesariamente en (2*K+H) MOD 10. Así 169 y 408 deberán producir una cifra de unidades (8*2+9) MOD 10, es decir, el 5, y en efecto, el siguiente término es 985. Como juegos del tipo {K,H} sólo pueden aparecer 100 distintos, se llegará a un término en el que se repita el mismo juego de cifras, luego:

La cifra de las unidades de cualquier sucesión definida por recurrencia de segundo orden debe repetirse en los términos sucesivos (salvo quizás los iniciales) con un periodo igual o menor que 100.

En la sucesión de Pell el periodo es 12, como hemos visto. En la de Jacobsthal

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html) es de sólo 4: {1, 1, 3, 5} Compruébalo: 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691,…Con cálculos 1+1*2=3; 3+1*2=5; 5+2*3=11 (cifra 1)…

A veces el periodo es muy amplio. Lo intentamos con la sucesión de Fibonacci y se sobrepasaba la capacidad de la hoja de cálculo, por lo que acudimos a nuestra STCALCU (http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#stcalcu) descubriendo que el periodo es de 60 elementos nada menos:

{1, 1, 2, 3. 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0. 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0} (ver http://oeis.org/A003893)

Aplicaciones y propiedades

¿Cuándo un número es triangular y cuadrado a la vez?

Lo planteamos: k^2=h(h+1)/2 y transformando 8k^2+1=4h^2+4h+1=(2h+1)^2 Si llamo x=2h+1 e y=2k nos queda 2y^2+1=x^2 y por fin x^2-2y^2=1, ecuación de Pell que nos da la solución mediante los números de Pell. Después aplicaremos k=y/2 y h=(x-1)/2

0		0
1		
2		1
5		
12		36
29		
70		1225
169		
408		41616
985		
2378		1413721
5741		
13860		48024900
33461		
80782		1631432881

Según estas equivalencias, k será igual a la mitad de los números de Pell de orden impar y su cuadrado el triangular buscado. Calculamos y obtenemos así la lista de los números que son triangulares y cuadrados a la vez:

Nos han resultado 0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, …(http://oeis.org/A001110)

Una interpretación

P(n) equivale al número de formas en las que se puede descomponer n-1 en sumandos ordenados 1 y 2, pudiendo tener el 1 dos colores diferentes.

Por ejemplo, P(4)=12, porque el 3 se puede descomponer así:

2+1, 2+1, 1+2, 1+2, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1

Primos de Pell

Para que un número de Pell P(n) sea primo es necesario que n sea primo. Los valores de n que producen esos primos son 2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53, 59, 89, 97, 101, 1,… que producen los números de Pell primos

2, 5, 29, 5741, 33461, 44560482149, 1746860020068409,…

Los compuestos no pueden producir primos, porque en la expresión

$$P(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n)\right)$$

puede descomponer entonces el exponente n, lo que produce la descomposición de la expresión en al menos dos factores, uno de los cuales será una diferencia de potencias similares con exponente mayor que 1, que absorberá el denominador. Desarróllalo con cuidado y lo comprobarás.

NÚMEROS DE LUCAS

En apartados anteriores hemos estudiado algunas sucesiones tipo Horadam. Son aquellas que se forman mediante una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, es decir del tipo $\mathbf{x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}}$

(http://mathworld.wolfram.com/LinearRecurrenceEquation.html)

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro. A esos dos números a_1 y a_2 les llamaremos los coeficientes de la recurrencia.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Estas sucesiones reciben el nombre de "sucesiones de Horadam" y se caracterizan por estar determinadas por esos cuatro parámetros dentro de una recurrencia de segundo orden homogénea. Así, la sucesión de Fibonacci es Horadam(0,1,1,1), porque los parámetros se escriben en orden inverso a como lo hacemos aquí. Sólo estudiaremos algunos casos, pues el tema es muy amplio y con muchas sucesiones interesantes. En este enlace puedes repasar el funcionamiento de una herramienta para estudiarlas:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/recurrencias-lineales-de-segundo-orden.html

En estas entradas se estudiaron dos casos concretos

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/02/numeros-de-pell.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html

La herramienta de hoja de cálculo la tienes en

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Sucesiones de Fibonacci generalizadas

Se han estudiado mucho las sucesiones de Horadam con coeficientes A=1 y B=1. Algunas de ellas son muy populares, formando un pequeño entramado de sucesiones similares que tendremos que desentrañar. Comencemos dando a X_1 y X_2 los valores usuales entre 0 y 2:

$X_1=0$ y $X_2=1$: Resulta la sucesión de Fibonacci comenzando en 0: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,… http://oeis.org/A000045. Por ahora no la estudiaremos. Se ha escrito tanto sobre ella que no parece fácil aportar algo nuevo.

$X_1=1$ y $X_2=1$: Resulta la sucesión de Fibonacci comenzando en : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…La nombraremos como F(n) http://oeis.org/A000045

$X_1=1$ y $X_2=2$: Se formará la misma sucesión comenzando en el segundo 1: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…

$X_1=2$ y $X_2=1$: Obtenemos la sucesión de Lucas comenzando en 2: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571,… http://oeis.org/A000032. La representaremos como L(n)

X_1=1 y X_2=3: Obtenemos la sucesión de Lucas comenzando en 1: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571,… http://oeis.org/A000204

Nos detenemos aquí: según los términos iniciales, podemos obtener la clásica sucesión de Fibonacci, la de Lucas o la de otras del tipo Fibonacci, como la contenida en http://oeis.org/A104449

No nos cabrían aquí todas las propiedades de la primera, ya muy estudiadas y publicadas. Sólo destacaremos alguna de ellas si lo vemos oportuno y nos dedicaremos más a los números de Lucas.

Números de Lucas

Los números de Lucas se pueden engendrar con los coeficientes A=1 y B=1 comenzando con X_1=2 y X_2=1 (más arriba hemos visto otra variante), es decir forman la sucesión de Horadam(2,1,1,1).

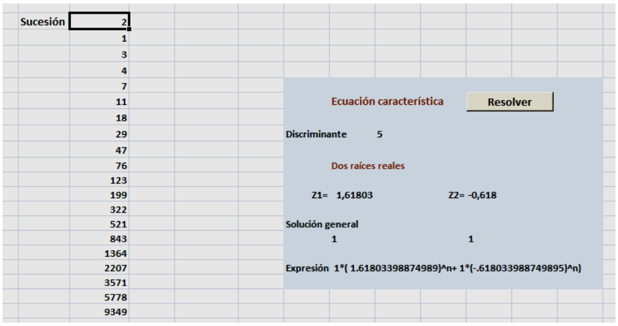
En estas direcciones puedes ampliar el tema:

http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo13.html

http://gaussianos.com/algunas-curiosidades-sobre-los-numeros-de-fibonacci/

http://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html

Con hoja de cálculo y nuestra herramienta *recurre_lineal* presentan estos valores:



2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571,… Los representaremos como L(n)

http://oeis.org/A000032

En la parte derecha, que te da automáticamente la expresión respecto a **n**, puedes comprobar la fórmula de **L(n)**

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n}$$

Es parecida a la de la sucesión de Fibonacci, con la que comparte la misma fórmula de recurrencia. Observa que a partir de n=2, el valor absoluto de la segunda potencia es menor que ½, por lo que X(n) coincidirá con la parte entera de la primera, que coincide con la razón áurea φ elevada a n.

ENT:	FHI*n	2
2	1,618034	1
3	2,618034	3
4	4,236068	4
7	6,854102	7
11	11,09017	11
18	17,94427	18
29	29,03444	29
47	46,97871	47
76	76,01316	76
123	122,9919	123
199	199,005	199
322	321,9969	322
521	521,0019	521
843	842,9988	843
1364	1364,001	1364
2207	2207	2207
3571	3571	3571
5778	5778	5778

Es decir:

$$L(n) = \left|\varphi^n + \frac{1}{2}\right|$$

En la imagen lo hemos programado en hoja de cálculo y se descubre la coincidencia de valores para n>1.

Consecuencia inmediata de esto es que L(n+1)/L(n) tiene al valor φ cuando n tiende a infinito, al igual que ocurre con la sucesión de Fibonacci.

Periodicidad de la cifra de las unidades

Al igual que en otras sucesiones de Horadam. Los números de Lucas presentan un ciclo de longitud 12 en sus cifras de unidades:

{2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9}

Lo puedes comprobar en el listado: El tercer número de Lucas es 4 y si avanzo 12 pasos en la sucesión encuentro 1364 que también termina en 4. Aunque se genera del mismo modo que la sucesión de Fibonacci, esta última no presenta este ciclo porque en ella nunca coinciden un 1 seguido de un 3.

Relaciones con los números de Fibonacci

Dos sucesiones tan similares tienen por fuerza que relacionarse de varias formas. Comenzamos con la más sencilla:

L(n) = F(n+1)+F(n-1) para n > 0.

Por inducción: Se cumple en los primeros valores:

Fibonacci	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F(n+1)+F(n-1)		**1**	**3**	**4**	**7**	**11**	**18**	**29**	**47**	**76**	**123**	**199**	

Si la suponemos verdadera para n, L(n)=F(n+1)+F(n-1) se tiene: L(n+1)=L(n)+L(n-1)= F(n+1)+F(n-1)+ F(n)+F(n-2)=F(n+2)+F(n), luego se cumple y la relación queda demostrada.

L(n)=F(2n)/F(n)

Llama la atención esta igualdad, pero basta acudir a una propiedad de F(n), y es que $F(2n)=(F(n+1)^2-F(n-1)^2$

(Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number) y desarrollar:

$F(2n)=(F(n+1)^2-F(n-1)^2=$ F(2n)=(F(n+1)+F(n-1))(F(n+1)-F(n-1))=L(n)F(n) y despejando obtenemos la relación propuesta. Por ejemplo, tomemos n=6. Tendremos: L(6)=18, F(6)=8, F(12)=144, luego

F(12)=144=F(6)L(6)=18*8=144

Según estas equivalencias, cualquier fórmula expresada con números de Lucas, también se puede hacer depender de los de Fibonacci.

Una relación inversa

Lucas	L(n-1)+L(b+1)	Fibonacci
2		
1		
3	5	1
4	5	1
7	10	2
11	15	3
18	25	5
29	40	8
47	65	13
76	105	21
123	170	34
199	275	55
322	445	89
521	720	144
843	1165	233

F(N)=(L(N-1)+L(N+1))/5

Comprobamos los términos iniciales con hoja de cálculo:

Se puede completar la demostración por inducción:

F(N+1)=F(N)+F(N-1)=(L(N-1)+L(N+1)+L(N-2)+L(N))/5 =

(L(N)+L(N)+L(N+1))/5 = (L(N)+L(N+2))/5

Función generatriz

Si has leído toda la serie que llevamos publicada sobre recurrencias, no te costará trabajo entender que

$$L(x)=\frac{x_0+(x_{1-}a_1x_0)x}{1-a_1x-a_2x^2}=\frac{2+(1-1*2)x}{1-1x-x^2}=\frac{2-x}{1-2x-x^2}$$

Congruencias

Los números de Lucas presentan congruencias destacables:

1	1	0
2	3	1
3	4	1
4	7	3
5	11	1
6	18	0
7	29	1
8	47	7
9	76	4
10	123	3
11	199	1
12	322	10
13	521	1
14	843	3
15	1364	14
16	2207	15
17	3571	1
18	5778	0
19	9349	1

L(p) es congruente con 1 módulo p, siendo p primo.

Puedes aprovechar para comprobarlo el listado básico que nos devuelve la hoja de cálculo recurre_lineal que venimos usando. Basta incluir la función RESIDUO aplicada a L(n) y a n y comprobarás que para índices primos el resto es 1.

Como ocurría en una situación similar con los números de Pell, la propiedad contraria no es cierta, ya que también hay números compuestos en los que el residuo es también 1. Se les da el nombre de pseudoprimos de Lucas y los tienes en https://oeis.org/A005845: 705, 2465, 2737, 3745, 4181, 5777, 672,…

L(2p) con p primo es congruente con 3 módulo p

En la imagen anterior puedes comprobar los casos de 3, 10 y 14

L(n) es par si n es múltiplo de 3 e impar en los demás casos.

Esta propiedad es casual, y debida a la definición de estos números: Los dos primeros son impares, luego el tercero, su suma, será par, el siguiente impar+par será impar y el quinto, par+impar, también será impar. Así seguiremos de forma que algunos consecutivos serán impares y el tercero par.

Existen otras congruencias más complicadas que omitimos.

SOLUCIONES ENTERAS

Puede ser curioso estudiar sucesiones Horadam cuyas soluciones en la ecuación característica sean enteras

Puedes repasar algo de este tipo de sucesiones en estas entradas que ya hemos publicado:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/recurrencias-lineales-de-segundo-orden.html

En ella se explican las recurrencias de Segundo orden y cómo encontrar sus ecuación característica. En estas otras explicamos ejemplos concretos, que te pueden server de guía:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/02/numeros-de-pell.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html

Usaremos la misma herramienta de hoja de cálculo, ***recurre_lineal***, alojada en http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Así que enlazaremos con lo ya publicado estudiando la ecuación característica **$x^2-a_1x-a_2=0$** en el caso en el que tenga soluciones enteras.

Es fácil ver que si llamamos Z_1 y Z_2 a esas dos soluciones, deberá cumplirse que $a_1=Z_1+Z_2$ y $a2=-Z_1Z_2$. Así de simple: si deseas unas soluciones determinadas (aquí enteras) basta que tomes como coeficiente de X(n-1) en la ecuación de recurrencia su suma y como segundo coeficiente su producto cambiado de signo:

$X(n)=(Z_1+Z_2)X(n-1)-Z_1Z_2X(n-2)$

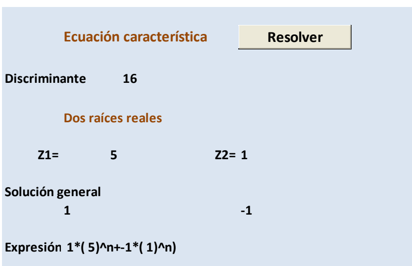
Por ejemplo, si deseamos generar mediante recurrencia $X(n)=5^n-1^n$, el primer paso sería elegir como a_1 su suma 6 y como a_2 su producto 5 tomado negativo:

X(n)=6X(n-1)-5X(n-2)

Los términos iniciales los elegiríamos por sustitución $X(0)= 5^0-1^0=1-1=0$ y $X(1)= 5^1-1^1=5-1=4$. Lo volcamos todo en nuestra hoja de cálculo ***recurre_lineal*** y obtendremos:

0
4
24
124
624
3124
15624
78124
390624
1953124
9765624
48828124
244140624

Son los números de fórmula 5^n-1 pedidos. Si resolvemos su ecuación característica comprobaremos esta expresión:



Esta sucesión la tienes en http://oeis.org/A024049 En la dirección http://oeis.org/wiki/Index_to_OEIS:_Section_Rec tienes un completo catálogo de sucesiones generadas de forma similar.

Situación inversa

Toda sucesión definida en su término general por **$X(n)=mA^n+nB^n$** (en este caso con **m** y **n** enteros) se puede generar de esta forma:

Si $X(n)=mA^n+nB^n$ y $X(n-1)=mA^{n-1}+nB^{n-1}$, tendremos

$X(n+1)=(A+B)*(mA^n+nB^n)-AB*(mA^{n-1}+nB^{n-1})= (A+B-B)*mA^n + (A+B-A)*nB^n= mA^{n+1}+nB^{n+1}$,

luego la recurrencia es válida.

Después haríamos X(0)=m+n y X(1)=mA+nB

Toda sucesión del tipo $X(n)=mA^n+nB^n$ se puede generar mediante una recurrencia lineal homogénea de segundo orden

Otro ejemplo

Tomemos otro ejemplo: $X(n)=4^n-2^n$. La recurrencia que la reproduce será: X(0)=0, X(1)=4-2=2, X(n)=6X(n-1)-8X(n-2)

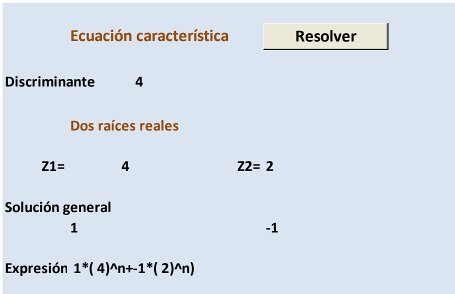
Aquí tienes la sucesión formada con nuestra hoja de cálculo

Sucesión	0
	2
	12
	56
	240
	992
	4032
	16256
	65280
	261632
	1047552
	4192256
	16773120

Hemos elegido la recurrencia propuesta

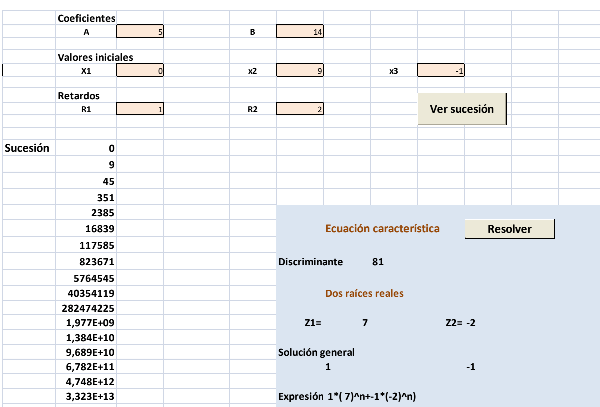
Coeficientes					
A	6		B	-8	
Valores iniciales					
X1	0		x2	2	

Y hemos reproducido la diferencia de potencias como fórmula general:



Esta sucesión la tienes estudiada en http://oeis.org/A020522 y medio escondida figura la recurrencia.

De esta forma podemos generar cualquier otra sucesión de ese tipo. Tomemos un ejemplo con un negativo: $X(n)=7^n-(-2)^n$. En este caso tomaríamos X(0)=0, X(1)=9, X(n)=5X(n-1)+14X(n-2). En la imagen puedes estudiar la comprobación:



Función generatriz

Si una sucesión está definida como combinación lineal de potencias de dos enteros hemos demostrado que se puede generar mediante una recurrencia de segundo orden. Podremos usar el modelo de F.G. que definimos en su momento

$$F(x) = \frac{x_0 + (x_1 - a_1 x_0)x}{1 - a_1 x - a_2 x^2}$$

En este caso se traduciría así:

$$F(x) = \frac{(mA + nB)x}{1 - (A+B)x + ABx^2}$$

En el ejemplo anterior se traduciría como

$$F(x) = \frac{9x}{1 - 5x - 14x^2}$$

Lo comprobamos con PARI

{write("final.txt",taylor(9*x/(1-5*x-14*x^2), x,12))}

Efectivamente, los coeficientes del desarrollo coinciden con los obtenidos con hoja de cálculo.

9*x + 45*x^2 + 351*x^3 + 2385*x^4 + 16839*x^5 + 117585*x^6 + 823671*x^7 + 5764545*x^8 + 40354119*x^9 + 282474225*x^10 + 1977328791*x^11 + O(x^12)

Números de Mersenne

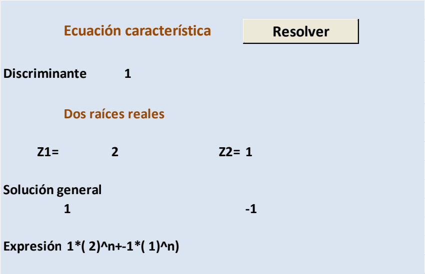
Los números de forma 2^n-1 son llamados "de Mersenne", aunque son más populares los "primos de Mersenne" 3, 7, 31, 127, 8191, 131071,…Con lo explicado anteriormente será fácil generarlos: a_1=3, a_2=-2, X(0)=0, X(1)=1. Volcamos estos datos en la herramienta:

Coeficientes					
A	3		**B**	-2	
Valores iniciales					
X1	0		**x2**	1	

Obtenemos

Sucesión	**0**
	1
	3
	7
	15
	31
	63
	127
	255
	511
	1023
	2047
	4095
	8191
	16383
	32767

Comprobamos la expresión general:

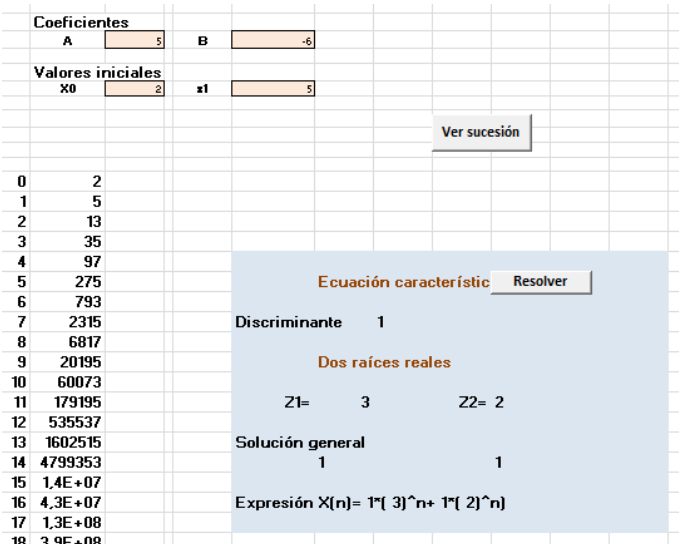


Estos números los encontrarás en http://oeis.org/A000225 Merece la pena que recorras los comentarios sobre esta sucesión, en especial su conexión con el problema de las torres de Hanoi. En el apartado de fórmulas encontrarás la recurrencia que hemos usado y la función generatriz, que puedes comprobar con lo explicado anteriormente.

Una suma de potencias

¿Cómo engendrar mediante recurrencia la sucesión 2^n+3^n?

Te dejamos tan sólo el volcado de pantalla de la misma, para que saques tus consecuencias:



COMPROBACIÓN DE CONJETURAS

ANDRICA

Conjetura de Andrica

La conjetura de Andrica se expresa algebraicamente mejor que con palabras. Si representamos por p_n el número primo que aparece en el lugar **n** de su lista, la conjetura se expresa como

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

"La diferencia entre las raíces cuadradas de dos números primos consecutivos es siempre menor que 1"

Sobre su historia, autor y algunas consideraciones interesantes, en lugar de copiarlas aquí remitimos a una destacada entrada del blog "Gaussianos"

(http://gaussianos.com/la-conjetura-de-andrica-o-que-distancia-hay-entre-dos-numeros-primos-consecutivos/)

Lo que nos interesa aquí tiene carácter más humilde, y es la comprobación de esta conjetura con una hoja de cálculo y nivel medio de dificultad. Para ello necesitas dos funciones: ESPRIMO, que te devuelve si un número es primo o no y PRIMPROX, que encuentra el menor número primo que es mayor que uno dado (sea primo o no). Para evitarte tratar con definiciones de funciones y con el BASIC de las hojas, hemos creado la herramienta ***conjeturas.xlsm***, que se encuentra en la dirección

(ver http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#conjeturas).

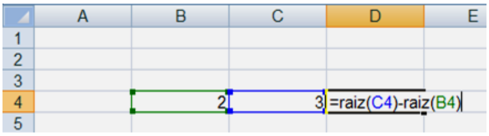
La primera hoja contiene el espacio de trabajo, la segunda el catálogo de funciones implementadas y la tercera los enunciados de las conjeturas. Este archivo se podrá ir actualizando sin previo aviso conforme se vayan tratando conjeturas nuevas.

Supondremos, pues, que tienes abierta la hoja ***conjeturas.xlsm***. Puedes comenzar una tabla en la que figuren en la primera columna todos los números primos (verás cómo) y en la segunda los siguientes primos de cada uno de ellos. Después, en una tercera escribimos la diferencia de las raíces cuadradas de ambos.

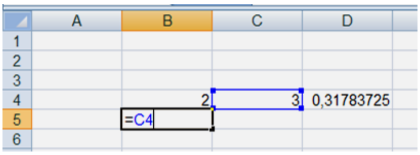
Construcción de la tabla

Comienza, por ejemplo, escribiendo un 2 en la celda B2. Usa la función PRIMPROX para escribir el siguiente primo en C4: =PRIMPROX(B4). Evidentemente obtendrás un 3.

En la celda D4 escribe la diferencia de raíces cuadradas =RAIZ(C4)-RAIZ(B4)



Para que puedas extender la tabla hacia abajo, en la celda B5 copia el contenido de la C4, pero como fórmula, **=C4**. No uses *Copiar y Pegar*. Obtendrás un 3, como era de esperar.



Con el controlador de relleno copia hacia abajo las celdas C4 y D4

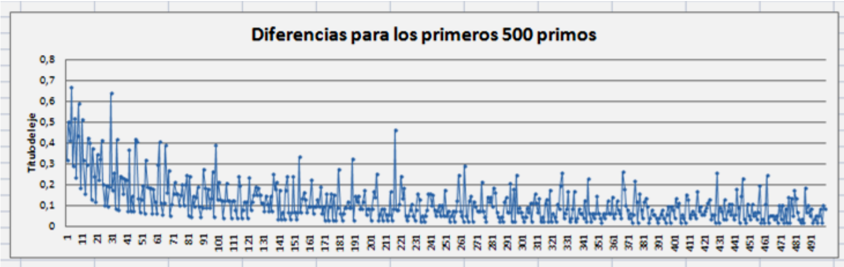
P(n)	P(n+1)	Diferencia raíces
2	3	0,317837245
3	5	0,50401717

Lo que te queda por hacer es muy sencillo: de nuevo con el control de relleno copia las tres nuevas celdas de la fila 5 hacia abajo hasta el número de filas que desees:

P(n)	**P(n+1)**	**Diferencia raíces**
2	3	0,317837245
3	5	0,50401717
5	7	0,409683334
7	**11**	**0,670873479**
11	13	0,288926485
13	17	0,51755435
17	19	0,235793318
19	23	0,43693258
23	29	0,589333284
29	31	0,182599556
31	37	0,514998167
37	41	0,320361707
41	43	0,154314287
43	47	0,298216076
47	53	0,424455289
53	59	0,401035859
59	61	0,129103928
61	67	0,375103096
67	71	0,240797001
71	73	0,117853972
73	79	0,344190672
79	83	0,222239162
83	89	0,323547553
89	97	0,41487667
97	101	0,201017819
101	103	0,099015944

Hemos marcado en negrita la máxima diferencia, y como era de esperar, todas son menores que la unidad.

Aunque ya están publicados, te puedes dar la satisfacción de crear tu propio gráfico, añadiendo, por ejemplo, otra columna con los números de orden:



En el gráfico se aprecia la máxima diferencia antes de llegar al 11 y que la tendencia general es que, con grandes oscilaciones, los valores tienden a cero, lo que da confianza en que la conjetura sea cierta.

Otra interpretación

Si representamos por D_n la diferencia entre dos primos consecutivos

$$D_n = P_{n+1} - P_n$$

Si la conjetura es cierta se cumple

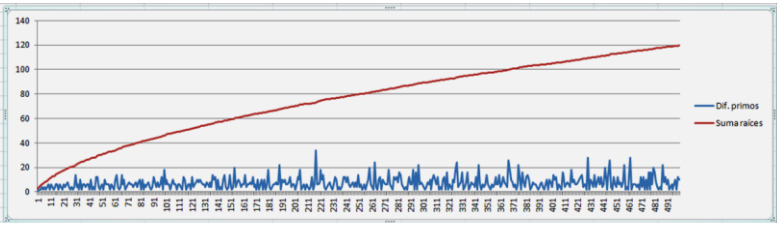
$$D_n = \left(\sqrt{P_{n+1}} + \sqrt{P_n}\right)\left(\sqrt{P_{n+1}} - \sqrt{P_n}\right) < \sqrt{P_{n+1}} + \sqrt{P_n}$$

La diferencia entre dos primos consecutivos siempre es menor que la suma de las raíces cuadradas de ambos.

Es fácil deducir otra expresión más simple:

$$D_n < 2\sqrt{P_n} + 1$$

Puedes crear dos columnas nuevas en tu tabla, una con la suma de raíces y otra con la diferencia de primos consecutivos. Intenta crear un gráfico similar a este:



Contrasta la “suavidad” de la gráfica de la suma de raíces con la de la diferencia de primos. Hay que tener en cuenta que en la primera cada primo se suma en dos datos consecutivos, lo que produce un efecto de promedio, que oculta algo las irregularidades. Lo importante en este caso es se cumple la desigualdad deducida de la conjetura de Andrica.

Una interesante generalización

Si la conjetura de Andrica es cierta, podemos plantear la ecuación

$$p_{n+1}^{x} - p_{n}^{x} = 1$$

Tendremos la seguridad de que x estará entre los valores 0,5 y 1. Para cada par de primos consecutivos x tendrá un valor distinto. El máximo lo alcanza para el par (2,3) en el que x=1 y el mínimo en p_{n+1}=127 y p_n=113 con x=0.567148... Este valor es conocido como la constante de Smarandache. La tienes en http://oeis.org/A038458

Es muy instructivo el procedimiento que podemos usar para encontrar el valor de x correspondiente a cada par de números primos consecutivos. Podemos usar para ello la herramienta de **Búsqueda de Objetivos** (lo desarrollamos para Excel, pero es muy fácil trasladarlo a otras hojas)

Tal como se explicó en párrafos anteriores, comienza por crear una tabla de pares de números primos consecutivos. Si te da pereza, usa lo que sigue para un solo par.

P(n)	p(n+1)	x	P(n+1)^x-P(n)^x
2	3	1	1
3	5	1	2
5	7	1	2
7	11	1	4
11	13	1	2
13	17	1	4
17	19	1	2
19	23	1	4
23	29	1	6
29	31	1	2
31	37	1	6
37	41	1	4
41	43	1	2

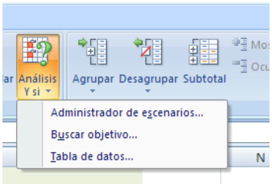
En la tabla hemos añadido una columna para x en la que iniciamos con el valor 1. Una cuarta columna la rellenamos con la fórmula p(n+1)^x-p(n)^x. Si la reproduces, comprueba que los valores que obtienes son los que figuran en la imagen.

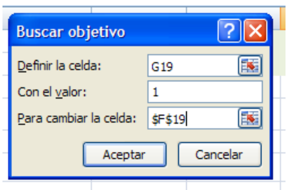
Búsqueda del valor de x

Usaremos la Búsqueda de objetivos para resolver la ecuación

$$p_{n+1}^{x} - p_{n}^{x} = 1$$

Elige un par cualquiera, por ejemplo 29 y 31. Señala la celda que contiene el valor 2 para la diferencia de potencias, y busca el procedimiento ***Buscar Objetivo*** en la fichas **Datos** y grupo **Análisis Y si…**





Ahora, en *Definir la celda* escribes la que contiene la diferencia 2, como *valor* escribes 1, porque ese es tu objetivo, y en *Para cambiar la celda* escribes la celda donde está el valor 1 de la x.

Al pulsar aceptar obtendrás la solución, tal como ves en la imagen:

29	31	0,84555613	1,000125408

La solución, 0,84555… está entre 0,5 y 1, tal como habíamos conjeturado.

Toma el par 113 y 127 y obtendrás la la constante de Smarandache con cinco decimales correctos:

113	127	0,567149642	1,000009903

El problema está en que has de ver cada par uno a uno, pero para un cálculo conjunto nos tendríamos que complicar el proceso.

Puedes consultar más generalizaciones en http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0707/0707.2584.pdf

CONJETURA DE LEGENDRE

Esta conjetura afirma que entre dos cuadrados consecutivos n^2 y $(n+1)^2$ existe siempre un número primo.

Se considera básica e importante, por lo que se incluyó en los Problemas de Landau

(http://en.wikipedia.org/wiki/Landau%27s_problems)

Al igual que en la conjetura de Andrica, sólo necesitamos para estudiarla las funciones ESPRIMO y PRIMPROX, incluidas en la herramienta que hemos preparado para el estudio de conjeturas.

(ver http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#conjeturas)

Es fácil organizar los cálculos. Diseñamos una columna con los primeros números naturales y junto a ella la de sus cuadrados. Después, a la derecha de cada cuadrado calculamos la función PRIMPROX sobre él para encontrar su próximo primo. Este deberá pertenecer al intervalo formado por ese cuadrado y el siguiente:

N	N^2	PRIMPROX(N^2)
1	1	2
2	4	5
3	9	11
4	16	17
5	25	29
6	36	37
7	49	53
8	64	67
9	81	83
10	100	101
11	121	127
12	144	149
13	169	173

A simple vista vemos que cada primo de la tercera columna es menor que el siguiente cuadrado: 67 menor que 81, luego está comprendido entre 64 y 81, o 149, que pertenece al intervalo (144, 169), y así con todos.

Nada impide que comiences la lista no con el 1, sino con un cuadrado mayor, como ves en la imagen

N	N^2	PRIMPROX(N^2)
3201	10246401	10246403
3202	10252804	10252817
3203	10259209	10259237
3204	10265616	10265617
3205	10272025	10272043
3206	10278436	10278461
3207	10284849	10284877
3208	10291264	10291277

Si lo vas a explicar a otras personas, podías añadir una cuarta columna con una fórmula de tipo condicional =SI(el primo es menor que el siguiente cuadrado;”Vale”;”Error”)

3201	10246401	10246403	VALE
3202	10252804	10252817	VALE
3203	10259209	10259237	VALE
3204	10265616	10265617	VALE
3205	10272025	10272043	VALE
3206	10278436	10278461	VALE
3207	10284849	10284877	VALE
3208	10291264	10291277	VALE

De hecho, no existe sólo un número primo entre dos cuadrados, sino que pueden entrar más. Tienes ese dato en http://oeis.org/A014085. Puedes descubrirlo tú con la función PRIMPROX. Sólo copiamos un esquema para el cuadrado de 26, con un resultado de 7 primos:

Número	26
Cuadrado	676
Siguiente cuadrado	729
Primos	
677	
683	
691	
701	
709	
719	
727	

Si construyes bien un esquema similar podrás encontrar el número de primos entre otros cuadrados consecutivos.

Otro ejercicio sencillo sería, dado un número primo encontrar entre qué cuadrados está. No necesitas saber mucho ¿Cómo se haría? Recuerda la función ENTERO. Ahí tienes un ejemplo:

Primo	288179
536	287296
537	288369

Otra formulación

Si usamos la función π, que da la distribución de los números primos (π(200) equivaldría a los primos que existen menores o iguales a 200), la conjetura de Legendre se podría expresar así:

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) > 0$$

En nuestra herramienta ***conjeturas.xlsm*** hemos implementado la función PPI(n) (le añadimos una p para que no se confunda con el número π, que se expresa como PI()) Con ella es fácil verificar la conjetura: escribes los dos cuadrados consecutivos y le aplicas la función PPI a cada uno. Restas y deberá darte un número mayor que 0. Puedes construirte un esquema de cálculo similar al de la imagen:

	Número	Cuadrado	Función PI
n	217	47089	4857
n+1	218	47524	4899
		Diferencia	**42**

En la página http://oeis.org/A014085 citada más arriba se incluye una generalización de esta conjetura, en el sentido de el exponente 2 se podría sustituir por otro más pequeño. Se ha conjeturado que se podría llegar hasta log(127)/log(16)= 1,74717117169. Se entiende que con carácter general, para todos los valores. Más abajo verás que en un caso particular se puede llegar a valores más pequeños.

Si el esquema anterior lo modificamos para que en lugar de un cuadrado usemos el exponente que deseemos nos servirá para acercarnos al valor mínimo en el que la conjetura sigue siendo cierta:

	Exponente	**1,21**	
	Número	Potencia	Función PI
n	217	671,6086453	121
n+1	218	675,3553697	122
		Diferencia	**1**

Nos hemos dedicado a aproximar este caso al valor mínimo posible y hemos llegado hasta el exponente 1,20545 como mero entretenimiento.

Andrica y Legendre

Si la conjetura de Andrica es cierta, de ella se deduce la de Legendre. En efecto, vimos anteriormente que la diferencia entre un primo P_n y el siguiente P_{n+1}, si la conjetura de Andrica se verdadera, debería cumplir la desigualdad

$$D_n < 2\sqrt{P_n} + 1$$

De ella se deduciría la de Legendre fácilmente. Supongamos que alguien descubre que entre dos cuadrados consecutivos n^2 y $(n+1)^2$ no existe ningún número primo. En este caso llamemos p_n al primo inmediatamente menor que n^2. Sería $p_n<n^2<p_{n+1}$. Según la desigualdad anterior ocurriría que si no existiera ningún primo entre n^2 y $(n+1)^2$ tendríamos

$$D_n = P_{n+1} - P_n > (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 2\sqrt{P_n} + 1$$

Esto está en contradicción con la desigualdad previa, luego ha de existir un primo entre ambos cuadrados.

Otra formulación más

Es evidente que la conjetura de Legendre es equivalente a la afirmación de que entre dos números consecutivos n y n+1 siempre existe un número que es la raíz cuadrada de un número primo. Pero esto nos va a dar juego a continuación.

PRIMO MÍNIMO DETRÁS DE UN CUADRADO

En el apartado anterior estudiamos la conjetura de Legendre y terminamos con la formulación siguiente: La conjetura de Legendre es equivalente a la afirmación de que entre dos números consecutivos n y n+1 siempre existe un número que es la raíz cuadrada de un número primo.

$$n < \sqrt{p} < n+1$$

La conjetura de Legendre nos afirma que existe uno al menos, pero lo normal es que existan más. Nos fijaremos en el primer número primo que es mayor que un cuadrado dado n^2, y que, por tanto, su raíz cuadrada sea la más cercana de este tipo al valor de n. Esos valores son fáciles de encontrar. Aquí tienes una función en BASIC:

```
Function primomincuad(n)
 a=n*n+1
while not esprimo(a)
a=a+1
wend
primomincuad=a
End function
```

Dado un valor de n, esa función encuentra el menor número primo que es mayor que su cuadrado. Ya se conocen los valores de estos primos:

2, 5, 11, 17, 29, 37, 53, 67, 83, 101, 127, 149, 173, 197, 227, 257, 293, 331, 367, 401, 443, 487, 541, 577, 631, 677, 733, 787, 853, 907, 967, 1031, 1091, 1163…

http://oeis.org/A007491

Con nuestro Buscador de Naturales es muy simple el planteo de condiciones:

cuadrado evaluar primprox(n)

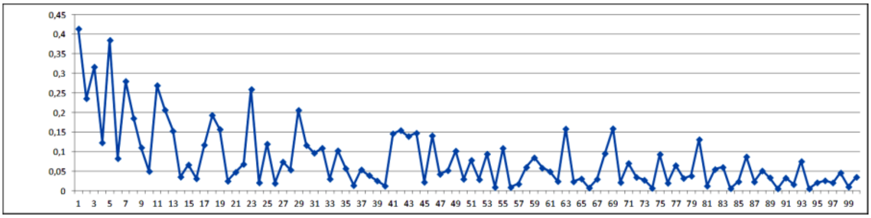
La lista de primos aparecerá en la segunda columna:

Solución	Detalles
1	2
4	5
9	11
16	17
25	29
36	37
49	53
64	67
81	83
100	101
121	127
144	149

Las raíces cuadradas de estos números estarán comprendidas entre n y n+1. Por ejemplo, el octavo, que es 67, tiene su raíz cuadrada entre 8 y 9, como se ve sin calcularla.

Estos valores nos plantean una pregunta inocente: ¿Qué diferencias concretas existen entre cada número natural y la raíz cuadrada de primo más próxima?

Para encontrar esa raíz podemos usar la fórmula a =RAIZ(PRIMPROX(N ^ 2)). La hemos utilizado para crear este gráfico de diferencias:



Es muy curioso, porque esas diferencias oscilan con tendencia decreciente desde 0,4142 hasta acercarse a cero. Podíamos plantearlo como una conjetura:

Conjetura 1: Las diferencia entre cualquier número natural y la raíz cuadrada del mínimo número primo mayor que su cuadrado es siempre igual o menor que la raíz cuadrada de 2 menos 1.

Es razonable pensar en esta conjetura. Por una parte la hemos comprobado hasta 5*10^7 con este código PARI:

```
{for(i=1,5*10^7,b=sqrt(nextprime(i*i))-i;c=sqrt(2)-
1;if(b>=c,print(i)))}
```

Si lo ejecutas verás que sólo imprime el valor 1. Los siguientes números producen diferencias más pequeñas.

Por otra, vemos que los valores son claramente decrecientes en conjunto. Realizamos algunas aproximaciones. ¿Cuántos primos se pueden esperar entre n^2 y $(n+1)^2$?

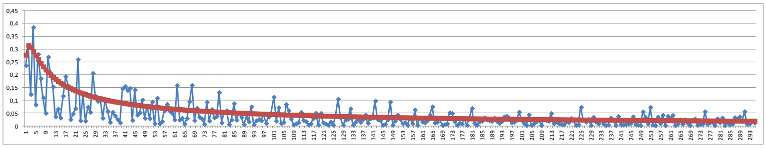
Si usamos el Teorema de los números primos podemos establecer una aproximación grosera

(http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_n%C3%BAmero_primo)

$$P = \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \approx \frac{(n+1)^2}{Ln((n+1)^2)} - \frac{n^2}{Ln(n^2)} \approx \frac{2n+1}{2Ln(n)}$$

Y más grosera y atrevida aún: si se esperan P primos entre los dos cuadrados consecutivos, el primero de ellos distará de n^2 una distancia del orden de la fracción inversa, 2Ln(n)/(2n+1). ¿Será así? Recuerda que hablamos de tendencias, no de valores individuales.

Hemos construido una tabla doble: en una columna los valores de RAIZ(PRIMPROX(N ^ 2))-N y en la otra los de 2Ln(n)/(2n+1), con este resultado gráfico:



Vemos que la tendencia decreciente es razonable, luego podemos confiar en que nuestra conjetura sea cierta, que las diferencias nunca son mayores que 0,4142…¡Sólo confiar, nada más!

Conjetura 2: Dado un número natural cualquiera K, existe otro N tal que la diferencia (en valor absoluto) entre su cuadrado N^2 y el mínimo primo mayor que él sea igual a K.

Expresado de otra forma, la expresión PRIMPROX(N ^ 2)-N^2 puede tomar cualquier valor. Esta idea aparece cuando obtienes una lista de valores de N, tomas nota de esa diferencia en una hoja de cálculo y la ordenas después por los valores de la diferencia. No nos cabe aquí la tabla adecuada para que veas que se recorren todos los valores, pero puedes construirla en la hoja de cálculo conjeturas,xlsx (ENLACE)

Algunos valores se resisten a salir, como el 29, 68 y 78, pero al final los obtienes. Puedes construir esta función que te devuelve el primer valor posible para K:

Public Function difproxprim(k)
Dim n, m
n = 0: m = -1
While k <> m
n = n + 1
m = primprox(n * n) - n * n
Wend
difproxprim = n
End Function

Si juegas con ella te darás cuenta de que puede resultar muy lenta en una hoja de cálculo, por ejemplo para obtener que el 68 aparece en la lista para K=5187.

Puedes usar la misma idea en PARI:

difproxprim(k)={local(m=-1,n=0);while(k<>m,n=n+1;m=nextprime(n*n)-n*n);return(n)} *{print(difproxprim(68))}*

En ella sustituyes después el 68 por otro número. Por ejemplo, el 88 se retrasa hasta K=11499 y el 200 hasta K=90963. Es un poco atrevido plantear esta conjetura, pero también es razonable.

Acabamos de estudiar la conjetura de Legendre

((http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/04/comprobar-conjeturas-con-hoja-de.html)

Entre dos cuadrados consecutivos n^2 y $(n+1)^2$ existe siempre un número primo.

Se vio también una formulación alternativa:

Si usamos la función π, que da la distribución de los números primos (π(200) equivaldría a los primos que existen menores o iguales a 200), la conjetura de Legendre se podría expresar así:

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) > 0$$

Lo que no incluimos en esa entrada es que si **n** es un número primo mayor que 2, y estudiamos su cuadrado y el de su siguiente primo, entre ellos no existirá al menos un número primo, sino dos, porque entre los dos cuadrados existirá (salvo el caso de 2 y 3) otro cuadrado intermedio. Resumiendo:

Para n>1, si representamos como p(n) al enésimo número primo, se verificará que entre $p(n)^2$ y $p(n+1)^2$ existirán al menos dos números primos.

Pues bien, Brocard propuso una conjetura más fuerte:

Conjetura de Brocard

Para n>1, si representamos como p(n) al enésimo número primo, se verificará que entre $p(n)^2$ y $p(n+1)^2$ existirán al menos **cuatro** números primos.

Podemos construir un modelo de hoja de cálculo para verificar esta conjetura para un número primo cualquiera. Usamos ***conjeturas.xlsm*** (http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

como en los casos anteriores.

			Cuadrados		Cuatro primos	
Primo propuesto	2851	Sí es primo	8128201		**8128213**	
Siguiente primo	2857	Sí es primo	8162449		**8128217**	
					8128243	
					8128249	

Elegimos un primo (en el ejemplo 2851) y con la función PRIMPROX le encontramos el siguiente debajo (2857). Mediante una fórmula condicional similar a "***=SI(esprimo(F10);"Sí es primo";"No es primo")***" comprobamos que efectivamente ambos son primos. A la derecha les calculamos sus cuadrados.

Para encontrar los cuatro primos comprendidos entre los cuadrados usamos de nuevo PRIMPROX. El primer primo de arriba será el PRIMPROX del primer cuadrado y los tres restantes serán los próximos primos de los de arriba.

Si el cuarto primo es menor que el segundo cuadrado (8128249<8162449), la conjetura queda comprobada para ese ejemplo. En caso contrario, corre a publicar el contraejemplo, que conseguirás la fama.

Como ocurría con la conjetura de Legendre, en la práctica no sólo existen cuatro primos, sino más. Los tienes publicados en http://oeis.org/A050216. Ahí verás que para n>1 los primos comprendidos son todos mayores que 4: 5, 6, 15, 9, 22, 11, 27, 47, 16, 57, 44, 20, 46, 80, 78, 32, 90, 66, 30, 106,…

Otras posibles situaciones

Nada nos impide plantear cuántos primos existen comprendidos entre dos elementos de cualquier sucesión creciente. Lo hemos estudiado entre cuadrados (Legendre) y entre cuadrados de primos (Brocard). Podíamos verlos entre triangulares consecutivos, por ejemplo. Este caso ya está estudiado y lo puedes consultar en http://oeis.org/A066888

Basta ver la sucesión para entender que se ha conjeturado que siempre existe al menos un número primo entre dos triangulares consecutivos para n>0: 0, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 4,…

Si recuerdas que la fórmula de un número triangular es n(n+1)/2, con ella y el uso de PRIMPROX podrás reproducir este esquema en hoja de cálculo:

Triangulares consecutivos			Primo comprendido
Número de orden	7626		7639
123	7750		

De igual forma se pueden contar los comprendidos entre números oblongos (dobles de triangulares) consecutivos, n(n-1) y n(n+1) Los tienes en http://oeis.org/A108309 y parece lógico conjeturar que siempre existen dos primos entre cada par.

Otras sucesiones se pueden considerar, pero para que tengan interés es conveniente que las diferencias entre cada dos términos consecutivos no crezcan demasiado, lo que facilitaría la presencia de primos intermedios y quitaría interés a la cuestión. Sería el caso, por ejemplo, de las potencias de un número.

Se ha visto la cuestión con semiprimos en http://oeis.org/A088700 y con los términos de la sucesión de Fibonacci (http://oeis.org/A076777) y con seguridad en otros casos que no hemos buscado.

En este blog queremos aportar también nuestra particular sucesión con primos comprendidos. Probamos con los números poderosos

Primos entre poderosos

Llamamos número **poderoso** a aquél en el que todos sus factores primos presentan un exponente mayor que la unidad en la correspondiente descomposición factorial. Son poderosos 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, 128, 144, 169,… http://oeis.org/A001694 En ellos, si un **p** primo divide a **N**, también lo divide su cuadrado, por lo que ninguno de ellos es libre de cuadrados. En virtud de esa definición se ha incluido el 1 en el listado. Por su forma de crecer parecen idóneos para contar primos entre ellos. Lo hemos hecho con este resultado:

4	8	2
8	9	0
9	16	2
16	25	3
25	27	0
27	32	2
32	36	0
36	49	4
49	64	3
64	72	2
72	81	2
81	100	3
100	108	3
108	121	2
121	125	0
125	128	1
128	144	3
144	169	5
169	196	5
196	200	2
200	216	1

Vemos que, por ejemplo, entre 100 y 108 se intercalan tres primos: 101, 103 y 107.

Si escribimos el listado de todas las diferencias observaremos la irregularidad de su distribución

2, 2, 0, 2, 3, 0, 2, 0, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 0, 1, 3, 5, 5, 2, 1, 1, 5, 1, 7, 0, 5, 2, 4, 5, 1, 5, 2, 7, 3, 2, 2, 6, 9, 4, 4, 0, 7, 8, 2, 7, 4, 4, 8, 1, 1, 4, 4, 9, 7, 2, 1, 9, 10, 6, 1, 0, 2, 0, 9, 12, 7, 4, 12, 6, 5, 4, 5, 12, 0, 8, 3, 3, 10, 8, 0, 2, 13, 2, 13, 10, 10, 1, 15, 0, 7, 9, 9, 3, 13, …

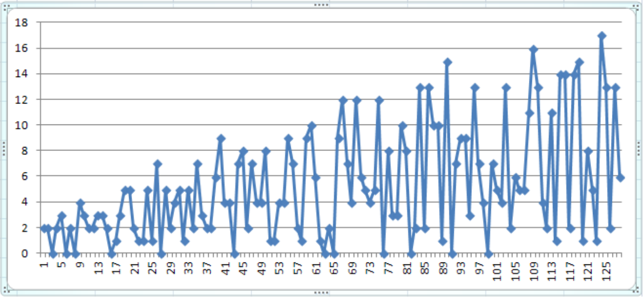
Los puedes buscar con PARI

```
ispowerful(n)={local(h);if(n==1,h=1,h=(vecmin(factor(n)[,
2])>1));return(h)}

proxpowerful(n)={local(k);k=n+1;while(!ispowerful(k),k+=
1);return(k)}

{for(i=1,5000,if(ispowerful(i),m=proxpowerful(i);p=prime
pi(m)-primepi(i);print(p)))}
```

No dejan de aparecer ceros, aunque en general las diferencias parecen crecer.



Se asemejan a una vibración que no parara de crecer en amplitud. Como se ve, no hay lugar para una conjetura simple y elegante. Esto es lo normal, no va a resultar una conjetura en cualquier búsqueda que efectuemos.

	Es primo
1331	FALSO
1332	FALSO
1333	FALSO
1334	FALSO
1335	FALSO
1336	FALSO
1337	FALSO
1338	FALSO
1339	FALSO
1340	FALSO
1341	FALSO
1342	FALSO
1343	FALSO
1344	FALSO
1345	FALSO
1346	FALSO
1347	FALSO
1348	FALSO
1349	FALSO
1350	FALSO
1351	FALSO
1352	FALSO

Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A240590

En la parte inferior del gráfico se perciben los puntos de aquellos números poderosos consecutivos que no tienen primos intercalados entre ellos. Son estos:

8, 25, 32, 121, 288, 675, 1331, 1369, 1936, 2187, 2700, 3125, 5324, 6724, 9800, 10800, 12167, 15125, 32761, 39200, 48668… (sólo escribimos el primer elemento del par de poderosos)

Por ejemplo, entre el número poderoso 1331 y su siguiente 1352 no existe ni un solo primo.

Esta sucesión permanecía inédita y la hemos publicado en

http://oeis.org/A240591

Su carácter creciente justifica que creamos que para un poderoso que no presente ningún primo entre él y el siguiente poderoso, existe otro mayor que él con la misma propiedad. La sucesión tendría infinitos términos.

Compuestos libres de cuadrados

Son números que no son primos y que no tienen divisores cuadrados salvo el 1. Estos dan mejor resultado que los poderosos, en el sentido de que las diferencias no oscilan tanto.

6	1
10	2
14	0
15	2
21	0
22	1
26	1
30	1
33	0
34	0
35	1
38	0
39	1
42	1
46	1
51	1
55	0
57	0

Aquí abundan los ceros y el resto de números presenta máximos que crecen lentamente. Por ejemplo, el primer par que posee tres primos intercalados es 346, que hasta el siguiente compuesto libre de cuadrados, el

354, presenta intercalados los primos 347, 349 y 353. Para llegar a cuatro primos intercalados hay que llegar nada menos que hasta 4584470.

1, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1…

Hemos usado este programa en PARI, además, como hacemos siempre, de una búsqueda previa con hoja de cálculo.

```
freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)

nextfqc(n)={local(k);k=n+1;while(!freesqrcomp(k),k+=1);
return(k)}

primesin(a,b)={local(p=a,q=0);while(p<b,p=nextprime(p)
;if(p<b,q+=1);p+=1);return(q)}

{for(i=2,100,if(freesqrcomp(i),m=nextfqc(i);p=primesin(i,
m);print(i, " ",p)))}
```

Los hemos publicado en http://oeis.org/A240592

También podemos destacar aquí aquellos que no presentan primos en el intervalo respecto a su consecutivo. Son estos:

14, 21, 33, 34, 38, 55, 57, 62, 65, 69, 74, 77, 85, 86, 91, 93, 94, 105, 110, 114, 115, 118, 119, 122, 129, 133, 141, 142, 143, 145, 154, 158, 159, 165, 174, 177, 182, 183, 185, 186, 187, 194, 201, 202, 203, 205, 206, 209, 213, 214, 215,…

Su aparente tendencia a un crecimiento continuado nos hace pensar que la sucesión es indefinida y que siempre existirá otro elemento mayor que uno dado. (http://oeis.org/A240593)

FUNCIONES SOBRE NÚMEROS NATURALES

¿DE DÓNDE VENGO?

Trataremos en este apartado y en los siguientes un problema similar al de la función inversa:

Dado un número natural N cualquiera intentaremos encontrar otro número M natural tal que al aplicarle una cierta función aritmética, nos resulte el primero, es decir F(M)=N.

Como en teoría de números suelen existir varias soluciones, **elegiremos siempre la menor de ellas**. La representaremos con el prefijo MF seguido del nombre de la función.

Lo vemos con algún ejemplo

Si tomamos el número 31, ¿qué otro número tendrá ese resultado al sumar sus divisores (función *sigma*)? Si calculamos un poco, veremos que el más pequeño que cumple esto es el 16, ya que 16+8+4+2+1=31. Lo expresaremos como 16=MF_SIGMA(31)

¿Cuál es el primer número que tiene exactamente 8 divisores (función *tau*)? Se trata del 24, que posee como divisores 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2 y 1, luego MF_TAU(8)=24

No es fácil esta búsqueda, porque no siempre tenemos una acotación para encontrar aquellos números cuyo resultado en una función es el número dado. Por eso, tendremos que encontrar distintas estrategias. Avanzamos tres de ellas:

Reflexión teórica

Esta es la más valiosa, pero no siempre posible. Intentaremos en ella llegar al resultado por razonamiento. En el caso del ejemplo anterior MF_TAU(8)=24 era fácil. La función TAU viene dada por la fórmula

$$\mathbf{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \dots (1 + a_k)}$$

En ella a_1, a_2, … son los exponentes de los números primos en la descomposición factorial de N. Es claro que para que se tengan 8 divisores D(N) ha de tener como factores 2*2*2, 4*2 o 8, o lo que es igual, signatura prima (conjunto de los exponentes de los primos) igual a (1,1,1), (3,1) o (7). Para encontrar el mínimo N imagina qué primos se pueden corresponder con esos exponentes. Lo vemos:

2*2*2: la combinación de primos mínima en este caso sería $2^1*3^1*5^1$ =30

2*4: Exponentes 1 y 3. El número mínimo sería 2^3*3= 24

8: El único exponente sería 7, y el mínimo posible N=2^7 = 128

De las tres posibilidades el resultado más pequeño es 24, luego es la solución.

Se comprende que no siempre será posible este tipo de razonamiento

Búsqueda acotada

Es muy difícil acotar la búsqueda del número mínimo que estamos intentando encontrar. Una estrategia sería la de fijar una cota, por ejemplo 1000, para números pequeños y tratar luego aparte las excepciones. Algo parecido hicimos en la entrada de este blog http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/01/alguien-sabe-algo-de-esto-1.html

En ella resolvíamos el problema propuesto, pero fracasando en números como 223 al intentar usar una hoja de cálculo.

Probemos con la indicatriz de Euler. Recuerda que esta función cuenta los números menores que N y coprimos con él, incluyendo el 1. Escribimos la lista de posibles resultados, 1, 2, 3, 4, … y buscamos hasta 10^4 qué números poseen como función de Euler ese valor. Podríamos usar un código parecido a este:

```
For i = j To l
k = i
vale = True
While vale And k < 10 ^ 4
If euler(k) = i Then vale = False: a = k
k = k + 1
Wend
If Not vale Then
Msgbox(i)
Msgbox(a)
Next  i
```

Si existe algún fallo se aumenta el tope o se estudia teóricamente.

Por ejemplo, en esta tabla figuran los resultados para la función de Euler en los primeros números. Cuando la imagen es 0 significa que se ha llegado a 10^4 sin encontrar resultados. Como son muchos, habría que aumentar el tope de 10^4 o bien cambiar de técnica.

N	MFEULER(N)
4	5
5	0
6	7
7	0
8	15
9	0
10	11
11	0
12	13
13	0
14	0
15	0
16	17
17	0
18	19
19	0
20	25

Rellenado de resultados

Podemos plantear la búsqueda con el punto de vista contrario. Recorremos los números naturales y para cada uno de ellos evaluamos la función deseada. Preparamos unas memorias (pueden ser celdas de hojas de cálculo) y las vamos rellenando ordenadamente con los resultados. Las memorias que queden vacías necesitarán un estudio aparte.

Se puede intentar este método con la función TAU, o DIVISOR o SIGMA0, que estudiamos en anteriores párrafos. Este caso ya está publicado en OEIS

http://oeis.org/A005179

1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144, 120, 65536, 180, 262144, 240, 576, 3072, 4194304, 360, 1296, 12288, 900, 960, 268435456

Se ve que este método resultaría lento y necesitaría topes muy grandes, por la existencia del valor 268435456 que supera cualquier planteamiento elemental.

En la imagen puedes ver un barrido efectuado entre 1 y 100

	A	B
1	0	
2	2	2
3	3	4
4	4	6
5	5	16
6	6	12
7	7	64
8	8	24
9	9	36
10	10	48
11	0	
12	12	60
13	0	
14	0	

En ella falta el 1, porque todo número tiene al menos dos divisores, y el 11, que según http://oeis.org/A005179 su imagen sería 4096, fuera del rango de búsqueda.

Cuando ocurra que queden ceros en las memorias, se deberá ampliar la búsqueda, cambiar de método o demostrar la imposibilidad.

A continuación estudiaremos algunos ejemplos concretos que presentan cierto interés. Puede que usemos los tres métodos de búsqueda, según la naturaleza de la función que tratemos.

Sumamos divisores

Recuerda que la función **SIGMA** suma todos los divisores de un número. Generalizaciones de la misma son las funciones SIGMA_K, que suman los divisores elevados al exponente K

(Ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/la-familia-de-las-sigmas-1.html y la entrada siguiente).

Cualquier valor elegido al azar no tiene por qué ser el resultado de este tipo de sumas. De hecho, se sabe ya qué valores puede tomar **SIGMA(N)** y cuáles no.

No tienen solución los incluidos en http://oeis.org/A007369: 2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23… La función SIGMA no puede tener nunca estos valores. No existe ningún número cuya suma de divisores sea 17, 19 o 21.

Sí la tienen estos otros (http://oeis.org/A002191): 1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20…Por ejemplo, el valor 13 se corresponde con la suma de divisores de 9: 9+3+1=13.

Para reproducir esta situación podemos acudir a la siguiente consideración: Para un N dado, SIGMA(N)≥1+N, porque ese sería el valor más desfavorable, que se da cuando N es primo. En cualquier otra situación, aparecerán otros divisores, superando así el valor 1+N. así que, N≤SIGMA(N)-1. Por tanto, si nos dan un valor fijo K=SIGMA(N), bastará buscar N en el rango 1…K-1. Esto nos lleva a que el mejor método entre los que propusimos en el anterior apartado sea el de *búsqueda acotada*.

Así lo hemos intentado con hoja de cálculo, llegando a la misma conclusión que las dos sucesiones citadas de OEIS:

Tienen un valor determinado para MF_SIGMA(N) los números

1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20…http://oeis.org/A002191

Puedes comprobarlo en esta tabla obtenida con hoja de cálculo:

N	MF_SIGMA(N)
1	1
3	2
4	3
6	5
7	4
8	7
12	6
13	9
14	13
15	8
18	10
20	19

Observa que cuando la diferencia entre N y MF_SIGMA(N) es 1, el número de la segunda columna es primo.

En la tabla se intuye que los dobles de los perfectos, como el 12, coinciden con la suma de divisores de su mitad, el 6.

Hemos usado la función SIGMA definida por nosotros. Si no tienes acceso a ella puedes usar el siguiente código para obtener los mismos resultados. Como advertimos a menudo, estos códigos se trasladan fácilmente a otros lenguajes de programación. Este que ofrecemos devuelve un cero si MF_SIGMA no está definida para ese número. No es muy eficiente, pero sí fácil de entender:

```
Public Function mfsigma(n)
Dim vale As Boolean
Dim k, a, s, j

vale = True
k = 1
a = 0
While vale And k <= n
s = 0
For j = 1 To k
If k / j = k \ j Then s = s + j ‘Este FOR-NEXT calcula la función sigma de k
Next j
If s = n Then a = k: vale = False ‘comprueba si SIGMA coincide con el argumento n
k = k + 1
Wend
```

mfsigma = a
End Function

Con esta función puedes determinar si un número coincide con la función SIGMA de otro. Por ejemplo MF_SIGMA(2014)=0, luego no existe ningún otro número cuya suma de divisores sea 2014. Si embargo, MF_SIGMA(2012)=2011, porque este último es primo, y MF_SIGMA(2016)=660, porque

2016=
660+330+220+165+132+110+66+60+55+44+33+30+22+20+15+12+11+10+6+5+4+3+2+ 1

Puedes usar también la función definida en PARI

```
mfsigma1(n)={k=0;while(k<=n&&sumdiv(k, d, d)<>n, k=k+1);if(k>=n,k=0); return(k)}
{print(mfsigma1(20))}
```

Con él, cambiando el valor de 20 por otro cualquiera, puedes encontrar su MF_SIGMA

Las otras sigmas

Si sumamos los cuadrados de los divisores de un número nos resulta la función SIGMA_2, con los cubos

SIGMA_3 y, en general, podemos definir toda la familia para exponentes mayores.

¿Qué números coinciden con la suma de los cuadrados de los divisores de otros?

Repetimos todo el trabajo. Basta sustituir la línea de código

If k / j = k \ j Then s = s + j

Por esta otra

If k / j = k \ j Then s = s + j^2

Obtenemos así la lista de números cuya MF_SIGMA_2 está definida:

1, 5, 10, 21, 26, 50, 85, 91, 122, 130, 170, 210, 250, 260, 290, 341, 362, 455, 500, 530, 546, 610, 651, 820, 842, 850, 962, 1050, 1220, 1300, 1365, …

Entre ellos están los de la forma 1+p^2 con p primo.

Figuran en http://oeis.org/A001157, pero con algunos repetidos respecto a nuestra sucesión.

En PARI

mfsigma2(n)={k=0;while(k<=n&&sumdiv(k, d, d*d)<>n, k=k+1);if(k>=n,k=0); return(k)}

Como complemento de ella, podemos encontrar los números cuyo valor de sigma_2 coincide con los valores de la anterior sucesión.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 10, 13, 12, 14, 15, 17, 16, 19, 18, 21, 23, 20, 22, 25, 27, 29, 24, 31, 28, 33, 30, 32, 37, 34, 41, 39, 38, 43, 36, 40, 45, 49, 42, 44, 46, 53, 51, 55, 50, 48, 59, 52, …

Están casi todos los números. Los que faltan no son los mínimos con cada valor de la función. Por ejemplo, el 7 no está porque sigma_2(7)=50 y sigma_2(6)=50, luego ha de figurar el 6 y no el 7.

Para SIGMA_3

Estos son los valores que puede tomar sigma_3. Como se ve, con frecuencia muy baja.

1, 9, 28, 73, 126, 252, 344, 585, 757, 1134, 1332, 2044, 2198, 3096, 3528, 4681, 4914, 6813, 6860,…

http://oeis.org/A001158

En PARI

Mfsigma3(n)={k=0;while(k<=n&&sumdiv(k, d, d^3)<>n, k=k+1);if(k>=n,k=0); return(k)}

Puedes encontrar casos similares en http://oeis.org/A063972 para divisores unitarios y en http://oeis.org/A070015 para las partes alícuotas.

Sumamos y contamos factores primos

Vamos a fijarnos en los divisores primos, y ahora en las funciones que los cuentan y suman.

Función Omega

Esta función cuenta los factores primos distintos de un número natural. No se cuentan las repeticiones, sino el número de primos distintos. Así, $\omega(6)= \omega(12)= \omega(18)= \omega(24)=2$, porque todos comparten dos primos distintos, 2 y 3.

Para encontrar MF_OMEGA(N) de un número bastará encontrar el primorial

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/02/el-primorial.html), que contiene tantos factores primos como indique N. Esto es así porque los primoriales tienen como expresión 2*3*5*…*k , y es fácil entender que son los números mínimos que tienen k factores primos distintos.

Como ya conocemos la solución, podemos plantear la estrategia 2 de *búsqueda acotada* y obtendremos las soluciones:2, 6, 30, 210, 2310…

Con bigomega

BigOmega cuenta los factores primos con repetición. Esto cambia totalmente el planteamiento, porque es fácil ver que MF_BIGOMEGA(N)=2^N

Es fácil de entender: si con factores primos distintos el mínimo vendrá de productos tipo 2*3*5*7…, si se admite repetición, se convertirán en 2*2*2*2…como candidatos a MF_BIGOMEGA

Función SOPF

Esta función suma los factores primos de un número sin contar repeticiones. Por ejemplo, sopf(84)=3+2+7=12, porque aunque el factor 2 figura al cuadrado en la descomposición factorial, sólo se cuenta una vez.

Podemos definir MF_SOPF(N) como el mínimo número cuyo resultado en la función SOPF es N. En el ejemplo anterior no sería 84 el valor de MF_SOPF(12). Habría que profundizar más

¿Cómo encontramos el valor de MF_SOPF(N)?

Si es un número relativamente pequeño bastará con descomponerlo en suma de números primos diferentes de todas las formas posibles y después elegir aquellos cuyo producto sea mínimo. Así, como todos estarán elevados a la unidad, nos garantizamos que el resultado es el MF_SOPF buscado.

Si el número N es primo, MF_SOPF(N)=N, porque N sería el mínimo valor de la suma de factores primos distintos que den N. Esto es trivial en el caso de 2, 3 y 5. Para primos mayores es así porque si descomponemos N primo en una suma de primos, el valor más pequeño posible, además de N, sería 2(N-2) (en el caso de que N y N-2 fueran primos gemelos y esto ocurre a partir de 7, luego N>=7, con lo que 2(N-2)=N+N-4>N. Lo mismo ocurriría con 3(N-3), 5(N-5), que cada vez producirían un resultado mayor. Esto es así porque la función x(N-x) presenta un máximo en x=N/2.

Si se descompone en más de dos sumandos, por un razonamiento similar vemos que el valor mínimo posible es N, luego

Si N es primo, MF_SOPF(N)=N

Si N es compuesto, lo descomponemos en sumandos primos diferentes, como se indicó en párrafos anteriores. En el caso de 12 lo podemos descomponer como 12=7+5=7+3+2. Los productos resultantes son 7*5=35 y 7*3*2=42, luego la solución es 35: MF_SOPF(12)=35

Según la conjetura de Golbach todo número par mayor o igual que 4 puede descomponerse en la suma de dos primos y según una variante débil, todo impar se puede descomponer en suma de tres primos. En ninguna de las dos se afirma que los sumandos sean distintos, por lo que no tenemos la absoluta certeza de que todos los números a partir de 7 posean un valor para la función. Existe una conjetura similar que afirma que todo número par mayor que 8 es suma de dos primos distintos. Podemos seguir con el tema con una cierta seguridad de que salvo 1, 4 y 6, todos los números naturales poseen un valor para MF_SOPF, salvo que se demuestre algún día que estas conjeturas son falsas.

Para números mayores tendríamos que automatizar el proceso: buscaríamos todas las descomposiciones de N en suma de primos distintos y evaluaríamos los productos para descubrir el mínimo.

Búsqueda acotada

Usaremos la *Búsqueda acotada* que explicamos al principio de este tema. Es fácil encontrar una cota para un número con un valor de SOPF dado, sea, por ejemplo N. Todos los sumandos primos en los que pueda descomponerse N serán menores o iguales que N y como todos son mayores o iguales a 2, su número no sobrepasará N/2. Así que el número buscado tendrá como cota N^(N/2). Es muy amplia, y en la mayoría de los casos se encontrará la solución mucho antes, pero lo importante es que existe y nos permite acotar la búsqueda. Con esta idea podemos construir la función. Se supone que tenemos implementada la función SOPF, que no es difícil de programar.

```
Public Function sopf(n)
Dim f, a, s
Dim vale as boolean


If n=1 then sopf=0:exit function
If <4 then sopf=n:exit function
a = n
f = 2: s=0
While f * f <= a
vale=false
While a / f = Int(a / f)
Vale=true
a = a / f
Wend
If vale then s=s+f
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
```

```
sopf = s
End Function
```

Sobre esta función definimos MF_SOPF

```
Public Function mfsopf(n)
Dim vale As Boolean
Dim k, a, s, j

vale = True
k = 1
a = 0
While vale And k <= n ^ (n / 2)
If sopf(k) = n Then a = k: vale = False
k = k + 1
Wend
mfsop = a
End Function
```

Está diseñada para que en caso de que no se obtenga solución devuelva un 0. Esto sólo ocurre en 1, 4 y 6. Estudia la razón.

La cota es tan alta que, a partir de 255 aproximadamente, los registros de Excel se sobrepasan en muchos números. En estos casos se puede intentar la búsqueda con cotas más pequeñas, o bien usar un lenguaje más potente, como PARI

Código PARI

```
sopf(n)={local(f,s=0);f=factor(n);for(i=1,matsize(f)[1],s+=f[i,1]);return(s)}

mfsopf(n)={k=1;m=0;t=n^(n/2);while(m==0&&k<t,k=k+1;p=sopf(k);if(p==n,m=k));return(m)}

{for(i=7;200,print(mfsopf(i))
```

Con este código podemos reproducir las soluciones contenidas en http://oeis.org/A064502

Después de muchas búsquedas, parece que sí, que sólo 1, 4 y 6 carecen de función.

En esta tabla puedes ver los valores mayores que alcanza MF_SOPF para números menores que 1000:

815	51805
905	50331
791	43833
793	39423
935	35841
903	34593
995	34405
989	34195
965	33355
959	33145
527	33085
845	32331
923	31885

Como se puede observar, muchos números requieren búsquedas que casi duplican su número de cifras, lo que obstaculiza el proceso.

Con SOPFR

La función logaritmo entero o sopfr es similar a la anterior, pero contando los primos con repetición. Casi todas las consideraciones estudiadas hasta ahora siguen siendo válidas salvo algún detalle:

Ahora el 4 y el 6 poseen valores para la función buscada: MF_SOPFR(4)=4=2*2 y MF_SOPFR(6)=8=2*2*2. El 1 sigue sin presentar solución.

La función sopfr se obtiene con un código similar, pero los divisores primos se suman cada vez que aparecen (línea con el añadido de '**)

```
Public Function sopfr(n)
Dim f, a, s
If n=1 then sopfr=0:exit function
If <4 then sopfr=n:exit function
a = n
f = 2: s=0
While f * f <= a
```

```
While a / f = Int(a / f)
a = a / f
s=s+f '**
Wend
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
sopfr = s
End Function
```

La función MF_SOPFR también se obtiene con un código similar al de MF_SOPF sustituyendo las referencias a ***sopf*** por ***sopfr***

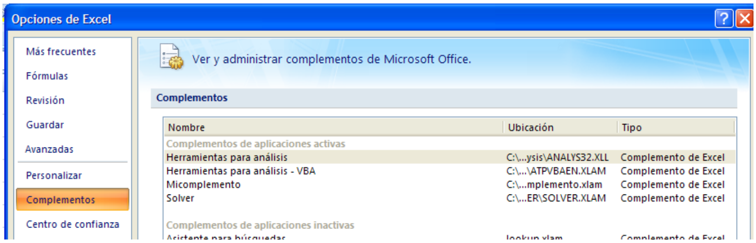
Con estos cambios puedes obtener fácilmente los valores de MF_SOPFR, que están contenidos en http://oeis.org/A056240

TUS FUNCIONES, DISPONIBLES EN HOJAS DE CÁLCULO

Procedimiento para Excel

El autor necesita frecuentemente descomponer un número en factores primos. Como esta función no viene implementada en la hoja de cálculo, ha tenido que programarla en el Basic de Excel. El problema que surge es que sólo está disponible en la hoja que contiene el código y no en cualquier otra que se cree. Esto tiene un remedio, y es la construcción de un complemento de Excel que nos permita acceder a esa factorización cuando se abra cualquier hoja.

Complementos de Excel



Para saber de qué estamos hablando, entra en las **Opciones de Excel** y busca **Complementos**. En la ventana que se abre podrás comprobar qué complementos tienes instalados en tu equipo

(el volcado de pantalla corresponde al Excel 2007 sobre Windows XP, una querida antigüedad, pero igual te funciona en Excel 2010)

En la imagen vemos que el autor tiene instaladas dos herramientas de análisis, el Solver y un complemento suyo titulado Micomplemento. Como habrás comprendido, los cuatro contienen funciones y rutinas que no vienen implementadas en Excel originariamente.

Crea tu propio complemento

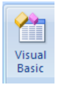
Al final de este apartado se ha incluido el código mínimo necesario para implementar la descomposición factorial de un número entero (dentro de los límites de Excel y del propio código, no le pidas milagros) como un regalo del autor a sus lectores.

Pasos a seguir

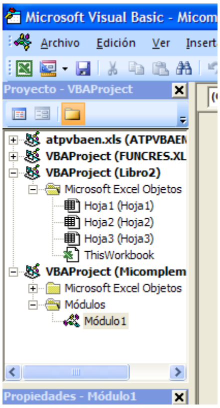
En primer lugar tienes que escribir tus funciones. En el caso que estamos desarrollando basta con que las copies desde el final de este apartado. Abre un archivo nuevo y pega en él las definiciones que desees según te explicamos a continuación:

Una vez decidido el código deberás pasarlo a Excel. Para ello acude a la pestaña **Programador** de la cinta de opciones. Si no la tienes visible deberás activarla en **Opciones de Excel – Más frecuentes.**

Entras en el ámbito de programación mediante el primer botón de la ficha **Programador**:



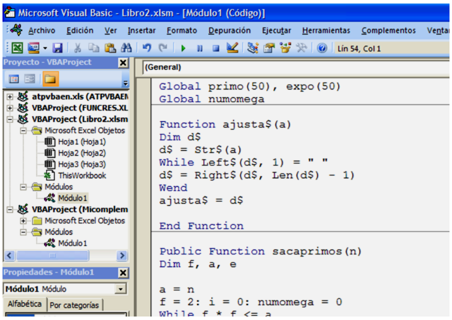
Te aparecerá el acceso a las macros que utiliza tu hoja de cálculo en este momento:



A ti no te aparecerá la referencia a Micomplemento. También, si usas la versión 2010 los colores podrán cambiar, pero el contenido será el mismo.

Ahora debes crear un módulo que aloje tu código. Pide **Insertar – Módulo** y Excel lo hará con el nombre de **Modulo 1** (salvo que tengas otro anterior).

En la hoja en blanco que aparece pega el código que habrás copiado desde aquí o que haya sido creado por ti:

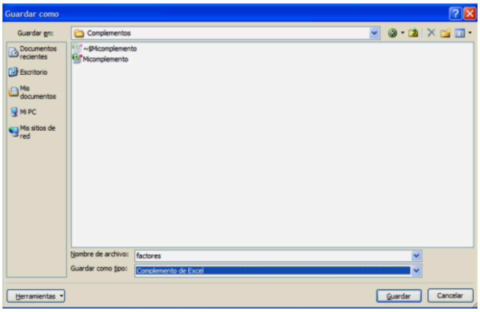


Ahora puede ser un buen momento para comprobar si todo va bien. Guarda el archivo nuevo como **Libro habilitado para macros**. Vuelve a la hoja. Escribe cualquier número entero, por ejemplo 366220 en la celda B4. En otra celda escribe **=factores(B4)**. Si ves escrito [2,2][5,1][18311,1] es que tu función se comporta bien. La interpretación de lo que ves es que el primer número de cada corchete es el factor primo y el segundo el exponente al que está elevado. En este caso 366220=2^2*5*18311. No intentes cálculos con esta expresión, que tiene formato de texto.

Lo que has construido hasta ahora sólo te vale para el archivo que contiene el código. Para que se active en cualquier hoja hay que convertirlo en complemento.

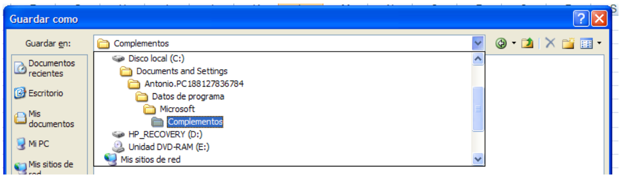
Instalación del complemento.

Borra si acaso los cálculos efectuados y vuelve a guardar el libro como ***complemento de Excel***. Puedes cambiarle el nombre a **factores.** Guíate por la imagen

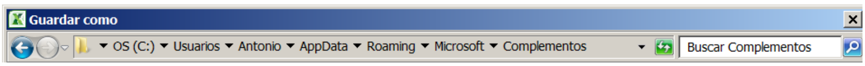


Observa que Excel te guía ya a la carpeta **Complementos**, que es donde debe estar alojado el tuyo. **No cambies esa carpeta, que si no, no podrás instalar el complemento.**

Puedes acceder a la ruta en la que está situada la carpeta



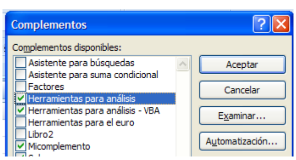
En Office 2010 se te muestra también toda la ruta, que es distinta a la anterior



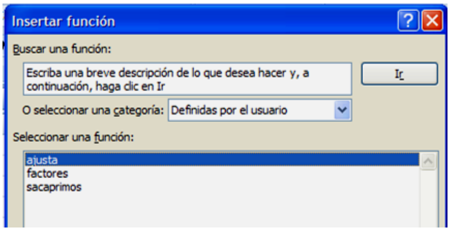
Es interesante conocer esa ruta, por si deseas borrar el archivo.

Instalación

Ya sólo te falta instalar tu complemento. Vuelve a las opciones de Excel y busca **Complementos**. En la parte inferior de la ventana tendrás el botón **Ir…** Úsalo y descubrirás que tu trabajo está preparado ya para ser usado:



Activa la casilla de verificación que está junto al nombre **Factores** y pulsa **Aceptar**. Si todo ha ido bien, cuando abras Excel de nuevo, en el catálogo de funciones definidas por el usuario dispondrás de la función **factores**:



Las otras dos funciones ***ajusta*** y ***sacaprimos*** son auxiliares y no tienes por qué usarlas, ya que quizás no interpretarías bien su resultado.

Ahora define tú un complemento propio ¡Suerte!

Código en Basic

```
Global primo(50), expo(50)
Global numomega

Function ajusta$(a)
Dim d$
d$ = Str$(a)
While Left$(d$, 1) = " "
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1)
Wend
ajusta$ = d$

End Function
```

```
Public Function sacaprimos(n)
Dim f, a, e

a = n
f = 2: i = 0: numomega = 0
While f * f <= a
e = 0
While a / f = Int(a / f)
e = e + 1
a = a / f
Wend
If e > 0 Then
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = f
expo(numomega) = e
End If
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
If a > 1 Then
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = a
expo(numomega) = 1
End If
```

```
sacaprimos = numomega

End Function

Public Function factores(n) As String
Dim a, nn
Dim s$
'saca factores en forma de string
a = n
nn = sacaprimos(a)
s$ = ""
For i = 1 To numomega
s$ = s$ + "[" + ajusta(primo(i)) + "," + ajusta(expo(i))
+ "]"
Next i
factores = s$
End Function
```

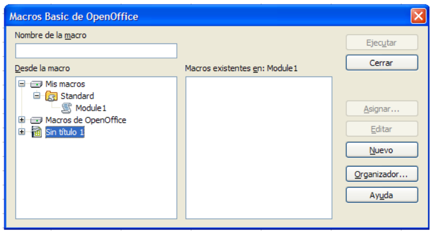
Procedimiento para OpenOffice y LibreOffice

Si pasamos a OpenOffice o LibreOffice, la creación de complementos (extensiones) se complica, porque está orientada al uso de terceros. Como aquí sólo nos interesa que tengas disponibles tus funciones en cualquier archivo nuevo que crees para tu propio uso, desarrollaremos un método mucho más sencillo.

Usaremos el código que se presentó en anteriormente para descomponer un número natural en sus factores primos. Cópialo y guárdalo, porque te servirá ahora.

Una vez decidido el código deberás pasarlo a **Apache OpenOffice** o a **LibreOffice**. El procedimiento es similar en ambos programas, y sólo añadiremos los detalles específicos de LibreOffice si fuera necesario.

Abre una hoja nueva. Acude al menú **Herramientas** y en él elige **Macros**, después **Organizar macros** y finalmente **OpenOffice Basic** (o **LibreOffice Basic**)



Observa que tu archivo aparecerá en la parte baja (en la imagen aún no tiene título). Tú has de ir a la superior, "***Mis macros - Standard***". Pide **crear un módulo nuevo** con el botón "***Nuevo***" de la parte derecha. Si ya existe uno, como ocurre en la imagen, le asignará el nombre de Module 2 u otro similar.

Abre el nuevo módulo que has creado (pinchando sobre su nombre) y pégale el código que desees. Acepta y cierra todo.

Ahora puede ser un buen momento para comprobar si todo va bien. Vuelve a la hoja. Escribe cualquier número entero, por ejemplo 366220 en la celda B4. En otra celda escribe **=factores(B4)**. Si ves escrito [2,2][5,1][18311,1] es que tu función se comporta bien. La interpretación de lo que ves es que el primer número de cada corchete es el factor primo y el segundo el exponente al que está elevado. En este caso $366220=2^2*5*18311$. No intentes cálculos con esta expresión, que tiene formato de texto.

Como has usado el contenedor "***Mis macros***", todo lo que has construido hasta ahora lo encontrarás implementado en cualquier libro que abras. Prueba a hacerlo. Cierra el archivo, abre uno nuevo, y en cualquier celda escribe un número entero y aplícale la función ***factores*** (no aparecerá en ningún catálogo. Te lo tienes que aprender)

En la imagen se ha descompuesto el número 491300 en factores dentro de un archivo recién creado:

491300	[2,2][5,2][17,3]

Ahora inténtalo tú.

PERMUTACIONES Y CICLOS

GRUPO SIMÉTRICO

Solemos considerar las permutaciones como las distintas ordenaciones de un conjunto. Existe otro punto de vista alternativo, que es muy fructífero, y es considerarlas como aplicaciones biyectivas del conjunto en sí mismo. Así, la permutación S=(3,2,1,4) se puede considerar derivada de (1,2,3,4) (orden principal) mediante la aplicación S(1)=3, S(2)=2, S(3)=1 y S(4)=4. Así la interpretaremos aquí.

Como la naturaleza de los elementos no influye en la teoría, imaginaremos que se trabaja siempre sobre el conjunto {1,2,3,4,…,n} y que una permutación como S=(5,1,3,2,…) se interpreta: S(1)=5, S(2)=1, S(3)=3, S(4)=2,…La escribimos así, como un conjunto de imágenes, por comodidad de escritura, pero te la puedes imaginar con los orígenes sobre ellas formando una matriz de dos filas, con lo que cae cada imagen debajo del origen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 5 & 1 & 3 & 2 & \dots \end{pmatrix}$$

Las permutaciones se pueden componer como todas las aplicaciones, usando una de ellas y después la otra sobre las imágenes de la primera. No es fácil verlo en este caso, por lo que usaremos un ejemplo:

Sean G=(4,2,5,3,1) y H=(1,4,3,5,2), o escribiendo orígenes:

G: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

H: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

La composición H*G (escribiendo de derecha a izquierda) se formaría así (hay que estar atentos):

H*G(1)=H(G(1))=H(4)=5 H*G(2)=H(G(2))=H(2)=4
H*G(3)=H(G(3))=H(5)=2 H*G(4)=H(G(4))=H(3)=3
H*G(5)=H(G(5))=H(1)=1, con lo que resultaría

H*G=(5,4,2,3,1) Como ves, no es nada intuitivo.

Es fácil demostrar que las n! permutaciones forman grupo para esta composición, siendo la identidad E=(1,2,3,4,…, n) y el inverso la permutación que convierte las imágenes en orígenes. A este grupo le llamaremos ***Grupo simétrico*** para {1,2,3,…, n} y lo representaremos como S_n.

¿Te apetecería comprobar composiciones de permutaciones con hoja de cálculo?

Te damos unas ideas:

Puedes escribir en filas distintas, una debajo de la otra, las dos permutaciones G y H (en la imagen, filas 12 y 16) y después la composición de ambas (fila 20), que es la única que contendrá fórmulas. El resto de la hoja sólo contiene datos.

Es muy interesante estudiar qué fórmula podemos implementar en la fila 20 de la imagen. Explicaremos la primera celda, B20, y después bastará extenderla al resto de la fila. La fórmula adecuada es:

=ÍNDICE($B16:$J16;1;B12)

La función ÍNDICE elige en una lista el elemento que presenta un número de orden. En este caso la lista es la permutación H. De ahí que hayamos usado el rango $B16:$J16. Después hay que indicar la fila del rango.

Como solo hay una fila, hemos escrito un 1. El siguiente parámetro es el número de orden, y aquí va a residir el truco: Hemos de elegir en H el elemento que ocupe el lugar que indica G en la misma columna. Insistimos en que esto, al principio, no es fácil. Hemos escrito en la fórmula “B12”, que es la primera imagen de G, un 6, luego deberemos ir a H y buscar el sexto elemento, un 8, y por eso en la celda B20 aparece ese 8.

Como puede que te siga costando, te ofrecemos esta hoja en la dirección

http://hojamat.es/blog/compopermu.zip

Como el grupo simétrico opera sobre un conjunto finito (cardinal n!), la aplicación reiterada de una sustitución consigo misma (potencia de la permutación) llevará a la repetición de resultados, es decir, a que dos potencias distintas sean equivalentes:

$P^m=P^n$

Si suponemos, por ejemplo que $m<n$, entonces esa igualdad, si le aplicamos la permutación inversa para simplicar, se convertiría en

$P^{n-m}=P^k=E$ (identidad)

Toda permutación, aplicada un número determinado de veces, se convierte en la identidad.

El número mínimo para el que eso ocurre recibe el nombre de ***orden*** de la permutación. En los ejemplos de arriba, el orden de G es 4, y el de H es 3. Compruébalo. Esta idea nos servirá en lo que sigue.

Una propuesta: En la imagen se ha compuesto G consigo misma, y el conjunto total parece haberse dividido en tres subconjuntos, cada uno de los cuales parece que va “a su aire”, sin mezclarse con los otros. ¿Cuáles son?

DESCOMPOSICIÓN EN CICLOS

Algunas permutaciones dejan invariantes unos elementos, y a otros los van transformando cíclicamente hasta volver al primero. Así, la permutación (1,3,4,2,5,6) deja invariantes 1, 5 y 6, mientras 3 se transforma en 4, este en 2 y el 2 tiene como imagen el 3. A este tipo de permutaciones las llamaremos ***ciclos***. Omitimos definiciones formales, porque aquí nuestro interés es práctico y de aprendizaje de las hojas de cálculo.

Llamaremos ciclo a una permutación que deja invariantes algunos elementos y somete a una rotaciones completas a los restantes.

Representaremos un ciclo mediante los elementos que se van transformando uno en otro, omitiendo los invariantes. Así, (3,4,2) representaría a la anterior permutación. Podemos someter a los elementos 3,4,2 a una rotación en el orden y representarían el mismo ciclo: (3,4,2) = (4,2,3) = (2,3,4), pero otro tipo de alteración del orden, como (3,2,4) ya representaría un ciclo distinto. Si aplicamos reiteradamente un ciclo, cada elemento irá pasando por todas las posiciones posibles e, inversamente, por una posición dada irán pasando ordenadamente todos los elementos.

Un mismo ciclo se puede representar comenzando con cualquiera de sus elementos si se respeta el orden circular.

Un ciclo de un elemento representa un elemento invariante, y el de dos, una transposición entre dos elementos. Si el ciclo abarca la permutación completa, a esta la llamaremos ***cíclica***.

La propiedad más importante de los ciclos es que toda permutación se puede descomponer en ciclos disjuntos de forma única salvo el orden. Según esto, la del ejemplo podemos representarla como (1,3,4,2,5,6)=(3,4,2)(1)(5)(6). Se suelen ordenar los ciclos por su magnitud, de mayor a menor.

¿Cómo descomponer una permutación en ciclos?

El procedimiento puede ser el siguiente:

Elegimos el elemento 1, y aplicamos la permutación de forma reiterada hasta que la imagen vuelva a ser 1. Como el conjunto es finito, esto se acabará logrando, con lo que ya tendremos el primer ciclo de la descomposición. Buscamos después el siguiente elemento que no pertenezca al ciclo conseguido (si hemos acabado es que la permutación estudiada se reduce a un solo ciclo, es cíclica) y efectuamos la misma operación para obtener el segundo ciclo, y así sucesivamente hasta agotar el conjunto.

Por ejemplo, la permutación (4, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 3, 1, 5) nos llevaría al siguiente proceso:

Comenzamos con el 1. Las sucesivas imágenes serían: 1 – 4 – 7 – 10 – 1. Ya tendríamos el primer ciclo (4, 7, 10, 1).

Buscamos el siguiente elemento no estudiado aún: el 2, que se transforma en sí mismo. El siguiente ciclo es, pues, (2)

Siguiente elemento libre: 3, que engendra: 3 – 6 – 9 – 3, formando el ciclo (3, 6, 9)

Por último, con 5 logramos (5, 8, 11)

Hemos terminado: (4, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 3, 1, 5) = (4, 7, 10,1) (3, 6, 9) (5, 8, 11) (2)

Como cada ciclo opera sobre elementos disjuntos, esta descomposición es un producto en Sn, en el que los ciclos son permutables y por tanto, no influye el orden.

En este proceso los ciclos que se formen serán disjuntos, pues si dos de ellos tuvieran un elemento común, al aplicar el ciclo sobre él reiteradamente se incluirían todos los elementos, y los ciclos serían en realidad uno solo.

El número de ciclos en que se descompone una permutación varía entre 1, si ella misma es cíclica, hasta **n**, si se trata de la permutación identidad.

Podemos conseguir que una hoja de cálculo haga lo mismo:

		Permutación G									
4	2	6	7	8	9	10	11	3	1	5	
			Ciclos								
1	2	3	1	4	3	1	4	3	1	4	0
4	7	10	1								
2											
6	9	3									
8	11	5									

Lo hemos implementado en Excel y Apache OpenOffice (http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#ciclos)

Observa que ha creado una fila en la que va tomando nota de los ciclos a los que pertenece cada elemento, y después ha escrito debajo la composición de cada ciclo. Es una tarea un poco larga, por lo que sólo explicaremos los fundamentos, remitiendo después a la hoja ya confeccionada.

Proceso para encontrar los ciclos:

1) Se crean unas memorias que contendrán la información de los ciclos que se van ocupando. Al principio se inician todas a cero.

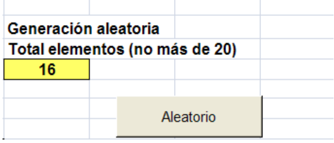
2) En cada paso del proceso se busca el primer elemento cuyo número de ciclo es 0. Se aumenta en una unidad el número del ciclo, que, por tanto, comenzará en 1. Con un procedimiento similar al usado anteriormente, se aplica reiteradamente la permutación hasta completar el ciclo.

Este paso se da mientras exista un elemento con número de ciclo 0. Para cada elemento, se irá escribiendo en la hoja a qué ciclo pertenece.

3) Localizados los ciclos, se van buscando los elementos de cada uno y se escriben en filas distintas debajo del esquema. Esta parte es más informática que matemática, y la podemos omitir.

Generación aleatoria

Como la hoja de cálculo ofrecida no tiene más objetivo que el de explicar el concepto, se ha añadido la posibilidad de generar aleatoriamente una permutación para comprender mejor la descomposición en ciclos.



Orden de un ciclo

No es difícil entender que el orden de un ciclo es su longitud, ya que los elementos invariantes seguirán siéndolo aunque reiteremos y los cíclicos se irán recorriendo uno por uno y se llegará al primero cuando se recorra toda la longitud:

El orden de un ciclo coincide con su longitud

También es sencillo entender que si una permutación se descompone en ciclos, su orden será el MCM de las longitudes de los mismos.

Así, el orden de (1)(2, 3, 7)(4, 5)(6) será 6, el mcm(1, 3, 2, 1)

En la misma hoja se puede estudiar el orden de los ciclos y el de la permutación total

El orden de los ciclos aparece en la parte izquierda de los mismos

Orden														
13	12	2	3	16	6	18	15	7	9	19	14	5	1	
2	11	4												
2	17	8												
1	10													
1	13													
0														

El orden total, MCM de los de los ciclos lo tendrás en la parte derecha

Orden de la permutación		
26		

Transposiciones

Llamaremos transposición a un ciclo de orden 2. Todo ciclo, y en consecuencia toda permutación, se puede descomponer en transposiciones. Se comprende sólo con estudiar este desarrollo:

(a, b, c, d, e)=(a, e)(a, d)(a, c)(a, b)

Esta descomposición no es única.

Algunos cálculos

Permutaciones circulares o cíclicas

Puede ocurrir que una permutación sea en sí misma un ciclo. La llamaremos cíclica o circular. Dentro del grupo simétrico $\mathbf{S_n}$ el número de permutaciones cíclicas equivale a (n-1)! Es algo muy conocido y se justifica porque para inventarte una permutación de este tipo en primer lugar has de ordenar todos los elementos, lo que puedes realizar de n! formas diferentes y una vez elegida una, esta representa n circulares idénticas, porque tienes n formas de elegir el primer elemento, luego el número es n!/n=(n-1)!

Permutaciones de n elementos que son ciclos de orden k

Deberemos elegir k elementos para el ciclo y dejar los restantes n-k fijos. El elegirlos nos supone **Cn,k** formas y dentro de los elegidos, **(k-1)!** ciclos posibles, luego el número total de ciclos de orden k será

$$\binom{n}{k}(k-1)!$$

Permutaciones reducidas

Son aquellas que no dejan fijo ningún elemento, las que en la descomposición en ciclos **ninguno de ellos tiene orden 1**. Son las conocidas como desarreglos (o desbarajustes) Los puedes estudiar en http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/teoria/teorcomb.pdf

En esa dirección hemos explicado su fórmula

$$D = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Vimos en el capítulo anterior que toda permutación sobre el conjunto {1,2,3,…,n} se puede descomponer en k ciclos, y van desde la identidad, que comprende n ciclos, hasta las permutaciones cíclicas, que se reducen a un solo ciclo.

Si fijamos el número k, podremos plantearnos cuántas permutaciones se pueden descomponer **exactamente en k ciclos**. Por ejemplo, en el conjunto {1,2,3,4,5}, las permutaciones formadas por dos ciclos son (escribimos sólo los conjuntos invariantes en los ciclos):

(1,2,3,4)(5), (1,2,3,5)(4), (1,2,4,5)(3), (1,3,4,5)(2), (2,3,4,5)(1),

(1,2,3)(4,5), (1,2,4)(3,5), (1,3,4)(2,5), (2,3,4)(1,5), (1,2,5)(3,4), (1,3,5)(2,4), (2,3,5)(1,4),

(1,4,5)(2,3), (2,4,5)(1,3), (1,3,5)(1,2)

Resultan en total 15 configuraciones, pero cada conjunto de cuatro elementos equivale a seis ciclos (permutaciones circulares, factorial de n-1=3). Así, (1,2,3,4) contiene en realidad los ciclos (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3)(1,4,3,2) y cada conjunto de tres equivale a dos ciclos (y los de dos, a uno solo), luego tendremos:

$S(5,2)=5*6+10*2=50$

Al número de permutaciones de n elementos que están formadas por k ciclos le llamaremos número de Stirling de primera especie sin signo, y lo representaremos por $S(n,k)$. Así, el cálculo anterior se puede expresar como $S(5,2)=50$

Es evidente que $S(n,n)=1$, pues sólo la identidad contiene n ciclos, y que $S(n,1)=(n-1)!$, pues representaría a las permutaciones circulares. Además, $S(n,0)=0$, valor adoptado por definición. Piensa también por qué $S(n,n-1)=C_{n,2}$ (número combinatorio).

El resto de números de Stirling se obtiene mediante la fórmula de recurrencia

$S(n+1,k)=S(n,k-1)+nS(n,k)$

En efecto, si añadimos un elemento nuevo a una configuración en ciclos, puede ocurrir que ese elemento sea un invariante, que forme ciclo consigo mismo. En ese caso puede estar acompañado de $S(n,k-1)$ formas distintas de distribución en ciclos. Por el contrario, si el nuevo lo deseamos integrar en los ciclos ya existentes, lo podemos incluir ocupando n lugares distintos, luego formará nS(n,k) configuraciones diferentes.

Lo entenderás mejor con un ejemplo. Formemos todas las distribuciones de 4 elementos en 3 ciclos:

(1)(2,3)(4), (2)(1,3)(4), (3)(1,2)(4)

(1,4)(2)(3), (1)(2,4)(3), (1)(2)(3,4)

En total resultan 6. En la primera fila hemos añadido el 4 como elemento invariante, añadido a las tres configuraciones de 3 elementos en dos ciclos S(3,2) y en la segunda lo hemos integrado en los ciclos existentes, que sólo tienen una posibilidad, (1)(2)(3) (S(3,1)) y podemos insertarlo en 3 posiciones distintas, luego resultan 3S(3,3). En resumen:

S(4,3)=S(3,2)+3S(3,3)

Esto nos da una posibilidad de calcular estos números. Por convenio se les da valor cero cuando el número de ciclos es cero. En la imagen tienes la tabla conseguida en hoja de cálculo con stirling.xls y stirling.ods (los puedes descargar desde

http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#nume)

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1
7	0	720	1764	1624	735	175	21
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273
11	0	3628800	10628640	12753576	8409500	3416930	902055
12	0	39916800	120543840	150917976	105258076	45995730	13339535
13	0	479001600	1486442880	1931559552	1414014888	657206836	206070150

Comprueba en ella alguna generación por recurrencia. Por ejemplo, 274=50*5+24, 1624=225*6+274

También es elemental la propiedad de que la suma de números de Stirling para un n dado es **n!**, pues abarcan todas las posibilidades. Comprueba este hecho sumando todos los números de una misma fila en la tabla de la imagen.

Observa que cada fila posee un solo máximo, como ocurre, por ejemplo con los números combinatorios, sólo que aquí no está necesariamente en el punto medio.

Función generatriz

La función generatriz de estos números (con signo), para un **n** dado es

$F_n(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)=x^{(n}$

Con ella resultan los números con signo y prescindiendo de S(n,0). Observa que se trata de una potencia factorial, o factorial de grado **n** de **x**. Los números de Stirling con signo obedecen la misma fórmula de recurrencia, pero restando el segundo término. Esto es claro si consideras el desarrollo de

$F_{n+1}(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)(x-n)= F_n(x)(x-n)$

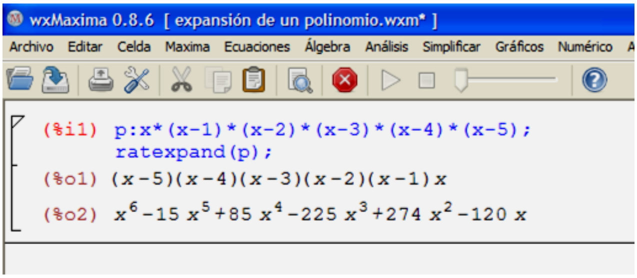
Piensa en un grado cualquiera del desarrollo y lo comprenderás.

Lo podemos comprobar con PARI, por ejemplo en el caso n=6

{print(taylor(x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5),x,7))}

Resultado: -120*x + 274*x^2 - 225*x^3 + 85*x^4 - 15*x^5 + x^6 + O(x^7)

En la imagen puedes estudiar la comprobación con wxMaxima:



Como ves, los ordena en sentido inverso.

Una interpretación sencilla de este desarrollo es el considerar los números de Stirling (salvo el caso de índice cero) como los coeficientes mediante los que una potencia factorial $\mathbf{x}^{(n}$ se descompone como combinación lineal de potencias ordinarias $\mathbf{x}^{k}$ de x.

PERMUTACIONES POR SIMULACIÓN

El estudio que emprendemos hoy se parece bastante al problema de completar una colección de cromos, que ya tratamos hace unos meses

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/05/este-cromo-lo-tengo-repe-1.html)

Pertenece al tipo de problemas de llenado aleatorio de un conjunto, como el de una línea o un cartón de bingo. Estos ejemplos se caracterizan porque la probabilidad de obtención de un nuevo elemento del conjunto depende del número de los ya obtenidos, en el sentido negativo, de ir disminuyendo la probabilidad conforme se llena el conjunto.

Hoy lo experimentaremos con permutaciones. Hace días, jugando con las cifras del número 19913 con el fin de obtener todos los números primos posibles, acudí a la herramienta Combimaq, de ***hojamat.es*** (http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramient as/herrcomb.htm#combimaq), que me proporcionó la solución exacta, elemental, de 30 permutaciones, 30=5!/(2!2!)=120/4

SU1	SU2	SU3	SU4	SU5
1	1	9	9	3
1	1	9	3	9
1	1	3	9	9
1	9	1	9	3
1	9	1	3	9
1	9	9	1	3
1	9	9	3	1
1	9	3	1	9
1	9	3	9	1
1	3	1	9	9
1	3	9	1	9
1	3	9	9	1
9	1	1	9	3
9	1	1	3	9
9	1	9	1	3
9	1	9	3	1
9	1	3	1	9
9	1	3	9	1
9	9	1	1	3
9	9	1	3	1
9	9	3	1	1
9	3	1	1	9
9	3	1	9	1
9	3	9	1	1
3	1	1	9	9
3	1	9	1	9
3	1	9	9	1
3	9	1	1	9
3	9	1	9	1
3	9	9	1	1

Me pregunté entonces por la posibilidad de obtener esos resultados mediante simulación. Elegí este procedimiento:

(1) Se fija un conjunto cualquiera de unos pocos elementos, por ejemplo el dado 1, 9, 9, 1, 3, con o sin repetición de elementos.

(2) Lo sometemos reiteradamente a transposiciones aleatorias de sus elementos. Como una

permutación se puede descomponer en dichas transposiciones, cada vez que efectuemos esta operación estaremos creando una permutación del conjunto primitivo. Como es de suponer, después de varios intentos las permutaciones comenzarán a repetirse.

(3) Cada permutación nueva la comparamos con las anteriores, y si es distinta a todas ellas, la incorporamos a la lista de las formadas y seguimos el proceso. Nada nos garantiza que esto agote el conjunto de todas las permutaciones posibles, al igual que una colección de cromos en la que no se intercambian ni se compran puede no llegar a completarse nunca.

(4) El proceso parará si le incluimos un tope, que podría ser el número total de permutaciones que conozcamos previamente. Por ejemplo, en el caso de 19913 serían 30 permutaciones. Si no se indica ningún tope, puede que el proceso llegue a completar el catálogo de permutaciones o bien, cosa improbable, que nunca lo haga, se inicie un ciclo sin fin y haya que interrumpir el proceso (en realidad, esto también puede ocurrir fijado un tope de resultados). Esta interrupción se logra con la pulsación de la tecla ESC (en Excel) o Ctrl+May+ Q en OpenOffice y LibreOffice.

Descripción de la herramienta:

Hemos incluido este simulador en http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#simulpermu

Funcionamiento

La hoja principal presenta esta estructura

		Permutaciones por simulación					
Número de elementos				Escribe el conjunto en la zona de fondo verde			
6							
Número de permutaciones	Intentos	a	a	a	b	b	b
0	2	b	a	a	a	b	b
(Si no lo sabes escribe un cero)	1	b	b	a	a	b	a
	2	b	b	a	a	a	b
Intentos	1	a	b	b	a	a	b
2209	1	a	a	b	a	b	b
Resultados	1	a	a	b	b	b	a
20	1	a	b	a	b	b	a
	1	b	b	a	b	a	a
Instrucciones	1	a	b	a	b	a	b
	6	b	a	a	b	b	a
Fija el número de elementos	3	b	a	b	b	a	a
(escritos en la línea verde)	1	b	a	b	a	a	b
	2	b	a	b	a	b	a
Fija el número de permutaciones	8	a	b	b	a	b	a
Si escribes un cero seguirá	1	b	b	b	a	a	a
la simulación hasta que	1	a	b	b	b	a	a
pulses ESC	3	a	a	b	b	a	b
	14	b	a	a	b	a	b
Pulsa el botón	40	a	b	a	a	b	b
Iniciar simulación	11						
	19						

Escribes los elementos del conjunto en la fila de color verde. En la imagen se ha elegido ***aaabbb***. Fijas el número de elementos, porque en esa fila puede haber otros residuales más a la derecha. Después concretas el tope, o ***número de permutaciones*** esperado. En el ejemplo hemos escrito un 0 para que sea el simulador el que llegue al número de permutaciones totales, en este caso 20.

En la parte izquierda verás aparecer los intentos y los resultados. Es normal que se necesiten muchos intentos, y en este caso sin tope, la tardanza nuestra en interrumpir el proceso añadirá más. Por eso, para recuentos o estadísticas es preferible fijar previamente el número esperado de permutaciones. Junto a cada permutación figura el número de intentos que ha necesitado.

Podemos usar el simulador para reproducir un resultado que ya conocemos. Imaginemos que en un curso de Combinatoria al alumnado le cuesta entender el número de permutaciones que se pueden construir con las letras REDADA. Iniciamos la simulación y observamos que la creación de permutaciones se estabiliza en el número 180

Número de elementos				Escribe el conjunto en la zona de fondo verde:			
6							
Número de permutaciones	Intentos	R	E	D	A	D	A
0	1	D	E	D	A	R	A
(Si no lo sabes escribe un cero)	1	D	E	A	D	R	A
	1	D	E	A	A	R	D
Intentos	1	D	A	E	A	R	D
1520	1	D	A	D	A	R	E
Resultados	1	D	A	D	E	R	A
180	1	A	A	D	E	R	D
	1	A	R	D	E	A	D

Para entender mejor el proceso, ordenamos la tabla completa mediante las columnas D, E, F,… (no olvides desactivar la opción de “Mis datos tienen encabezados”). De esta forma se entenderá mejor cómo se crean las distintas permutaciones:

A	A	D	D	E	R
A	A	D	D	R	E
A	A	D	E	D	R
A	A	D	E	R	D
A	A	D	R	E	D
A	A	D	R	D	E
A	A	E	D	R	D
A	A	E	D	D	R
A	A	E	R	D	D
A	A	R	D	D	E
A	A	R	D	E	D
A	A	R	E	D	D
A	D	A	D	R	E
A	D	A	D	E	R
A	D	A	E	D	R
A	D	A	E	R	D

En un segundo paso se puede demostrar la fórmula 6!/(2!2!)=720/4=180

Por el contrario, si sabemos, por ejemplo, que el conjunto 17767 presenta 5!/3!=20 permutaciones, planteamos la generación aleatoria con tope 20, y posteriormente ordenamos la tabla:

1	6	7	7	7
1	7	6	7	7
1	7	7	6	7
1	7	7	7	6
6	1	7	7	7
6	7	1	7	7
6	7	7	1	7
6	7	7	7	1
7	1	6	7	7
7	1	7	6	7
7	1	7	7	6
7	6	1	7	7
7	6	7	1	7
7	6	7	7	1
7	7	1	6	7
7	7	1	7	6
7	7	6	1	7
7	7	6	7	1
7	7	7	1	6
7	7	7	6	1

Podemos observar que las permutaciones se han ordenado de forma creciente (como si fueran cifras de un número) y demuestran mediante formación ordenada que el número de permutaciones vale 20.

Estadísticas de la simulación

Lo anterior presenta un interés relativo, es un mero ejercicio de simulación. Le dotaremos de más potencia realizando algunas estadísticas mediante la inclusión de un generador de series, que repite el proceso cuantas veces deseemos y nos devuelve las estadísticas.

Recuerda que cada permutación viene acompañada de los intentos que se han necesitado para encontrarla. En la imagen figura el desarrollo para generar las permutaciones del conjunto 1234.

	1	2	3	4
1	1	3	2	4
1	1	4	2	3
2	2	3	1	4
1	2	4	1	3
1	4	2	1	3
1	4	1	2	3
1	3	1	2	4
1	3	2	1	4
2	3	4	2	1
1	2	4	3	1
1	4	2	3	1
1	4	1	3	2
1	3	1	4	2
3	3	2	4	1
1	1	2	4	3
7	4	3	2	1
6	1	3	4	2
3	2	1	3	4
13	3	4	1	2
13	4	3	1	2
3	2	1	4	3
19	2	3	4	1
16	1	4	3	2

Se han necesitado 64 intentos, repartidos como se ve en la imagen, con bastantes oscilaciones aleatorias, aunque con tendencia a crecer. Si deseamos estudiarlos mejor deberemos acudir a series de simulaciones.

La primera permutación sólo ha necesitado un intento. Siempre es así si el conjunto básico no presenta repeticiones (¿por qué?). Aquí el segundo también ha salido a la primera, pero el tercero ya necesita a 2 intentos. Así van aumentando hasta llegar al último, que requirió 11 intentos. Estamos ante una sucesión creciente de incrementos también crecientes.

Para estudiarla mejor pasamos a la segunda hoja de cálculo, en la que disponemos del botón para crear series, y lanzamos una de 1000 repeticiones, para obtener unas medias que se puedan confrontar con una posible teoría o realizar el ajuste a una función. El resultado de esta serie ha sido el siguiente:

Nº permutación	Intentos medios	Pascal
2	1,00	1,04
3	1,22	1,09
4	1,24	1,14
5	1,29	1,20
6	1,32	1,26
7	1,44	1,33
8	1,52	1,41
9	1,67	1,50
10	1,79	1,60
11	1,89	1,71
12	2,02	1,85
13	2,24	2,00
14	2,32	2,18
15	2,55	2,40
16	2,69	2,67
17	3,22	3,00
18	3,70	3,43
19	4,23	4,00
20	5,11	4,80
21	6,5	6,00
22	9,0	8,00
23	12,5	12,00
24	24,5	24,00

¿Se podrá confrontar esto con alguna teoría? En realidad sí, porque el caso de los intentos necesarios para obtener unos éxitos se estudia con la distribución binomial negativa o de Pascal (http://www.uv.es/ceaces/base/modelos%20de%20probabilidad/binegativa.htm). En nuestro ejemplo sólo se pretende conseguir un éxito y no varios, por lo que la fórmula de los intentos medios es muy simple M=1/p, siendo p la probabilidad de obtener, en nuestro caso, una permutación nueva, y que será del tipo 3/24, 4/24, …

En la imagen se han añadido los resultados que se esperarían según la teoría. Parecen muy ajustados, pero en otros muchos experimentos que hemos realizado se advierte un sesgo, en el sentido de que el número de intentos medios es algo superior a lo esperado, lo que nos hace dudar de la absoluta aleatoriedad del proceso.

En esa misma segunda hoja aparecerán los valores máximos y mínimos del número de intentos. El mínimo, si no hay repeticiones, siempre será 1 y el máximo oscila tanto que no tiene interés una estadística sobre él.

Pues a ver si descubres algo más o amplías el modelo.

RECOGIDA DE DATOS EN MARCADO DE CASILLAS.

Ya hacía tiempo que no escribíamos sobre el manejo de las hojas de cálculo sin relacionarlas con el estudio de los números. Lo hacemos hoy con un problema que se presenta al recoger valoraciones cumplimentadas mediante el marcado de casillas.

Cuando se plantea una encuesta de valoración es fácil adivinar la orientación cultural de quien la ha confeccionado. Si es alguien con mentalidad numérica, la crea pensando ya en la recogida de datos y aplicación de medidas estadísticas. Utiliza escalas numéricas o ceros y unos. Por el contrario, personas más cercanas a una cultura de tipo humanístico prefieren esquemas sencillos, visuales y que transmitan bien la idea que se desea valorar.

Una estructura muy usada es la de una tabla de doble entrada en la que se marcan algunas celdas según la valoración deseada. En la imagen presentamos una muy popular, y es la de elegir del 1 al 5, como escala ordinal y subjetiva en las columnas, para la valoración de los aspectos que figuran en las filas.

	Escala del 1 al 5, 1 muy mal, 5 muy bien				
	1	2	3	4	5
Seguridad					*
Prestaciones		*			
Acabado		*			
Precio				*	
Servicio técnico			*		

En una tabla pequeña como esta, los totales por filas y columnas son muy sencillos de obtener, pero imaginemos que se manejan cientos de filas o que se han agrupado muchas encuestas en una, ¿cómo automatizar la traducción del símbolo "*" a datos numéricos? Deseamos dos cosas:

(a) Crear unas frecuencias en la parte baja de la tabla con los distintos resultados

(b) Traducir cada asterisco a la valoración numérica entre 1 y 5 correspondiente.

En la imagen recogemos nuestras pretensiones:

	Escala del 1 al 5, 1 muy mal, 5 muy bien					
	1	2	3	4	5	
Seguridad					*	5
Prestaciones		*				2
Acabado		*				2
Precio				*		4
Servicio técnico			*			3
	0	2	1	1	1	

Las celdas coloreadas son las que deseamos obtener de forma automática.

Frecuencias por columnas

Con estas no hay problema, pues la función CONTAR.SI nos lo resuelve. En cada columna escribimos algo así como =CONTAR.SI(E5:E921;"*"), donde el primer argumento recorre toda la columna de la tabla y el segundo contiene el símbolo usado.

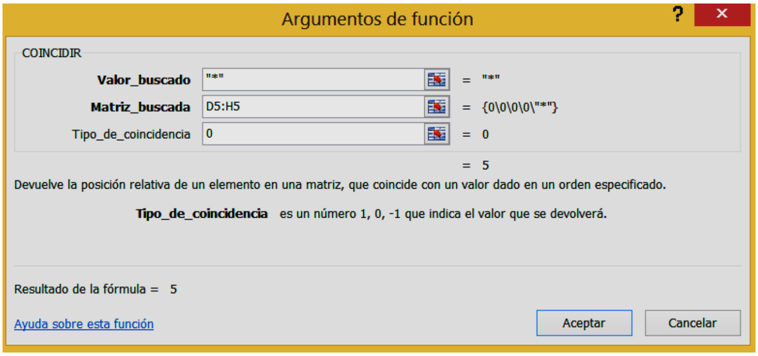
Como vemos, el problema se resuelve sin dificultad y no le prestamos más atención. Pasamos al otro.

Conversión de un símbolo en una valoración numérica

Este otro problema es más difícil de resolver y con el objeto de repasar técnicas de las hojas de cálculo lo abordaremos de varias formas.

Función COINCIDIR

Es la solución más sencilla, pues esta función nos devuelve la posición del asterisco dentro de la fila, si la organizamos de esta forma:



- Valor buscado: el símbolo “*”
- Matriz: La fila en la que estamos trabajando
- Tipo de coincidencia: Usamos el 0 para que sea de tipo exacto: o es un asterisco o no lo es.

En la celda se escribiría una fórmula similar a esta: =COINCIDIR("*";D5:H5;0)

Este procedimiento tiene la ventaja de poder arrastrar la fórmula hacia abajo, porque sólo maneja referencias relativas.

El inconveniente es que si las puntuaciones no son del 1 al 5, sino otras, como 2,4,5,20, o A,B,C,D…esta técnica nos devolvería el número de orden y no el valor. Esto se puede arreglar con la función INDICE. Buscamos el asterisco con COINCIDIR y después lo volcamos en la primera fila con INDICE para localizar la puntuación.

	A	B	C	D	E	
Seguridad					*	E
Prestaciones		*				B
Acabado		*				B
Precio				*		D
Servicio técnico			*			C
	1	2	3	4	5	

Para obtener el resultado de la imagen hemos usado este tipo de fórmula:

=INDICE(D$4:H$4;COINCIDIR("*";D6:H6))

Función BUSCARH

Esta función es muy útil en estos casos, pero aquí tiene dos problemas, como veremos. BUSCARH actúa sobre una matriz recorriendo la primera fila para buscar el valor deseado, y nos devuelve el valor correspondiente en la misma columna pero situado unas filas más abajo.

Primer problema: La fila de búsqueda es siempre la primera de la matriz y la de devolución de valores es otra, pero aquí lo que deseamos devolver, 1, 2, 3, 4 o 5 está precisamente situado en la primera fila. Una solución es copiar esa fila al final de la tabla y tomar nota de donde está situada. En la imagen la hemos copiado en la fila 11

3		Escala del 1 al 5, 1 muy mal, 5 muy bien					
4		1	2	3	4	5	
5	Seguridad					*	5
6	Prestaciones		*				2
7	Acabado			*			2
8	Precio				*		4
9	Servicio técnico			*			3
10							
11		1	2	3	4	5	

Después el truco consiste en que al dar la fila de búsqueda damos la actual (por ejemplo, para el concepto “Acabado” sería la fila 7 y para la fila de devolución escribimos **12-FILA()** y así la hoja cuenta las filas que van desde la nuestra hasta la final situada en el 11 incluida.

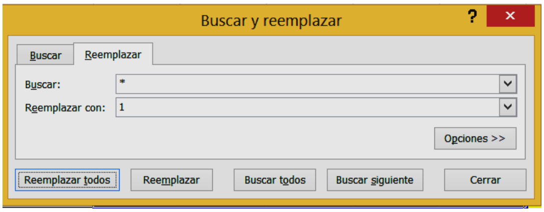
Segundo problema: La dimensión de la matriz cambia al rellenar hacia abajo, pero eso no nos va a afectar porque no importa si sobran filas, ya que sabemos que la que nos interesa está siempre en el 11 y el cálculo **12-FILA()** nos garantiza que llegamos a ella. En resumen, usaríamos una fórmula como esta: =BUSCARH("*";D8:H14;12-FILA();0), que es la correspondiente a la fila 8.

Resulta algo artificioso el procedimiento. Se ve que es mejor el que usa la función COINCIDIR. No importa, porque nuestro objetivo es descubrir posibilidades.

¿Qué haría alguien de Matemáticas?

Esto va un poco en broma.

Cambiaría los asteriscos por un 1. Esto se puede conseguir con la orden Reemplazar.



Los huecos se pueden reemplazar por ceros, pero no es necesario. Una vez que nuestra matriz es numérica, para traducir la posición del asterisco a un número basta usar SUMAPRODUCTO, que multiplique la fila actual por la primera, y así sólo aparecerá la puntuación situada en la misma fila que el 1.

	1	2	3	4	5
Seguridad	0	0	0	0	1
Prestaciones	0	1	0	0	0
Acabado	0	1	0	0	0
Precio	0	0	0	1	0
Servicio técnico	0	0	1	0	0

Sería una fórmula similar a esta:

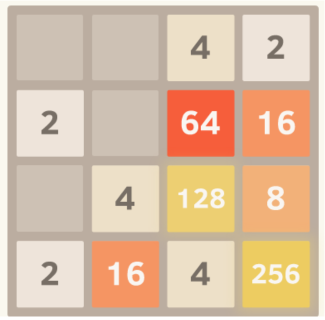
=SUMAPRODUCTO(D6:H6;D$4:H$4)

Observa que la primera fila se usa con referencia absoluta, para que al rellenar hacia abajo se conserven siempre las puntuaciones 1, 2,…5.

El problema está en que la persona que haya diseñado la encuesta nos proteste por manipularla. Por eso decíamos que esto se trataba un poco como broma.

DAMOS VUELTAS AL JUEGO DEL 2048

Hace unas semanas comencé a jugar al 2048 (Gabriele Cirulli - http://gabrielecirulli.github.io/2048/).



Comparto la opinión mayoritaria de que es un juego adictivo y a veces desesperante. Su combinación de lógica y aleatoriedad hace que te sientas protagonista de las decisiones, pero que por otra parte temas que un

2 o un 4 aparecidos a destiempo te cierren el juego antes de lo que esperabas.

Para analizarlo mejor lo he implementado en hoja de cálculo. Esto me permite cambiar los símbolos o las reglas de juego, además de poder idear variantes con desarrollos totalmente distintos y realizar estadísticas.

Existen bastantes páginas con consejos y estrategias para llegar a puntuaciones altas, pero aquí no nos interesan, sino el estudio de la aleatoriedad contenida en el juego.

El "suelo" del juego

Cuando se desarrollan varias partidas en las mismas condiciones se observa que las puntuaciones alcanzadas fluctúan mucho de unas a otras. Según mi experiencia, si no existe un efecto de cansancio, suelen oscilar hasta 4000 puntos si se mantiene la pericia y las estrategias. Son diferencias demasiado acusadas, por lo que debemos pensar que el juego tiene un alto grado de azar.

Para aclarar la cuestión un poco se ha añadido a la implementación en hoja de cálculo el botón “Serie”, que te permite desarrollar el juego *de forma aleatoria* todas las veces que desees, recogiendo después las estadísticas. En un primer nivel el efecto es el de simular que la persona que juega no tiene estrategia o bien está absolutamente distraída. A los resultados obtenidos les llamamos el “suelo” del juego, y constituyen la puntuación mínima que se debe esperar en las jugadas.

Simulación aleatoria (Nivel 1)

Para realizar un estudio fiable se ha desarrollado una serie con 1000 jugadas aleatorias. Nuestro modelo de juego las acumula en bruto, para que después se puedan analizar con las herramientas de la hoja de cálculo. Recoge puntuaciones, valor máximo conseguido y movimientos necesarios. Los resultados han sido estos:

Estadística simple

Han resultado estos promedios:

Valor máximo	78,8
Puntuación	701,8
Movimientos	74,1

Nota: Como un consejo frecuente en este juego es el de procurar usar sólo dos direcciones en muchas fases del desarrollo, lo hemos implementado también así, que se use abajo y a la derecha de forma preferente, y, sorprendentemente, se ha incrementado algo el rendimiento, a pesar de seguir siendo un proceso aleatorio. Los resultados han subido a 83,2, 822,8 y 81,4 respectivamente. Para una muestra de 1000 intentos no están mal esas diferencias.

Así que jugando al azar sólo se llega a obtener 78,8 como valor máximo (con generosidad redondeamos al 128), muy lejos del 2048 soñado. La puntuación también es pobre, pero no tanto. Es destacable el número de movimientos, pero es que de forma aleatoria cualquier resultado paga un precio en el exceso de los mismos.

Las desviaciones estándar de la muestra han sido:

Valor máximo	40,8
Puntuación	358,9
Movimientos	23,1

Son llamativas, pero no tanto como esperábamos. Si usamos los máximos y mínimos, el grado de aleatoriedad aparece más claro:

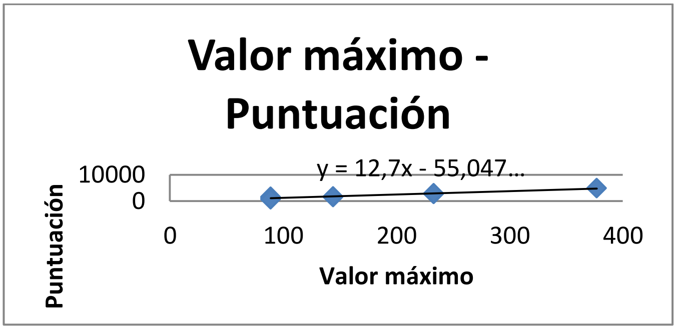
	Máximo	Mínimo
Valor máximo	256,0	16,0
Puntuación	2956,0	68,0
Movimientos	194,0	23,0

Es destacable el hecho de que al jugar aleatoriamente se puedan conseguir casi 3000 puntos y llegar a 256. Por el contrario, tiene que venir la suerte totalmente en contra para llegar sólo a 16. Claro que estos son los casos extremos entre 1000 intentos.

Comparación entre variables

Valor máximo-Puntuación

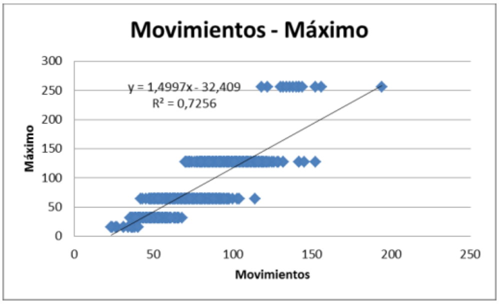
Esta relación es interesante, porque nos da una medida de la cantidad de puntuaciones menores que acompañan al máximo. Podríamos sospechar que en buenos jugadores esta relación es pequeña, porque saben llegar al máximo de forma más directa, mientras que otras personas titubearán y producirán más resultados secundarios. Los resultados que ves en el gráfico se confirman con otros experimentos: la puntuación suele aproximarse a unas diez veces el valor máximo, con un ajuste bastante bueno, R^2=0,9 aproximadamente. Recuérdese que todo esto sólo es válido para jugadas totalmente aleatorias. Hemos elegido el ajuste lineal porque es el que presenta mejor valor de R^2.



Movimientos – Máximo

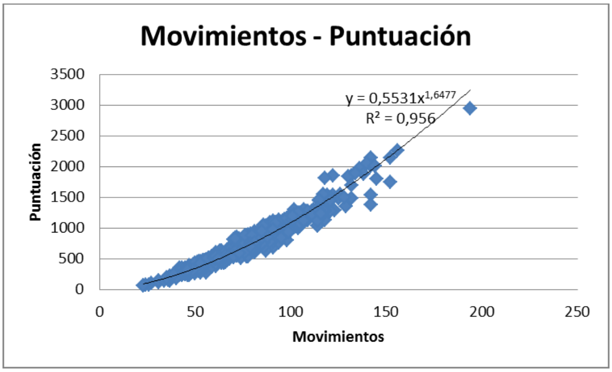
Esta relación no es tan fuerte, y nos presenta que para obtener un máximo determinado existe una gama muy amplia de posibles movimientos (pautas horizontales del gráfico). En promedio se

consigue un valor máximo que se aproxima a una vez y media el número de movimientos.



Movimientos – Puntuación

Aquí nos encontramos con que el mejor ajuste es el potencial, con tasa de variación creciente y mayor dispersión según avanzamos en el gráfico de izquierda a derecha. Aparte de la pericia de cada persona, en el "suelo aleatorio", al crecer el número de movimientos se va obteniendo más rendimiento relativo y resultados más heterogéneos. La acumulación del azar abre las posibilidades.



La imagen de abajo corresponde a un cruce entre las variables Puntuación y Valor máximo (redondeadas a múltiplos convenientes). Vemos claramente que la mayor frecuencia corresponde al máximo 64 y que con ella lo más frecuente es obtener entre 300 y 600 puntos. Así que si obtienes este nivel no se te ocurra presumir.

		Puntuaciones									
	Cuenta de Movimientos	**Etiquetas de columna**									
	Etiquetas de fila	**0**	**300**	**600**	**900**	**1200**	**1500**	**1800**	**2100**	**2700**	**Total general**
Máximo	16	14									14
	32	85	83								168
	64		308	206	7						521
	128			28	174	71	9	1			283
	256							10	3	1	14
	Total general	**99**	**391**	**234**	**181**	**71**	**9**	**11**	**3**	**1**	**1000**

Simulación con toma de decisiones (Nivel 2)

A nuestra simulación le añadiremos ahora un poco de inteligencia. En lugar de elegir aleatoriamente la dirección del juego, evaluaremos la ganancia en puntos que se puede lograr con un movimiento horizontal o vertical, después se elegirá uno de los dos y entre izquierda- derecha o entre arriba-abajo se tomará la decisión aleatoriamente.

Efectuadas 1000 simulaciones, hemos observado una ganancia apreciable respecto a la simulación aleatoria pura. Era de esperar, pero el incremento no llega al 100%. Sigue existiendo el “suelo” aleatorio del juego, pero más atenuado. Lo vemos en esta imagen de los resultados comparativos:

	Nivel 1	Nivel 2	Incremento
Valor máximo	78,8	136,4	73%
Puntuación	701,8	1300,5	85%
Movimientos	74,1	106,2	43%
Cociente P/M	9,47	12,24	
Cociente VM/M	1,06	1,28	

El incremento logrado en la puntuación es del 85% y en el valor máximo del 73%. Son ganancias apreciables, pero no excesivamente llamativas. Los movimientos se incrementan menos, porque la toma acertada de decisiones disminuye el número de necesarios: sólo se incrementan en un 43%. Es lógico.

También se nota el mayor rendimiento en los cocientes de comparación: por cada movimiento se logran 9,47 si jugamos de forma aleatoria y 12,24 si estudiamos antes las ganancias posibles. El proceso rinde más. La comparación con el valor máximo también se incrementa, de 1,06 a 1,28.

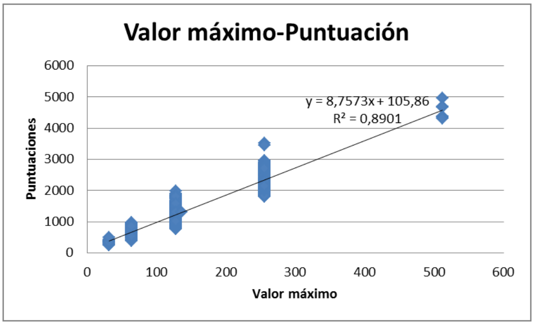
Como comentábamos en el Nivel 1, si sueles lograr 256 como máximo y puntuaciones de 1500 como media, estás jugando como niños de 6 o 7 años.

Comparaciones múltiples

Valor máximo – Puntuación

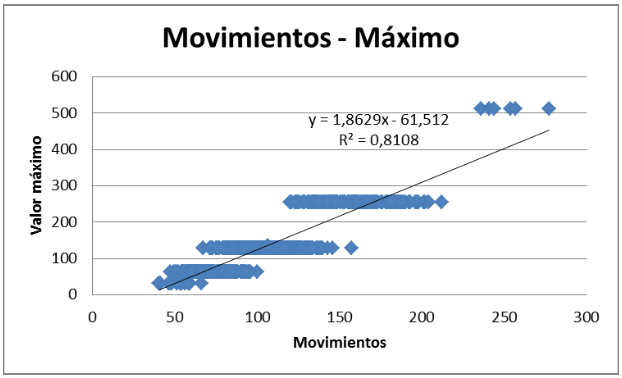
Sigue teniendo una buena relación lineal, con pendiente algo más baja. Es como si la pequeña inteligencia introducida lograra máximos con

menos sumas secundarias, que son las que incrementan la puntuación.



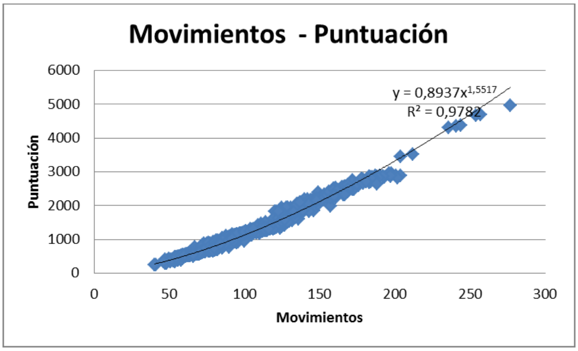
Movimientos – Máximo

Aquí se nota mejor el rendimiento, que si aleatoriamente significaba un punto y medio por cada movimiento, ahora es de casi 2. También es lógico y no llama la atención.



Movimientos – Puntuación

Es muy parecida a la anterior, pero con menos dispersión en los valores mayores. Parece ser una característica del juego y no de la pericia de los jugadores.



Con esto habrás descubierto sobre qué “suelo” juegas. Vemos que existen puntuaciones mínimas que sólo son debidas al azar y que éste puede influir hasta en 3000 puntos, lo que incrementa la desesperación cuando tus planes se vienen abajo al aparecer la cifra no deseada o en la celda menos conveniente.

DISTANCIAS DE HAMMING

Hamming definió su distancia para palabra binarias como el número total de bit en los que ambas se diferencian, comparando, como es de esperar cada uno con el que ocupa el mismo lugar en la otra palabra. Así, la distancia de Hamming entre 11**0**0**1**011 y 11**1**0**0**011 es de 2, porque son diferentes entre sí los dígitos resaltados en negrita.

Es fácil extender esta definición a cadenas de caracteres o a las cifras de un número. Así, la distancia entre estos números de móvil 656232110 y 636182170 es de 4, que son las cifras en las que difieren. Con esta definición nos podíamos preguntar cómo se relacionan entre sí números del mismo tipo: primos con primos o cuadrados con cuadrados. La idea viene a cuento porque esperamos que en los primos abunden las cifras impares, o que en los cuadrados aparezcan 1, 4, 9, 6 o 5, o que en los triangulares o de Fibonacci se distribuyan uniformemente. Como siempre advertimos, hay que decir que esto sólo es una curiosidad sin valor matemático.

Para ello hemos construido la función hamming(a,b) (para el Basic de las hojas de cálculo), que cuenta las cifras diferentes existentes entre dos números. Hemos previsto el valor -1 como valor de error. Para aquellos que no tengan el mismo número de cifras, las de uno que no están en el otro se cuentan como diferencias. Su listado es el siguiente, aunque no lo explicaremos, ya que contiene varias funciones predefinidas:

```
Public Function hamming(a, b) 'devuelve -1 si algo va mal. Cuenta las diferencias entre cifras. Si uno es más largo que el otro cuenta los huecos también

Dim h, i, n, m

h = -1
If esentero(a) And esentero(b) Then
n = numcifras(a)
m = numcifras(b)
h = 0
If n > m Then h = n - m: n = m
For i = 1 To m
If cifra(a, i) <> cifra(b, i) Then h = h + 1
Next i
End If
```

hamming = h
End Function

Con esta función analizaremos qué números presentan más o menos diferencias con sus compañeros de tipo. Para no complicar la tarea, que al fin y al cabo es lúdica, nos limitaremos a comparar aquellos que tengan el mismo número de cifras. Comenzamos:

Distancias entre primos

Comenzamos con los de dos cifras. El valor de la función sólo podrá ser 1 o 2, porque el 0 indicaría igualdad. Comparamos cada primo de dos cifras con todos los demás, tomando nota de la distancia existente entre ellos. Nos ha resultado esta tabla:

	Primo	h=1	h=2	hm
	11	7	13	11,0
	13	8	12	10,7
	17	7	13	11,0
	19	7	13	11,0
	23	6	14	11,3
	29	5	15	11,7
	31	5	15	11,7
	37	5	15	11,7
	41	6	14	11,3
	43	7	13	11,0
	47	6	14	11,3
	53	6	14	11,3
	59	5	15	11,7
	61	5	15	11,7
	67	5	15	11,7
	71	6	14	11,3
	73	7	13	11,0
	79	6	14	11,3
	83	6	14	11,3
	89	5	15	11,7
	97	4	16	12,0
Total	21			

En ella hemos reflejado las distancias de cada uno de los 21 primos de 2 cifras respecto a sus compañeros. En la segunda columna contamos las distancias de Hamming que valen 1 y en la siguiente las de 2. En la última columna se ha calculado la media ponderada de las distancias. Viendo las columnas se destaca que son mucho más abundantes las diferencias h=2.

Es fácil ver que el 97 es el primo que más diferencias presenta, el que está más alejado en cifras de los demás. En total 36 diferencias (4+2*16). Por el contrario, para el 13 hay 32, (8+2*12). Para comparar este colectivo con otros, hemos sumado todas las diferencias, con un resultado de 716 y una media de 34,095.

Primos de tres cifras

Como aquí aparecerán más resultados, usaremos un filtro para presentarlos. Los primeros valores de los 143 totales son:

Primo	h=1	h=2	h=3	hm
101	10	48	84	59,7
103	8	52	82	59,7
107	11	51	80	58,8
109	11	44	87	60,0
113	6	54	82	60,0
127	8	55	79	59,2
131	9	50	83	59,7

Mediante ordenaciones y filtros en la hoja de cálculo descubrimos lo siguiente:

El primo más cercano a sus compañeros es el 157. Ha sido una sorpresa, pues no pensamos en él. Es curioso que los seis siguientes en la lista terminen en 7. Estos son los que tienen las cifras menos destacadas.

Primo	h=1	h=2	h=3	hm
157	11	52	79	58,7
107	11	51	80	58,8
137	9	55	78	58,8
167	9	55	78	58,8
197	11	50	81	59,0
127	8	55	79	59,2
457	7	56	79	59,3

En el extremo opuesto, de los que presentan más diferencias han resultado números terminados en 9. A ver quién aclara esto (¿pura casualidad o hay algo detrás?)

Primo	h=1	h=2	h=3	hm
719	6	45	91	61,5
919	5	47	90	61,5
929	3	51	88	61,5
599	5	48	89	61,3
829	8	42	92	61,3
229	6	47	89	61,2
389	4	51	87	61,2
509	7	45	90	61,2

Hay un triple empate entre 719, 919 y 929. Los tres se encuentran a una distancia media de los demás igual a 61,5, o una suma de diferencias de 369.

La suma de todas las diferencias es 51842, con un promedio de 362,5

Primos de cuatro cifras

Los más afines en cifras son

Primo	h=1	h=2	h=3	h=4	hm
1223	8	111	385	556	360,9
1229	11	97	401	551	361,2
1621	8	99	406	547	361,2
1021	9	102	394	555	361,5
1627	9	94	409	548	361,6
1231	10	92	409	549	361,7
1213	8	99	400	553	361,8

Y los más alejados

Primo	h=1	h=2	h=3	h=4	hm
7177	6	84	375	595	367,9
7187	7	83	378	592	367,5
8147	6	78	392	584	367,4
8167	7	88	370	595	367,3
8179	4	85	385	586	367,3
7109	7	79	389	585	367,2
7907	11	80	375	594	367,2

Con esta idea nos quedamos. El total de diferencias es de 3870022 con una media de 3647,5

Resumiendo, el resultado global es

Diferencias entre primos				
Cifras	Elementos	Total	Media	Por elemento
2	21	716	34,1	1,6
3	143	51842	362,5	2,5
4	1061	3870022	3647,5	3,4

En la última columna dividimos de nuevo ente los elementos, ya que su número influye en las distancias medias (hay más con los que comparar)

Estas medidas nos servirán para comparar la homogeneidad de las cifras ordenadas respecto a otros colectivos. Veremos ahora los cuadrados, triangulares y cualquier otro colectivo que nos llame la atención.

Distancias entre cuadrados

Los cuadrados son menos abundantes. En concreto, para dos cifras solo existen 6. Llama la atención en la tabla resumen que sólo un par (16 y 36) presenta una distancia de 1, mientras el resto se diferencia totalmente de los demás.

Cuadrado	h=1	h=2	hm	Total
16	1	4	3,0	9
25	0	5	3,3	10
36	1	4	3,0	9
49	0	5	3,3	10
64	0	5	3,3	10
81	0	5	3,3	10
6			**3,2**	**58**

Las diferencias son muy uniformes. Los más afines son los ya destacados 16 y 36

Cuadrados de tres cifras

Aparecen 22 cuadrados. Los que tienen cifras más parecidas a sus compañeros son estos:

Cuadrado	h=1	h=2	h=3	hm	Total
121	0	13	8	8,3	50
144	0	9	12	9,0	54
169	0	9	12	9,0	54

También es una sorpresa que el 121 comparta más dígitos que ningún otro. La clave está en los 13 con los que se diferencia en dos cifras.

Los que más se alejan:

Cuadrado	h=1	h=2	h=3	hm	Total
256	0	5	16	9,7	58
576	1	3	17	9,7	58
676	1	3	17	9,7	58
900	2	1	18	9,7	58

Se ve que el 6 no es una terminación tan popular como creíamos.

Con cuatro cifras

Resultan 68 cuadrados. Los ordenamos como en los casos anteriores. Vemos los que presentan menos diferencias con los demás tienen todos una cifra 0

Cuadrado	h=1	h=2	h=3	h=4	hm	Total
1024	0	11	25	31	22,1	221
2209	1	7	27	32	22,4	224
2401	1	9	21	36	22,6	226
2601	1	10	19	37	22,6	226
2704	1	9	21	36	22,6	226

También es sorprendente que el mínimo caiga precisamente en 1024, el elemento más pequeño del conjunto.

Los que más se alejan terminan todos en 6. Otra casualidad.

8836	0	2	20	45	24,4	244
7396	0	4	17	46	24,3	243
4356	0	4	18	45	24,2	242
5776	1	0	23	43	24,2	242
3136	0	4	19	44	24,1	241
5476	1	0	24	42	24,1	241

Resumen

Diferencias entre cuadrados				
Cifras	Elementos	Total	Media	Por elemento
2	6	58	9,7	1,6
3	22	1224	55,6364	2,5
4	68	15914	234,029	3,4

Distancias entre triangulares

Sólo damos los resultados más llamativos

Triangulares más afines: De dos cifras, el 15, de tres el 120 y de cuatro hay dos, el 1275 y el 1770

Triangulares más diferentes: Hay cinco de dos cifras: 10, 36, 66, 78 y 91. De tres cifras 378 y 528. De cuatro el 6903

No seguimos. No parece que el tipo de número influya mucho en los resultados si corregimos los totales según el número de elementos. Puede más la falsa aleatoriedad que produce la repetición que las diferencias del tipo de cifras.