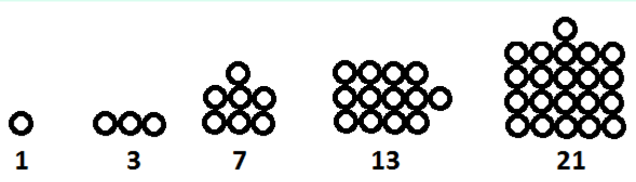
Números y hoja de cálculo XIV



Curso 2021-22

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Llegamos al curso número 14 del blog “Números y hoja de cálculo” http://hojaynumeros.blogspot.com/ del que este documento es resumen. De forma progresiva, se han ido completando cuestiones teóricas e intensificando las dedicadas a búsquedas y curiosidades.

De las primeras se incluyen los números triangulares y cuadrados, que eran los que faltaban del repaso general de los números poligonales efectuado estos últimos cursos. De las segundas se incluyen varias interesantes en el capítulo de “Búsquedas razonadas”

La novedad en este documento lo constituten los “regresos”, en los que se abordan cuestiones tratadas hace años en el blog y que ahora se abordan con insrumentos más potentes.

CONTENIDO

Presentación **2**
Contenido **3**
Técnicas y algoritmos **5**
Prolongación de una recurrencia 5
Detección de progresiones aritméticas 11
Alternativa a Faulhaber 26
Búsquedas razonadas **36**
Suma de dos igual a otra de tres 36
Sumas de K enteros positivos consecutivos 43
Frontera entre dos sumas equivalentes 53
Relaciones entre números con cifras simétricas ... 67
Consecutivos con una suma del mismo tipo 79
Medias de tres primos consecutivos 89
Números poligonales **101**
Los números triangulares 101
Consecutivos que son poligonales 122
Los números cuadrados 137
Regresos **153**

Suma de los primeros cuadrados 153
La mitad, cuadrado, el tercio, cubo 159
Números intocables 166
Doblado pitagórico 174
Números especiales 187
Números de Hogben 187
Los pseudoprimos 194
Números admirables 200
Números de Zumkeller 211
Los pandigitales completos 226
Números con cifras crecientes o decrecientes 232

PROLONGACIÓN DE UNA RECURRENCIA

En la confección de sucesiones, que es una de las tareas más frecuentes en este blog, aparecen con cierta frecuencia algunas de las que se sabe o sospecha que pueden generarse mediante una fórmula de recurrencia respecto a sus primeros términos. Así ocurre, por ejemplo, con los números poligonales, que ocupan una buena parte de nuestros estudios, o con aquellas cuestiones que se resuelven con la ecuación de Pell o similares (ecuaciones Pell-like).

Las ecuaciones de recurrencia más frecuentes en estos temas son las lineales, en las que existe una relación de este tipo entre un elemento y varios de sus anteriores. Las llamaremos homogéneas si no intervienen términos independientes. Comenzaremos por ellas.

Sistema de ecuaciones de una recurrencia

Si cada elemento depende de los anteriores, pongamos por ejemplo, de cuatro, y de forma lineal, se dará la siguiente situación:

$a(n)=c_1a(n-1)+c_2a(n-2)+c_3a(n-3)+c_4a(n-4)$

Si elegimos los ocho primeros términos de la sucesión podremos plantear (en el caso homogéneo)

$a(8)=c_1a(7)+c_2a(6)+c_3a(5)+c_4a(4)$

$a(7)=c_1a(6)+c_2a(5)+c_3a(4)+c_4a(3)$

$a(6)=c_1a(5)+c_2a(4)+c_3a(3)+c_4a(2)$

$a(5)=c_1a(4)+c_2a(3)+c_3a(2)+c_4a(1)$

Esto constituye un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas c_1, c_2, c_3, c_4, que, al resolverse, nos descubre la ecuación de recurrencia. Con los instrumentos de cálculo disponibles en la actualidad es una tarea fácil de sobrellevar.

Pongamos un ejemplo. Los números hexagonales se generan con una ecuación de recurrencia de orden 3. Para encontrarla, ya lo habrás descubierto, necesitamos el doble de elementos, en este caso 6. Buscamos cualquier listado de ellos y seleccionamos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66. Por comodidad, llamamos a los coeficientes A, B, C, y queda

66=45A+28B+15C

45=28A+15B+6C

28=15A+6B+C

Resolvemos el sistema y obtenemos A=3, B=-3, C=1, luego los números hexagonales se generan mediante H(n)=3H(n-1)-3H(n-2)+H(n-3). Puedes comprobarlo en la entrada correspondiente en este blog

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/02/numeros-hexagonales-1.html)

Automatización del proceso

Desde hace años ofrezco en mi página web una calculadora matricial para Excel y Calc (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#matrices)

Esta herramienta es de propósito general, con varias opciones y posibilidad de programar operaciones. Para no confundir con excesivo material, la he adaptado al problema que nos ocupa, y he situado esa versión en la carpeta propia de este blog.

http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm

En el caso de los hexagonales marcamos como orden 3, y escribimos en la fila correspondiente los primeros términos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66.

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	6	15	28	45	66
1,703125	-2,34375	0,890625				1
-2,34375	2,8125	-0,96875				-3

Después pulsamos en el botón “Homogénea” y se construirá el sistema de ecuaciones correspondiente:

Sucesión	1	6	15	28	45	66
1	6	15				28
6	15	28				45
15	28	45				66

Finalmente, pulsamos el botón “Resolver” y obtendremos los coeficientes:

No homogénea	Resolver	
45	66	91
	1	
	-3	
	3	

Como es una adaptación de otra herramienta, **se aconseja no tocar nada más de la hoja**. Si todo se viene abajo, volveremos a iniciar Excel.

Caso no homogéneo

Hay recurrencias lineales que poseen un término independiente. Estos mismos números hexagonales del ejemplo admiten otra recursión de tercer orden con término independiente 4.

$a(3)=K+c_1a(1)+c_2a(2)$
$a(4)=K+c_1a(2)+c_2a(3)$
$a(5)=K+c_1a(3)+c_2a(4)$

Resolvemos y nos resultan los coeficientes como en el caso homogéneo.

En nuestra hoja de cálculo basta pulsar sobre el botón “No homogéneo” y después sobre “Resolver”. En el caso de los hexagonales:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	6	15	28	45	66
1	1	6				15
1	6	15				28
1	15	28				45

No se debe olvidar rellenar el Orden, en este caso, 3. La solución, después de resolver, queda:

4
-1
2

La interpretamos como a(n)=2a(n-1)-a(n-2)+4. En efecto:

15=2*6-1+4

28=2*15-6+4

45=2*28-15+4

Otros ejemplos

La recurrencia homogénea que hemos descubierto para los números hexagonales es una propiedad general de todos los poligonales, en los que P(n)=3P(n-1)-P(n-2)+P(n-3). Lo vemos en los octogonales: 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936,…

Aquí se inserta la captura de pantalla en la que comprobamos que los coeficientes:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	8	21	40	65	96
1,087963	-1,481481	0,560185				1
-1,481481	1,740741	-0,592593				-3
0,560185	-0,592593	0,199074				3

Puedes probar con otros tipos de poligonales, como estos cuadrados centrados, 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145,…y te resultarán los mismos coeficientes 3, -3 y 1.

Triangulares cuadrados

Los triangulares que también son cuadrados (los hemos estudiado en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html)

también admiten una recurrencia homogénea de tercer orden. Tomamos su listado y lo volcamos en nuestra hoja de cálculo: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, 63955431761796, 2172602007770041,…y resulta:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	36	1225	41616	1413721	48024900
1155,986	-1189,5	34,01389				1
-1189,5	1207	-34,5				-35
34,01389	-34,5	0,986111				35

Efectivamente, TC(n)=35TC(n-1)-35TC(n-2)+TC(n-3), tal como hemos comprobado con los siguientes términos.

Así podríamos recorrer más ejemplos. Como esto es una presentación de una herramienta, con lo explicado basta.

DETECCIÓN DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Es bastante frecuente que tres elementos de una misma sucesión o del mismo tipo presenten una progresión aritmética, es decir, que tengan la forma (n-k, n, n+k). Un ejemplo de esto son las ternas de números primos en progresión:

3 5 7
3 7 11
5 11 17
7 13 19
11 17 23
7 19 31
17 23 29
17 29 41
19 31 43
31 37 43
29 41 53

En mis sucesiones http://oeis.org/A292313, http://oeis.org/A292309, http://oeis.org/A292314 y otras se hace referencia a este tipo de ternas, que son admitidas por casi todos los tipos de números más populares.

La detección de estas ternas no ofrece problemas de diseño de un algoritmo. Si fijamos la atención en el término central **n**, es claro que **n-k** pertenecerá al rango **(1, n-1)**. Por tanto, bastará recorrerlo y, para cada número del mismo tipo que n, buscar si **n+k** también coincide con ellos en la misma característica o propiedad, que en el caso anterior era la de ser primos.

Las ternas anteriores de primos se pueden detectar con la siguiente función de Excel y Calc:

function hayprog$(n) ‘Devuelve un string con la terna, o bien una cadena vacía
dim i,k
dim s$

if not esprimo(n) then hayprog="":exit function ‘Si el número no es primo, salimos.
s=""
k=0
for i=1 to n-1 ‘La variable i recorre el rango (1,n)
if esprimo(i) then ‘Si es primo, seguimos

k=n-i ‘Si n+k también es primo, hemos llegado a una terna

if esprimo(n+k) then s=s+” # “+str$(n-k)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)

end if

next i

hayprog=s

end function

Con PARI se puede usar este mismo algoritmo. Al ser un lenguaje más orientado a números, usaremos como respuesta de la función ESPROG el término central.

esprog(n)={my(s=0,k=0,i);if(isprime(n),for(i=1,n-1,if(isprime(i),k=n-i;if(isprime(n+k),s=1))));s}

for(i=1,100,if(esprog(i),print(i)))

Si lo ejecutas en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html, te devolverá los términos primos centrales:

```
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
```

El uso del bucle FOR-NEXT se justifica porque, en otros casos que veremos más adelante, pueden existir dos soluciones. Si no, usaríamos WHILE, que se puede detener antes.

Ternas de cuadrados

Las ideas anteriores las podemos aplicar a muchos tipos de números. Comenzamos por los cuadrados. Para ello, sustituimos la función ESPRIMO por ESCUAD en Excel y Calc, y en PARI, i*sprime* por *issquare*. Puedes buscar la función ESCUAD en este mismo blog. El resultado sería el siguiente:

1 25 49
4 100 196
49 169 289
9 225 441
49 289 529
16 400 784
25 625 1225 # 289 625 961
196 676 1156
1 841 1681
36 900 1764
196 1156 2116
49 1225 2401
529 1369 2209
441 1521 2601
64 1600 3136
961 1681 2401

Vemos que el 625 es centro de dos ternas distintas. Comprueba que todas las ternas presentan una progresión aritmética.

Los términos centrales están publicados en OEIS:

A198385 Second of a triple of squares in arithmetic progression.

25, 100, 169, 225, 289, 400, 625, 676, 625, 841, 900, 1156, 1369, 1225, 1681, 1521, 1600, 2500, 2025, 2704, 2601, 2500, 3721, 2809, 3025, 4225, 3364, 3600, 4225, 4225, 4225, 4624, 5625, 5476, 7225, 4900, 6724, 6084, 5329, 5625, 6400, 7225, 7225, 7225, 7921

Las primeras diferencias de estas progresiones son: 24, 96, 120, 216, 240, 384, 336, 480, 840, 864, 960, 1176 y 840, y todas son múltiplos de 24.

Las sumas de los tres componentes de la terna las publiqué en http://oeis.org/A292313. Coinciden, como es evidente con el triple del término central.

A292313 Numbers that are the sum of three squares in arithmetic progression.

75, 300, 507, 675, 867, 1200, 1875, 2028, 2523, 2700, 3468, 3675, 4107, 4563, 4800, 5043, 6075, 7500, 7803, 8112, 8427, 9075, 10092, 10800, 11163, 12675, 13872, 14700, 15987, 16428, 16875, 18252, 19200, 20172, 21675, 22707, 23763, 24300, 24843, 27075, 28227, 30000, 30603

Relación entre bases

Una búsqueda se debe enriquecer siempre con ideas teóricas o algebraicas. En este caso, no es difícil relacionar las bases.

Podemos representar la terna como $(n-r)^2$, n^2 y $(n+s)^2$. Con ello, la igualdad de diferencias será:

$$n^2-(n-r)^2=(n+s)^2-n^2$$

Simplificando:

$$s^2+2ns+r^2-2nr=0$$

Es una ecuación de segundo grado en la variable **s** en la que el discriminante es n^2-r^2+2nr y ha de ser cuadrado. Esto nos da una posibilidad de crear otra función en la que los resultados sean las bases de los cuadrados. Puede ser esta:

```
function hayprog2$(n)
dim i,k,q
dim s$

s=""
k=0
for i=1 to n-1
q=n^2-i^2+2*n*i ‘Se exige que el discriminante sea cuadrado
if escuad(q) then
k=sqr(q)-n ‘Las diferencias serán i y k
s=s+” # “+str$(n-i)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)
```

```
end if
next i
hayprog2=s
end function
```

Efectivamente, los números que producen resultados válidos en esta función son las raíces cuadradas de los que obtuvimos más arriba,

1 5 7
2 10 14
7 13 17
3 15 21
7 17 23
4 20 28
17 25 31 # 5 25 35
14 26 34
1 29 41
6 30 42
14 34 46
7 35 49
23 37 47
21 39 51
8 40 56

Protagonismo para las diferencias

Podemos despejar **n** en la expresión $s^2+2ns+r^2-2nr=0$:

$$n=(s^2+r^2)/(2(r-s))$$

Si **n** es entero, el par **r, s** será válido para cumplir la condición de progresión. Este punto de vista ha resultado muy eficaz, porque para cada valor de **r** (que será par por ser igual a una diferencia de cuadrados y mayor que s) se obtienen varios valores posibles de n. Son los mismos términos centrales en las ternas de bases, pero agrupados por conjuntos. Hemos usado la función:

```
function hayprog3$(n)
dim i,q
dim s$

s=""
for i=1 to n-1
q=(n^2+i^2)/(2*(n-i)) 'La variable q representa la base central
if q=int(q) then s=s+" "+str$(q) 'Se añaden todas las soluciones para una diferencia dada
next i
hayprog3=s
end function
```

Si se organiza una búsqueda con esta función, obtendremos los valores de la base central para cada diferencia:

6	5 13
8	10 25
10	17 41
12	10 15 26 61
14	37 85
16	20 50 113
18	15 39 65 145
20	13 25 34 82 181
22	101 221
24	17 20 30 52 75 122 265
26	145 313
28	29 35 74 170 365
30	25 29 51 65 123 197 421
32	40 100 226 481

Equivalencia entre dos sumas de impares

Si recordamos que un cuadrado es una suma de los primeros impares, la diferencia entre dos de ellos también será una suma, aunque no comenzará con el 1. Entonces, las ternas que estamos investigando se traducirán en equivalencia entre dos sumas de impares consecutivos. Así, la terna 1, 25, 49 se puede representar como

3+5+7+9=11+13

Ternas de triangulares en progresión

Si sustituimos la función ESCUAD por ESTRIANGULAR (está publicada en el blog, y basta exigir que 8n+1 sea cuadrado), obtendremos ternas del mismo tipo, pero para triangulares. Aquí tenemos una pequeña dificultad si consultamos OEIS, y es que se considera el 0 como triangular, siguiendo la política de esa página. Así, en el siguiente listado publicado, no entrarían, por ejemplo, 3 y 105 si no admitiéramos 0 como triangular. En los cuadrados no existe ese problema, porque uno de ellos no puede ser el doble de otro, pero en los triangulares sí (ver http://oeis.org/A075528).

3 .... # 0 3 6
21 .... # 6 21 36
28 .... # 1 28 55
36 .... # 6 36 66
78 .... # 3 78 153 # 36 78 120
105 .... # 0 105 210
153 .... # 6 153 300
171 .... # 66 171 276
190 .... # 55 190 325
210 .... # 120 210 300
253 .... # 10 253 496
325 .... # 55 325 595
351 .... # 36 351 666
378 .... # 15 378 741

A292310

Triangular numbers that are equidistant from two other triangular numbers.

3, 21, 28, 36, 78, 105, 153, 171, 190, 210, 253, 325, 351, 378, 465, 528, 666, 703, 903, 946, 990, 1035, 1128, 1176, 1275, 1378, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1891, 1953, 2278, 2346, 2556, 2628, 2775, 2926, 3003, 3081, 3160, 3403, 3570, 3741, 3828, 4095, 4186, 4278, 4371, 4656

Relación entre órdenes

Repitiendo los pasos de los cuadrados, tendremos:

$$(n+s)(n+s+1)+(n-r)(n-r+1)=2n(n+1)$$
$$ns+n+ns+s^2+s-rn+n-rn+r^2-r=2n$$
$$2ns+s^2+s-2rn+r^2-r=0$$
$$s^2+(2n+1)s-(2n+1)r+r^2=0$$

El discriminante para s en esa ecuación será

$$(2n+1)^2+4(2n+1)r-4r^2$$

Si es un cuadrado se tendrá:

$$q^2=(2n+1+2r)^2-8r^2$$
$$s=(q-2n-1)/2$$

Por tanto, en *hayprog2* habrá que introducir este nuevo discriminante:

```
function hayprog2$(n)
dim i,k,q
dim s$

s=""
k=0
for i=0 to n-1
```

```
q=(2*n+1+2*i)^2-8*i^2
if escuad(q) then
k=(sqr(q)-2*n-1)/2
if k>0 then s=s+" # "+str$(n-i)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)
end if
next i
hayprog2=s
end function
```

El resultado de los primeros órdenes de los triángulos es:

6 .... # 3 6 8
7 .... # 1 7 10
8 .... # 3 8 11
12 .... # 8 12 15 # 2 12 17
17 .... # 3 17 24
18 .... # 11 18 23
19 .... # 10 19 25
20 .... # 15 20 24
22 .... # 4 22 31
25 .... # 10 25 34
26 .... # 8 26 36
27 .... # 5 27 38
30 .... # 24 30 35
32 .. # 23 32 39 # 17 32 42 # 11 32 44 # 6 32 45
36 .... # 3 36 51

Aparecen varios casos múltiples para un mismo orden central. Sin tenerlos en cuenta, con ellos se reconstruyen las ternas de más arriba:

N-r	n	n+s	T1	T2	T3
3	6	8	6	21	36
1	7	10	1	28	55
3	8	11	6	36	66
8	12	15	36	78	120
3	17	24	6	153	300
11	18	23	66	171	276
10	19	25	55	190	325
15	20	24	120	210	300
4	22	31	10	253	496
10	25	34	55	325	595
8	26	36	36	351	666
5	27	38	15	378	741
24	30	35	300	465	630
23	32	39	276	528	780

Equivalencia entre sumas de consecutivos

Al igual que nos ocurrió con los cuadrados, al ser los triangulares suma de números consecutivos, cada progresión aritmética de triangulares se traducirá en una equivalencia de sumas de ese tipo. Por ejemplo, la terna 6, 36, 66 se traduce en 4+5+6+7+8=9+10+11, ya que ambos suman 30, que es la diferencia.

Ternas de oblongos

Cada terna de triangulares se convierte en otra de oblongos, ya que estos son el doble de los primeros. Cada triangular n(n+1)/2 dará lugar al oblongo n(n+1). No tiene mayor interés.

Semiprimos

Todos los semiprimos, salvo 4 y 6, pueden ser términos centrales en ternas de semiprimos en progresión aritmética. Hay estudios sobre esto en Xianmeng Meng, On sums of three integers with a fixed number of prime factors
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X0500106X?via%3Dihub

Aquí figuran las ternas que admiten los primeros semiprimos:

9 .... 1 : # 4, 9, 14
10 .... 1 : # 6, 10, 14
14 .... 1 : # 6, 14, 22
15 .... 2 : # 4, 15, 26 # 9, 15, 21
21 .... 2 : # 4, 21, 38 # 9, 21, 33
22 .... 3 : # 6, 22, 38 # 9, 22, 35 # 10, 22, 34
25 .... 2 : # 4, 25, 46 # 15, 25, 35

26 .... 2 : # 6, 26, 46 # 14, 26, 38
33 .... 3 : # 4, 33, 62 # 9, 33, 57 # 15, 33, 51
34 4 : # 6, 34, 62 # 10, 34, 58 # 22, 34, 46 # 33, 34, 35
35 .... 2 : # 15, 35, 55 # 21, 35, 49
38 ...... 3 : # 14, 38, 62 # 21, 38, 55 # 25, 38, 51
39 .... 3 : # 4, 39, 74 # 9, 39, 69 # 21, 39, 57
46 5 : # 6, 46, 86 # 10, 46, 82 # 15, 46, 77 # 34, 46, 58 # 35, 46, 57
49 .... 3 : # 4, 49, 94 # 21, 49, 77 # 33, 49, 65

Vemos que faltan 4 y 6, y que el resto admite una o más ternas de las pedidas. Por ejemplo, 46 admite 5 soluciones.

Podemos modificar las funciones para que solo nos ofrezcan el número de soluciones. Si exigimos dos, además del 4 y 6, hay otros semiprimos que no admiten soluciones dobles. En el listado se identifican 9, 10 y 14, y no hemos encontrado más. Los siguientes admiten al menos dos soluciones.

Si exigimos que al menos presenten tres soluciones, las excepciones se extienden a esta lista:

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 25, 26, 35 y 57

Para cuatro sigue el tope de 57 (sólo hemos investigado hasta el 500), pero se incorporan 22, 33, 38, 39, y 49. Con exigencia de cinco llegaríamos a 87. Lo dejamos ahí sin formular ninguna conjetura. El autor, a punto de cumplir 80 años, no se ve con ánimo para estudiar documentos como el reseñado de Meng.

Con estas consideraciones, se pueden emprender otras búsquedas, que dejamos a quienes nos siguen.

ALTERNATIVA A FAULHABER

En muchas ocasiones puede interesar sumar las primeras potencias de los números naturales. Están publicados todos los casos populares, como sumas de cuadrados o de cubos, y existe una fórmula, atribuida a Faulhaber, que nos da el resultado para cualquier exponente. En el siguiente recorte de Wikipedia puedes estudiarla.

En Matemáticas, la **fórmula de Faulhaber**, en honor de Johann Faulhaber, expresa la suma de las potencias de los primeros *n* números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

como un polinomio en *n* de grado $(p+1)$ cuyos coeficientes se construyen a partir de los números de Bernoulli: B_j.

La fórmula es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \qquad \left(\text{con } B_1 = +\frac{1}{2} \text{ en vez de } -\frac{1}{2}\right)$$

Faulhaber no conoció nunca esta fórmula general; lo que sí conoció fueron al menos los primeros 17 casos y el hecho de que, si el exponente es impar, entonces la suma es una función polinomial de la suma en el caso especial en el que el exponente sea 1. También hizo algunas generalizaciones (véase Knuth).

https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber

El problema que tiene esta fórmula para un uso elemental es que requiere conocer los números de Bernouilli.

El procedimiento que explicaremos a continuación es una alternativa para encontrar el valor de la suma de una sucesión de potencias o expresiones polinómicas con Excel o Calc. Se debe tomar como un simple entretenimiento, aunque en algunas situaciones puede resultar útil.

Un ejemplo: Cuadrados de oblongos:

Explicamos el procedimiento con un ejemplo, como sería encontrar una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros oblongos, es decir de la expresión $n^2(n+1)^2$.

A) Creamos la sucesión:

Con las hojas de cálculo es muy fácil encontrar las primeras sumas de cualquier sucesión. En este caso hemos ido creando columnas para N(N+1), que son los oblongos, sus cuadrados $N^2(N+1)^2$ y sus sumas sucesivas.

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS
1	2	4	4
2	6	36	40
3	12	144	184
4	20	400	584
5	30	900	1484
6	42	1764	3248
7	56	3136	6384
8	72	5184	11568
9	90	8100	19668
10	110	12100	31768
11	132	17424	49192
12	156	24336	73528
13	182	33124	106652

Con esto ya sabemos que la sucesión 4, 40, 184, 584, 1484, 3248, 6384,…es la que requiere una fórmula similar a las de Faulhaber. Para continuar debemos basarnos en dos conjeturas:

1) La fórmula buscada creemos que será de tipo polinómico.

2) Intuiremos de alguna forma qué grado puede tener ese polinomio. Esta segunda no es tan importante, pero nos ayudará en el siguiente paso.

B) Aplicamos la interpolación de Newton:

La búsqueda de una fórmula polinómica que resuma un conjunto de valores es una interpolación. Disponemos de una hoja de cálculo que encuentra esa fórmula para los valores 1, 2, 3, 4,…mediante la interpolación de Newton:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

(Ver https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica_de_Newton)

Este método se adapta bien a la estructura de Excel y Calc. En nuestra hoja basta escribir los primeros términos y observar las diferencias que se producen. Conviene usar todos los que entren en el esquema (máximo 7). Si se conoce el grado del polinomio, se pueden usar menos. Esta sería la situación para el caso de cuadrados de oblongos:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	4	40	184	584	1484	3248	6384
Dif1		36	144	400	900	1764	3136
Dif2			108	256	500	864	1372
Dif3				148	244	364	508
Dif4					96	120	144
Dif5						24	24
Dif6							0
Coeficientes (en	0	24	96	148	108	36	4
forma de fracción)	720	120	24	6	2	1	1

Observamos que la diferencia sexta ya es 0, con lo que el grado del polinomio será cinco, como se ve en los coeficientes de abajo, que son seis.

Estos coeficientes actúan sobre los polinomios 1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3),…y esa es la mayor dificultad de esta interpolación, porque el resultado en este caso sería

4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)

(Ya se han simplificado los coeficientes)

C) Desarrollamos el polinomio interpolador:

Este resultado podría ser descorazonador, pero para su simplificación contamos con los programas CAS ((Computer Algebra System) En este blog se suele usar la Calculadora Wiris, gratuita y extendida en la enseñanza.

https://calcme.com/a

Copiamos nuestra monstruosa fórmula en ella y pulsamos sobre el signo =

$$4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5) =$$

$$\frac{1}{5}\cdot x^5+x^4+\frac{5}{3}\cdot x^3+x^2+\frac{2}{15}\cdot x$$ Calc

Ya hemos conseguido el objetivo: la suma de los cuadrados de los oblongos sigue la fórmula $x^5/5+x^4+5/3x^3+x^2+2/15x$

Sustituimos el polinomio en la tabla para comprobar

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS	Polinomio
1	2	4	4	4
2	6	36	40	40
3	12	144	184	184
4	20	400	584	584
5	30	900	1484	1484
6	42	1764	3248	3248
7	56	3136	6384	6384
8	72	5184	11568	11568
9	90	8100	19668	19668
10	110	12100	31768	31768
11	132	17424	49192	49192
12	156	24336	73528	73528
13	182	33124	106652	106652

Luego la fórmula queda:

$$S(n)=\frac{n^5}{5}+n^4+\frac{5n^3}{3}+n^2+\frac{2n}{15}$$

La podemos factorizar con Wiris:

$$\frac{1}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\left(n+\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)\cdot\left(n-\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)$$ Calc

Estas son las etapas del proceso. Nos basamos en Excel y Calc, en nuestra hoja de interpolación y en un CAS. En la mayoría de los casos obtendremos el polinomio adecuado. Puede que el grado requerido sea mayor, con lo que habría que ampliar el esquema de cálculo, pero ese trabajo es algo complejo.

Repetimos el trabajo con oblongos, Lo dejamos con redacción escueta:

Sumas de oblongos

N	N(N+1)	SUMAS
1	2	2
2	6	8
3	12	20
4	20	40
5	30	70
6	42	112
7	56	168
8	72	240
9	90	330
10	110	440
11	132	572
12	156	728
13	182	910

Debemos buscar una fórmula para 2, 8, 20, 40, 70, 112, …

Interpolamos

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	
Dif1		6	12	20	30	42	
Dif2			6	8	10	12	
Dif3				2	2	2	
Dif4					0	0	
Dif5						0	
Dif6							
ntes (en fracción)		0	0	2	6	6	2
	720	120	24	6	2	1	1

Observamos que son nulas las diferencias a partir de la cuarta, luego obtendremos un polinomio de tercer grado. Sería este

2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+1/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)

Con wiris

$$\frac{1}{3}\cdot x^3+x^2+\frac{2}{3}\cdot x \quad \text{Calc}$$

Factorizando con la misma calculadora:

$$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{2\cdot x}{3}\right) \quad = \quad \frac{1}{3}\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2) \quad \text{Calc}$$

Luego es el doble del combinatorio C(x+2,3), como puede verse en http://oeis.org/A007290

En este caso nos hemos limitado a comprobar, porque esta suma ya está resuelta.

Como un ejemplo del uso de esta fórmula puedes distraerte con mi entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/suma-de-numeros-oblongos-consecutivos.html

Suma de potencias cuartas

Por último, reproduciremos una de las fórmulas más conocidas de Faulhaber, la que suma potencias cuartas.

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

(Fuente: Wikipedia)

Seguimos los pasos sugeridos.

Construimos la sucesión:

N	N^4	SUMAS
1	1	1
2	16	17
3	81	98
4	256	354
5	625	979
6	1296	2275
7	2401	4676
8	4096	8772
9	6561	15333
10	10000	25333
11	14641	39974
12	20736	60710
13	28561	89271

Como sabemos que el grado de la fórmula de Faulhaber es 5, interpolaremos con al menos seis elementos.

Interpolación

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	17	98	354	979	2275	4676
Dif1		16	81	256	625	1296	2401
Dif2			65	175	369	671	1105
Dif3				110	194	302	434
Dif4					84	108	132
Dif5						24	24
Dif6							0
ientes (en	0	24	84	110	65	16	1
e fracción)	720	120	24	6	2	1	1

A partir de los coeficientes de abajo construimos el polinomio:

1+16*(x-1)+65/2*(x-1)*(x-2)+55/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+7/2*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)

Simplificamos con Wiris

$$\frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{30} \cdot x$$ Calc

Si reducimos todo a denominador 30, coincidirá con la fórmula de Faulhaber correspondiente.

SUMA DE DOS IGUAL A OTRA DE TRES

El 18 de abril de 2021 publiqué en Twitter (@connumeros) la siguiente identidad:

$18421\times18422/2+18422\times18423/2=15040\times15041/2+15041\times15042/2+15042\times15043/2$

Era un caso particular basado en la sucesión http://oeis.org/A262489, que contiene los índices de las sumas de dos números triangulares que son equivalentes a otras sumas de tres triangulares consecutivos.

Con una simple hoja de cálculo se puede construir la identidad. Basta iniciar un estudio algebraico. Sea n el índice del primer triangular de la suma S. Es fácil ver que se cumplirá que

$\mathbf{S=n(n+1)/2+(n+1)(n+2)/2=(n+1)^2}$

Es una conocida propiedad de los triangulares, que dos consecutivos suman un cuadrado. Si ahora la igualamos a otra suma de tres triangulares, queda:

$X(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)=3x^2+9x+8=2S$

El discriminante de esta ecuación será

$D=9^2-4*3*(8-2S)$

$D=81-96+24S$

D=24S-15, que deberá ser cuadrado para que la identidad se cumpla.

En el ejemplo de más arriba, $S=18422^2=339370084$, luego D tendrá el valor

$D=24*339370084-15=8144882001=90249^2$

Efectivamente, es un cuadrado, por lo que se puede resolver la ecuación de segundo grado dada, $3x^2+9x+8=2*339370084$, resultando $x=(-9+90249)/6=15040$, que es el índice inicial que figura en la identidad inicial de esta entrada.

Este estudio nos da una pista para encontrar los índices de números triangulares que intervienen en estas identidades. Bastará exigir que $24*(n+1)^2-15$ sea un cuadrado.

Con una simple búsqueda de esa condición en hoja de cálculo encontramos las primeras soluciones:

n	x
7	5
18	14
78	63
187	152
781	637
1860	1518
7740	6319
18421	15040

Coinciden con las primeras contenidas en la sucesión citada. Se ha añadido una columna con los índices iniciales de la suma triple. Esos están incluidos en la sucesión http://oeis.org/A165517

A262489 The index of the first of two consecutive positive triangular numbers (A000217) the sum of which is equal to the sum of three consecutive positive triangular numbers.

7, 18, 78, 187, 781, 1860, 7740, 18421, 76627, 182358, 758538, 1805167, 7508761, 17869320,…

Es fácil organizar esta búsqueda en PARI. Basta usar

ok(n)=issquare(24*(n+1)^2-15)

for(i=1,10^8,if(ok(i),print(i)))

De esa forma obtendremos nuevos términos con más rapidez.

```
1
7
18
78
187
781
1860
7740
18421
76627
182358
758538
1805167
7508761
17869320
74329080
```

Para proseguir encontrando términos es preferible usar la recurrencia sugerida en esa página:

a(n) = a(n-1)+10*a(n-2)-10*a(n-3)-a(n-4)+a(n-5) for n>5.

El uso de esta recurrencia se basa en que la ecuación que hemos usado, $x^2-24y^2=15$ es de tipo Pell y, en ese caso, las soluciones siguen una recurrencia.

He acudido a mi hoja de cálculo para la prolongación de una recurrencia. (Ver mi entrada anterior o en la dirección http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm)

En primer lugar, escribo en la fila correspondiente los diez primeros términos de la sucesión y pulso sobre el botón “Homogénea”. Se planteará automáticamente un sistema de ecuaciones con esos términos:

		Orden	5	Homogénea	No homogénea		Resolver
Sucesión	7	18	78	187	781	1860	7740
7	18	78	187	781		1860	
18	78	187	781	1860		7740	
78	187	781	1860	7740		18421	
187	781	1860	7740	18421		76627	
781	1860	7740	18421	76627		182358	

Acudimos al botón “Resolver” y obtendremos los cinco coeficientes de la recurrencia:

781	1860	7740
	1	
	-1	
	-10	
	10	
	1	

Efectivamente, es cierto que a(n) = a(n-1)+10*a(n-2)-10*a(n-3)-a(n-4)+a(n-5). Con ella podemos prolongar la sucesión cuanto deseemos, a partir de los cinco primeros términos.

Caso de números oblongos

Con los índices de la sucesión que estudiamos se pueden construir oblongos en lugar de triangulares, usando la expresión N(N+1). Por ejemplo, el número 78 daría lugar al oblongo 78*79, que sumado con su siguiente, 79*80, daría un resultado de 12482, que equivale a la suma de tres oblongos:

12482 =63*64+64*65+65*66

Caso de números cuadrados

Un planteamiento similar para cuadrados es:

$n^2+(n+1)^2=k^2+(k+1)^2+(k+2)^2$

Manipulamos algebraicamente y queda

$(2n+1)^2+1=6(k+1)^2+4$

Esto quiere decir que $((2n+1)^2-3)/6$ ha de ser un cuadrado.

Con nuestra función *escuad* y una búsqueda obtenemos las primeras soluciones:

1
13
133
1321
13081
129493

En efecto, por ejemplo,

13^2+14^2=10^2+11^2+12^2=365

Con PARI se encuentran más fácilmente. Usamos:

for(i=0,10^8,if(issquare(((2*i+1)^2-3)/6), print(i)))

Así se obtienen:

```
1
13
133
1321
13081
129493
1281853
12689041
?
```

Recurrencia

Al ser las ecuaciones de tipo Pell, podemos confiar en que los resultados se obtengan con una recurrencia lineal de tercer orden. Acudimos de nuevo a nuestra herramienta de hoja de cálculo:

Sucesión	13	133	1321	13081	129493	1281853
90,8125	-99,70833	9,145833				1
-99,70833	107	-9,791667				-11
9,145833	-9,791667	0,895833				11

Una curiosa equivalencia

Los coeficientes obtenidos coinciden con los publicados en http://oeis.org/A031138, sucesión que contiene los mismos elementos con distinta definición. En esa sucesión se exige que 1^5+2^5+3^5+4^5+…k^5 sea un cuadrado perfecto. Las dos condiciones son equivalentes. Lo vemos.

Según la fórmula de Faulhaber

(https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber) la suma de esas potencias equivale a un polinomio de sexto grado. La imagen siguiente está tomada de esa dirección de Wikipedia:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

Resulta que la condición que obtuvimos más arriba, que sea cuadrado $((2n+1)^2-3)/6=(4n^2+4n-2)/6$ es equivalente a la de OEIS.

Si multiplicamos el polinomio de Faulhaber por 144, seguirá siendo cuadrado, resultando $24n^6+72n^5+60n^4-12n^2$. Si también el polinomio obtenido aquí lo multiplicamos por 36, seguirá siendo cuadrado, y nos dará $24n^2+24n-12$. El cociente entre ambos es un polinomio cuadrado perfecto $(n+1)^2=n^2+2n+1$.

En la imagen se incluye una captura de pantalla del cálculo correspondiente con la calculadora Wiris:

$$\frac{\left(24n^4 + 72n^3 + 60n^2 - 12\right)}{24n^2 + 24n - 12} = n^2 + 2 \cdot n + 1$$

Por tanto, el carácter de cuadrado perfecto en una definición coincide con la otra, luego la sucesión contenida en http://oeis.org/A031138 coincide con la que estudiamos.

En la imagen podemos observar cómo para el 13 se cumple esta condición: la suma de potencias quintas del 1 hasta 13 es un cuadrado perfecto:

K	K^5	Suma potencias quintas	
1	1	1	
2	32	33	
3	243	276	
4	1024	1300	
5	3125	4425	
6	7776	12201	
7	16807	29008	
8	32768	61776	
9	59049	120825	
10	100000	220825	
11	161051	381876	
12	248832	630708	Raíz cuadrada
13	371293	1002001	1001
		Es cuadrado perfecto	

Estas conexiones son las que dan interés y elegancia a los cálculos matemáticos.

SUMAS DE K ENTEROS POSITIVOS CONSECUTIVOS

Recorriendo un poco al azar la página de OEIS (http://oeis.org/) descubrí que existen varias sucesiones en las que sus elementos se pueden descomponer como suma de K enteros positivos consecutivos, pero no en sumas de ese tipo con menor número de sumandos. Hay muchas variantes. Estas son algunas:

http://oeis.org/A270298: En ella figuran los que se descomponen en ocho sumandos, pero no en menos, como es 172=18+19+20+21+22+23+24+25, que es suma de ocho elementos, y veremos más adelante que no es posible una suma con menos sumandos consecutivos.

http://oeis.org/A270296: Contiene los que se descomponen en cinco sumandos pero no en menos, como 20=2+3+4+5+6.

Otra sucesión es http://oeis.org/A270299, para once sumandos, y se pueden encontrar otras para casos diversos.

Aquí abordaremos el tema en general, dando pautas y búsquedas para cualquier valor de K. Comenzaremos estudiando qué números admiten una suma con K sumandos enteros positivos consecutivos y, en otro paso, nos quedaremos con aquellos para los que esa suma tenga el mínimo número de sumandos.

Números que son suma de K sumandos

Si K es impar, el problema es más simple, porque en cualquier suma de ese tipo, como 44+45+46+47+48, con K=5, existe un número central, aquí el 46, y pares de sumandos simétricos cuya suma es el doble del mismo, como 45+47=44+48=2*46, Por tanto, la suma es 5 veces mayor que 46, y ha de ser, por tanto, múltiplo de 5. A la inversa, cualquier múltiplo de 5 se puede organizar como una serie de sumandos alrededor de un central.

Por ejemplo, 42 es múltiplo de 7, y el término central sería 6, con lo que podemos escribir la suma 3+4+5+6+7+8+9=42.

Si K es par, es algo un poco más complicado. Por ejemplo, con cuatro sumandos la suma se podría escribir como n+n+1+n+2+n+3=4n+6. Esto significa que la suma ha de ser par, pero no múltiplo de 4. Quiere decir que se podrán expresar como suma de cuatro consecutivos los múltiplos de 2 que no lo sean de 4.

14 es un ejemplo de suma de cuatro. Al dividirlo entre 4 resulta 3,5 como “falso término central”, y usamos los enteros más próximos: 2+3+4+5. Su doble, 28, sí sería múltiplo de 4. 14 no sería múltiplo, pero su doble sí.

Por otra parte, no basta con estas condiciones, porque algún número daría soluciones con sumandos negativos o nulos. Por ejemplo, para expresar 6 con cuatro sumandos, el falso término central sería 6/4=1,5, y los sumandos 0+1+2+3, con el 0 no positivo.

Para evitar esto se deberá verificar que el término central (verdadero o falso) sobrepase la mitad entera del número de sumandos, con lo que garantizamos que el primer sumando sea al menos 1. En el siguiente apartado veremos una condición equivalente más práctica.

Estudio algebraico

Una suma de K enteros consecutivos a partir de N, es decir, N+N+1+N+2+…N+K-1, se puede resumir como suma de una progresión aritmética:

$$S(N,K)=\frac{(N+N+K-1)*K}{2}=N*K+\frac{K(K-1)}{2}$$

Si pretendemos dividir la suma entre K, tal como efectuamos en párrafos anteriores, quedaría:

$$\frac{S(N,K)}{K}=N+\frac{K-1}{2}$$

Si K es impar, esta expresión será entera, y nos dará el término central de la suma. Si K es par, resultará el “falso término central”, alrededor del cual se construirán pares de sumandos.

La primera de las igualdades nos indica que, para que el primer término N sea positivo, se ha de cumplir que

$$S(N,K)>\frac{K(K-1)}{2}$$

En el ejemplo anterior del 6 con 4 sumandos no se cumplirá esto, porque 6=4*3/2, y no se cumple la desigualdad.

Función con hoja de cálculo

Estas consideraciones teóricas se pueden unir en una función que nos indique si un número equivale a K sumandos consecutivos o no:

```
Function sumacons(n, k) As Boolean ‘Devuelve verdadero o falso
Dim es As Boolean
Dim b, c

If n > k * (k - 1) / 2 Then ‘Condición previa para poder seguir
b = n / k ‘Cociente entre suma y número de sumandos
c = 2 * n / k ‘Doble del anterior
If k / 2 = k \ 2 Then ‘Caso PAR
If b <> Int(b) And c = Int(c) Then es = True Else es = False ‘No es múltiplo de k, pero sí su doble
Else
If b = Int(b) Then es = True Else es = False ‘Caso IMPAR. Basta con que sea múltiplo de k
End If
Else
es = False
End If
sumacons = es
End Function
```

Si poseemos ya un criterio para saber si N es suma de K sumandos, el siguiente paso sería si también es suma para valores más pequeños que K. Esta es la parte fácil del estudio, porque basta un bucle de búsqueda para determinarlo:

Function sumaconsmin(n, k) As Boolean
Dim es As Boolean
Dim i

es = False
If sumacons(n, k) Then ‘Exigimos que n se exprese como suma de consecutivos
es = True
i = 2
While i < k And es
If sumacons(n, i) Then es = False ‘Si existe un número menor que k para el que es suma, el resultado será FALSO.
i = i + 1
Wend
End If
sumaconsmin = es
End Function

Con esa función de búsqueda se pueden comprobar fácilmente los términos de las sucesiones que enlazamos al principio:

A270298 Numbers which are representable as a sum of eight but no fewer consecutive nonnegative integers.

44, 52, 68, 76, 92, 116, 124, 148, 164, 172, 188, 212, 236, 244, 268, 284, 292, 316, 332, 356,…

COMPROBADO

A270296 Numbers which are representable as a sum of five but no fewer consecutive nonnegative integers

20, 40, 80, 100, 140, 160, 200, 220, 260, 280, 320, 340, 380, 400, 440, 460, 500, 520, 560,…

COMPROBADO

A270303 Numbers which are representable as a sum of nineteen but no fewer consecutive nonnegative integers

304, 608, 1216, 2432, 4864, 5776, 6992, 8816, 9424, 9728, 11248, 11552, 12464, 13072,…

COMPROBADO

A270297

Numbers which are representable as a sum of seven but no fewer consecutive nonnegative integers.

28, 56, 112, 196, 224, 308, 364, 392, 448, 476, 532, 616, 644, 728, 784, 812, 868, 896, 952, 1036, 1064

COMPROBADO

A270299 Numbers which are representable as a sum of eleven but no fewer consecutive nonnegative integers…

88, 176, 352, 704, 968, 1144, 1408, 1496, 1672, 1936, 2024, 2288, 2552, 2728, 2816, 2992,…

COMPROBADO

Valores admisibles de K

Si cambiamos los valores de K nos daremos cuenta de que para algunos, como el 10, no existe sucesión. ¿De qué depende? Lo veremos por partes:

Todos los números primos son admisibles para esta cuestión. El 2, porque es el mínimo, y todos los impares son suma de dos consecutivos. El resto, al ser impares admitirán una suma de consecutivos en sus múltiplos, como vimos en párrafos anteriores, y como puedes comprobar en la última sucesión estudiada, en la que todas las soluciones que son suma de once sumandos son todas múltiplos de 11. Este número de sumandos no se puede reducir, al ser primo K, luego los números primos son admisibles y generarán una sucesión como las enlazadas.

Sin embargo, los múltiplos impares de los primos mayores que 2, incluidas sus potencias, no pueden ser admisibles, porque si un número se descompone en **pq** sumandos (p primo y q impar), también se descompondrá en **p** sumandos, luego estos números hay que desecharlos para la cuestión que nos ocupa. Por ejemplo, 225 se descompone en 15 sumandos:

225=8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22, pero también en 5 y en 3:

225=43+44+45+46+47

225=74+75+76

Sí lo son las potencias de 2. Si un número N se descompone en 2^k sumandos, sabemos, por consideraciones anteriores, que no será múltiplo de 2^k, pero sí lo será su doble. Por tanto, simplificando, N será múltiplo de 2^k-1, y sabemos que no debe serlo, luego sería admisible, como vemos en la sucesión A270298. Otra cuestión es qué números presentan la propiedad que estudiamos hoy. Un ejemplo sería el 44

Un ejemplo: 44 se descompone en ocho sumandos, porque su doble, 88, es múltiplo de 8:

44=2+3+4+5+6+7+8+9

Sin embargo, no se podrá descomponer en menos sumandos. Se comprueba fácilmente.

Nos quedan los números pares no potencias de 2. Si N se descompone como **pq** con p primo impar y q par, es par, 2N será múltiplo de K, y simplificando, N será múltiplo de p, porque q/2 es entero, luego será múltiplo de p y se podrá descomponer en p sumandos. No serán admisibles.

Resumiendo, serán admisibles para esta búsqueda **los números primos y las potencias de 2**. Los demás números no serán admisibles para este problema, y serán aquellos que poseen **un divisor propio primo e impar.**

En cualquier rango de números podemos observar que en la descomposición de N en K sumandos, solo figuran valores de K primos o potencias de 2:

N	K
100	5
101	2
102	3
103	2
104	13
105	2
106	4
107	2
108	3
109	2
110	4
111	2
112	7
113	2
114	3
115	2
116	8
117	2
118	4
119	2

Así que los valores de K que no dan lugar al estudio de esta cuestión serán todos los enteros suprimiendo los primos y las potencias de 2:

6, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 35,…

Estos números están publicados en http://oeis.org/A111774, pero con una definición distinta, como aquellos que se pueden descomponer en sumas de al menos tres números consecutivos. Es lógico, porque todos poseen un factor primo impar **p** y, al ser múltiplos de él, se descompondrán en una suma de **p** sumandos.

FRONTERA ENTRE DOS SUMAS EQUIVALENTES

Descubrí en http://oeis.org/A094552 que 18921 separa dos sumas de cuadrados con idéntico total, una hasta él y otra a partir de él, sin incluirlo (también podría contarse con él). Después de investigarlo, llegué a esta comprobación:

suma(i=10472,18920,i^2)=1875012353984

suma(i=18922,23145,i^2)=1875012353984

Aquí, más que la sucesión resultante con los números que cumplen esta condición, que ya está publicada en la dirección referida, nos interesarán los algoritmos que se puedan usar en este caso y en otros afines. Los primeros números publicados son:

52, 100, 137, 513, 565, 1247, 8195, 13041, 18921, 35344, 40223, 65918, 68906, 121759, 132720, 213831, 215221, 235469, 265654, 506049, 520654, 585046, 598337, 817454, 993142, 1339560, 1579353, 2331619, 2843086, 3594812…

Nuestro objetivo será, además, encontrar las dos sumas con igual total a las que el número separa. Para ello habrá que identificar previamente (y ese será el objetivo prioritario) los límites de esas dos sumas a partir de su inicio en n-1 y n+1 respectivamente. El problema será la lentitud del proceso, pues requiere dos bucles anidados para crear las sumas, y eso, en números de más de tres cifras, puede ser resultar poco eficiente en equipos pequeños. Por ello, plantearemos tres algoritmos, el primero el “ingenuo”, el que inicialmente nos viene a la mente, el segundo con el uso de técnicas algebraicas, y el tercero con acumulación progresiva de cada suma.

Primer algoritmo (ingenuo)

Hemos creado la función ***frontera0***, para que, dado un número cualquiera, determine si cumple la propiedad o no y cuáles son los extremos de las dos sumas con igual total. Devolverá un “NO” o bien esos extremos.

La idea es ir sumando cuadrados a la derecha del número N. Terminaremos la búsqueda al llegar a 2N, porque la otra suma sólo podrá tener N sumandos (si no, invadiría el cero y los negativos) y la suma superior tendrá menos sumandos que la inferior (porque estos son mayores).

Una vez determinada una suma provisional, recorreremos el rango 1…N-1 en orden inverso (lo esperable es que no llegue al 1) y para cada suma inferior compararemos con la superior para ver si son iguales, en cuyo caso sí hay solución. Si no, seguimos añadiendo sumandos a ambas.

Listado de la función para Excel y Calc

Function frontera0(n)
Dim j, k, s, t, s1, p, q
Dim b$

t = 0 ***‘***Indicador de que hay solución. En principio t=0 porque no la hay.
s = 0 ‘Suma superior
j = n + 1 ‘Comienza en N+1
While t = 0 And j < 2 * n ‘No llega a 2N
s = s + j ^ 2 ‘Se suman los cuadrados
k = 1 ‘Se inicia la búsqueda de la suma inferior
s1 = 0 ‘Contiene la suma inferior
While t = 0 And k < n
s1 = s1 + (n - k) ^ 2 ‘Acumula la suma inferior en orden inverso
If s1 = s Then ‘Si ambas sumas son iguales, hay solución
t = 1 ‘Indicador de solución
p = n - k: q = j ‘Se recogen las soluciones
End If
k = k + 1
Wend
j = j + 1
Wend
If t = 0 Then frontera0 = "NO" Else frontera0 = Str$(p) + Str$(q) ‘Devuelve “NO” o la solución
End Function

Si planteamos una búsqueda sistemática con esta función, obtenemos las primeras soluciones, que coinciden con las publicadas en OEIS, pero con el añadido de los límites de las sumas:

N...Límites
52 .... 7 65
100 .... 55 122
137 .... 22 172
513 .... 169 642
565 .... 330 687
1247 .... 572 1545

Para probar que los límites son correctos se puede usar cualquier calculadora avanzada. Hemos usado ***Wiris***, que es gratuita y muy clara en su aspecto. La probamos con la solución correspondiente al 137. Calculamos la suma de cuadrados desde 22 hasta 136 y, por otra parte, desde 138 hasta 172. Nótese que la suma superior tendrá siempre menos sumandos que la inferior.

$$\sum_{i=22}^{136} i^2 = 844445$$

$$\sum_{i=138}^{172} i^2 = 844445$$

De esta forma hemos comprobado que 137 es un término de la sucesión buscada.

Segundo algoritmo, con ayuda del Álgebra

Nos basamos en la fórmula de los primeros cuadrados desde 1 hasta n:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si se conoce la suma de cuadrados **s0** desde 1 hasta n-1 (de fórmula (n-1)*n*(2n-1)/6) y el valor de la suma superior **s**, restando **s0-s** equivaldrá a un k(k+1)(2*k+1)/6 para cierto valor de k. La ventaja es que ese valor se puede encontrar. Veamos cómo.

Si llamamos M a la diferencia **s0-s**, tendremos:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = M$$

$$k \cdot k \cdot 2k < 6M$$

$$k < \sqrt[3]{3M}$$

Esto nos da una cota superior para el valor de k

De igual forma:

$$\frac{(k+1)(k+1)(2k+2)}{6} > M$$

Es sencillo comprenderlo al comparar las dos fracciones. Seguimos:

$$(k+1)(k+1)(k+1) > 3M$$

$$k+1 > \sqrt[3]{3M}$$

Por tanto, para cada suma superior podemos calcular la k correspondiente en la suma inferior (esa k se corresponde con la suma desde 1 hasta el tope inferior), quedándonos con la parte entera de esa raíz.

Este razonamiento evita el doble bucle, porque, para cada suma superior obtendremos el límite correspondiente en la inferior. El algoritmo quedaría según el listado de la segunda función de Excel, *frontera1*:

```
Function frontera1$(n)
Dim j, k, s, t, s1, s0, m, p, q

t = 0 'Indicador de solución
s = 0 'Suma superior
j = n + 1 'Primer sumando
s0 = n * (n - 1) * (2 * n - 1) / 6 'Suma en n-1
While t = 0 And s < s0
s = s + j ^ 2
m = s0 – s 'Diferencia entre sumas, para calcular k
k = Int((3 * m) ^ (1 / 3) + 0.000001) 'Redondeamos por defecto
s1 = s0 - k * (k + 1) * (2 * k + 1) / 6 'Suma inferior calculada
```

If s1 = s Then t = 1: p = k + 1: q = j ‘Hay solución
j = j + 1
Wend
If t = 0 Then frontera1 = "NO" Else frontera1 = Str$(p) + Str$(q)
End Function

Tercer algoritmo (paso a paso se marcha mejor)

En el tercer intento comenzaremos con los valores **s=(n+1)^2** y **s1=(n-1)^2**. Es evidente que **s1<s**, por lo que podemos ir añadiéndole sumandos hacia atrás a **s1** hasta que sobrepase a **s**, Si llegado a este punto las sumas son iguales, hemos terminado y, si no, aumentamos alternativamente s y s1 hasta que se igualen o s1 llegue hasta el tope 0, con lo que no existirá solución.

Esta sería la función para el algoritmo tercero:

Function frontera2$(n)
Dim j, k, t, s1, s0, m, p, q

t = 0 ‘Indicador de solución
k = n – 1 ‘Índices de las sumas
j = n + 1
s0 = k ^ 2 ‘Inicios de las sumas
s1 = j ^ 2

While t = 0 And k > 0 ‘Bucle de seguridad por si no hay solución
While s0 < s1 And k > 0 And t = 0
k = k - 1
s0 = s0 + k ^ 2 ‘Se incrementa s0 si es menor que s1
Wend

While s0 > s1 And t = 0
j = j + 1
s1 = s1 + j ^ 22 ‘Se incrementa s1 si es menor que s0
Wend
If s1 = s0 Then t = 1: p = k: q = j ‘Si se igualan, hay solución
Wend
If t = 0 Then frontera2 = "NO" Else frontera2 = Str$(p) + Str$(q)
End Function

Este será quizás el algoritmo más rápido (no lo he cronometrado, pero se le ve con más velocidad). Es reconfortante comparar las tres posibilidades y comprobar la unicidad de resultados:

	52	100	137	513	565	1247
A1	7 65	55 122	22 172	169 642	330 687	572 1545
A2	7 65	55 122	22 172	169 642	330 687	572 1545
A3	7 65	55 122	22 172	169 642	330 687	572 1545

Como se afirmó en los primeros párrafos, el interés de este estudio residía en los algoritmos, y no en los resultados. En la siguiente entrada aplicaremos estas ideas a otros tipos de números.

Sumas de triangulares

El número 17 cumple la propiedad que estamos estudiando si la aplicamos a números triangulares. En efecto, estas dos sumas de triangulares consecutivos son equivalentes, y sus órdenes están separados por el número 17:

T(14)+T(15)+T(16)=14*15/2+15*16/2+16*17/2=361

T(18)+T(19) =18*19/2+19*20/2=361

Podemos intentar buscar qué otros números naturales cumplen esta misma propiedad. En el primer y tercer algoritmo presentados en la entrada anterior, bastará sustituir las expresiones tipo ***j^2*** por las de los triangulares ***j*(j+1)/2***. Los dos algoritmos 1 y 3 coinciden en las soluciones:

N	Algoritmo 1	Algoritmo 3
7	5 8	5 8
17	14 19	14 19
21	6 26	6 26
31	27 34	27 34
49	44 53	44 53
71	65 76	65 76
94	14 118	14 118
97	90 103	90 103
122	29 153	29 153
127	119 134	119 134
161	152 169	152 169
190	14 239	14 239
199	189 208	189 208

Con la función SUMAFUN de uso propio podemos comprobar las soluciones para 122, que son 29 y 153:

sumafun(29;121;"X*(X+1)/2")=298561

sumafun(123;153;"X*(X+1)/2")=298561

Estos resultados coinciden con los correspondientes a la suma de oblongos, porque son sus dobles.

Sumas de números primos

En el caso de los números primos, es preferible exigir que el número frontera sea primo, pues, en caso contrario, aparecerían varios números consecutivos para una misma suma. Es cuestión de economía de resultados.

Adaptando convenientemente las funciones tipo “frontera” de hoja de cálculo llegaríamos a este listado:

Primo Valores de a y b

23 .... 11 31

47 .... 17 67

101 .... 67 127

193 .... 53 271

197 .... 37 281

211 .... 163 251

251 .... 131 337

269 .... 163 349

307 .... 11 439

379 .... 139 521
389 .... 83 563
449 .... 29 647
509 .... 283 661
571 .... 199 787
653 .... 569 743
733 .... 397 971
739 .... 229 1033
743 .... 643 829
769 .... 131 1097
859 .... 241 1217
883 11 1289
....

Por ejemplo, el número 101 es primo y separa dos sumas iguales de consecutivos, que llegan hasta 67 por la parte inferior y a 127 por la superior. Lo hemos comprobado con esta tabla de Excel:

Suma 1	Suma 2
67	103
71	107
73	109
79	113
83	127
89	559
97	
559	

Suma de cubos

Sólo hemos encontrado (sin buscar demasiado, porque el proceso es lento) el ejemplo de 29, en el que la suma de cubos desde 4 hasta 28 coincide con la de los comprendidos entre 30 y 34. Lo puedes comprobar en esta tabla:

N	Suma 1	N	Suma 2
4	64	30	27000
5	125	31	29791
6	216	32	32768
7	343	33	35937
8	512	34	39304
9	729		164800
10	1000		
11	1331		
12	1728		
13	2197		
14	2744		
15	3375		
16	4096		
17	4913		
18	5832		
19	6859		
20	8000		
21	9261		
22	10648		
23	12167		
24	13824		
25	15625		
26	17576		
27	19683		
28	21952		
	164800		

Con otros tipos de números

Si los sumandos los tomamos del tipo n^2+1, sí existen soluciones:

N		Límites para n^2+1
473		168 591
827		313 1032
1031		756 1207
1468		1155 1685
2997		275 3775

Comprobamos, por ejemplo, el primero: las sumas desde 168 hasta 472 y desde 474 hasta 591, formadas por sumandos del tipo n^2+1, han de ser iguales. Lo comprobamos con nuestra función SUMAFUN:

SUMAFUN(168;472;"X^2+1")=33596665

SUMAFUN(474;591;"X^2+1")=33596665

Con estas técnicas podríamos extender el estudio a, por ejemplo, cualquier polinomio. En esta tabla están las fronteras para n^2-1:

N.. Valores de a y b
115 .... 65 140
290 .... 71 364
315 .... 174 385
4651 .... 4131 5075

Números poligonales y piramidales

Como los números poligonales y piramidales son polinomios, valdría para ellos todo lo explicado anteriormente. Por ejemplo, los hexagonales siguen el polinomio H(n)=n(2n-1), por lo que se puede intentar buscar fronteras para ellos y sus sumas equivalentes.

Lo hemos intentado con las técnicas de frontera2, obteniendo estas soluciones:

N.. Valores de a y b
37 .... 8 46
154 .... 85 188
239 .... 54 300
399 .... 134 499
1288 .... 574 1598
1779 .... 469 2234
2099 .... 59 2644

Comprobamos el último:

SUMAFUN(59;2098;"X*(2*X-1)")=6158445500

SUMAFUN(2100;2644;"X*(2*X-1)")=6158445500

Y para finalizar, 44 es frontera para números tetraédricos, o piramidales triangulares, pues

SUMAFUN(10;43;"X*(X+1)*(X+2)/6")=162690

SUMAFUN(45;52;"X*(X+1)*(X+2)/6")=162690

La fórmula de los tetraedros la tienes en https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_tetra%C3%A9drico

También puedes consultar nuestra publicación

http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf

RELACIONES ENTRE NÚMEROS CON CIFRAS SIMÉTRICAS

Efectuar comparaciones teóricas basadas en las cifras de un número en base diez no es muy matemático, por lo que consideraré este tema como un mero entretenimiento. Su objetivo principal será el de practicar funciones, búsquedas y algoritmos. Estudiaremos números simétricos en sus cifras, en los que las de uno sean iguales a las del otro, pero en orden inverso. Para evitar casos ambiguos o singulares, prescindiremos de los múltiplos de 10, para así no considerar el cero a la izquierda que supone, en realidad, que el número de cifras es distinto en ambos, el número y su simétrico. También, en algunas cuestiones no consideraremos los números capicúas o palindrómicos.

Recorreremos algunas propiedades que pueden presentar ambos, número y simétrico.

La diferencia es divisor de ambos

En Excel poseemos una función propia de autor, CIFRAINVER, que transforma un número en su simétrico en cifras. Como explicarla no es un objetivo de este texto, la incluimos en un Anexo al final de la entrada. El resultado de esta función se puede manejar como un número y operar con él normalmente. Así, la diferencia entre un número y su simétrico vendrá dada por **d=n-CIFRAINVER(n)** y si no es nulo (sería un capicúa) nos preguntaremos si ambos números simétricos son múltiplos de **d**. Buscamos esas condiciones y obtendremos las soluciones:

45, 54, 495, 594, 4356, 4545, 4995, 5454, 5994, 6534, 10890, 19602, 20691, 29403, 30492, 39204, 40293, 43956, 45045, 49005, 49995, …

Si la diferencia entre dos números es divisor de ambos, sabemos que será su *máximo común divisor*, lo que sería una definición alternativa de esta búsqueda.

Por ejemplo, 59994-49995=9999, que es M.C.D. de ambos, como puedes comprobar con la fórmula M.C.D(59994;49995).

Para confeccionar una lista podríamos exigir que cada término fuera menor que su simétrico, y así se evitarían duplicaciones en los pares de números, como ha ocurrido con 495 y 594.
Planteado así, resultan los siguientes términos de una sucesión:

45, 495, 4356, 4545, 4995, 19602, 29403, 39204, 43956, 45045, 49005, 49995, 68607, 197802, 296703, 395604, 439956, 450045, 454545, 494505, 495495, 499995, 593406, 692307, 791208, 890109, 1979802, 2969703, 3959604, 4399956, 4500045, 4549545, 4949505, 4950495, 4999995, 5939406, 6929307, 7919208, 8909109,…

Entre ellos figuran los números del tipo 4999..995. Es fácil encontrar la causa, ya que estos números equivalen a $5*(10^k-1)$, y sus simétricos (del 5999…994) tienen la forma $6*(10^k-1)$. Al restarlos resulta $6*10^k-6-5*10^k+5=10^k-1=999…99$, que divide a ambos. Cuando ocurre esto, sabemos por el algoritmo de Euclides, que la diferencia será el M.C.D.

Puedes efectuar razonamientos similares con 4545…45 y con 4500…045.

Con el lenguaje PARI se consigue el mismo resultado. Hemos usado el siguiente código:

```
ok(n)={my(k,d);k=eval(concat(Vecrev(Str(n))));d=abs
(n-k);n%10<>0&&d==gcd(n,k)&&n<k}
for(i=1,100000,if(ok(i),print1(i,”, “)))
```

Con él se consigue la misma sucesión:

```
45, 495, 4356, 4545, 4995, 19602, 29403, 39204, 43956, 45045, 49005, 49995, 6860
7, 197802, 296703, 395604, 439956, 450045, 454545, 494505, 495495, 499995, 59340
6, 692307, 791208, 890109, 1979802, 2969703, 3959604, 4399956, 4500045, 4549545,
 4949505, 4950495, 4999995, 5939406, 6929307, 7919208, 8909109,
?
```

El cuadrado de uno es simétrico con el del otro

En esta serie de búsquedas estamos tratando con números simétricos en la base de numeración 10. Por eso viene bien un regreso a una de nuestras entradas de hace años, en la que proponíamos algunos retos.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2009/03/cuadrado-del-simetrico-o-simetrico-del.html

En concreto, se basaban en una mención de una propiedad publicada por Claudi Alsina, en su libro "Vitaminas matemáticas", y es que el número 12 presenta la siguiente propiedad: $12^2 = 144$ y $21^2 = 441$, es decir, que el cuadrado de su número simétrico en cifras coincide con el simétrico de su cuadrado.

Con el uso de nuestra función CIFRAINVER podemos ampliar y resolver por algoritmo las propuestas que se efectuaban sobre esta situación. Usaremos una función con una sola línea, que devolverá si esta propiedad se verifica (VERDADERO) o no (valor FALSO). Es esta:

```
Function cuadsimetrico(n) As Boolean
Dim m
m = cifrainver(n)
cuadsimetrico = (n ^ 2 = (cifrainver(m ^ 2)) And n <
m)
End Function
```

En ella se asigna como valor de salida la igualdad entre el cuadrado del número y el simétrico del cuadrado del simétrico. Se le añade la condición de que el número sea menor que su simétrico, para evitar palíndromos y repeticiones. Con ella se puede reproducir la lista de soluciones propuesta en esta antigua entrada:

12, 13, 102, 103, 112, 113, 122, 1002, 1003, 1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1031, 1102, 1103, 1112, 1113, 1121, 1122, 1202, 1212, 2012, 2022, 10002, 10003, 10011, 10012, 10013, 10021, 10022, 10031, 10102, 10103, 10111, 10112, 10113, 10121, 10122, 10202, 10211, 10212, 10221, 11002, 11003, 11012, 11013, 11021, 11022, 11031, 11102, 11103, 11112, 11113, 11121, 11122, 11202, 12002, 12012, 12102, 12202, 20012, 20022, 20112, 20122,

En http://oeis.org/A106323 figura una sucesión similar, y con casi todos los elementos comunes, pero no exige que las bases de los cuadrados sean simétricas. Por eso admite el 33 y el 3168.

En la entrada recordada se razonaba que en estos números no podían figurar las cifras comprendidas entre 4 y 9, porque producirían arrastres de cifras al calcular su cuadrado. Por una razón similar, no existen soluciones que terminen en 23, pues 2*3+3*2=12 y produce un arrastre de 1.

El producto de simétricos produce un capicúa

Para encontrar las soluciones usamos una función similar a la de la cuestión anterior:

```
Public Function producapicua(n) As Boolean
Dim m
m = cifrainver(n)
producapicua = escapicua(n * m) And n < m
End Function
```

En ella exigimos que el producto de simétricos sea capicúa y que el número devuelto por la función sea el menor del par.

La función *escapicua* se limita a exigir que **cifrainver(n)=n**

El listado obtenido con ella es:

12, 21, 102, 112, 122, 201, 211, 221, 1002, 1011, 1012, 1021, 1022, 1101, 1102, 1112, 1121, 1201, 1202, 1211, 2001, 2011, 2012, 2021, 2101, 2102, 2111, 2201, 10002, 10011, 10012, 10021, 10022, 10102, 10111, 10112, 10121,…

Vemos que aquí también existe restricción de cifras, por una cuestión de arrastres en las operaciones de multiplicar.

Hemos tomado el menor. Si consideramos el par de simétricos, encontraremos la sucesión en http://oeis.org/A048344:

*A048344 a(n) * a(n)_reversed is a palindrome (and a(n) is not palindromic).*

12, 21, 102, 112, 122, 201, 211, 221, 1002, 1011, 1012, 1021, 1022, 1101, 1102, 1112, 1121, 1201, 1202, 1211, 2001, 2011, 2012, 2021, 2101, 2102, 2111, 2201, 10002, 10011, 10012, 10021, 10022, 10102, 10111, 10112, 10121, 10202, 10211, 11001

No exige que el número sea menor que su simétrico. Por eso se obtiene el doble de soluciones.

Un ejemplo: 2102*2012=4229224

Los dos simétricos son del mismo tipo

Si usamos las funciones propias *escuad, estriangular* o *esoblongo*, por ejemplo (puedes buscarlas en este blog) obtendremos los simétricos que coinciden en su tipo.

Primos

El caso de primos está muy estudiado, y se les llama *omirp* o *emirp* en inglés (ver http://oeis.org/A006567)

En este blog hemos estudiado los "palprimos", o primos palindrómicos:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2016/05/palprimos-primos-palindromicos.html

Triangulares

Para encontrar números triangulares simétricos ***y*** que no sean capicúas ni múltiplos de 10 (para que tengan igual número de cifras) podemos usar esta condición:

a=cifrainver(i)

estriangular(i) And estriangular(a) And i < a And i / 10 <> i \ 10

Al exigir que *i*<***a*** nos quedamos con los valores menores de cada par. Hay pocos, por lo que entre 1 y 20000 sólo hemos encontrado 153 y 17578. No hemos seguido, porque ya están publicados en http://oeis.org/A066528:

153, 351, 17578, 87571, 185745, 547581, 1461195, 5911641, 12145056, 12517506, 60571521, 65054121, 304119453, 354911403,…

Con nuestra función *Ordentriang* (también la puedes buscar en este blog) podemos comprobar alguno de los pares:

12517506=5003*5004/2
60571521=11006*11007/2

Ambos son triangulares.

No hay más que añadir, ya se indicó que este tema es poco matemático.

Cuadrados

Es la misma cuestión que planteamos antes, pero sin exigir que si los números son cuadrados, las bases también lo sean. Si seguimos exigiendo que no sean capicúas ni múltiplos de 10, queda como condición

a = cifrainver(i)
escuad(i) And escuad(a) And i < a And i / 10 <> i \ 10

Obtenemos:

144	441
169	961
1089	9801
10404	40401
10609	90601
12544	44521
12769	96721
14884	48841

Coinciden con los publicados en http://oeis.org/A156316

Oblongos

Hay pocos ejemplos. Hemos encontrado tres sin esfuerzo:
29756, 2150622, 2898506.

Aquí podemos comprobar que ambos son oblongos:

29756 =172*173

65792 =256*257

2150622 =1466*1467
2260512 =1503*1504

2898506 =1702*1703
6058982 =2461*2462

Cubos

No parecen existir soluciones con menores que 2*10^7

Si exigimos que ambos sean son suma de cubos, ahí sí existen soluciones (figuran los menores de cada par y no múltiplos de 10):

1008, 1332, 1339, 4608, 13895, 14364, 16263, 19773, 27027, 32535, 39528, 107136, 119853, 157248, 158184, 179513, 195237, 199143, 318968, 373464, 399665, 406224, 422218, 476379,

Por ejemplo, 27027=30^3+3^3 y 72072 =32^3+34^3

Esto no da más de sí. Ya se advirtió al principio que era un tema poco matemático, pero igual alguien que lea esta entrada le puede servir para que se le ocurran ideas similares.

ANEXO

Función CIFRAINVER

Convierte un número en su simétrico en cifras. Lo devuelve como tal número, por lo que se puede operar con él con las distintas operaciones matemáticas y funciones.

```
Public Function cifrainver(n)
Dim l, i
Dim c
Dim auxi$, auxi2$, ci$
  ' invierte el orden de las cifras para dar otro
If n < 10 Then cifrainver = n: Exit Function  ‘Número de una cifra
auxi = haztexto(n) ‘Convierte el número en texto
auxi2$ = ""
l = Len(auxi)
For i = l To 1 Step -1 ‘Va volcando las cifras en otro texto en orden inverso
ci$ = Mid(auxi, i, 1)
auxi2 = auxi2 + ci$
Next i
c = Val(auxi2$) ‘Convierte el nuevo texto en número
cifrainver = c
End Function
```

CONSECUTIVOS CON UNA SUMA DEL MISMO TIPO

En mis cálculos diarios de Twitter uso a menudo el concepto de suma simétrica, en la que considero tres sumandos con un repetido, y que los tres presenten una misma propiedad. Por ejemplo, $80=2^3+4^3+2^3$, es decir, una suma simétrica de cubos. Lo curioso en este caso es que su consecutivo, 81, también presenta esa misma propiedad, ya que $81=3^3+3^3+3^3$. ¿Existirán muchos pares de este tipo, que sean consecutivos y con el mismo tipo de suma simétrica?
Como la búsqueda promete ser larga, la dividiremos en tipos. Es ya frecuente en este blog, interrumpir un estudio cuando se perciba que la cuestión se alarga o pierde interés.

Suma simétrica de cubos

Comenzamos por este caso por ser el primero que se consideró. Además del par 80, 81 existen otros, como veremos.
En primer lugar, necesitaremos saber cuándo un número se puede expresar como suma simétrica de cubos. El objetivo inmediato es conocer la forma de identificar un cubo. El problema lo constituyen los decimales y el redondeo, por lo que podemos usar una identificación en dos pasos, extrayendo la raíz cúbica y

más tarde comprobar que su cubo coincide con el número deseado. Sería algo así:

Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo = False
End Function

Un criterio más fiable, pero más lento, es el de extraer los factores primos y exigir que todos los exponentes sean iguales a 3 (o a un múltiplo de 3). Disponemos de una función diseñada para encontrar el exponente común mínimo entre los factores primos de un número natural. Sería esta otra:

Public Function espotencia(n)
Dim i, j, s, p

If n = 1 Then espotencia = 0: Exit Function
p = n
j = sacaprimos(p) ‘Construye la descomposición factorial
s = expo(1)
If j > 1 Then
For i = 2 To j
s = mcd(s, expo(i)) ‘Elige el mínimo MCD de los exponentes

Next i
End If
If s = 1 Then s = 0
espotencia = s
End Function

Devuelve el MCD de los exponentes, y si es 3 o múltiplo de 3, ya tenemos un cubo.

En este proceso usaremos la primera versión para encontrar soluciones, y luego verificaremos con la segunda, que es más lenta, sin publicar de nuevo los resultados.

Una vez identificados los cubos, habrá que determinar si un número es suma simétrica de dos cubos. Para eso estaría esta otra función:

Public Function sumasimcubos(n) As Boolean
Dim i, m
Dim novale As Boolean
i = 1
novale = True
While i < (n - 1) ^ (1 / 3) And novale ‘Buscamos el sumando central
If escubo((n - i ^ 3) / 2) Then novale = False ‘Restamos y dividimos entre 2 para ver el otro
i = i + 1
Wend
sumasimcubos = Not novale
End Function

Esta función te indica si un número es suma de cubos simétricos o no. Ya solo queda aplicarle esta prueba a dos números consecutivos. En la práctica, la función va a devolver la suma en modo texto, pero no se quería complicar esta explicación. Aplicada de esta forma, nos da los siguientes pares:

N	N+1	Suma en N	Suma en N+1
80	81	2, 4, 2	3, 3, 3
344	345	4, 6, 4	1, 7, 1
3429	3430	3, 15, 3	7, 14, 7
7290	7291	9, 18, 9	6, 19, 6
12393	12394	18, 9, 18	13, 20, 13
14749	14750	14, 21, 14	15, 20, 15
61318	61319	27, 28, 27	10, 39, 10
85751	85752	35, 1, 35	18, 42, 18
92609	92610	35, 19, 35	21, 42, 21
95010	95011	17, 44, 17	35, 21, 35
120311	120312	11, 49, 11	36, 30, 36
167399	167400	21, 53, 21	36, 42, 36
170173	170174	22, 53, 22	31, 48, 31
171181	171182	43, 23, 43	19, 54, 19
173743	173744	44, 15, 44	38, 40, 38
173778	173779	29, 50, 29	41, 33, 41
176200	176201	44, 18, 44	17, 55, 17
185442	185443	17, 56, 17	5, 57, 5

Por ejemplo:

$176200=44^3+18^3+44^3$ y $176201=17^3+55^3+17^3$

El lenguaje PARI devuelve resultados con más rapidez, por lo que también es conveniente adaptar a él este proceso. Así llegamos un poco más lejos, pero no se ha pretendido agotar el tema y hemos detenido la búsqueda en 300000

```
scube(n)={my(i=1,m); while(i<(n-1)^(1/3),m=(n-i^3)/2;
if(ispower(m,3),return(1));i+=1)}
ok(n)=scube(n)&&scube(n+1)
for(i=1,300000,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

80, 344, 3429, 7290, 12393, 14749, 61318, 85751, 92609, 95010, 120311, 167399, 170173, 171181, 173743, 173778, 176200, 185442, 250063, 252046, 277694,…

Búsqueda directa con Excel

Podemos organizar una tabla de doble entrada XY en cuyo interior situemos las sumas x^3+2y^3, y no tendremos más que buscar consecutivos. En la imagen están destacados cuatro pares:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	17	55	129	251	433	687	1025	1459
2	10	24	62	136	258	440	694	1032	1466
3	29	43	81	155	277	459	713	1051	1485
4	66	80	118	192	314	496	750	1088	1522
5	127	141	179	253	375	557	811	1149	1583
6	218	232	270	344	466	648	902	1240	1674
7	345	359	397	471	593	775	1029	1367	1801
8	514	528	566	640	762	944	1198	1536	1970
9	731	745	783	857	979	1161	1415	1753	2187
10	1002	1016	1054	1128	1250	1432	1686	2024	2458
11	1333	1347	1385	1459	1581	1763	2017	2355	2789
12	1730	1744	1782	1856	1978	2160	2414	2752	3186
13	2199	2213	2251	2325	2447	2629	2883	3221	3655
14	2746	2760	2798	2872	2994	3176	3430	3768	4202
15	3377	3391	3429	3503	3625	3807	4061	4399	4833
16	4098	4112	4150	4224	4346	4528	4782	5120	5554
17	4915	4929	4967	5041	5163	5345	5599	5937	6371
18	5834	5848	5886	5960	6082	6264	6518	6856	7290
19	6861	6875	6913	6987	7109	7291	7545	7883	8317
20	8002	8016	8054	8128	8250	8432	8686	9024	9458

Esto no sería fiable, porque la vista nos puede engañar y perdernos un par. Lo indicado aquí sería escribirlos en columna, ordenarlos después y comprobar que los consecutivos que cumplen la propiedad caen uno debajo del otro.

66
80
81
118
127
129
136
141
155
179
192
218
232
251
253
258
270
277
314
344
345
359

Este procedimiento sí nos daría más seguridad, pero, o se resolvía con macros, o nos tendría bastante tiempo ocupados. Dejamos esa puerta abierta a nuevos métodos

Suma de potencias

Después de investigar sobre cubos, lo indicado es pasar a los cuadrados u otras potencias. Con cuadrados aparecen tantos ejemplos que hacen perder el interés por la búsqueda. Si en las funciones usadas para los cubos vamos cambiando los exponentes 3 por 2, obtendremos las sumas simétricas de cuadrados. Los primeros casos de consecutivos son estos:

N	N+1	Sum_cuad(N+1)	Sum_cuad(N)
11	12	1, 3, 1	2, 2, 2
17	18	2, 3, 2	1, 4, 1
18	19	1, 4, 1	3, 1, 3
33	34	4, 1, 4	3, 4, 3
43	44	3, 5, 3	2, 6, 2
66	67	5, 4, 5	3, 7, 3
67	68	3, 7, 3	4, 6, 4
72	73	2, 8, 2	6, 1, 6
75	76	5, 5, 5	6, 2, 6
81	82	6, 3, 6	3, 8, 3
82	83	3, 8, 3	1, 9, 1
88	89	6, 4, 6	2, 9, 2
96	97	4, 8, 4	6, 5, 6
107	108	7, 3, 7	6, 6, 6
113	114	4, 9, 4	7, 4, 7
131	132	5, 9, 5	8, 2, 8

Llama la atención la aparición de conjuntos de tres consecutivos, como 17, 18, 19, o 66, 67, 68. Como simple curiosidad, se adjuntan a continuación los primeros:

N	N+1	N+2
17	18	19
66	67	68
81	82	83
162	163	164
176	177	178
177	178	179
192	193	194
225	226	227
226	227	228
241	242	243
352	353	354
386	387	388
417	418	419
449	450	451
450	451	452
561	562	563

Su misma abundancia le resta interés.

Cuartas potencias

Este caso es mucho menos frecuente. Volvemos a adaptar la función para cubos cambiando 3 por 4 y obtenemos una primera solución:

$14802=7^4+10^4+7^4$ $14803=3^4+11^4+3^4$

No existen, al parecer, otras soluciones menores que 10^6, por lo que dejamos abierta la búsqueda.
Como es nuestra norma, paramos aquí las potencias, para no alargar. Con lo publicado ya hay información suficiente para los lectores que deseen emprender otras búsquedas.

Otros tipos

Al comenzar a redactar esta entrada parecía que existiría gran variedad de soluciones en otros tipos de números, pero la realidad nos ha devuelto casos con demasiados resultados o con demasiado pocos. Esto hace perder interés a lo que sigue, pero hemos preferido mantenerlo.
Triangulares
Este tipo de números lo consideramos muy a menudo en nuestras búsquedas, porque no suele defraudar. Habrá que alterar ligeramente nuestra función, pues usaremos ESTRIANGULAR, que puedes encontrar en muchas entradas de este blog. Quedaría la función así (la seguimos llamando *sumasimcubos*):

Public Function sumasimcubos$(n)
Dim i, m, p, q
Dim s$

i = 1

s = ""

While i < Sqr(2 * n) And s = "" ‘El mayor triangular sería Sqr(2*n)

q = i * (i + 1) / 2 ‘Se construye el primer triangular

m = (n - q) / 2 ‘Diferencia para encontrar los simétricos

If estriangular(m) And m > 0 Then s = Str$(m) + ", " + Str$(q) + ", " + Str$(m) ‘Es triangular y paramos

i = i + 1

Wend

sumasimcubos = s

End Function

Con esta función se obtienen muchas soluciones, como nos ocurrió con los cuadrados:

N	N+1	Sum. Triang.	Sum. Triang.
7	8	3, 1, 3	1, 6, 1
8	9	1, 6, 1	3, 3, 3
12	13	3, 6, 3	6, 1, 6
15	16	6, 3, 6	3, 10, 3
16	17	3, 10, 3	1, 15, 1
17	18	1, 15, 1	6, 6, 6
21	22	10, 1, 10	6, 10, 6
22	23	6, 10, 6	10, 3, 10
26	27	10, 6, 10	6, 15, 6
30	31	10, 10, 10	15, 1, 15
33	34	15, 3, 15	3, 28, 3
34	35	3, 28, 3	10, 15, 10
35	36	10, 15, 10	15, 6, 15
40	41	15, 10, 15	10, 21, 10
41	42	10, 21, 10	3, 36, 3
42	43	3, 36, 3	21, 1, 21
47	48	1, 45, 1	21, 6, 21
51	52	15, 21, 15	21, 10, 21

No tiene interés seguir.

Oblongos

Es inútil buscarlos, porque todos son pares y no puede darse la propiedad buscada en dos números consecutivos, uno par y otro impar.

Primos

Para que se cumpla lo que pretendemos, en uno de los consecutivos el primo central deberá ser 2, pero no tendremos esto en cuenta y sustituiremos triangular por primo y *estriangular* por *esprimo*. Como no existe fórmula para los primos, usaremos la función para el próximo primo PRIMPROX. Todas ellas ya han sido usadas en otras entradas.

Al ser obligada la presencia del 2 en uno de los números hace que aparezcan muchos consecutivos en los que el término central es 2 en el menor y 3 en el mayor, como puede comprobarse en este resultado:

N	N+1	Suma primos	Suma primos
8	9	3, 2, 3	3, 3, 3
11	12	3, 5, 3	5, 2, 5
12	13	5, 2, 5	5, 3, 5
15	16	5, 5, 5	7, 2, 7
16	17	7, 2, 7	7, 3, 7
23	24	5, 13, 5	11, 2, 11
24	25	11, 2, 11	11, 3, 11
27	28	11, 5, 11	13, 2, 13
28	29	13, 2, 13	13, 3, 13
35	36	11, 13, 11	17, 2, 17
36	37	17, 2, 17	17, 3, 17
39	40	17, 5, 17	19, 2, 19
40	41	19, 2, 19	19, 3, 19
47	48	17, 13, 17	23, 2, 23
48	49	23, 2, 23	23, 3, 23
59	60	23, 13, 23	29, 2, 29
60	61	29, 2, 29	29, 3, 29

También aquí obtenemos muchos resultados. Nos estamos quedando con pocos tipos interesantes. Hemos intentado con los números de Fibonacci y también resultan muchas soluciones, demasiadas para sacar consecuencias interesantes. Con los factoriales también se desvirtúa la búsqueda con 1! y 2! que son consecutivos. Así que hasta aquí llegó el estudio.

MEDIAS DE TRES PRIMOS CONSECUTIVOS

Puede ser interesante estudiar la media aritmética de tres números primos consecutivos. En algunos casos, coincide con el primo central, que en ese caso sería *equilibrado*. No es esto infrecuente, pues los primos pueden ser del tipo 4k+1 o 4k-1, y también 6k+1 y 6k-1, además de otras pautas. También puede ocurrir que la media sea un tipo especial de número, como cuadrado, triangular u oblongo. Organizaremos búsquedas ordenadas y, entre ellas aparecerán casos que ya estén estudiados o que presenten propiedades interesantes.

Primo equilibrado

Con cualquier lenguaje de programación bastará exigir que

(prevprime(n)+n+postprime(n)/3=n

Se entiende que *prevprime* y *postprime* son los primos adyacentes a n. En todos los lenguajes se usan palabras similares. En este blog usamos PRIMANT y PRIMPROX, para hojas de cálculo.

Así que nuestra función para detectar primos equilibrados será:

```
Function primoequil$(n)
Dim s$

s = ""
If esprimo(n) Then
If (primant(n) + n + primprox(n)) / 3 = n Then s = Str$(primant(n)) + " ; " + Str$(primprox(n))
End If
primoequil = s
End Function
```

Le hemos dado carácter de *string* para que recoja los dos primos adyacentes.

Los primeros primos de este tipo son

5	3 ; 7
53	47 ; 59
157	151 ; 163
173	167 ; 179
211	199 ; 223
257	251 ; 263
263	257 ; 269
373	367 ; 379
563	557 ; 569
593	587 ; 599
607	601 ; 613
653	647 ; 659
733	727 ; 739
947	941 ; 953
977	971 ; 983

Junto a cada uno figuran sus dos primos contiguos. Podemos añadir las diferencias con el centro, para más información.

5	3 ; 7; 2
53	47 ; 59; 6
157	151 ; 163; 6
173	167 ; 179; 6
211	199 ; 223; 12
257	251 ; 263; 6
263	257 ; 269; 6
373	367 ; 379; 6
563	557 ; 569; 6
593	587 ; 599; 6
607	601 ; 613; 6
653	647 ; 659; 6
733	727 ; 739; 6
947	941 ; 953; 6
977	971 ; 983; 6
1103	1097 ; 1109; 6
1123	1117 ; 1129; 6
1187	1181 ; 1193; 6
1223	1217 ; 1229; 6
1367	1361 ; 1373; 6
1511	1499 ; 1523; 12

Estos números están publicados en http://oeis.org/A006562

5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977, 1103, 1123, 1187, 1223, 1367, 1511, 1747, 1753, 1907, 2287, 2417, 2677, 2903, 2963, 3307, 3313, 3637, 3733, 4013, 4409, 4457, 4597, 4657, 4691, 4993, 5107, 5113, 5303, 5387, 5393,…

En la tabla de arriba, salvo el caso especial de 3, 5 y 7, todas las diferencias son múltiplos de 6 ¿Será así siempre?

En este mismo blog ya se ha razonado la respuesta afirmativa:

Las diferencias, salvo en el 5, son múltiplos de 6. La razón es que a partir del 5 todos los primos son del tipo 6n+1 o 6n+5. En las ternas que se forman tienen que ser todos del mismo tipo, ya que si el primero es 6n+1 y el segundo 6m+5, el tercero tendría el tipo 6m+5+(6k+4)=6h+3, no primo. Igualmente, si el primero es tipo 6n+5 y el segundo 6m+1, el tercero sería 6m+1+(6h+2). Lo puedes ver con Z_6*: Si el primero tuviera resto 1 y el último resto 5, el promedio presentaría resto 3 y no sería primo. Igual con los otros casos.*

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/07/formas-de-ser-un-numero-equilibrado-3.html

Por ejemplo, el primer primo que es media entre su anterior y posterior con diferencia 30 es 69623, que forma la progresión (69593, 69623, 69653)

Se ha conjeturado que existen infinitos primos equilibrados.

Desviaciones respecto al equilibrio

Si el primo central no es equilibrado, la media será mayor o menor que él, se desviará una “distancia” o diferencia. Salvo con el 2, siempre será par.

Podemos introducir esa distancia como parámetro en la función anterior:

```
Function primoequil(n, d)
Dim s, m

s = 0
If esprimo(n) Then
m = (primant(n) + n + primprox(n)) / 3 - n
If m = d Then s = m
End If
primoequil = s
End Function
```

Tal como está planteado, se desecharán las medias que no sean enteras, y el resultado será 0. Así que esta función devuelve un cero si no se da la diferencia dada, o esa diferencia si es válida. Por ejemplo, con ella hemos encontrado los primeros números en los que la media sobrepasa al primo central en 2 unidades:

N	D	M
509	2	511
997	2	999
1237	2	1239
1459	2	1461
1499	2	1501
2069	2	2071
2179	2	2181
2399	2	2401
2447	2	2449
3067	2	3069
4079	2	4081
4099	2	4101

No abundan las diferencias grandes: el número 5749 es el primero que presenta una diferencia de 8, porque la media es 5757. De igual manera, 15823 es el primero que presenta diferencia 10. Estos son los siguientes:

40289 .... d=16

45439 .... d=12

Podíamos buscar diferencias negativas:

Estos son los primeros primos con diferencia -4 (para ello hay que cambiar la declaración de variables a *integer*)

541	-4
1777	-4
4391	-4
4441	-4
5261	-4
7411	-4
7451	-4
7901	-4
9091	-4
9127	-4
9967	-4

Media triangular

Podemos ahora investigar cómo son las medias entre tres números primos consecutivos, de qué tipo son. Las más interesantes son las de tipo polinómico, como triangulares, cuadradas y cúbicas. Recorreremos estos tres tipos abordando la búsqueda desde dos puntos de vista. Por un lado nos basaremos en los tres primos consecutivos, y, por otro, en los valores de N en los que se basan las fórmulas polinómicas.

Comenzamos con medias triangulares. Elegimos primos, y le calculamos la media de ellos con los dos siguientes. Si es triangular, la aceptamos. Usaremos PARI porque los números a manejar serán grandes.

El criterio para saber si un número es triangular es el conocido de que 8*n+1 sea cuadrado. De esta forma, la búsqueda queda así en PARI:

18713, 27253, 35227, 45433, 138587, 251677, 283861, 425489, 462221, 463189, 486583, 634493, 694409, 826211, 943231, 1103341, 1163557, 1181927, 1214453, 1282387, 1462891, 1509439, 1925681, 1931569,…

(Publicados en http://oeis.org/A226150)

Hemos usado aquí, en la web de PARI/GP https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html un código mucho más simple que en la página enlazada:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&issquare(8*r+1)}

for(i=2,2*10^6,if(ok(i),print1(i,", ")))

```
18713, 27253, 35227, 45433, 138587, 251677, 283861, 425489, 462221, 463189, 486583,
634493, 694409, 826211, 943231, 1103341, 1163557, 1181927, 1214453, 1282387, 146289
1, 1509439, 1925681, 1931569,
```

El otro procedimiento consiste en ir recorriendo los números triangulares n(n+1)/2 y detectar los primos más cercanos consecutivos. Como vimos en la primera parte de este estudio, la media de tres primos puede caer a la derecha o a la izquierda del central, por lo que esa detección se ha de efectuar dos veces. En este listado para Excel se comprende bien:

Function media_tres_prim(n)
Dim a, p, q, r, s, u, v, m
m = 0
a = n * (n + 1) / 2 ‘Se construye el número triangular
p = primprox(a): q = primprox(p): r = primant(a): s = primant(r)

u = (p + q + r) / 3: v = (s + r + p) / 3’Se estudian dos posibles medias

If u = a Then m = r ‘La media queda a la derecha

If v = a Then m = s ‘O a la izquierda

media_tres_prim = m

End Function

De una forma bastante rápida se reproduce el listado anterior y, además, nos devuelve los órdenes N de los números triangulares

N	Primo inicial
193	18713
233	27253
265	35227
301	45433
526	138587
709	251677
753	283861
922	425489
961	462221
962	463189
986	486583
1126	634493
1178	694409
1285	826211
1373	943231
1485	1103341
1525	1163557
1537	1181927
1558	1214453
1601	1282387
1710	1462891
1737	1509439
1962	1925681
1965	1931569

Se comprende que es un método mucho más eficiente. Los números de la primera columna están publicados en http://oeis.org/A226147

Media cuadrada

Para encontrar casos con media cuadrada, bastará cambiar **n(n+1)/2** por **n^2** en Excel y **8*n+1** por **n** en **PARI**

En Excel nos resultarían:

N	Primo inicial
49	2393
161	25913
219	47951
351	123191
363	131759
469	219953
575	330611
597	356387
671	450227
877	769117
909	826271
933	870479
1013	1026143
1225	1500613
1231	1515347
1303	1697797
1359	1846861
1381	1907141
1419	2013541
1489	2217107
1577	2486873
1653	2732383
1797	3229189
1815	3294191

Las bases de la primera columna están publicadas en http://oeis.org/A226146

A226146 Numbers n such that n^2 is an average of three successive primes. 2

49, 161, 219, 351, 363, 469, 575, 597, 671, 877, 909, 933, 1013, 1225, 1231, 1303, 1359, 1381, 1419, 1489, 1577, 1653, 1797, 1815, 1989, 2083, 2117, 2177, 2241, 2289, 2301, 2403, 2483, 2493, 2517, 2611, 2617, 2653, 2727, 2779, 2869, 2931, 3029, 3051, 3261, 3515, 3617 (list; graph; refs; listen; history; text;

En PARI, el primer primo resulta así:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&issquare(r)}

for(i=2,1600000,if(ok(i),print1(i,", ")))

Simplemente hemos sustituido issquare(8*r+1) por issquare(m)

```
2393, 25913, 47951, 123191, 131759, 219953, 330611, 356387, 450227, 769117, 826271,
870479, 1026143, 1500613, 1515347,
```

Media cúbica

Cambiando n^2 o n*(n+1)/2 en la función de arriba por n^3, resultan las bases y los primos iniciales de la terna para este caso:

53 148867
131 2248069
179 5735291
219 10503443
227 11697073
419 73560043
489 116930119
633 253636087
733 393832819
913 761048471
925 791453099
1021 1064332237
1223 1829276531

1247 1939096199
1263 2014698431

Y su código en PARI:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&ispower(r,3)}

for(i=2,10^7,if(ok(i),print1(i,", ")))

Por terminar las búsquedas, nos quedamos con las potencias cuartas:

Cuarta potencia

7 2393
35 1500613
69 22667111
85 52200611
91 68574943
117 187388689

Queda a los lectores el reto de adaptar el código para este caso y probar otros números poligonales.

NÚMEROS POLIGONALES

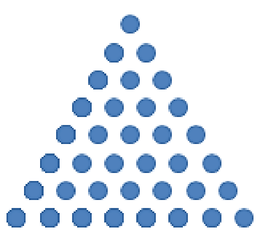
LOS NÚMEROS TRIANGULARES

Iniciamos aquí una serie de tres entradas sobre números triangulares. Como es costumbre en este blog, se usarán como instrumentos de cálculo Excel y el lenguaje PARI. Se pretende recorrer muchas de las propiedades interesantes de estos números bajo el aspecto de su relación con fórmulas y cálculos, evitando referencias teóricas que ya están estudiadas en otros ámbitos.

Número triangular

Un número triangular es aquel cuyas unidades se pueden situar en

forma de triángulo:



En la imagen puedes observar que estas unidades se cuentan por diagonales:

1+2+3+4+5+6+7+8=36

Por tanto, 36 es un número triangular. La misma imagen te sugiere la primera definición de un número triangular, como la suma de los primeros números naturales:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

Los primeros números triangulares son:

1, 3, 6, 10, 15, 21,…

El 1 se define como triangular por convenio, ya que no tiene esa forma, pero cumple la definición de más arriba y otra que veremos más adelante.

Puedes consultar la sucesión de números triangulares en

https://oeis.org/A000217

En esa página OEIS también incluyen el 0, pero no lo consideraremos aquí.

Generación mediante una hoja de cálculo

Es muy fácil acumular los primeros números naturales para crear una lista de números triangulares. En la siguiente figura lo tienes explicado:

1	1	1	
2	2	3	Generación como s
3	3	6	
4	4	10	Columna A
5	5	15	
6	6	21	A1=1
7	7	28	An=An-1+1
8	8	36	
9	9	45	Columna B
10	10	55	
11	11	66	B1=A1
12	12	78	Bn=An+Bn-1
13	13	91	
14	14	105	
15	15	120	
16	16	136	
17	17	153	
18	18	171	
19	19	190	
20	20	210	

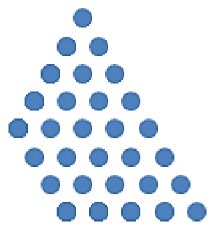
En la columna A se han escrito los números naturales. Tal como se explica en la imagen, se declara A1=1 y en el resto de la columna, se define cada elemento como el anterior más una unidad: $A_n=A_{n-1}+1$.

Siguiendo la explicación de la imagen, en la columna B definimos B1 como igual a A1, lo que constituye la primera suma, y, por tanto, el primer número triangular. Después, cada triangular se forma sumando el elemento de su izquierda con el de arriba, es decir: $B_n=A_n+B_{n-1}$.

En toda la serie tendrás a tu disposición hojas de cálculo descargables. La imagen anterior está tomada del archivo *triangulos1.xlsm*, descargable desde

http://www.hojamat.es/blog/triangulos1.xlsm

Esta generación de triangulares tiene una consecuencia que el autor usa a menudo en otro tipo de publicaciones, y es que cualquier suma de números consecutivos equivale a la diferencia entre dos números triangulares. Es como si truncáramos el triángulo eliminándole un triángulo menor, hasta dejar un trapecio:



En esta imagen vemos representada la suma 4+5+6+7+8, que, con un poco de imaginación podemos interpretar como la diferencia entre el triángulo de lado 8 y el de lado 3:

4+5+6+7+8 = 30 = 8*9/2-3*4/2 = 36-6 = 30

Fórmulas para los números triangulares

Un número triangular es la suma de una progresión aritmética, luego podemos aplicar la fórmula general de las progresiones a este caso particular

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aquí viene bien recordar la anécdota de Gauss niño. La tienes en

(https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

Esta fórmula, n(n+1)/2, es la más popular y más usada para el cálculo de los números triangulares. En la hoja *triangulos1.xlsm* la tienes implementada como TRIANGULAR

En realidad, esta fórmula se corresponde con la del número combinatorio C(N+1; 2). Por tanto, también nos servirá la expresión en Excel =COMBINAT(N+1;2), que es la segunda implementada en la hoja *triángulos1.xlsm*.

Funciones definidas para triangulares	
Directa	
TRIANGULAR(N)	78
Cominatoria	
COMBINAT(N+1;2)	78

Esto significa que los números triangulares constituyen la tercera diagonal del triángulo de Pascal. Lo vemos en Excel:

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Definición por recurrencia

Esta es una mera curiosidad, porque en Excel, aunque las recurrencias funcionan, pueden presentar problemas para números grandes. La idea es definir un número triangular de esta forma:

Si N=1, TRIANGULAR(N)=1

Si N>1, TRIANGULAR(N)=N+TRIANGULAR(N-1)

Simplemente definimos un número triangular como el resultado de sumar el número de orden al triangular anterior. Para nosotros será un entretenimiento. Este sería el listado de la función recurrente, a la que hemos rotulado como TRIANGULAR_R:

Public Function triangular_r(n)
If n = 1 Then
triangular_r = 1
Else
triangular_r = n + triangular_r(n - 1)
End If
End Function

No necesita explicación, ya que reproduce la definición por recurrencia. La tienes implementada en la misma hoja de definiciones:

Funciones definidas para triangulares	
Directa	
TRIANGULAR(N)	405450
Cominatoria	
COMBINAT(N+1;2)	405450
Recurrencia	
TRIANGULAR_R(N)	405450

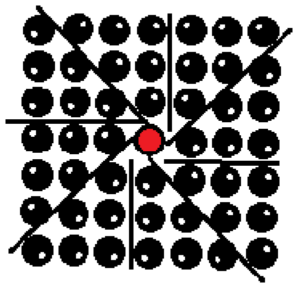
Esta definición por recurrencia nos sirve también para demostrar la fórmula general mediante inducción completa:

T(1)=1

T(n+1) = T(n)+n+1 = n(n+1)/2+n+1 = (n(n+1)+2(n+1))/2=(n+1)(n+2)/2

Reconocimiento de los números triangulares

Existe una propiedad sencilla para saber si un número es triangular o no. La idea es que si adosamos de forma conveniente un triangular consigo mismo ocho veces, se forma un cuadrado al que le falta una unidad.



En la imagen vemos el número triangular 6 adosado ocho veces y dejando el hueco central vacío. Por tanto, si le sumamos esa unidad, se convertirá en un cuadrado: $6*8+1=49=7^2$

Este es un buen criterio para reconocer un número triangular T, que 8T+1 sea un cuadrado. Se puede confirmar de forma algebraica:

$$8\frac{n(n+1)}{2}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

En la imagen, n=3, y el lado del cuadrado es 2*3+1=7

Este criterio nos permite crear la función ESTRIANGULAR en Excel o Calc:

Function estriangular(n) As Boolean
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function

En PARI, el código es más compacto:

istriangular(n)=issquare(8*n+1)

En este blog hemos usado muy a menudo estas funciones.

Si en el cuadrado formado despejamos la variable n, obtendremos el orden de ese número triangular:

Public Function ordentriang(n)
Dim k
If estriangular(n) Then k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
Else k = 0
ordentriang = k
End Function

Le hemos asignado un cero a los números que no son triangulares.

Con estas funciones podemos encontrar el triangular más próximo a un lado u otro de un número. Usaremos estas funciones:

El mayor número triangular menor o igual que N:

Public Function prevtriang(n)
Dim k
k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
prevtriang = k * (k + 1) / 2
End Function

El menor triangular mayor que N

Public Function proxtriang(n)
Dim k
k = ordentriang(prevtriang(n))
proxtriang = (k + 1) * (k + 2) / 2
End Function

En la hoja de referencia
http://www.hojamat.es/blog/triangulos1.xlsm lo hemos implementado.

¿Es triangular este número?			10000
			NO
		Orden	
Triangular anterior			9870
Triangular posterior			10011

Si el número del rectángulo amarillo es triangular, nos devuelve su orden y, en caso contrario, el triangular anterior y posterior.

Una curiosidad

Si en lugar de buscar 8T+1 para obtener un cuadrado, lo intentamos con 9T+1, resultará un triangular. Si T es de orden **n**, 9T+1 será de orden **3n+1**. Basta ver esta equivalencia:

$$9\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{9n^2+9n+2}{2}$$

$$\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}=\frac{9n^2+9n+2}{2}$$

Por ejemplo, T(10)=55, 9T(10)+1=496=T(31)=T(3*10+1)

Primeras propiedades y significados varios

Continuamos el tema de los números triangulares con propiedades sencillas y algún significado. No se tratarán de forma exhaustiva, sino que se elegirán las que mejor se adapten a las técnicas usadas en este blog.

Propiedades sencillas

Los números triangulares terminan en 0, 1, 3, 5, 6 u 8.

Aquí tienes los desarrollos en todos los casos posibles según la última cifra:

1*2/2=1, 2*3/2=3, 3*4/2=6, 4*5/2=10, 5*6/2=15, 6*7/2=21, 7*8/2=28, 8*9/2=36, 9*10/2=45

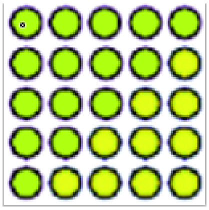
Las terminaciones son las previstas.

La suma de Tn y Tn-1 es un cuadrado perfecto o, si se quiere usar la terminología pitagórica, un número cuadrado.

Lo vemos con la fórmula:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2}{2}=n^2$$

Ahora lo entenderemos mejor con una imagen:



Estos dos triangulares son consecutivos, uno de lado 4 y otro de lado 5, y adosados forman un cuadrado.

Inserción de paréntesis

Un número triangular, al ser también un número combinatorio, se puede interpretar como el número de formas de insertar un par de paréntesis entre varias letras. Por ejemplo, entre tres letras XYZ se pueden insertar así: (X)YZ (XY)Z (XYZ) X(Y)Z X(YZ) XY(Z), que son seis, al igual que el número triangular T(4)=4*3/2.

En general, si tenemos k letras, los paréntesis se pueden situar en k+1 huecos y como han de ir de dos en dos, serán combinaciones de k+1 objetos sobre 2. Son combinaciones porque los símbolos “(“ y “)” no se pueden intercambiar.

Relación con un cubo

Todo cubo equivale a la diferencia entre los cuadrados de dos triangulares consecutivos.

Por ejemplo, 8 es la diferencia entre 3^2 y 1^2, los primeros triangulares.

No es difícil demostrarlo. Aquí tienes el desarrollo:

$T(n+1)^2-T(n)^2= (n+1)^2(n+2)^2/4-(n+1)^2n^2/4 =$
$(n+1)^2(4n+4)/4 = (n+1)^3$

Apretones de manos

Por ser un número combinatorio, los triangulares resuelven el problema del número de apretones de manos distintos que se pueden dar en una reunión. Si asisten N personas, se podrán dar la mano de N(N-1)/2 formas, lo que equivale a T(n-1).

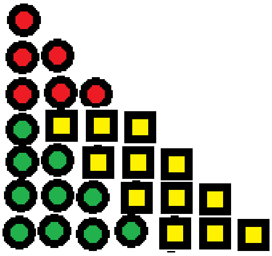
Equivalencias entre triangulares

T(a+b)=T(a)+T(b)+ab

Algebraicamente se deduce con facilidad:

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}-\frac{a(a+1)}{2}-\frac{b(b+1)}{2}=\frac{2ab}{2}=ab$$

En la imagen, el triángulo total equivale a T(7)=21, Los círculos rojos, T(3)=6, los verdes, T(4)=10, y los cuadrados, 3*4=12. Se cumple esta igualdad: T(3+4)=T(3)+T(4)+3*4



Triangular del producto

T(ab)=T(a)*T(b)+T(a-1)*T(b-1)

Lo demostramos algebraicamente:

Restamos los primeros productos y comprobamos que la diferencia coincide con el tercer producto:

$T(ab)-T(a)*T(b)=ab*(ab+1)/2-a(a+1)/2*b(b+1)/2=(2a^2b^2+2ab-(a^2+a)(b^2+b))/4=(2a^2b^2+2ab-a^2b^2-a^2b-ab^2-ab)/2=(a^2b^2-a^2b-ab^2+ab)/4=ab(a-1)(b-1)/4=T(a-1)*T(b-1)$

Por ejemplo:

T(3)=6, T(4)=10, T(3*4)=T(12)=12*13/2=78

T(3)*T(4)=6*10=60, T(3-1)=T(2)=3, T(4-1)=T(3)=6, luego 78=6*10+3*6=60+18=78.

Triangulares que son cuadrados

Hay triangulares, como 1 y 36, que son también cuadrados. Los primeros son:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… (http://oeis.org/A001110)

Puedes profundizar este concepto en mi entrada de blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html

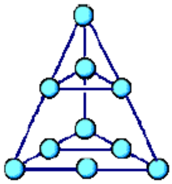
y en su siguiente.

En ellas se deducen varias recurrencias basadas en una ecuación de Pell. La más popular, que coincide con Wikipedia, es A(n)=34A(n-1)-A(n-2)+2. Con ella es fácil obtener todos los triangulares cuadrados a partir del o y el 1. Se puede construir con hoja de cálculo.

0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881

Suma de los primeros números triangulares

La suma de los n primeros números triangulares es también conocida como número tetraédrico, así el enésimo número tetraédrico es la suma de los primeros n números triangulares.



Su expresión es:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Si escribimos un número triangular como $(n^2+n)/2$, podemos separar la suma de triangulares en la mitad de la de los cuadrados y de los enteros. Para cada uno le aplicamos la fórmula correspondiente:

$S(n)=(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.n^2+1+2+3+4+\ldots n)/2=n(n+1)(2n+1)/12+n(n+1)/4=n(n+1)(2n+1+3)/12=n(n+1)(n+2)/6$

Es fácil ver que esta suma coincide con un número combinatorio:

$$S(n) = \binom{n+2}{3}$$

Por ejemplo, 1+3+6+10+15+21=56, que es el número combinatorio de 8 sobre 3 (se puede comprobar en Excel con COMBINAT(8;3)

Límite de la suma de inversos

Otro resultado muy interesante es el de que la suma de los inversos

de los números triangulares tiende a 2. Si quieres desarrollarlo

basta que pienses que 1/3 = (2/2 - 2/3), 1/6 = (2/3 - 2/4) y así

sucesivamente. Desarrolla la suma y verás anularse términos.

Los triangulares en la suma de cubos

La suma de los **n** primeros cubos equivale al cuadrado del triangular de orden **n**

Es fácil demostrarlo por inducción. Se cumple en los primeros casos

$1=1^2$

$1+8=3^2$

$1+8+27=6^2$

Para completar la inducción a $T(n)^2$ le sumamos otro cubo y se convierte en $T(n+1)^2$. Esta equivalencia se puede comprobar con la calculadora Wiris:

$$(n^2+n)^2/4+(n+1)^3 \quad = \quad \frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{3}{2}\cdot n^3+\frac{13}{4}\cdot n^2+3\cdot n+1$$ Calc

$$\frac{\left((n+1)^2+n+1\right)^2}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{3}{2}\cdot n^3+\frac{13}{4}\cdot n^2+3\cdot n+1$$ Calc

En una tercera entrada completaremos las propiedades más básicas de los números triangulares.

Propiedades interesantes

Teorema de Gauss

En la página de Wikipedia en español dedicada a los números triangulares, https://bit.ly/2Y2p6qc, puedes leer la historia del descubrimiento de Gauss de que todo número es suma de tres triangulares, si admitimos el 0 y la existencia de repetidos.

Por ejemplo, elegido al azar el número 23761, se puede comprobar que, entre otros muchos casos, equivale a la suma T(67)+T(92)+T(185). Con cualquier calculadora se verifica que

67*68/2+92*93/2+185*186/2=23761.

Lo interesante es que, en general, existen muchas sumas de este tipo para un mismo número. En el de nuestro ejemplo, 23761, más de cien. En la imagen hemos recortado parte de ellas:

```
15, 741, 23005
15, 11026, 12720
21, 8515, 15225
28, 5778, 17955
45, 496, 23220
45, 11781, 11935
55, 1128, 22578
55, 4005, 19701
```

Es interesante destacar que también pueden existir sumas de dos triangulares, o, lo que es igual, que uno de los tres sea 0. Aquí tienes un ejemplo para 23761:

23761=25*26/2+216*217/2

Con el siguiente programa en PARI puedes descomponer un número en todas las ternas posibles de triangulares:

```
u=23761;for(i=0,sqrt(2*u+1),p=i*(i+1)/2;for(j=i,u-p/2,q=j*(j+1)/2;v=u-p-q;if(issquare(8*v+1),if(v>=p&&v>=q,print(p,", ",q,", ",v)))))
```

Para otro número cualquiera basta sustituir u=23761 por el valor adecuado. Por ejemplo, para u=73 quedaría:

```
0, 28, 45
1, 6, 66
1, 36, 36
3, 15, 55
```

El listado ha sido recortado al probar el algoritmo para el 73 en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html

También aquí hay una solución con dos triangulares (y el cero).

Toda cuarta potencia es suma de dos triangulares de dos formas distintas

La primera forma se desprende de una propiedad vista con anterioridad, y es que todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos. Si lo adaptamos a una cuarta potencia quedará:

$$n^4 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} = T(n^2) + T(n^2-1)$$

Por ejemplo, 3^4=81=9(9+1)/2+9(9-1)/2=45+36=T(9)+T(8)

La segunda forma se basa en una identidad algebraica. Descompone la cuarta potencia en el triangular de orden n^2-n-1 y el de orden n^2+n-1, es decir:

$$\boldsymbol{n^4=(n^2-1-n)(n^2-1-n+1)/2+(n^2-1+n)(n^2-1+n+1)/2}$$

Hemos comprobado esta identidad con la calculadora Wiris (que usa la variable X en lugar de N):

$$((x^2-x-1)(x^2-x)+(x^2+x-1)(x^2+x))/2 \quad = \quad x^4$$

Así, por ejemplo, se cumple:

54=625=T(19)+T(29)=19*20/2+29*30/2=190+435=625

La suma de los cuadrados de dos triangulares consecutivos es otro triangular

Por ejemplo, $T(3)^2+T(4)^2=6^2+10^2=136=T(4^2)$

En este ejemplo resulta el triangular cuyo orden es el cuadrado del mayor orden de los sumandos. Se puede demostrar sin problemas:

$$T(n)^2+T(n+1)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$
$$=(n+1)^2\frac{((n+1)^2+1)^2}{2}=T((n+1)^2)$$

Dejamos aquí las propiedades generales de los números triangulares. En muchas otras entradas del blog podrás encontrar otras más específicas.

CONSECUTIVOS QUE SON POLIGONALES

La cuestión que inicio en esta entrada puede extenderse a varios casos interesantes. Solo me quedaré con algunos, porque van a ser muy similares unos a otros. Se trata de conocer si dos números consecutivos pueden ser ambos poligonales no triviales, es decir, que sus lados no tengan medida 1, pues en ese caso todos los enteros positivos son poligonales.

Comenzaremos con el caso general, en el que exigimos que dos números consecutivos sean ambos poligonales, pero no concretamos el orden de cada uno. No pueden tener el mismo orden, pues su diferencia sería siempre mayor que la unidad. Después pasaremos a tres casos en los que los órdenes de los dos números son también consecutivos. Por simple casualidad, están desarrollados en orden inverso de número de lados.

Poligonales en general

Los criterios para saber si un número es poligonal o no están ligados a un orden determinado. En este blog y en mis publicaciones sobre este tipo de números se ha usado la siguiente función para saber si un número es o no poligonal de un cierto orden:

```
Function espoligonal(n, k) As Boolean
Dim d
Dim e As Boolean

e = False
d = (k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2)
If escuad(d) Then
If esentero((k - 4 + Sqr(d)) / 2 / (k - 2)) Then e = True
End If
espoligonal = e
End Function
```

Esta función ya está explicada en varias entradas de este blog. En primer lugar, determina si un discriminante es cuadrado y, después, si el orden correspondiente es entero o no.

El problema de esta función es que necesita tener como dato el valor del orden del poligonal. Por eso, en este caso, hay que complementarla con esta otra:

```
Function esunpoligonal(n)
Dim i, es

If n < 3 Then esunpoligonal = 0: Exit Function
es = 0
i = 3
While i < n And es = 0
If espoligonal(n, i) Then es = i
i = i + 1
Wend
esunpoligonal = es
End Function
```

Es fácil interpretar que se recorren todos los órdenes posibles y si en alguno da solución afirmativa, es que es un poligonal, y devuelve su orden. En caso contrario devuelve un cero.

Con esta función, el criterio para saber si dos números consecutivos son ambos poligonales será:

esunpoligonal(n)>0 and esunpoligonal(n+1)>0

Con esta condición es fácil encontrar el conjunto de los primeros casos:

N	N+1	Orden(N)	Orden(N+1)
9	10	4	3
15	16	3	4
21	22	3	5
24	25	9	4
27	28	10	3
33	34	12	7
34	35	7	5
35	36	5	3
39	40	14	8
45	46	3	9
48	49	17	4
51	52	5	10
54	55	19	3
57	58	20	11
63	64	22	4
64	65	4	8

Al existir muchos ejemplos, su búsqueda es muy rápida. No obstante, aquí inserto la versión en PARI:

```
isapolygonal(n)={my(i=3,p=n/3+2);while(i<p&&!ispolygonal(n,i),i+=1);i<p}
ok(n)=isapolygonal(n)&&isapolygonal(n+1)
for(i=2,350,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

Con ella podremos disponer las soluciones en forma de lista:

9, 15, 21, 24, 27, 33, 34, 35, 39, 45, 48, 51, 54, 57, 63, 64, 65, 69, 75, 81, 84, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 99, 105, 111, 114, 117, 120, 123, 124, 125, 129, 132, 135, 141, 144, 147, 153, 154, 155, 159, 165, 168, 171, 174, 175, 176, 177, 183, 184, 185, 189, 195, 201, 204, 207, 213, 214, 215, 216, …

Conjuntos de consecutivos con al menos dos elementos

No es difícil, contando con la función ***esunpoligonal***, detectar los casos de conjuntos de dos o más elementos consecutivos que sean todos poligonales no triviales (longitud del lado mayor que 2). En este caso fijaremos la atención en el primer elemento del conjunto. Basta exigir:

esunpoligonal(i) > 0 And esunpoligonal(i + 1) > 0 And esunpoligonal(i - 1) = 0

Con esta condición indicamos que el número anterior no sea poligonal, y los dos siguientes, sí. Con ella es fácil encontrar los primeros ejemplos:

9, 15, 21, 24, 27, 33, 39, 45, 48, 51, 54, 57, 63, 69, 75, 81, 84, 87, 90, 99, 105, 111, 114, 117, 120, 123, 129, 132, 135, 141, 144, 147, 153, 159, 165, 168, 171, 174, 183, 189, 195, 201, 204, 207, 213, 219, 225, 231, 234, 237, 243, 249, 252, 255, 258, 264, 267, 273, 279, 285, 291, 294, 297, 300, Con PARI puedes probar este código:

```
isapolygonal(n)={my(i=3,p=n/3+2);while(i<p&&!ispolygonal(n,i),i+=1);i<p}
ok(n)=!isapolygonal(n-1)&&isapolygonal(n)&&isapolygonal(n+1)
for(i=3,300,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

Por ejemplo, 174 pertenece a la sucesión porque 174, 175, 176, 177 y 178 son todos poligonales no triviales y 173 no lo es.

N pentagonal y N+1 hexagonal

Nos preguntaremos ahora si existen números pentagonales consecutivos con hexagonales, en este orden. El primer ejemplo es claro, pues no hemos exigido que no sean triviales, y serían 5 y 6. Los demás casos, como veremos, son mucho más complicados de abordar, por lo que lo haremos por fases y con paciencia.

Búsqueda directa

Si en Excel exigimos la condición ***espoligonal(n,5) and espoligonal(n+1,6)*** o en PARI

ispolygonal(n,5)&&ispolygonal(n+1,6), obtendremos las siguientes primeras soluciones.

5, 6902, 209627, 259771820, 7889124465, 9776252688930,…

Observamos que el crecimiento es muy rápido y que sobrepasaremos la capacidad de Excel en pocos pasos. Por ello, y para más seguridad, es conveniente generar las siguientes soluciones mediante recurrencias.

Recurrencias

La fórmula de los pentagonales (ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/numeros-pentagonales-1.html y siguiente) es $P(n)=(3n^2-n)/2$, y la de los hexagonales

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/02/numeros-hexagonales-1.html y siguiente) es $H(n)=n(2n-1)$. Por tanto, en este caso, como se diferencian en 1, el planteo sería:

$(3n^2-n)/2+1=k(2k-1)$

Hemos llamado **n** al orden del pentagonal y **k** al del hexagonal consecutivo con él. Con un poco de Álgebra y un cambio de variable llegaremos a una ecuación tipo Pell. Los pasos son:

$3n^2-n=4k^2-2k-2$

Cada miembro lo simplificamos con cambio de variable: $X=6n-1$, $Y=4k-1$

$3n^2-n=(9n^2-3n)/3=((3n-1/2)^2-1/4)/3=(X^2-1)/12$

$4k^2-2k-2=(2k-1/2)^2-9/4=(Y^2-9)/4$

Igualamos con las nuevas variables.

$(X^2-1)/12=(Y^2-9)/4$

$(x^2-1)=3(y^2-9)$

$x^2-3y^2=-26$

Esta es una ecuación del tipo Pell (Pell-like), que no tiene resolución automática, por lo que hay que encontrar una primera solución y después intentar recurrencias entre las demás soluciones. No es un proceso fácil en general.

En este caso conocemos las soluciones 5 y 6 para los poligonales, en los que n=2 y k=2, por lo que deben ser soluciones X=6*2-1=11, Y=4*2-1=7, y, en efecto, cumplen la ecuación:

$11^2-3*7^2=121-3*49=121-147=-26$

Si intentamos resolver la ecuación de Pell con estos datos, nunca obtenemos un segundo miembro igual a -26, solo 1 y -2:

1	1	2	1	2	1	2	1
1	2	5	7	19	26	71	97
1	1	3	4	11	15	41	56
-2	1	-2	1	-2	1	-2	1

En estos casos se aconseja buscar algún tipo de recurrencia similar a la que nos resolvería la ecuación de Pell pura, $x^2-3y^2=1$. Hay que tener un poco de suerte e intuición. En nuestro caso, como por búsqueda directa ya conocíamos las primeras soluciones, no fue excesivamente complicado. Las fórmulas de recurrencia entre X e Y que resultaron funcionar fueron:

X(n+2)=97*X(n)+168*Y(n)

Y(n+2)=56*X(n)+97*Y(n)

La segunda solución después de la X(1)=11 Y(1)=7 la dedujimos de la búsqueda directa, y resultaron ser X(2)=407, Y(2)=235. Con todos estos datos se pudo completar el cuadro de las primeras soluciones de X e Y:

X	Y
11	7
407	235
2243	1295
78959	45587
435131	251223
15317639	8843643
84413171	48735967
2971543007	1715621155
16375720043	9454526375
576464025719	332821660427
3176805275171	1834129380783
111831049446479	64565686501683

Las últimas resultaban menos fiables, y hubo que corregirlas con PARI y la calculadora WIRIS.

De los valores de X e Y es fácil extraer los de los órdenes n y k:

n=(X+1)/6	k=(y+1)/4
2	2
68	59
374	324
13160	11397
72522	62806
2552940	2210911
14068862	12183992
495257168	428905289
2729286674	2363631594
96077337620	83205415107
529467545862	458532345196
18638508241080	16141421625421

Para revisar estos valores hemos usado la recurrencia, derivada de la anterior:

N(n+2)=97*N(n)+112*K(k)-44

K(n+2)=84*N(n)+97*K(n)-38

Y, por último, los valores consecutivos del pentagonal y el hexagonal a partir de sus órdenes:

P	H
5	6
6902	6903
209627	209628
259771820	259771821
7889124465	7889124466
977625268930	977625268931
29689930928135	29689930928136

Sólo se han incluido los valores que son fiables en Excel. Los siguientes superan su capacidad de cálculo, Si acudimos a otras herramientas que manejen todas las cifras, llegamos a la lista definitiva de los pentagonales:

5, 6902, 209627, 259771820, 7889124465, 9776252688930, 296899309928135, 3679194934354417 52, 11173508621946330077, 1384628220617316222 7790, 42050382318142887621 1635, 521090984179201293845229060, 15825240870436385705402363465, 1961073808475377928639818823 8202, 5955671144974991164556836704 52127

Evidentemente, los hexagonales son sus consecutivos. Vemos el ejemplo de 259771820:

El orden de 259771820 es, según las tablas de arriba, 13160, y se cumple:

P(13160)=(3*13160^2-13160)/2=259771820

El orden del hexagonal sería 11397 y se verifica:

H(11397)=11397*(2*11397-1)=259771821, que resulta consecutivo con el anterior.

Con esto damos el problema como resuelto. Ha sido bastante entretenido todo el proceso de llegar a una lista fiable.

N cuadrado y N+1 pentagonal

Sin pretenderlo, vamos a estudiar los casos en orden decreciente. Ha sido una casualidad. Nos toca ahora encontrar los cuadrados cuyo consecutivo es pentagonal.

Usando la misma función **espoligonal(n,k)** para los casos k=4 y k=5 hemos obtenido las primeras soluciones para el caso k=4 (cuadrados) con Excel:

4, 144, 2500, 43264, 1387684, 24010000, 415425924, 13324546624, 230544022500, 3988919683984, 127942295300964

Con PARI, generando los cuadrados de forma rápida, ampliamos y comprobamos la lista:

```
n=2;m=4;while(n<=10^8,if(ispolygonal(m+1,5),print(m));
m+=2*n+1;n+=1)
```

4, 144, 2500, 43264, 1387684, 24010000, 415425924, 13324546624, 230544022500, 3988919683984, 127942295300964, 2213683680040000, 38301606390193444,…

Al igual que en el caso anterior, con un poco de Álgebra llegamos a una ecuación tipo Pell:

Será: $n^2+1=(3k^2-k)/2$

Y $n^2=(3k^2-k)/2-1=(9k^2-3k)/6-1=(36k^2-12k+1)/24-1-1/24$

Mediante cambio de variables **X=6k-1, Y=n** llegamos a la ecuación de tipo Pell **X^2-24Y^2=25**

Esta nos ha dado más trabajo que la anterior, porque la recurrencia válida se aplica a n+3 en lugar de n+2 o n+1. Ha resultado ser:

X(n+3)=49X(n)+240Y(n)

Y(n+3)=10X(n)+49Y(n)

Así, a partir de los primeros valores de X e Y deduciremos los de n y k, y, por último, a los del cuadrado y el pentagonal consecutivos. Al final, las soluciones para el cuadrado, primer número de los dos consecutivos, son:

4, 144, 2500, 43264, 1387684, 24010000, 415425924, 13324546624, 230544022500, 3988919683984, 127942295300964, 2213683680040000, 38301606390193444, 1228501906155314704, 21255790465200062500, 367772020569717770304, 11796075174961036491844,…

Se puede plasmar en esta construcción de una lista en PARI:

lista(m) = {my(x=vector(m),y=vector(m),z=vector(m),n);x[1]=2; x[2]=10;x[3]=41;y[1]=2;y[2]=12;y[3]=50;z[1]=4;z[2]=144;z[3]=2500;for(n=4,m,x[n]=49*x[n-3]+40*y[n-3]-8;y[n]=60*x[n-3]+49*y[n-3]-10;z[n]=y[n]^2);z}

print(lista(18));

[4, 144, 2500, 43264, 1387684, 24010000, 415425924, 13324546624, 230544022500, 3988919683984, 127942295300964, 2213683680040000, 38301606390193444, 1228501906155314704, 21255790465200062500, 367772020569717770304, 11796075174961036491844, 204098097833167320090000]

N triangular y N+1 cuadrado

Este caso está ya publicado en http://oeis.org/A006454. Por eso, nos limitaremos a comprobar resultados usando nuestros métodos.

0, 3, 15, 120, 528, 4095, 17955, 139128, 609960, 4726275, 20720703, 160554240, 703893960, 5454117903, 23911673955, 185279454480, 812293020528, 6294047334435, 27594051024015, 213812329916328, 937385441796000, 7263325169820735, 31843510970040003, 246739243443988680

Con las funciones de Excel, obtenemos la misma lista, exigiendo *espoligonal(n,3) and espoligonal(n+1,4)*. En este caso disponemos en este blog de las funciones alternativas estriangular(n) y escuad(n+1). Con ambas es fácil reproducir los primeros elementos:

N triangular	N+1 cuadrado
3	4
15	16
120	121
528	529
4095	4096
17955	17956

También aquí se pueden usar recurrencias. Con un proceso similar a los anteriores se llega a que **X(n+2)=X(n)+3Y(n), Y(n+2)=3X(n)+8Y(n)**, con **X=2O1+1, Y=O2**, siendo O1 el orden del triangular y O2 el del cuadrado. De esa forma, a partir de los términos iniciales de la tabla anterior, se puede llegar más lejos de lo publicado en la sucesión A006454:

[3, 15, 120, 528, 4095, 17955, 139128, 609960, 4726275, 20720703, 160554240, 703893960, 5454117903, 23911673955, 185279454480, 812293020528, 6294047334435, 27594051024015, 213812329916328, 937385441796000, 7263325169820735, 31843510970040003, 246739243443988680, 1081741987539564120]

Para quien quiera avanzar más, dejamos el código en PARI. Bastará sustituir el 24 de la última línea por un número mayor:

lista(m) = {my(x=vector(m), y=vector(m), z=vector(m),n); x[1]=5; x[2]=11; y[1]=2; y[2]=4 ; z[1]=3; z[2]=15; for(n=3, m, x[n]=3*x[n-2]+8*y[n-2]; y[n]=x[n-2]+3*y[n-2]; z[n]=y[n]^2-1); z}

print(lista(24));

Este desarrollo resulta muy instructivo, pues se han combinado varias técnicas matemáticas, con la consiguiente concurrencia de resultados. Queda abierta la posibilidad de seguir aumentando el número de lados, pero lo importante está ya explicado.

LOS NÚMEROS CUADRADOS

Primeras definiciones y propiedades

Incluimos aquí el estudio de los números cuadrados, considerándolos prioritariamente como números poligonales, y dejando como complementarias las cuestiones derivadas de su naturaleza como producto n*n.

*Cuadrado como n*n*

La primera idea que se tiene de los números cuadrados es que son el resultado de multiplicar un número entero por sí mismo: C=n*n (por eso, a la operación n^2 se le ha dado el nombre de *elevar al cuadrado*).

Se les llama también cuadrados perfectos. Este producto se puede representar como una matriz cuadrada de puntos.

Es conveniente disponer de un criterio para saber si un número es cuadrado. El más fiable es el de descomponer el número en factores primos y observar si todos los exponentes son pares. Esto es así porque si un número primo *p* divide a un cuadrado, p^2 también lo divide.

Así se evitan los decimales que aparecen en otros criterios. El inconveniente radica en la programación de la extracción de factores. En el otro extremo de la definición encontramos los *números libres de cuadrados*, en los que todos los exponentes son impares.

Un criterio menos fiable es el de sacar la raíz cuadrada, tomar su redondeo a un número natural o su parte entera (llamada raíz cuadrada entera) y ver si al elevarla al cuadrado reconstruye el número inicial. Así se procede en esta función:

```
Public Function escuad(n) As Boolean

If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
```

End If
End Function

En lenguajes avanzados de programación se dispone ya de una función *issquare* o similar.

Esta definición permite considerar que un número cuadrado puede terminar solo con las cifras 0, 1, 4, 5, 6 o 9 en el sistema de numeración decimal. Es fácil comprobarlo multiplicando números por sí mismos. Así que un número que termine en 2, 3, 7, 8 no será cuadrado.

Esta definición de cuadrado también nos lleva **a que tendrá un número impar de divisores**. Si todos los exponentes de factores primos son pares, el número de divisores será un producto de impares, y por tanto impar. Puedes revisar esta idea en nuestro documento http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/teoria/teordivi.pdf

Aquí tienes un volcado del párrafo en el que se desarrolla la fórmula correspondiente:

NÚMERO DE DIVISORES

Para obtener todos los divisores de un número cuya descomposición es $n = p_1^{a1}.p_2^{a2}\ .p_3^{a3\ldots}$ basta considerar que son los términos del producto

$(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots p_1^{a1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots p_2^{a2})(1 + p_3 + p_3^2 + \ldots p_3^{a3})$

Este sería un buen criterio para detectar si un número es cuadrado, pero resulta largo y lento.

Cuadrado como número poligonal

La construcción de un cuadrado siguiendo los procedimientos generales de construcción de poligonales nos llevaría a un esquema como el de la imagen:

En ella observamos sin dificultad que el número cuadrado n^2 es la suma de los primeros números impares: $1+3+5+7+9=25=5^2$

El caso general se demuestra por inducción completa:

Si n^2 equivale a la suma

(2*0+1)+(2*1+1)+(2*2+1)+(2*3+1)+…+(2*(n-1)+1),

el siguiente cuadrado, $(n+1)^2$ es igual a $n^2+(2*n+1)$, lo que completa la suma de impares.

Así que se cumple

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

Sumas de números impares consecutivos

Una consecuencia de esta propiedad es la de que cualquier suma de números impares consecutivos equivale a la diferencia entre dos cuadrados. Por ejemplo, la suma 55+57+59+…+87+89+91 se puede calcular como la diferencia entre estas dos sumas:

(1+3+5+7+…+91)-(1+3+5+7+53)=46^2-27^2

El 46 y el 27 se obtienen teniendo en cuenta, según la fórmula anterior, que los sumandos tienen la forma 2k+1.

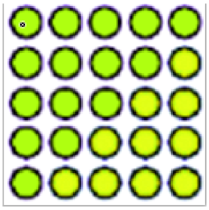
Si se toman dos sumandos impares consecutivos, el resultado será un cuadrado par $2n*2n=4n^2$, pues

$$4n^2 = (2n^2 - 1) + (2n^2 + 1)$$

Si multiplicamos dos números pares (o impares) consecutivos y añadimos una unidad obtenemos también un cuadrado, pues $n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Cuadrado como suma de dos triangulares

Otra generación de cuadrados viene dada, tal como vimos en el tema correspondiente, como suma de dos triangulares consecutivos. En la imagen se observa que el cuadrado 25 es la suma de los triangulares 10 y 15.



Como un triangular es un número combinatorio, esta propiedad se puede expresar como (elegimos el símbolo C(n) para representar el cuadrado de orden n):

$$C(n) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2}$$

Desde el punto de vista de los cuadrados esta relación no tiene más interés.

Cuadrado como suma de OBLONGO(N)+N+1

Otra relación que se queda en simple curiosidad es que si a un oblongo le añadimos su lado mayor, se convierte en un cuadrado.

En efecto, los oblongos vienen dados por la expresión n(n+1), y si le sumamos n+1 se convierte en $n(n+1)+(n+1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

Esta propiedad es más sugestiva si se expresa al revés: si a un conjunto cuadrado le eliminas un lado, se convierte en oblongo.

Si al cuadrado 64 le quitamos un lado (8) nos queda 56, que es oblongo, por ser 7*8.

Copiamos un texto publicado por Amarnath Murthy, Mar 24 2004en la página de OEIS:

Begin with n, add the next number, subtract the previous number and so on ending with subtracting a 1: a(n) = n + (n+1) - (n-1) + (n+2) - (n-2) + (n+3) - (n-3) + ... + (2n-1) - 1 = n^2.

Como invitación a demostrarlo, insertamos ese proceso aplicado al número 12:

12		
13	11	2
14	10	4
15	9	6
16	8	8
17	7	10
18	6	12
19	5	14
20	4	16
21	3	18
22	2	20
23	1	22
210	66	**144**

$12+(2+4+6+...+18+10+22)=12+(2+22)*11/2=12+12*11=12^2$

En la primera columna se sitúan los números consecutivos a 12 y en la segunda los anteriores. Se suman y se restan unos de otros, resultando al final $144=12^2$.

Recurrencias

Hay varios métodos recursivos para calcular números cuadrados. Ninguno es especialmente útil, y se presentan aquí como una curiosidad.

Suma de un impar

Es consecuencia de la definición como suma de impares, y es que al cuadrado anterior le sumamos el doble de su lado incrementado en una unidad. Por ejemplo, $7^2+2*7+1=64=8^2$

Se puede plasmar en esta función recursiva de Excel:

```
Public Function cuadrado_r(n)
If n = 1 Then
cuadrado_r = 1
Else
cuadrado_r = 2 * n - 1 + cuadrado_r(n - 1)
End If
End Function
```

Funciona bien para números no muy grandes, pero puede fallar, por lo que la dejamos como una curiosidad.

Mediante los dos anteriores

C(n)=2C(n-1)-C(n-2)+2

Es fácil de demostrar: $n^2=2(n-1)^2-(n-2)^2+2=2n^2-4n+2-n^2+4n-4+2=n^2$

Así, de C(1)=1 y C(2)=4 obtenemos C(3)=2*4-1+2=9, C(4)=2*9-4+2=16,…

Recurrencia general para poligonales

Todos los números poligonales siguen la fórmula P(n,k)=3P(n,k-1)-3P(n,k-2)+P(n,k-3), que en nuestro caso quedaría como

C(n)=3C(n-1)-3C(n-2)+C(n-3)

Su ventaja radicaría en que usa cuadrados nada más, y no números aislados. Esto la convierte en una recurrencia de tercer orden homogénea, y la podemos tratar con nuestra hoja correspondiente:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Bastará dar como coeficiente 3, -3, 1 y como elementos iniciales 0, 1, 4:

Recurrencias lineales de tercer orden							
Coeficientes							
A	3		**B**	-3		**C**	1
Valores iniciales							
X0	0		**x1**	1		**x2**	4

Pulsando sobre el botón de "Ver sucesión" crearemos una columna de cuadrados,

	0	
	1	
	4	
	9	
	16	
	25	
	36	
	49	
	64	
	81	
	100	
	121	
	144	

Sumas

La suma de los primeros números cuadrados viene dada por una de las fórmulas de Faulhaber.

(ver https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber)

La correspondiente a los números cuadrados es la siguiente:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es sencillo demostrarla por inducción completa. Aquí lo haremos restando la expresión correspondiente a **n** y la de **n-1**, para ver que el resultado es el nuevo cuadrado añadido. Así se ve en la calculadora Wiris:

$$n\cdot(n+1)\cdot\frac{(2n+1)}{6}-(n-1)\cdot n\cdot\frac{(2n-1)}{6} \quad = \quad n^2$$

Como curiosidad, aplicaremos nuestra herramienta de interpolación de Newton a las primeras sumas de cuadrados, 1, 5, 14, 30, 55…Es un tema complementario, que se puede ignorar:

Interpolación

Descargamos la hoja de interpolación desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Escribimos las sumas en las celdas correspondientes:

Valor natural	1	2	3	4	5
Valores función	1	5	14	30	55
Dif1		4	9	16	25
Dif2			5	7	9
Dif3				2	2
Dif4					0

Observamos que las diferencias de tercer orden son iguales (y la de cuarto es nula), lo que indica una función polinómica.

Leemos los coeficientes del polinomio:

Coeficientes (en forma de fracción)			0	2	5	4	1
	720	120	24	6	2	1	1

Escribimos el polinomio con esos coeficientes, tal como se efectúa en la interpolación de Newton:

1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3)

Como esta forma es poco legible, la simplificamos y factorizamos con Wiris:

$$1+4*(X-1)+5/2*(X-1)*(X-2)+1/3*(X-1)*(X-2)*(X-3) = \frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X$$

$$\text{factorizar}\left(\frac{1}{3}\cdot X^3+\frac{1}{2}\cdot X^2+\frac{1}{6}\cdot X\right) = \frac{1}{6}\cdot X\cdot(X+1)\cdot(2\cdot X+1)$$ Calc

Obtenemos la misma fórmula de Faulhaber. Aunque sea una mera curiosidad, es gratificante la coincidencia.

Teorema de los cuatro cuadrados

El teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange establece que cualquier número entero positivo se puede escribir como la suma de cuatro o menos cuadrados perfectos. Tres cuadrados son suficientes para todos los enteros positivos salvo para números de la forma $4^k(8m+7)$.

Un entero positivo se puede representar como una suma de dos cuadrados precisamente si su factorización prima no contiene potencias impares de primos de la forma $4k + 3$ (Fermat-Gauss).

También se puede expresar todo cuadrado como suma de tres cuadrados con signo. Por ejemplo, 201221 se puede expresar con estas sumas:

201221 = 11^2+685^2-518^2

201221 = 9^2+679^2-510^2
201221 = 13^2+667^2-494^2
201221 = 5^2+589^2-382^2

La cercanía entre las bases de estos cuatro ejemplos sugiere que son un subconjunto de otro mucho más amplio.

Conseguir los cuatro cuadrados (o menos) en los que se descompone cualquier entero positivo requiere algoritmos que se ralentizan cuando ese entero es grande. Un algoritmo sencillo para Excel o Calc sería el de la siguiente función, que devuelve una solución, que no tiene que ser la óptima, pero que consta de cuatro cuadrados:

```
Function cuatrocuad$(n)
Dim i, j, k, l
Dim s$
Dim novale As Boolean
s$ = ""
novale = True
i = 0
While i <= n And novale ‘Primera base de cuadrado
j = 0
While j <= i And novale ‘Segunda base
k = 0
While k <= j And novale ‘Tercera base
```

```
l = n - i ^ 2 - j ^ 2 - k ^ 2  ‘Posible cuarta base
If l >= 0 And l <= k Then
If escuad(l) Then novale = False: s = s + Str$(i) + Str$(j) + Str$(k) + Str$(l) ‘Es una solución
End If
k = k + 1
Wend
j = j + 1
Wend
i = i + 1
Wend
If s = "" Then s = "NO"
cuatrocuad = s
End Function
```

Hay que insistir en que no devuelve la mejor solución, sino la que tiene las bases menores. Así, para 9, que es cuadrado, da la solución 2^2+2^2+1^2+0^2.

Hemos elegido un intervalo de enteros positivos al azar para una sencilla comprobación del teorema:

Número	Cuatro cuadrados o menos
3458	36 36 29 25
3459	39 31 31 16
3460	37 35 29 25
3461	39 32 30 16
3462	38 35 28 9
3463	38 37 25 25
3464	38 38 24 0
3465	37 36 28 16
3466	38 34 29 25
3467	37 37 27 0
3468	34 34 34 0
3469	34 34 34 1

Observamos que tres números sólo necesitan tres cuadrados.

Identidades

Cuadrado de suma o diferencia

Aunque son de carácter elemental, no podemos olvidar aquí los cuadrados de sumas y diferencias:

$$(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

Cercana a ellas es la *identidad babilónica*, fácil de deducir:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Identidad de Brahmagupta

En el apartado de sumas de cuadrados no puede faltar esta identidad, muy usada en cuestiones numéricas, y que se demuestra con un simple desarrollo algebraico:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2+(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

En cualquier texto de Teoría de Números se puede encontrar un uso de esta identidad.

Identidad de Euler

Euler amplió esta idea a ocho cuadrados, según podemos observar en esta imagen tomada de la página de Wikipedia

https://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_de_los_cuatro_cuadrados_de_Euler

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(w^2+x^2+y^2+z^2) = (-aw+bx+cy+dz)^2+(ax+bw+cz-dy)^2+(ay-bz+cw+dx)^2+(az+by-cx+dw)^2$$

REGRESOS

SUMA DE LOS PRIMEROS CUADRADOS

Hace más de diez años publiqué en mi blog una entrada breve basada en la igualdad

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+23^2+24^2 = 70^2$

http://hojaynumeros.blogspot.com/2010/01/sumas-de-los-primeros-cuadrados-o.html

Desde entonces, he usado herramientas variadas para abordar este tipo de igualdades, y, como la entrada quedó algo corta, regreso a ella. Esta operación la efectuaré en un futuro con otras entradas. Por eso llamo “Regresos” a esta serie.

Para encontrar casos similares y comprobar este, acudiremos a nuestra función ESPOTENTIPO, que devuelve la base si n es una potencia de exponente k o bien 0 si no lo es.

Public Function espotentipo(n, k)
Dim m, i, e

```
m = Log(n) / k ‘Calcula el logaritmo de la base
m = Int(Exp(m)) ‘Posible base
e = 0 ‘Caso en el que la base no pueda ser entera
For i = m - 1 To m + 1 ‘Para evitar redondeos, busca base entera
If i ^ k = n Then e = i
Next i
espotentipo = e
End Function
```

Con esta función se puede confeccionar un bucle de búsqueda similar a este:

```
a = 0
for i = j To l
a = a + i ^ 2
b= espotentipo(a, 2)
If b <> 0 Then msgbox(i):msgbox(b)
next i
```

Con un bucle algo más complejo hemos obtenido solo dos soluciones:

1	1
24	70

Y, en efecto, según nos recordaba Claudio Meller en un comentario: “*Esta demostrado que 70^2 es el único* *número que es igual a la suma de los primeros cuadrados. La demostración la publicó en 1918 G.N. Watson en Messenger of Mathematics, New Series, Vol. 48, pp. 1 - 22.*”

No se tiene en cuenta la solución trivial de 1^2=1^2

Como estas sumas son en realidad números piramidales de cuatro lados, para índices 1 y 70 son los únicos que se pueden convertir en un cuadrado.

Equivalencias similares

Si en nuestro bucle de búsqueda cambiamos el exponente de las sumas y el del resultado, obtendremos muchas equivalencias similares.

Si hubiéramos sumado los primeros cubos en lugar de los cuadrados, hubiéramos obtenido **siempre un cuadrado**, porque se puede demostrar que esa suma es el cuadrado de un número triangular. Así:

1+2^3=9=3^2

1+2^3+3^3=36=6^2

1+2^3+3^3+4^3=100=10^2

No es difícil demostrarlo mediante inducción completa.

Para suma de cubos equivalente a un cubo no parece existir solución (recordemos a Fermat).

Tampoco hemos obtenido soluciones en el caso de suma de potencias cuartas equivalentes a un cuadrado.

Potencias quintas

La suma de potencias quintas sí da lugar a cuadrados. Para simplificar el problema, usamos la fórmula, tomada de Wikipedia, que da la suma de las primeras de estas potencias:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

Esta función en PARI exige que la expresión anterior dé lugar a un cuadrado perfecto:

ok(k)=issquare((k^2*(k^2*(2*k^2+6*k+5)-1))/12)

(hemos sacado factor común dos veces)

El resultado de la búsqueda es

1, 13, 133, 1321, 13081, 129493, 1281853, 12689041, 125608561, 1243396573, 12308357173, 12308357173, 121840175161, 1206093394441,

Por usar una ecuación del tipo Pell y afines, se podía sospechar que estos valores siguieran una recurrencia.

La buscamos con nuestra hoja de cálculo ***ecurrecurre.xslm***

(http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm)

con este resultado:

Sucesión	1	13	133	1321	13081	129493	1281853
9,145833	-9,791667	0,895833				1	
-9,791667	8	-0,708333				-11	
0,895833	-0,708333	0,0625				11	

Por tanto, los valores buscados v(i) cumplirán la recurrencia v(1)=1, v(2)=13, v(3)=133, v(n)=11*v(n-1)-11*v(n-2)+v(n-3)

Este procedimiento en PARI refleja esta recurrencia:

mylist(n)={my(v=List(),a=1,b=13,c=133,d);listput(v,a);listput(v,b);listput(v,c);for(i=1,n-3,d=a-11*b+11*c;a=b;b=c;c=d;listput(v,d));v}

print(mylist(20))nos devuelve el número de sumandos del tipo k^5

1, 13, 133, 1321, 13081, 129493, 1281853, 12689041, 125608561, 1243396573, 12308357173, 121840175161, 1206093394441, 11939093769253, 118184844298093, 1169909349211681, 11580908647818721, 114639177128975533, 1134810862641936613, 11233469449290390601

Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A031138 por Ignacio Larrosa Cañestro. Nuestro trabajo anterior se organizó con otros objetivos y, al dar protagonismo al número de sumandos, vimos con satisfacción la coincidencia con el profesor Larrosa.

Triangulares

En la entrada antigua que revisitamos, se proponía una cuestión similar para triangulares. Se sugería la existencia de pocas soluciones y, en efecto, solo una suma de los primeros triangulares es triangular para estos números de sumandos: 0, 1, 3, 8, 20, 34

(http://oeis.org/A224421)

Para comprobarlo nos sirve el mismo método que con las potencias quintas. Basta ver que la suma de los primeros triangulares tiene como fórmula n(n+1)(n+2)/6, y la prueba para saber si un número T es triangular consiste en que sea cuadrada la expresión 8T+1. Reuniendo las dos expresiones nos resulta el código en PARI siguiente:

*ok(k)=issquare(8*k*(k+1)*(k+2)/6+1)*

for(i=1,1000,if(ok(i),print(i)))

Ejecutándolo, nos resultan los valores ya reseñados:

```
%1 = (k)->issquare(8*k*(k+1)*(k+2)/6+1)
1
3
8
20
34
?
```

Según nuestra publicación sobre números piramidales, estas sumas serán tetraedros.

(http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf)

Los mismos índices nos sirven para oblongos, porque son doble de los triangulares.

LA MITAD, CUADRADO, EL TERCIO, CUBO

En los primeros tiempos de este blog se lanzaban retos a los lectores, pero luego se cambió el estilo. Entre ellos figuraba este:

Encuentra los primeros números naturales N que admiten estas dos descomposiciones:

$N = 2n^2 = 3m^3$

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2009/05/la-mitad-cuadrado-el-tercio-cubo.html)

Búsqueda por razonamiento

La idea propuesta era jugar con los factores primos de cada miembro de la igualdad. Así, en m^3 debe figurar el factor 2, y en n^2 el factor 3:

Los introducimos y nos quedarán dos potencias p^2 y q^3:

$2*3*3*p^2=3*2*2*2*q^3$ o bien $18p^2=24*q^3$

En el primer miembro falta el 2 respecto al segundo, que lo extraemos de p^2, y en el segundo falta un 3, extraíble de q^3:

$2*3*3*2*2*r^2=3*2*2*2*3*3*3*s^3$, es decir, $72*r^2=648*s^3$

Como 648/72=9, lo extraemos de r^2:

$72*3*3*u^2=648*v^3$

Podemos hacer u=v=1 y resulta la primera solución: N=648

Así que $648 = 2*18^2 = 3*6^3$

Si multiplicamos 648 por m^6 , siendo m cualquier número natural, resultarán las demás, ya que m^6 contendrá un cuadrado por un lado y un cubo por otro:

Esas soluciones están publicadas en http://oeis.org/A185270

0, 648, 41472, 472392, 2654208, 10125000, 30233088, 76236552, 169869312, 344373768, 648000000, 1147971528, 1934917632, 3127772232, 4879139328, 7381125000, 10871635968, 15641144712, 22039921152, 30485730888, 41472000000, 55576446408, 73470177792, 95927256072 (En OEIS siempre se inicia en 0 si es posible)

Ya que conocemos el procedimiento, crearemos una tabla de Excel:

k	k^6	N	n	m
1	1	648	18	6
2	64	41472	144	24
3	729	472392	486	54
4	4096	2654208	1152	96
5	15625	10125000	2250	150
6	46656	30233088	3888	216
7	117649	76236552	6174	294

En ella figuran las primeras sextas potencias, su producto por 648 y los valores para **n** y **m** en el enunciado del problema. Evidentemente, coinciden con los elementos publicados en OEIS.

De los razonamientos anteriores se desprende que el número mínimo (en este caso 648) ha de poseer solo los factores primos 2 y 3, y si después se multiplica por potencias sextas, aparecerán otros factores.

En la igualdad $N = 2n^2 = 3m^3$ podemos llamar **u** al exponente del 2 en **n** y **v** al que tiene en **m**. Se cumplirá:

1+2u=3v, es decir, que u=(3v-1)/2

Esto obliga a que v sea impar, y dando valores:

Si v=1, u=1, N presentará un exponente igual a 3, que es el que tiene la solución 648.

Con el factor 3 podemos razonar igual, si **r** es su exponente en **n** y **s** el de **m**, se cumplirá: 2r=1+3s y r=(1+3s)/2, con lo que s también será impar.

Si s=1, r=2, y N tendrá de exponente 2r=4 (o 1+3s=4), que también coincide con el exponente de 648.

Ese tipo de razonamiento sería válido para otras propuestas.

Búsqueda con el *Buscador de Naturales*

Este sencilla herramienta, alojada en (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador), nos permite comprobar algunos resultados no muy complicados. Es el caso de esta cuestión. Basta establecer en el Buscador las siguientes condiciones:

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	100000
Con estas propiedades:	
ES CUADRADO(N/2)	
ES CUBO(N/3)	

Se entienden fácilmente, y, aunque con algo de lentitud, nos devuelve los dos primeros números buscados:

Solución
648
41472

Búsquedas con una función

En la entrada de hace años se proponía que N= $2n^2$ = $5m^5$

La primera solución era el número $500000=2*500^2=5*10^5$

Después habría que multiplicar por potencias décimas.

¿Y en el caso de N= $3n^3$ = $5m^5$?

Podemos caracterizar los números buscados mediante una función de hoja de cálculo. Está diseñada para tratar el caso general: **N=p*n^p=q*m^q.**

Public Function expocoef(n, p, q) As Boolean
‘Los parámetros son N y los dos exponentes p y q
Dim k, j
k = Int((n / p) ^ (1 / p) + 0.00000001) ‘Posible valor de n
j = Int((n / q) ^ (1 / q) + 0.00000001) ‘Posible valor de m
If p * k ^ p = n And q * j ^ q = n Then expocoef = True Else expocoef = False
End Function

Lo aplicamos al caso p=2 y q=3, los propuestos en un principio, buscamos los números que lo cumplen y queda:

648
41472

No seguimos la búsqueda porque ya conocemos la teoría. Sólo se trataba de confirmarla.

En el caso de p=2 y q=5 podemos traducir la función a PARI, que es más rápido:

expocoef(n,p,q)={my(k,j);k=round((n/p)^(1/p));j=round((n/q)^(1/q));p*k^p==n&&q*j^q==n}

for(i=1,100000,if(expocoef(i,2,3),print(i)))

Es más sintético porque devuelve el valor ***p*k^p==n&&q*j^q==n***, que da forma a la condición propuesta. Para p=2 y q=3 da rápidamente las dos primeras soluciones 648 y 41472:

```
? \r expocoef.txt
%1 = (n,p,q)->my(k,j);k=round((n/p)^(1/p));
=n
648
41472
? 
```

Para p=2 y q=5 devuelve:

```
? \r expocoef.txt
%3 = (n,p,q)->my(k,j);k=round((n/p)^(1/p))
=n
500000
?
```

Ya conocíamos el valor 500000 como primera solución.

Otro ejemplo: para p=2 y q=7 la solución es:

N=737894528=2*19208^2=7*14^7

Aquí copiamos las primeras soluciones en los casos más simples:

Caso	Número	Factores
p=2 y q=3	648	[2,3][3,4]
p=2 y q=5	500000	[2,5][5,6]
p=2 y q=7	737894528	[2,7][7,8]
p=3 y q=5	922640625	[3,10][5,6]

Versión rápida de la búsqueda

Si solo estudiamos las primeras soluciones, sin factores extraños a los dados en la cuestión, podemos usar un código similar a este:

expocoef(n,p,q)={my(k,j);k=round((n/p)^(1/p));j=round((n/q)^(1/q));p*k^p==n&&q*j^q==n}

for(i=1,10,for(j=1,10,m=3^i*5^j;if(expocoef(m,3,5)>0,print(m))))

Está adaptado al caso de N= $3n^3 = 5m^5$

Al usar solo potencias, es muy rápido, y nos da en segundos la primera solución:

```
%2 = (n,p,q)->my(k,j);
=n
922640625
?
```

Así podríamos proceder en otros casos.

NÚMEROS INTOCABLES

Hoy regresamos a la fecha del 10 de junio de 2011, en la que publicamos la entrada "Cribas y barridos 1. Números intocables". La primera parte trata del uso de las hojas de cálculo para cribar números según sus propiedades. Ahora nos interesa más un ejemplo concreto que se usó en ese estudio, el de los *números intocables*.

Se llaman así a aquellos números que no pueden ser el resultado de la suma de las partes alícuotas de otro número, es decir, de la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, el 88 no coincide con el resultado de sumar los divisores propios de ningún número natural. Si efectuamos un barrido de los N primeros números y anotamos el resultado de esa suma, ningún resultado coincidirá con 88.

Los primeros números intocables son 2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, 162, 188, 206, 210, 216, 238, 246, 248, 262, 268, 276, 288, … http://oeis.org/A005114

Puedes aprender algo sobre estos números en la Red. Por ejemplo en

http://mathworld.wolfram.com/UntouchableNumber.html, No dan mucho de sí. Se aprenden sus propiedades en pocos minutos.

Para saber si un número es intocable o no, necesitaremos evaluar la suma de divisores propios de cualquier número (o partes alícuotas). Con una búsqueda exhaustiva podemos construir la función *alícuota*:

public function alicuota(n)
dim i,s
s=0

for i=1 to n/2 ‘El divisor propio máximo posible es n/2
if n/i=n\i then s=s+i ‘Si encuentro un divisor propio, lo sumo
next i
alicuota=s
End function

Esta función recorre los posibles divisores propios, con la prueba **n/i=n\i**, que equivale a afirmar que el cociente n/i es entero y que por tanto i divide a n. El resto se entiende fácilmente.

Si se dispone de la función SIGMA, es claro que es más sencillo el uso de ALICUOTA(N)=SIGMA(N)-N

Es lo que ocurre en el lenguaje PARI, que podemos usar *sigma(n)-n*. En este blog también puedes encontrar la función SIGMA para Excel o Calc.

Función de búsqueda

Si deseamos saber si un número es intocable o no, deberemos recorrer “muchos” números consecutivos y comparar su función ALICUOTA o SIGMA(N)-N con el número dado, pero el problema radica en cuántos son “muchos”. En OEIS usan la cota (n-1)^2, basándose en la desigualdad $\sigma(n)-n \geq sqrt(n)+1$ para números compuestos. Así lo haremos aquí. Al final de la entrada esbozamos una demostración de esta desigualdad.

Con esta cota, es fácil encontrar (pero puede que muy lento) si un número es intocable o no:

Esta puede ser la función:

Function intocable(n) As Boolean
Dim i
Dim m As Boolean

m = True ‘Suponemos que sí es intocable
i = 1
While i <= (n - 1) ^ 2 And m ‘Recorremos casos hasta (n-1)^2

If fsigma(i, 1) - i = n Then m = False ‘Si n es sigma, no es intocable

i = i + 1

Wend

intocable = m

End Function

Con esta función es fácil organizar un bucle de búsqueda en Excel, con el mismo resultado que el publicado en OEIS:

2
5
52
88
96
120
124
146
162
188
206
210
216
238
246
248

Este proceso tiene fácil traducción al lenguaje PARI:

intocable(n)={my(m=1,i=1);while(i<=(n-1)^2&&m==1,if(sigma(i)-i==n,m=0);i+=1);m}

for(m=2,1000,if(intocable(m),print1(m,", ")))

Con este código obtenemos los intocables inferiores a 1000

```
2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, 162, 188, 206, 210, 216, 238, 246, 248, 262,
8, 276, 288, 290, 292, 304, 306, 322, 324, 326, 336, 342, 372, 406, 408, 426,
0, 448, 472, 474, 498, 516, 518, 520, 530, 540, 552, 556, 562, 576, 584, 612,
4, 626, 628, 658, 668, 670, 708, 714, 718, 726, 732, 738, 748, 750, 756, 766,
8, 782, 784, 792, 802, 804, 818, 836, 848, 852, 872, 892, 894, 896, 898, 902,
6, 934, 936, 964, 966, 976, 982, 996,
?
```

Se conjetura que el único intocable impar es el 5. Se ha demostrado que sería cierta si también lo es la de Goldbach, por lo que es, por ahora, un problema abierto. Si fuera cierto, los únicos primos intocables serían 2 y 5.

Ya afirmábamos en este blog hace 12 años que estos números no presentan muchas propiedades. Además de en http://oeis.org/A005114 puedes buscar "untouchable numbers" en la Red.

Algunos tipos de intocables

Nosotros ahora nos dedicaremos a tipos especiales de intocables. Ya sabemos que primos solo están 2 y 5, y que impar solo el 5, y se puede demostrar que no habrá números perfectos, amigos o iguales a un primo más la unidad, pero, por ejemplo, ¿habrá cuadrados o triangulares? Adjuntamos a continuación algún resultado:

Triangulares: Si añadimos en PARI la condición *issquare(8*m+1),* que es la que detecta triangulares, encontramos que sí existen de ese tipo. Estos son los primeros triangulares intocables:

120, 210, 276, 406

Como el proceso es lento, nos basta con saber que existen esos cuatro.

Oblongos: Con la condición *issquare(4*m+1)* descubriremos oblongos:

También existen, y los primeros son:

2, 210, 306, 342, 552, 756

Cuadrados: Existen al menos tres: 324, 576 y 784

Otra posible definición

Ya planteábamos esta pregunta en la anterior entrada sobre estos números:

¿Qué ocurriría si exigiéramos que no coincidieran con la suma de divisores propios, sino con la suma de todos (función SIGMA)? Nos daría una lista (más numerosa) de números intocables de otro tipo.

Si adaptamos lo anterior eliminando el restar el número de su sigma, efectivamente, resultan tantos números que la cuestión pierde interés:

2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 45, 46, 47, 49, 50,…

Los tienes estudiados en http://oeis.org/A007369

ANEXO

Demostración de $\sigma(n)-n >= sqrt(n)+1$ para números compuestos

Nos basamos en cualquiera de estas dos fórmulas equivalentes para $\sigma(n)$

$$\sigma(N) = (1 + p_1 + p_1{}^2 + \cdots p_1{}^{e_1})\,(1 + p_2 + p_2{}^2 + \cdots p_2{}^{e_2})...$$

$$\sigma(N) = \prod \frac{p_i{}^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

En ambas, **p** representa a los factores primos y **e** a sus exponentes.

Lo efectuaremos por fases. Por comodidad tipográfica, representaremos la raíz cuadrada como *sqrt*

(1) En los semiprimos:

(1a) Si **n** es un cuadrado, $n=p^2$, con **p** primo, $\sigma(n)=1+p+p^2$,(ver las fórmulas de σ(n)) luego $\sigma(n)-n=1+p=1+sqrt(n)$. Se cumple con igualdad.

(1b) Si **n** no es cuadrado, $n=ab$, con a distinto de b, y $\sigma(n)=(1+a)(1+b)=1+a+b+ab$, luego

$\sigma(n)-n=1+a+b=1+2(a+b)/2>1+2sqrt(ab)>1+sqrt(n)$

Nos hemos basado en que la media aritmética **(a+b)/2** es mayor que la geométrica **sqrt(ab)**

(2) Por inducción:

Si la propiedad es verdadera para dos factores, bastará estudiar qué ocurre cuando se agrega un nuevo factor primo.

Sea n1=n*a, con n compuesto. Consideremos dos casos, que **a** sea ya un factor de **n** o que sea nuevo.

(2a) Si **a** no es factor de **n**, $\sigma(n1)=\sigma(n)*(1+a)$, por ser una función multiplicativa. Ahora, si se cumple la desigualdad para **n**, tendremos;

$\sigma(n1)=\sigma(n)*(1+a)>(1+sqrt(n))*sqrt(a)sqrt(a)>1+sqrt(n*a)$

(3b) Si a es factor de **n**, quedaría, siendo **e** su exponente en **n**,

$\sigma(n1)=\sigma(n)(a^{e+1}-1)/(a^e-1)$ (cambia un numerador por otro en la primera fórmula)

$(a^{e+1}-1)=(a*a^e-a+a-1)=a(a^e-1)+a-1,$

$\sigma(n1)=\sigma(n)(a(a^e-1)+a-1)/(a^e-1)= \quad \sigma(n)*a+\sigma(n)*(a-1)/(a^e-1)= \sigma(n)*a+M*(a-1)$,siendo M un número natural (porque (a^e-1) divide a $\sigma(n)$. Así llegamos como en el caso 3a, que

$\sigma(n1)>1+sqrt(n)*sqrt(a)sqrt(a)>1+sqrt(n*a)$

DOBLADO PITAGÓRICO

Ampliamos en esta entrada el contenido de otra similar publicada en este blog en el año 2010:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/10/1-7-17-23-31-41-47-49-71-73-79-89-97.html

Si tomamos un segmento de longitud 31 cm. y lo doblamos por cierto punto en forma de ángulo recto, podemos completar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene medida entera. No es difícil averiguar por dónde se puede doblar: basta hacerlo con un segmento de medida 7, con lo que el otro trozo mediría 24 y la hipotenusa 25, pues $7^2+24^2=25^2$

Existen otros números con la misma propiedad: 7, descompuesto en 3 y 4, 23, doblado por 8 y 15, y otros muchos.

Además de 7, 23 o 31, ¿qué otros números tienen la propiedad de engendrar un triángulo rectángulo de medidas enteras con un simple "doblado"?

Podríamos extender el tipo de doblado a conseguir una hipotenusa y un cateto, o bien, con dos dobleces, conseguir los tres lados, que es lo que se efectuó en la Antigüedad para conseguir un ángulo recto con un doblado 3+4+5=12.

Comenzamos:

Doblado en dos catetos

Para poder estudiar simultáneamente varios casos, asignaremos una función a cada uno. Usaremos, siguiendo una metodología reciente en este blog, funciones que nos devuelvan los resultados en forma de *string*, para poder ver las soluciones, y no un simple SÍ o NO. En este primer caso usaremos esta función:

Function doblado$(n)
Dim i, j, k, m
Dim s$

m = 0
s = ""
For i = 1 To n / 2 ‘Llegamos a n/2 buscando un cateto
j = n – i ‘El otro posible cateto
k = i ^ 2 + j ^ 2 ‘Vemos si forman terna pitagórica
If escuad(k) Then m = m + 1: s = s + " ##" + Str$(i) + " " + Str$(j) + " " + Str$(Sqr(k)) ‘En caso afirmativo, incorporamos a la solución
Next i
If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s ‘Añadimos número de soluciones
doblado = s
End function

Si recorremos con esta función los primeros números, obtendremos las primeras soluciones, que ya publicamos en la entrada de hace doce años:

7	1 ## 3 4 5	
14	1 ## 6 8 10	
17	1 ## 5 12 13	
21	1 ## 9 12 15	
23	1 ## 8 15 17	
28	1 ## 12 16 20	
31	1 ## 7 24 25	
34	1 ## 10 24 26	
35	1 ## 15 20 25	
41	1 ## 20 21 29	
42	1 ## 18 24 30	
46	1 ## 16 30 34	
47	1 ## 12 35 37	
49	2 ## 9 40 41 ## 21 28 35	
51	1 ## 15 36 39	
56	1 ## 24 32 40	
62	1 ## 14 48 50	
63	1 ## 27 36 45	
68	1 ## 20 48 52	
69	1 ## 24 45 51	
70	1 ## 30 40 50	
71	1 ## 11 60 61	
73	1 ## 28 45 53	
77	1 ## 33 44 55	
79	1 ## 16 63 65	
82	1 ## 40 42 58	

Como era de esperar, este listado ya está publicado en http://oeis.org/A118905:

7, 14, 17, 21, 23, 28, 31, 34, 35, 41, 42, 46, 47, 49, 51, 56, 62, 63, 68, 69, 70, 71, 73, 77, 79, 82, 84, 85, 89, 91, 92, 93, 94, 97, 98, 102, 103, 105, 112, 113, 115, 119, 123, 124, 126, 127, 133, 136, 137, 138, 140, 141, 142, 146, 147, 151, 153, 154, 155, 158, 161, 164, 167, 168, 170, 175, 178, 182, 184, 186, 187, 188

Hemos observado que el número 49 admite dos soluciones, (9, 40, 41) y (21, 28, 35). La primera terna es primitiva, pero la segunda no.

Podemos extraer los primeros números que presentan dos o más soluciones:

49	2 ## 9 40 41 ## 21 28 35
98	2 ## 18 80 82 ## 42 56 70
119	4 ## 20 99 101 ## 35 84 91 ## 39 80 89 ## 51 68 85
147	2 ## 27 120 123 ## 63 84 105
161	4 ## 17 144 145 ## 44 117 125 ## 56 105 119 ## 69 92 115
196	2 ## 36 160 164 ## 84 112 140
217	4 ## 49 168 175 ## 52 165 173 ## 85 132 157 ## 93 124 155
238	4 ## 40 198 202 ## 70 168 182 ## 78 160 178 ## 102 136 170
245	2 ## 45 200 205 ## 105 140 175
287	4 ## 23 264 265 ## 32 255 257 ## 123 164 205 ## 140 147 203
289	2 ## 85 204 221 ## 133 156 205
294	2 ## 54 240 246 ## 126 168 210
322	4 ## 34 288 290 ## 88 234 250 ## 112 210 238 ## 138 184 230
329	4 ## 69 260 269 ## 84 245 259 ## 120 209 241 ## 141 188 235
343	3 ## 63 280 287 ## 96 247 265 ## 147 196 245
357	4 ## 60 297 303 ## 105 252 273 ## 117 240 267 ## 153 204 255
391	4 ## 27 364 365 ## 115 276 299 ## 136 255 289 ## 160 231 281
392	2 ## 72 320 328 ## 168 224 280
434	4 ## 98 336 350 ## 104 330 346 ## 170 264 314 ## 186 248 310
441	2 ## 81 360 369 ## 189 252 315
476	4 ## 80 396 404 ## 140 336 364 ## 156 320 356 ## 204 272 340
483	4 ## 51 432 435 ## 132 351 375 ## 168 315 357 ## 207 276 345
490	2 ## 90 400 410 ## 210 280 350

El máximo de soluciones de la tabla anterior ha sido 4, pero existen números con más ternas posibles. Por ejemplo, los números 833, 1127, 1519 y 1666 presentan siete.

Aquí deberemos parar un poco. Observando la tabla, es fácil ver que muchas ternas no son primitivas. Si solo nos interesan estas, en la función de más arriba, además de exigir que ***k = i ^ 2 + j ^ 2*** sea un cuadrado, deberemos añadir que estos lados sean primos entre sí, o que su MCD sea 1. Podría quedar así:

```
Function doblado$(n)
Dim i, j, k, m, p
Dim s$

m = 0
s = ""
For i = 1 To n / 2
j = n - i
k = i ^ 2 + j ^ 2
If escuad(k) Then
p = Sqr(k)
If mcd(i, mcd(j, p)) = 1 Then m = m + 1: s = s + " ##"
+ Str$(i) + " " + Str$(j) + " " + Str$(p)
End If
Next i
If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s
doblado = s
End Function
```

Con esta modificación, obtenemos un listado más restringido:

7	1 ## 3 4 5
17	1 ## 5 12 13
23	1 ## 8 15 17
31	1 ## 7 24 25
41	1 ## 20 21 29
47	1 ## 12 35 37
49	1 ## 9 40 41
71	1 ## 11 60 61
73	1 ## 28 45 53
79	1 ## 16 63 65
89	1 ## 33 56 65
97	1 ## 13 84 85
103	1 ## 48 55 73
113	1 ## 36 77 85
119	2 ## 20 99 101 ## 39 80 89
127	1 ## 15 112 113
137	1 ## 65 72 97
151	1 ## 60 91 109
161	2 ## 17 144 145 ## 44 117 125
167	1 ## 24 143 145
191	1 ## 51 140 149
193	1 ## 88 105 137
199	1 ## 19 180 181
217	2 ## 52 165 173 ## 85 132 157

También estas soluciones están ya publicadas en http://oeis.org/A120681 con distinto orden. En esa misma página se remite a una prueba de que los factores de los números de la lista (la mayoría son primos) tienen factores primos del tipo 8k+1 o 8k-1 (el desarrollo está en http://oeis.org/A001132)

La razón de esta propiedad es que estos números, al ser suma de catetos en una terna primitiva, se pueden escribir de la forma u^2-v^2+2uv, con u y v primos entre sí y uno de ellos par (ver, por ejemplo Wikipedia). Esto los convierte en soluciones de $(u+v)^2-2v^2=k$, es decir una ecuación del tipo $x^2-2y^2=k$.

La consideración anterior los convierte también en soluciones de diferencia de catetos, porque u^2-v^2-

$2uv=(u-v)^2-2v^2=2x^2-y^2$, es decir, la misma ecuación. Este hecho se refleja en

http://oeis.org/A058529.

Podemos hacer explícita esta equivalencia. Si una suma de catetos proviene de dos valores **u** y **v**, su equivalente como diferencia se basa en los valores u+2v, v. Es fácil verlo:

Suma de catetos: $(u+v)^2-2v^2$

Diferencia equivalente: $(u+2v-v)^2-2v^2$

Es fácil verificarlo con dos ejemplos:

7 es suma de catetos en la terna (3, 4, 5), que corresponde a u=2, v=1. Los valores para que sea diferencia son u+2v=4 y v=1, que forman la terna $(2*4*1, 4^2-1^2, 4^2+1^2,)=(8, 15, 17)$, en la que la diferencia de catetos es también 7.

Otro ejemplo: En la terna (5, 12, 13), u=3 y v=2 con suma de catetos 17

El equivalente es $(7-2)^2-2*2*2=17$, que es diferencia de catetos en la terna $(7^2-2^2, 2*7*2, 7^2+2^2)=(45, 28, 53)$, y 45-28=17.

Doblado en hipotenusa y cateto

En lugar de exigir una suma de catetos podemos estar interesados en suma de hipotenusa y un cateto. Para ello bastará cambiar algún signo en los códigos de

Excel y PARI y modificar las cotas de los datos. Puede quedar de esta forma:

```
Function doblado$(n)
Dim i, j, k, m, p
Dim s$

m = 0
s = ""
For i = 1 To n
j = n - i
If j < i And j > 0 Then ‘Acotamos el cateto
k = i ^ 2 - j ^ 2 ‘En lugar de sumar, restamos
If escuad(k) Then
p = Sqr(k)
If mcd(i, mcd(j, p)) = 1 Then m = m + 1: s = s + " ##" + Str$(i) + " " + Str$(j) + " " + Str$(p) ‘Seguimos buscando primitivas
End If
End If
Next i
If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s
doblado = s
End Function
```

Al hacer uso del MCD indicamos que deseamos soluciones sobre ternas primitivas. Buscamos números con esta función y los primeros que encontramos son estos:

8	1 ## 5 3 4
9	1 ## 5 4 3
18	1 ## 13 5 12
25	2 ## 13 12 5 ## 17 8 15
32	2 ## 17 15 8 ## 25 7 24
49	3 ## 25 24 7 ## 29 20 21 ## 37 12 35
50	2 ## 29 21 20 ## 41 9 40
72	2 ## 37 35 12 ## 61 11 60
81	3 ## 41 40 9 ## 53 28 45 ## 65 16 63
98	3 ## 53 45 28 ## 65 33 56 ## 85 13 84
121	5 ## 61 60 11 ## 65 56 33 ## 73 48 55 ## 85 36 77 ## 101 20 99
128	4 ## 65 63 16 ## 73 55 48 ## 89 39 80 ## 113 15 112
162	3 ## 85 77 36 ## 97 65 72 ## 145 17 144
169	6 ## 85 84 13 ## 89 80 39 ## 97 72 65 ## 109 60 91 ## 125 44 117 ## 145 24 143
200	4 ## 101 99 20 ## 109 91 60 ## 149 51 140 ## 181 19 180
225	4 ## 113 112 15 ## 137 88 105 ## 173 52 165 ## 197 28 195
242	5 ## 125 117 44 ## 137 105 88 ## 157 85 132 ## 185 57 176 ## 221 21 220
288	4 ## 145 143 24 ## 169 119 120 ## 193 95 168 ## 265 23 264

A primera vista comprobamos que existen muchas más soluciones múltiples. En la imagen ya aparece la primera con 6, el 169.

Otro hecho que se descubre es que todas las soluciones son cuadrados o dobles de un cuadrado. La razón es sencilla, ya que al sumar una hipotenusa y un cateto en una terna primitiva, podemos encontrarnos con dos posibilidades:

Sumar u^2+v^2+2uv: En ese caso obtendríamos el cuadrado $(u+v)^2$

Sumar $u^2+v^2+u^2-v^2$, lo que os llevaría a $2u^2$, el doble de un cuadrado.

Este razonamiento nos llevaría a pensar, como en el caso de los dos catetos, que estos números también serán diferencias entre hipotenusas y catetos, y en efecto, u^2+v^2-2uv es un cuadrado y $u^2+v^2-u^2+v^2$ el doble de un cuadrado. Esta propiedad se refleja en http://oeis.org/A096033

Doblado en tres lados

El número que consideremos se podrá descomponer en tres lados, es decir, de forma que sea el perímetro de un triángulo rectángulo. Hay varias formas de plantearlo, pero por seguir los métodos de búsqueda anteriores, ampliamos las funciones usadas para que admitan una variable más. La función doblado quedaría así:

```
Function doblado$(n)
Dim i, j, k, m
Dim s$

m = 0
s = ""
For i = 1 To n - 2 'Llegamos a n-2 buscando la hipotenusa
For j = 1 To i - 1 'Primer cateto
If j < i Then
k = n - i - j 'El otro posible cateto
If i ^ 2 = j ^ 2 + k ^ 2 And k < j And k > 0 Then m = m + 1: s = s + " ##" + Str$(i) + " " + Str$(j) + " " + Str$(k) 'En caso afirmativo, incorporamos a la solución
End If
Next j
Next i
```

If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + s 'Añadimos número de soluciones

doblado = s

End Function

En este caso, la búsqueda nos devolvería estos primeros resultados:

12	1 ## 5 4 3
24	1 ## 10 8 6
30	1 ## 13 12 5
36	1 ## 15 12 9
40	1 ## 17 15 8
48	1 ## 20 16 12
56	1 ## 25 24 7
60	2 ## 25 20 15 ## 26 24 10
70	1 ## 29 21 20
72	1 ## 30 24 18
80	1 ## 34 30 16
84	2 ## 35 28 21 ## 37 35 12
90	2 ## 39 36 15 ## 41 40 9
96	1 ## 40 32 24
108	1 ## 45 36 27
112	1 ## 50 48 14
120	3 ## 50 40 30 ## 51 45 24 ## 52 48 20
126	1 ## 53 45 28
132	2 ## 55 44 33 ## 61 60 11
140	1 ## 58 42 40
144	2 ## 60 48 36 ## 65 63 16

Las soluciones se han publicado en http://oeis.org/A010814

Si incorporamos la condición de que los tres lados, catetos e hipotenusa, sean primos entre sí, obtendremos las soluciones para ternas primitivas, que serán iguales a las anteriores o divisores de ellas, pues es sabido que el perímetro de una terna siempre es múltiplo de otro correspondiente a una primitiva. Lo hemos efectuado así, resultando:

12	1 ## 5 4 3
30	1 ## 13 12 5
40	1 ## 17 15 8
56	1 ## 25 24 7
70	1 ## 29 21 20
84	1 ## 37 35 12
90	1 ## 41 40 9
126	1 ## 53 45 28
132	1 ## 61 60 11
144	1 ## 65 63 16
154	1 ## 65 56 33
176	1 ## 73 55 48
182	1 ## 85 84 13
198	1 ## 85 77 36

Están publicados en http://oeis.org/A024364

Según los párrafos anteriores, la expresión de estos resultados vendrá dada por $u^2+v^2+u^2-v^2+2uv=2u^2+2uv=2u(u+v)$, donde u y u+v son primos entre sí. Por ello, si u es par, o lo es u+v, la solución será un número múltiplo de 4, y solo de 2 en caso contrario.

Por ejemplo, en la terna (5, 4, 3), u=2, v=1, $u^2+v^2=5$, $u^2-v^2=3$ y 2uv=4, el perímetro es 12=5+4+3, y es múltiplo de 4 por ser **u** par.

Sin embargo, en la terna (13, 12, 5), u=3, v=2, $u^2+v^2=13$, $u^2-v^2=5$ y 2uv=12. En este caso, u es impar, y u+v también, lo que significa que el perímetro 30 es múltiplo de 2, pero no de 4.

A la vista de los resultados podría parecer que cada solución se corresponde con una sola terna primitiva, pero no es así, pues, por ejemplo, 1716 se corresponde con dos:

1716=725+627+364 y 725^2=627^2+364^2; MCD(725, 627, 364)=1

1716=773+748+195 y 773^2=748^2+195^2; MCD(773, 748, 195)=1

Se puede detectar esto mediante un algoritmo en PARI, similar a este:

```
for(u=2,30,for(v=1,29,if(gcd(u,v)==1&&(u+v)%2==1&
&u>v,write("final.txt",2*u*(u+v)))))
```

Engendra las soluciones buscando los valores de u y v adecuados.

Vuelca la solución en un archivo, al que hemos dado el nombre de “final.txt”. Las soluciones se escribirán en columna, pero desordenadas. Habrá que copiarlas en una hoja de cálculo, ordenar la columna y detectar los duplicados. Es otra forma de actuar.

1610
1612
1624
1628
1650
1674
1680
1702
1716
1716
1722
1736
1776
1794
1798

NÚMEROS DE HOGBEN

La elección de temas que efectúo para este blog tiene a veces carácter azaroso. Dentro de mis publicaciones en Twitter (@connumeros) descubrí que el número 1723 equivale a la suma de dos números triangulares de órdenes 40 y 42 respectivamente. Me gustó la idea y emprendí un estudio algebraico del tema:

Sean los órdenes k y k+2, con N como suma de dos triangulares. Tendremos:

$k(k+1)/2+(k+2)(k+3)/2=N$

$k(k+1)+(k+2)(k+3)=2N$

$K^2+k+k^2+5k=2N-6$

$2k^2+6k=2N-6$

$4k^2+12k=4N-12$

$(2k+3)^2=4N-3$

Esta identidad me llevó a buscar los números N en los que 4N-3 es un cuadrado, para después, posteriormente despejar el valor de k.

Emprendí la búsqueda y obtuve este listado:

N	k
3	0
7	1
13	2
21	3
31	4
43	5
57	6
73	7
91	8
111	9
133	10
157	11
183	12
211	13
241	14

Cuando obtengo un resultado así (podía haber comenzado con los valores de k), suelo buscarlo en la página OEIS (http://oeis.org/) y así fue como llegue a los números de Hogben (http://oeis.org/A002061), que no había tratado en este blog. Decidí cambiar mis planteamientos iniciales para dedicarme a estudiar esos números con mis herramientas usuales. Como dan lugar a muchas curiosidades, y están todas muy bien desarrolladas en distintas páginas, iré enlazándolas cuando crea que no puedo aportar nada nuevo.

Números de Hogben

Podemos definirlos como aquellos que son suma de dos números triangulares cuyos órdenes se diferencian en dos unidades, pero también vemos en la tabla que **$H(k)=k^2-k+1$**, como por ejemplo H(5)=25-5+1=21, y H(7)=49-7+1=43.

Si despejo N en una igualdad anterior, me queda:

$(2k+3)^2=4N-3$; $4N=4k^2+12k+9+3$; $N=k^2+3k+3$

Puedo expresar N en función de k+2:

$N=k^2+3k+3=(k+2)^2-(k+2)+1$

Para que coincida esta expresión con la generación de la tabla basta elegir k como el índice mayor de los dos triangulares que se suman, es decir, k+2, y así se establece la coincidencia de métodos.

$N= k^2-k+1$

Esta es la definición que se usa en http://oeis.org/A002061. Hay que recordar que en OEIS se prefiere iniciar las sucesiones con índice 0:

A002061 Central polygonal numbers: a(n) = n^2 - n + 1.

1, 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91, 111, 133, 157, 183, 211, 241, 273, 307, 343, 381, 421, 463, 507, 553, 601, 651, 703, 757, 813, 871, 931, 993, 1057, 1123, 1191, 1261, 1333, 1407, 1483, 1561, 1641, 1723, 1807, 1893, 1981, 2071, 2163, 2257, 2353, 2451, 2551, 2653

Estos números, rotulados como “poligonales centrales” son los números de Hogben.

Si situamos los números naturales en espiral, los de Hogben ocupan los extremos de la diagonal principal, tal como podemos observar en la tabla creada con hoja de cálculo:

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
									91

La razón estriba en que la diferencia entre dos números de Hogben consecutivos es

$H(n+1)-H(n)=(n+1)^2-n-1+1-n^2+n-1=2n$

Vimos más arriba que H(5)=21, luego su diferencia con el siguiente será 2*5=10, y en la espiral vemos que se necesitan diez pasos para ir de 21 a 31. Como el número de pasos va creciendo de 2 en 2 y el incremento H(n+1)-H(n) también, se dará esa coincidencia en todos los casos.

La anterior fórmula se puede interpretar como una recursión:

$H(n+1)=H(n)+2n$

Por ejemplo, 13 es el número de Hogben de índice 4, luego el siguiente será 13+2*4=21, como era de esperar.

Con nuestra herramienta para prolongar recurrencias podemos buscar una de tipo homogéneo, y, en efecto, es muy simple:

$H(n+3)=3*H(n+2)-3*H(n+1)+H(n)$

(http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm)

Es así por ser un polinomio de segundo grado, y con ellos funciona esta recurrencia siempre. Lo puedes comprobar con esta captura de pantalla de la calculadora Wiris (https://calcme.com/a)

$$3*(a(x+2)^2+b(x+2)+c)-3(a(x+1)^2+b(x+1)+c)+ax^2+bx+c \quad =$$

$$a\cdot x^2+6\cdot a\cdot x+9\cdot a+b\cdot x+3\cdot b+c$$ Calc

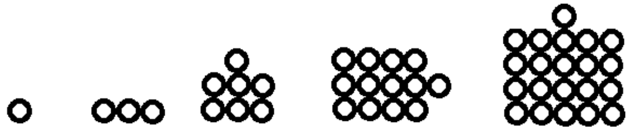
$$a(x+3)^2+b(x+3)+c \quad = \quad a\cdot x^2+6\cdot a\cdot x+9\cdot a+b\cdot x+3\cdot b+c$$ Calc

Se ha desarrollado la suma de la recurrencia y el resultado esperado, obteniendo el mismo resultado.

Dados tres términos consecutivos, como 31, 43, 57, se cumple que el siguiente, 73, se puede encontrar de la forma 3*57-3*43+31, y así es, porque el resultado es 73.

En la entrada de blog http://voodooguru23.blogspot.com/2018/11/hogben-numbers.html puedes consultar algunas propiedades interesantes de estos números. Están bien desarrolladas y sería inútil repetirlas aquí.

Una interpretación sencilla de estos números es que n^2-n+1 equivale a $n(n-1)+1$, es decir, a un número oblongo (y por tanto rectangular) al que le añadimos una unidad. Lo hemos representado así:



En la siguiente página se intenta explicar por qué Sloane y Plouffe llamaron a estos números “poligonales centrales”. Es interesante su lectura.

http://mrob.com/pub/seq/a002061.html

Cuatro propiedades aritméticas

(1) Según afirma Amarnath Murthy en la página de OEIS enlazada, el número de Hogben H(n) se puede interpretar como el término **n** de una progresión de diferencia **n** que comienza en 1. En efecto:

N=1: D=1: H(n)=1

N=2, D=2: 1, 3

N=3, D=3: 1, 4, 7

N=4, D=4: 1, 5, 9, 13

Vemos que todas las progresiones así construidas finalizan en un número de Hogben.

Esto es ningún misterio. Según la teoría de las progresiones tendremos:

$H(n)=H(1)+D*(n-1)=1+n(n-1)=n^2-n+1$, que es la fórmula de estos números.

(2) Los números de Hogben son los residuos de n^3 respecto a n^2+1

Con la función RESIDUO de Excel y Calc es fácil comprobarlo:

N	N^3	RESIDUO(N^3;N^2+1)
1	1	1
2	8	3
3	27	7
4	64	13
5	125	21
6	216	31
7	343	43
8	512	57
9	729	73

Algebraicamente también es fácil, porque $n^3=(n-1)*(n^2+1)+n^2-n+1$ con lo que el residuo es

$n^2-n+1=H(n)$

(3) Los números de Hogben H(n) se representan como 111 en la base (n-1)

Por ejemplo, 7(10 = 111(2, 13(10=111(3, 21(10=111(4

La razón es que $H(n+1)=(n+1)^2-(n+1)+1$ por definición, y simplificando queda n2+n+1, lo que significa 111(n.

(4) Si recordamos el cociente entre una suma de potencias y la suma de sus bases, obtendremos un sencillo resultado:

$$\frac{n^3+1}{n+1}=n^2-n+1=H(n)$$

Así que basta dividir el cubo de n^3+1 entre n+1 para obtener H(n):

H(4)=(64+1)/(4+1)=13

H(7)=(343+1)/(7+1)=344/8=43

LOS PSEUDOPRIMOS

La idea de número pseudoprimo surge de los grandes teoremas de la Aritmética Modular

(Ver mi publicación

http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.pdf):

Podemos comenzar por el de Euler: Si llamamos **φ(m) a** la **indicatriz de Euler** de m, se cumplirá que

$\mathbf{a}^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

para todo **a** primo con m. (*Teorema de Euler*)

Si **m** es primo, la igualdad anterior se puede expresar como

$\mathbf{a}^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$

(Pequeño Teorema de Fermat)

El recíproco no es cierto. Si para un **a** primo con m se cumple

$\mathbf{a^{m-1}=1 \ (mod\ m)}$, entonces **m** no tiene que ser necesariamente primo. A estos números compuestos que cumplen el teorema les llamaremos **pseudoprimos**

de Fermat (hay otras clases de pseudoprimos). Este carácter dependerá del valor de la base **a**.

Identificación de pseudoprimos

No es nada complicado identificar un pseudoprimo respecto a una base dada. Las operaciones son sencillas, pero pueden alcanzar números muy grandes, por lo que tendremos que usar técnicas de Aritmética Modular en algunos casos, para abreviar cálculos y datos.

La primera operación es la de obtener el resto de una potencia respecto a un módulo, lo que llamamos ***resto potencial***. En nuestra web figura una hoja de cálculo de hace años, muy simple, que los calcula para datos no muy grandes

http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/hoja/potenciales.xls

La teoría sobre restos potenciales también la puedes consultar en nuestro documento

http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.pdf

Aquí partiremos de una función que actuará sobre tres datos:

- Base de la potencia b
- Exponente p
- Módulo m

Sobre ellos actuará la función RESTOPOT para Excel y LibreOffice Calc, que irá construyendo la potencia mediante multiplicaciones, pero convirtiendo cada resultado en resto módulo m, con lo que no se disparará la magnitud de los datos. Este es su listado:

Función RESTOPOT
Public Function restopot(b, p, n)
Dim r, m, i

r = b Mod n ‘Resto de la base respecto a m
m = 1
For i = 1 To p ‘Se construye la potencia con restos
m = m * r Mod n ‘m irá recorriendo los restos ***potenciales***
Next i
restopot = m
End Function

Por ejemplo, el resto de 3^26 respecto al módulo 7 sería RESTOPOT(3;26;7)=2, como puedes comprobar en la hoja *potenciales.xls* presentada más arriba:

26	2,54187E+12	2	2

Con esta función podemos averiguar si $\mathbf{a}^{\mathbf{m-1}} \equiv 1 \pmod{m}$ y si **m** es compuesto, con lo que tendría el carácter de pseudoprimo.

Contando con la función RESTOPOT es fácil exigir que se cumplan las condiciones para ser pseudoprimo en una base dada.

```
Public Function espseudo(m, b) As Boolean
If Not esprimo(m) And mcd(m, b) = 1 And restopot(b, m - 1, m) = 1 Then espseudo = True Else espseudo = False
End Function
```

Nos limitamos a exigir que

- Sea compuesto
- Primo con la base
- El resto potencial $\mathbf{b}^{\mathbf{m-1}}$ respecto a **m** sea 1

Con esta función y un bucle de búsqueda podemos reproducir muchas sucesiones de pseudoprimos ya publicadas en OEIS. Por ejemplo, para b=23 obtenemos esta lista:

Pseudoprimos en base 23

22, 33, 91, 154, 165, 169, 265, 341, 385, 451, 481,…

La puedes comprobar en http://oeis.org/A020151

En base 11

Obtenemos: 10, 15, 70, 133, 190, 259, 305, 481, 645, 703, 793, 1105, 1330, 1729, 2047, 2257

(Ver http://oeis.org/A020139)

Versión en PARI

Si deseas estudiar números mayores contando con la mayor velocidad de proceso de PARI, puedes usar este código debidamente adaptado a tus datos (está construido para base 23 y búsqueda hasta el 4000):

```
rpm(b,p,n)={my(r,m,i);r=b%n;m=1;for(i=1,p,m=(m*r)
%n);m}
espseudo(m,b)=!isprime(m)&&gcd(m,b)==1&&rpm(b
,m-1,m)==1
for(k=2,4000,if(espseudo(k,23),print1(k,", ")))
```

Lo hemos adaptado a base 17 y cota 20000, obteniendo:

4, 8, 9, 16, 45, 91, 145, 261, 781, 1111, 1228, 1305, 1729, 1885, 2149, 2821, 3991, 4005, 4033, 4187, 4912, 5365, 5662, 5833, 6601, 6697, 7171, 8481, 8911, 10585, 11476, 12403, 12673, 13333, 13833, 15805, 15841, 16705, 19345, 19729,…

Coinciden con los pseudoprimos publicados en http://oeis.org/A020145

Números de Carmichael

Si un número es pseudoprimo con base todos los números coprimos con él, se llama “de Carmichel”.

Los primeros los tienes en https://oeis.org/A002997:

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633,…

Bastará recorrer los números coprimos con uno de ellos y comprobar que es pseudoprimo con todos ellos.

Hay criterios más sencillos, que puedes consultar en https://en.wikipedia.org/wiki/Carmichael_number.

Números de Sarrus o Poulet

Estos son los pseudoprimos en base 2, también llamados números de Sarrus, Poulet o simplemente psudoprimos, sin especificar el módulo.

El primer pseudoprimo módulo 2 es el 341, porque es compuesto (341=11*31) y cumple que

$\mathbf{2^{340}} \equiv 1 \pmod{341}$

Esta condición se verifica fácilmente, ya que 2^{10}=1024=3*341+1 presenta resto 1 respecto al módulo

341, por lo que todas sus potencias, entre ellas 2^{340} también tendrán ese mismo resto.

El segundo pseudoprimo módulo 2 es 561, que es compuesto (561=3*11*17) y se verifica que

$\mathbf{2^{560}} \equiv 1 \pmod{561}$

La sucesión de números de Poulet la tienes en http://oeis.org/A001567

341, 561, 645, 1105, 1387, 1729, 1905, 2047, 2465, 2701, 2821, 3277, 4033, 4369, 4371, 4681, 5461, 6601, 7957, 8321, 8481, 8911, 10261, 10585, 11305, 12801, 13741, 13747, 13981, 14491, 15709, 15841, 16705, 18705, 18721, 19951, 23001, 23377, 25761, 29341

Aquí nos hemos limitado a presentar conceptos básicos y facilitar la búsqueda de pseudoprimos. Se podría extender más su estudio, pero superaría los objetivos de este blog.

NÚMEROS ADMIRABLES

Pedro D. Pajares (@Pedrodanielpg) twitteó el día 31/12/21

En Matemáticas decimos que un número es ADMIRABLE si al SUMAR sus divisores propios (todos los divisores salvo él mismo) CAMBIANDO EL SIGNO de uno de ellos, obtenemos el mismo número.

(https://twitter.com/Pedrodanielpg/status/1476932068827443203?t=uj-WEOnFugC2oAdYEfpnWw&s=03)

Como ya es tradicional en este blog, Twitter nos proporciona detalles que se pueden extender en varias direcciones. Es lo que efectuaremos con los números admirables. Hay que agradecer a Pedro D. Pajares su información.

No sigo con atención los nombres algo curiosos que se suelen dar a números naturales, por lo que no conocía este término de “admirable”. Imagino que se lo merecen números que, como veremos, presentan una cercanía teórica con los números perfectos. En estos la coincidencia se da con la suma de todos los divisores propios (parte alícuota) y en los admirables a esa suma hay que restarle el doble de uno de los divisores, para que así cambie su signo en la suma.

Por ejemplo, es admirable 650, porque sus divisores propios suman de esta forma:

652=325+130+65+50+26+25+13+10+5+2+1

La diferencia entre 650 y la suma de los divisores propios es 2, luego bastará cambiar de signo al 1:

650=325+130+65+50+26+25+13+10+5+2-1

Este sencillo cálculo nos da una pista de cómo saber si un número es admirable:

- Ha de ser abundante, es decir, que la suma de sus divisores propios sea mayor que él
- La diferencia entre ambos ha de ser par, y su mitad, divisor del número.

Con estas condiciones es fácil saber si un número es abundante o no. Como es costumbre, comenzaremos con una búsqueda de "fuerza bruta" y después la mejoraremos.

En cualquier método que usemos, habrá que usar la función SIGMA, que está implementada en muchas herramientas. No lo está en hojas de cálculo, pero si buscas "Sigma", o "función sigma" en este blog encontrarás nuestra versión. Por ejemplo, en https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/10/la-funcion-sigma-y-sus-traslados.html

Con esta función es fácil construir que nos indique si un número es admirable:

Public Function esadmirable(a)
Dim s, i, d
'Es suma de sus divisores propios cambiando a uno de signo

s = sigma(a) - a 'Partes alicuotas
d = 0
i = 1
While i <= a / 2 And d = 0 'Recorre divisores

If a / i = a \ i Then

If s - 2 * i = a Then d = i ‘Si es divisor y construye la suma adecuada, es la solución

End If

i = i + 1

Wend

esadmirable = d ‘Devuelve un 0 si no encuentra el divisor adecuado.

End Function

Con esta función distinguimos los admirables de los que no lo son. En estos últimos devolvería un cero. En este intervalo elegido al azar, aparecen dos admirables:

98	0
99	0
100	0
101	0
102	6
103	0
104	1
105	0
106	0
107	0
108	0
109	0
110	0

Son el 102, con divisor 6 y 104 con el 1. En efecto:

102=51+34+17**-6**+3+2+1

104=52+26+13+8+4+2**-1**

Esta función es ineficiente. Con las ideas expresadas más arriba, es mejor esta:

Public Function esadmirable(a)
Dim s, i, d, es
'Es suma de sus divisores propios cambiando a uno de signo

s = fsigma(a, 1) - a 'partes alicuotas
d = s – a ‘Halla la diferencia entre la suma de divisores propios y el número
If d > 0 And d / 2 = d \ 2 Then ‘La diferencia ha de ser positiva y par
i = d / 2 ‘Si la mitad de la diferencia es un divisor, es un número admirable
If a / i = a \ i Then es = i Else es = 0
End If
esadmirable = es
End Function

Si volvemos al intervalo elegido en párrafos anteriores se puede comprobar la equivalencia entre ambas funciones:

N	F1	F2
98	0	0
99	0	0
100	0	0
101	0	0
102	6	6
103	0	0
104	1	1
105	0	0
106	0	0
107	0	0
108	0	0
109	0	0
110	0	0

Según las condiciones de este planteamiento, existirán infinitos números admirables, porque lo serán todos los múltiplos de 6 formados como 6p, con p primo mayor que 3. En efecto:

Si N=6p, con primo y mayor que 3 (para eliminar los casos 2 y 3), sus divisores serán 1, 2, 3, 6, p, 2p, 3p, 6p y la suma de los divisores propios (eliminando 6p) tendrá el valor de 12+6p, con lo que su diferencia con N será 12, que cumple la condición de ser par y doble de un divisor. Por tanto, en estos números el divisor que hay que cambiar de signo es el 6, como vemos en esta tabla de múltiplos de 6 de este tipo:

Primo P	Número 6P	Divisor con signo -
5	30	6
7	42	6
11	66	6
13	78	6
17	102	6
19	114	6
23	138	6
29	174	6
31	186	6
37	222	6
41	246	6
43	258	6
47	282	6

Son muy escasos los números consecutivos que son admirables ambos. Según

https://www.numbersaplenty.com/

sólo existen dos pares menores que 10^12:

(29691198404, 29691198405) y (478012798575, 478012798576).

Sabemos que todos los admirables son abundantes, pero se puede concretar afirmando que su abundancia (cociente entre SIGMA(N) y N) está entre 2 y 3

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2011/05/como-crece-la-abundancia.html)

En efecto, por ser abundante, ha de ser mayor que 2, pero si fuera superior a 3, la diferencia con las partes alícuotas no podría ser el doble de un divisor. Lo vemos en los múltiplos de 6 que hemos estudiado:

Número 6P	Divisor	Abundancia
30	6	2,4
42	6	2,2857143
66	6	2,1818182
78	6	2,1538462
102	6	2,1176471
114	6	2,1052632
138	6	2,0869565
174	6	2,0689655
186	6	2,0645161
222	6	2,0540541
246	6	2,0487805
258	6	2,0465116
282	6	2,0425532

Números compatibles

Al igual que los números perfectos dan lugar a los números amigos, como aquellos en los que cada uno de ellos coincide con la suma de divisores propios del otro (*Números amigos - Wikipedia, la enciclopedia libre*), los admirables dan lugar a los compatibles.

En un par de números compatibles, cada uno de ellos coincide con la suma de los divisores propios del otro si en esa suma se ha cambiado de signo un divisor.

Por ejemplo, 24 Y 28 son compatibles, según estas dos sumas:

28=12+8+6-4+3+2+1 (divisores propios de 24)

24 =14+7+4-2+1 (ídem de 28)

Los números menores de cada par están publicados en A109797 - OEIS:

24, 30, 40, 42, 48, 60, 80, 80, 96, 102, 126, 140, 140, 156, 156, 156, 174, 180, 180, 198,…

Los mayores de cada par se encuentran en http://oeis.org/A109798, y son:

28, 40, 42, 52, 60, 96, 102, 104, 124, 110, 182, 182, 188, 210, 230, 234, 184, 358, 362,…

Las repeticiones en ambas listas son una prueba de que esta relación no es biunívoca.

Hemos diseñado una función de dos variables para Excel, que nos devuelve el factor de cada una para que los números sean compatibles:

```
Public Function soncompatibles$(a, b)
Dim s, i, d
Dim s1$, s2$
s = fsigma(b, 1) - b 'partes alicuotas de b
d = 0
i = 1
ss$ = ""
While i <= b / 2 And d = 0
If b / i = b \ i Then
If s - 2 * i = a Then d = i: s1$ = "De b: " + Str$(d)
End If
i = i + 1
Wend
If s1 <> "" Then
s = fsigma(a, 1) - a 'partes alicuotas de a
d = 0
```

```
i = 1
While i <= a / 2 And d = 0
If a / i = a \ i Then
If s - 2 * i = b Then d = i: s2$ = " De a:" + Str$(d)
End If
i = i + 1
Wend
End If
If s1 <> "" And s2 <> "" Then ss = s1 + s2 Else ss =
"NO"
soncompatibles = ss
End Function
```

No necesita explicación, porque es como una duplicación de la función para admirables. Si los números no son compatibles devuelve un NO. Con esta función y una búsqueda adecuada se pueden descubrir compatibles mayores que los publicados.

Por ejemplo, con esta función *mayorcompatible* es posible encontrar los mayores compatibles que figuran entre 1000 y 1100:

```
Public Function mayorcompatible(b)
Dim i
Dim a$, c$
i = 2
a = ""
```

```
While i < b And a = ""
c$ = soncompatibles(i, b)
If c$ <> "" Then a$ = c$ + " con " + Str$(i)
i = i + 1
Wend
If a$ = "" Then a$ = "NO"
mayorcompatible = a$
End Function
```

El resultado es:

1012 De b: 1 De a: 1 con 1002

....

1016 De b: 4 De a: 64 con 896

....

1022 De b: 2 De a: 50 con 750

....

1026 De b: 342 De a: 6 con 690

....

1034 De b: 2 De a: 2 con 690

....

1050 .... De b: 525 De a: 73 con 876

Hay que interpretar que, en primer lugar, figuran los divisores que hay que cambiar de signo, y en segundo lugar, el otro número del par de compatibles. Así el

1022 es compatible con 750 si cambiamos de signo el factor 2 de 1022 y el 50 de 750. Así:

750=511+146+73+14+7-2+1

1022=375+250+150+125+75-50+30+25+15+10+6+5+3+2+1

El encontrar el menor compatible es más complejo, porque de entrada no se puede saber hasta dónde buscar. Se puede adaptar la anterior función a una cota, por ejemplo a tres veces el número, sabiendo que sólo es válido el resultado positivo, si completa el par, pero ante resultados negativos habría que subir esa cota.

NÚMEROS DE ZUMKELLER

Definición y búsqueda

Quienes visitamos a menudo la *La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros (OEIS)* http://oeis.org conocemos muy bien a Reinhard Zumkeller, uno de los autores que más ha aportado conocimientos a esta página. En 2010 publicó los números que estudiaremos a continuación, y T. D. Noe, otro colaborador muy distinguido les asignó su nombre, y así son ya conocidos, como “los números de Zumkeller”.

A pesar de su reciente publicación, ya existen reseñadas muchas propiedades. Basta buscar en OEIS “Zumkeller numbers”. Aquí, en nuestra modestia, nos limitaremos a lo que sea fácil de implementar en hoja de cálculo. En este caso usaremos Excel.

La definición es muy sencilla de entender: Son números de Zumkeller aquellos en los que sus divisores se pueden repartir en dos conjuntos que tengan la misma suma. No han de contener divisores consecutivos en el orden natural, ni tener el mismo número de elementos. Un ejemplo:

El número 25122 posee los siguientes divisores:

1+2+3+6+53+79+106+158+159+237+318+474+4187+8374+12561+25122 = 51840

Esta suma de 51840 se puede repartir entre dos particiones de los divisores, de forma que sus sumas sean iguales. Serían estas:

1+2+3+53+79+106+158+159+237+4187+8374+12561 = 25920

6+318+474+25122 = 25920

Le daremos a 25122 el título de número de Zumkeller. No es una condición difícil de cumplir, y la prueba es que estos números aparecen entre los naturales con frecuencias altas. Estos son los primeros:

6, 12, 20, 24, 28, 30, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 102, 104, 108,…

(Puedes consultar la página dedicada a estos números en OEIS: http://oeis.org/A083207)

Búsqueda de números de Zumkeller

En la página citada se incluyen códigos en distintos lenguajes de programación para decidir si un número es de Zumkeller o no. Con ellos hemos sabido que 25122 era de ese tipo. Todos se basan en la idea de las particiones de un conjunto, y por la orientación de la página, no se incluyen las dos particiones de igual suma. Eso es lo que se va a estudiar en esta entrada.

Últimamente acudimos a funciones para organizar búsquedas, pero como esa operación ya está bien estudiada, con lenguajes más potentes que Excel, nos ha parecido conveniente regresar a los esquemas de cálculo con botones y macros, de los que está lleno este blog.

La idea que se usará para buscar las dos particiones se basa en que el número de subconjuntos de un conjunto de N elementos es 2^N. Cada partición se puede caracterizar por un número binario de N dígitos, en el que 1 puede significar que ese elemento entra en el conjunto y 0 que no entra. De esa forma, buscar particiones equivale a recorrer, en binario, todos los números entre 1 y 2^N-1. No consideramos el 0, que devolvería el conjunto vacío. Lo vemos aplicado al ejemplo anterior

Conjunto	1	2	3	6	53	79	106	158	159	237	318	474	4187	8374	12561	25122
Número binario	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
Partición	1	2	3		53	79	106	158	159	237			4187	8374	12561	
Número binario	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
Partición				6							318	474				25122

Hemos implementado esta idea en la hoja de cálculo *zumkeller.xlsm*, alojada en nuestra web Hojamat.es

http://www.hojamat.es/blog/zumkeller.xlsm

Su funcionamiento sigue varios pasos:

1) Dado un número entero positivo en la celda correspondiente, la hoja calcula la suma de sus divisores, y si no es par o esa suma no sobrepasa el doble del número, lo rechaza, porque no se puede repartir en dos particiones.

18		Inicio		¿Es un número de Zumkeller?
	Mensaje	SIGMA no es par. No se puede seguir		
Sigma	39	Tau	6	

2) Si SIGMA es par se buscan todos los divisores del número, y simultáneamente se van también sumando, para obtener SIGMA de nuevo y contando, para conocer TAU. Este último valor es muy importante, porque determinará en número de subconjuntos a buscar, que será 2^{TAU}-1, según se explicó más arriba. Si descargas la hoja y pides *Programador-Visual Basic* podrás estudiar el código de las macros. Si no tienes

esa barra **Programador** puedes activarla en las **Opciones**.

La macro ordenará los divisores en columna, y junto a ellos irá desplegando todos los números en binario desde 2^{TAU}-1 hasta 1. Después multiplicará los divisores por estos unos y ceros para construir una partición. Lo puedes ver en esta imagen:

		Sigma	96
		Suma	48
Divisores	Auxiliar	Binario	Sumandos
1	136	0	0
2	68	0	0
3	34	0	0
6	17	1	6
7	8	0	0
14	4	0	0
21	2	0	0
42	1	1	42

Se está analizando el número 42. Su SIGMA es par, por lo que se inicia el proceso. El valor de TAU es 8 (no aparece en la imagen)

En la primera columna observamos los divisores de 42, que son ocho. La segunda es auxiliar, y sirve para construir los dígitos binarios. Multiplicando esos dígitos por los divisores se obtiene la cuarta columna, los sumandos de cada partición.

La macro no se detiene hasta que encuentra el valor correcto de suma, que en este caso es 6+42=48. La imagen de arriba se ha podido capturar porque se ha llegado a la detención de la macro. En caso contrario, si no hay solución, se recorren todas las posibilidades sin detención previa.

En caso de llegar a una solución, se reflejarán en la parte derecha las dos particiones con igual suma:

Total divisores: 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 + 42 = 96
Primera partición: 1 + 2 + 3 + 7 + 14 + 21 = 48
Segunda partición: 6 + 42 = 48

Esta hoja presenta una rapidez aceptable para valores de TAU inferiores a 12 o 15. En el resto de valores deberemos usar la paciencia y dejar a Excel que trabaje solo.

Un número de Zumkeller, como este 42 del ejemplo, será un sumando en una de las particiones, luego la otra tendrá como suma un número igual o superior a él, pero eso significará que el número será perfecto o abundante, porque la suma de su divisores propios será igual o mayor que él. En el caso del 42, sus divisores propios suman 54.

Casos particulares

(1) Se ha demostrado que todos los primoriales (ver en este blog https://hojaynumeros.blogspot.com/2012/02/el-primorial.html), a partir del 6 son de Zumkeller. Vemos un ejemplo, el 210=2*3*5*7:

Total divisores: 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10 + 14 + 15 + 21 + 30 + 35 + 42 + 70 + 105 + 210
Primera partición: 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 14 + 15 + 21 + 30 + 35 + 42 + 105 = 288
Segunda partición: 1 + 7 + 70 + 210 = 288

En estos números TAU es siempre una potencia de 2 (Ver en este blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=multiplicativas y siguientes)

y sigma es par, como en este caso, que es (1+2)(1+3)(1+5)(1+7)=576

Esto es consecuencia de lo que sigue.

(2) Los números del tipo $3*2^k$ son de Zumkeller. El mismo autor lo explica, y lo adaptamos aquí. Todo se basa en que las funciones SIGMA Y TAU son multiplicativas (ver en este blog la entrada https://hojaynumeros.blogspot.com/2011/10/funciones-multiplicativas-1.html) para factores coprimos. En este caso, $SIGMA(3*2^k)=SIGMA(3)*SIGMA(2^k)$ y desarrollando:

$Sigma=(1+3)(1+2+4+8+16+…2^k)=4*(2^{k+1}-1)$

Por ejemplo, en el caso de $96=3*2^5$ será $SIGMA(96)=4*(2^6-1)=4*63=252$

La mitad de esa expresión general será $2*(2^{k+1}-1)$, que coincide con la suma de divisores $3*2^k+3*2^{k-2}+…$y esa será una de las particiones pedidas. En el caso de 96 equivale a

$96+24+6=3*2^5+3*2^3+3*2^1=3*(2*(4^3-1)(4-1))=2*(2^6-1)=126$

Así que siempre tendremos una partición formada por una serie de divisores con potencias de 2 alternas. Lo vemos con nuestra hoja:

Total divisores: 1+2+3+4+6+8+12+16+24+32+48+96=252

Primera partición: 1+2+3+4+8+12+16+32+48=126

Segunda partición: 6+24+96=126

(3) Si a estos números del tipo $3*2^k$ los multiplico por un número coprimo con 2 y 3, el resultado sigue siendo del tipo Zumkeller.

Es evidente que si multiplico por un coprimo, todas las sumas quedarán multiplicadas y, según R. Gerbicz (ver http://oeis.org/A179527), el producto seguirá siendo de Zumkeller.

Eso ocurre, por ejemplo en 3*11*4=132

Total divisores:
1+2+3+4+6+11+12+22+33+44+66+132=336

Primera partición: 1+2+4+6+11+12+22+44+66=168

Segunda partición: 3+33+132=168

Observamos, como era de esperar, que SIGMA contiene todos los divisores de 12 y otros que son sus productos por 11

Esto demuestra la primera afirmación de que los primoriales son todos de Zumkeller.

(4) Los números admirables, de reciente publicación en este blog (ver entrada anterior a esta) también son de Zumkeller, porque ellos coinciden con la suma de sus divisores propios cambiando a un divisor de signo, o, lo que es igual restando a SIGMA dos veces este divisor. En este caso, basta sumar ese divisor para obtener las dos particiones. Lo vemos con un ejemplo:

812 es admirable y el divisor que cambia de signo es el 28:

812 =406+203+116+58+29-28+14+7+4+2+1

Si ahora sumamos 812+28=840, esa será la partición "corta". Lo comprobamos con nuestro esquema:

Total divisores: 1+2+4+7+14+28+29+58+116+203+406+812=1680

Primera partición: 1+2+4+7+14+29+58+116+203+406=840

Segunda partición: 28+812=840

Estamos llegando al límite de extensión que le doy a mis entradas, por lo que dejo materia para la siguiente.

Otros métodos de búsqueda

En el apartado anterior se diseñó un esquema de cálculo para encontrar las particiones de igual suma, típicas de los números de Zumkeller. El procedimiento, algo lento, consiste en escribir los divisores de un número en columna, acompañarlos sucesivamente con las expresiones binarias de los números 1 a 2^{TAU}-1 y mediante multiplicaciones, conseguir todas las particiones entre divisores:

Divisores

Binarios

Particiones

1	2320	0	0
2	1160	0	0
3	580	0	0
4	290	0	0
6	145	1	6
8	72	0	0
12	36	0	0
16	18	0	0
24	9	1	24
32	4	0	0
48	2	0	0
96	1	1	96

Este esquema, para valores de TAU superiores a 10 o 12, es bastante lento, pero existe una forma de simplificarlo un poco. La idea es que el número estudiado entrará, con toda seguridad, en una de las dos particiones, y acompañado, en general, por menos sumandos que en la otra partición.

Lo explicamos con el desarrollo para 204, cuya factorización es $3*2^2*17$, lo que asegura que es un número de Zumkeller. Sus particiones de igual suma son:

Total divisores:

1+2+3+4+6+12+17+34+51+68+102+204=504

Primera partición: 1+3+4+6+17+51+68+102=252

Segunda partición: 2+12+34+204=252

Los divisores han sido 1, 2, 3, 4, 6, 12, 17, 34, 51, 68, 102, 204

Si observamos la partición más corta, es claro que los sumandos compañeros de 204 no pueden superar la diferencia 252-204=48. Esto excluye a los divisores 51, 68, 102 y el mismo 204. Podríamos entonces cambiar los datos del problema:

- Los divisores podrían ser 1, 2, 3, 4, 6, 12, 17, 34
- La suma no tendría que ser 252, sino 48
- El valor real de TAU, que era de 12 divisores, se puede reducir a 8.

Hemos implementado una segunda hoja en nuestra herramienta http://www.hojamat.es/blog/zumkeller.xlsm duplicando el algoritmo, pero con estas modificaciones. El resultado, en el caso de 204 quedaría así:

		Sigma	48	Tau	8
		Suma	48		
1	162	0	0		
2	81	1	2		
3	40	0	0		
4	20	0	0		
6	10	0	0		
12	5	1	12		
17	2	0	0		
34	1	1	34		
51	0				
68					
102					

Observamos que el valor de TAU ha quedado en 8, por haber eliminado cuatro divisores, 51, 68, 102 y 204 (tres de ellos han quedado como residuales en la parte baja del esquema). También cambia el valor de la suma, que ahora es de 48, y, si observamos las columnas que crean particiones, tan solo llegan hasta el número 34.

Con estos cambios, la velocidad de proceso aumenta, más o menos según la factorización. En el resultado obtenido, la partición que nos interesa es la de menor número de sumandos. En este caso tendríamos:

Total divisores: 1+2+3+4+6+12+17+34=48

Primera partición: 1+3+4+6+17=48

Segunda partición: 2+12+34=48

Si a la segunda partición le añadimos el 204 obtendremos la solución del primer algoritmo:

2+12+34+204=252

Uso de nuestra herramienta "Cartesius"

Esto que sigue es una curiosidad, de la que se puede prescindir. Lo que tiene de importante es que nos puede devolver más de una solución a las particiones de igual suma.

En una entrada nuestra de hace unos cinco años, explicábamos el uso de Cartesius para lograr particiones.

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/06/cartesius-5-particiones-1.html)

Esta herramienta puedes descargarla desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

En la entrada referida se recomendaba este planteo para lograr una partición concreta, la del 7 en todos sus sumandos posibles:

XRANGO=7
XT=1..7
SUMA=7
CRECIENTE

Con algo de lentitud, crea todas las particiones del 7:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
7						
1	6					
2	5					
3	4					
1	1	5				
1	2	4				
1	3	3				
2	2	3				
1	1	1	4			
1	1	2	3			
1	2	2	2			
1	1	1	1	3		
1	1	1	2	2		
1	1	1	1	1	2	
1	1	1	1	1	1	1

Siguiendo las reflexiones de los párrafos anteriores, si elegimos, por ejemplo, el número 60=2*2*3*5, su TAU es igual a 12, y podríamos rebajarla a 10, porque la mitad de sigma es, en este caso, 84. Si le restamos el número 60 nos queda 24, y podemos eliminar los divisores 30 Y 60, con lo que nos quedaría:

Divisores válidos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20

Nueva TAU: 10

Suma exigida: 24

El planteo adecuado en Cartesius sería

XRANGO=10
XT=1,2,3,4,5,6,10,12,15,20
SUMA=24
CRECIENTE

De esta forma, con bastante lentitud, obtenemos dos soluciones en lugar de una:

X1	X2	X3	X4
4	20		
1	2	6	15

Las particiones de igual suma podrían ser

Primera partición:
1+2+3+5+6+10+12+15+30=84Segunda partición:
4+20+60=84Y también

Primera partición: 3+4+5+10+12+20+30=84

Segunda partición: 1+2+ 6+15+60=84

Ya se dijo que es una curiosidad, porque la falta de velocidad del proceso no compensa su utilidad, salvo que busquemos números de Zumkeller con varias soluciones.

LOS PANDIGITALES COMPLETOS

Se llaman pandigitales a los números que presentan en su representación todas las cifras posibles en una base de numeración. Aquí nos restringiremos a base 10 y a aquellos números que contienen todas las cifras del 0 al 9 (completos), pero sin repetición. Es el concepto más simple y útil respecto a otras variantes.

Es claro que el pandigital más pequeño de este tipo será 1023456789, y el mayor 9876543210. Como no consideramos repeticiones de cifras, su número será 10!=3628800 si admitimos el cero inicial, y 10!-9!= 3265920 si no lo admitimos.

Ningún número pandigital de este tipo puede ser un número primo, porque cumple el criterio de divisibilidad entre 9 y 3, al sumar sus cifras 45

Reconocimiento de pandigitales

No es fácil reconocer mediante un algoritmo si un número (del que no conocemos en principio su expresión decimal) es pandigital o no. Es evidente que normalmente conocemos sus cifras, pero en una búsqueda no. Por ejemplo, si buscamos un pandigital que sea triangular, no conocemos sus cifras hasta que lo encontremos.

Aquí, como es costumbre, estudiaremos dos versiones, una para hoja de cálculo y otra para PARI.

Proceso en PARI

La segunda es muy fácil de entender:

pandigi(n)= #vecsort(digits(m), , 8)==10

Literalmente nos dice, que si ordenamos el vector formado por las cifras (*vecsort(digits*), eliminamos repetidos (*parámetro 8*), y luego las contamos (*signo* #), ha de resultar un número igual a 10, que sería el número de cifras sin repetición.

Un ejemplo de uso de esta función es el de encontrar el primer pandigital cuadrado. Tomamos la menor base cuyo cuadrado tiene diez cifras, que es 31623, y vamos avanzando cuadrados hasta encontrar un pandigital. Sería así:

```
pandigi(m)=#vecsort(digits(m), , 8)==10
m=31623;q=m^2;while(pandigi(q)==0,m+=1;q=m^2);
print(m)
```

En primer lugar define la función *pandigi*, para reconocer pandigitales, y después avanza los cuadrados en un bucle ***while*** hasta encontrar un valor de *pandigi* que no sea cero.

El resultado es 1026753849=32043^2

El resto de los pandigitales cuadrados los puedes consultar en http://oeis.org/A036745

Proceso en hojas de cálculo

En este caso perdemos la potencia del lenguaje PARI, pero podemos imitar nuestro reconocimiento de un pandigital:

Nosotros iríamos recorriendo las cifras del número, y si falta una, lo rechazaríamos, y si existe una repetición, también. Después contaríamos que estuvieran las diez cifras.

Pues algo así realizaremos con VBasic. Para ello preparemos diez memorias que alojen las frecuencias de las cifras. Cada vez que aparezca una incrementamos la memoria correspondiente. Podemos organizar todo con esta función:

Public Function pandigital(a) As Boolean
Dim ci(10)
Dim i
Dim t As Boolean

t = True
For i = 0 To 9: ci(i) = 0: Next i ‘Preparamos diez memorias
If numcifras(a)<>10 then pandigital=false:exit function
For i = 1 To 10
ci(cifra(a, i)) = ci(cifra(a, i)) + 1 ’Anotamos cada cifra
‘Si la frecuencia es mayor que 1, se rechaza el número
If ci(cifra(a, i)) > 1 Then pandigital = False: Exit Function
Next i
s = 0
For i = 0 To 9
If ci(i) = 0 Then t = False ‘Si queda una memoria vacía, se rechaza
Next i
pandigital = t ‘Devuelve verdadero o falso
End Function

Con esta función es fácil obtener un listado de los primeros pandigitales:

1023456789
1023456798
1023456879
1023456897
1023456978
1023456987
1023457689
1023457698
1023457869
1023457896
1023457968
1023457986
1023458679
1023458697
1023458769
1023458796
1023458967
1023458976
1023459678
1023459687
1023459768
1023459786

Podemos usar esta función para encontrar, por ejemplo, el primer número pandigital triangular. Partimos de 1000006281, primer triangular de 10 cifras, de orden 44721, y vamos recorriendo triangulares hasta encontrar un pandigital. Todo se basa en la fórmula de los triangulares, N(N+1)/2.

```
Function panditrian(n)
Dim m
m = n
Do Until pandigital(m * (m + 1) / 2)
m = m + 1
Loop
panditrian = m * (m + 1) / 2
End Function
```

Con esta función encontramos el primer pandigital triangular, 1062489753, de orden 46097. Está publicado en http://oeis.org/A241812, pero es interesante volverlo a encontrar con nuestros propios medios.

De esta forma podemos encontrar cubos, oblongos y otros que sean pandigitales sin repetición.

Por ejemplo, el menor oblongo de diez cifras es 1000045752=31623*31624. Con un pequeño cambio en la función de arriba obtenemos

1492083756=38627*38628 como el menor oblongo pandigital. No está publicado.

En el caso de los cubos, no hemos encontrado ningún ejemplo.

Los tipos que hemos buscado tienen forma polinómica, lo que ha acelerado el proceso. En otros casos la búsqueda sería mucho más lenta.

Existen muchos casos en los que un pandigital es múltiplo de otro, pero su búsqueda es lenta y no la abordaremos. Sí es sencillo buscar un múltiplo pandigital de cualquier otro número menor. En casi todos los casos se encuentra con éxito, e incluso circula por ahí la conjetura de que todos los números poseen un múltiplo pandigital, pero no es cierta, ya que los números terminados en 00 no lo tienen, y también muchos múltiplos de 25.

Con este código PARI encuentras fácilmente un múltiplo pandigital de otro cualquiera menor que 10^9:

```
multipan(n)={my(e=0,i=1,m=n);while(m<=10^10&&e==0,m=n*i;if(#vecsort(digits(m), ,8)==10,e=m);i+=1);e}
print(multipan(23322))
```

En el ejemplo se busca el múltiplo de 23322, y resulta ser 1053967824=45192*23322

Si cambias 23322 por otro número, obtendrás su múltiplo pandigital. Si no existe, te devolverá un cero. Prueba con un número terminado en dos ceros.

NÚMEROS CON CIFRAS CRECIENTES O DECRECIENTES

En este estudio nos dedicaremos a cuestiones derivadas del orden de las cifras de un número. Serán desarrollos sin mucha trascendencia, pues tan solo se pretende efectuar ejercicios de creación de funciones o de búsquedas. Al igual que nos ocurrió en otros desarrollos, en este comenzaremos con distintos tipos de números y sus propiedades respecto al orden de sus cifras, y seguiremos investigando con temas afines hasta constatar que pierden interés.

En todas las cuestiones deberemos concretar el tipo de orden, que puede ser creciente, en sentido amplio, con cifras repetidas o en sentido estricto, en el que no se permiten cifras consecutivas iguales. Igualmente, en el orden decreciente también usaremos los dos sentidos.

Tipos de números y orden de sus cifras

Están publicadas muchas sucesiones que relacionan tipos de números con sus cifras. Unos ejemplos:

Triangulares con cifras crecientes (sentido amplio)

Están publicados en http://oeis.org/A234848:

0, 1, 3, 6, 15, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 136, 378, 666, 1128, 1225, 1378, 2278, 2346, 2556, 5778, 12246, 13366, 22366, 22578,…

Aprovechamos esta sucesión para presentar nuestra función en VBasic destinada a detectar este tipo de orden creciente:

Function cifras_crecientes(n) As Boolean
Dim j, l
Dim c As Boolean

l = numcifras(n) ‘Cuenta las cifras del número
c = True
If l > 1 Then ‘Si tiene una cifra, no lo estudiamos
j = l
While j >= 2 And c

If cifra(n, j) > cifra(n, j - 1) Then c = False ‘Si una cifra rompe el orden, no es creciente (se estudia de derecha a izquierda)

j = j - 1

Wend

End If

cifras_crecientes = c

End Function

La función NUMCIFRAS se define como

```
Function numcifras(n)
Dim nn, a
a = 1: nn = 0
While a <= n
a = a * 10: nn = nn + 1
Wend
numcifras = nn
End Function
```

Y la función CIFRA como

```
Function cifra(m, n)
Dim a, b
If n > numcifras(m) Then
  cifra = -1
  Else
  a = 10 ^ (n - 1)
  b = Int(m / a) - 10 * Int(m / a / 10)
  cifra = b
```

End If
End Function

Vemos que extrae las cifras en el orden desde las unidades hasta las decenas, centenas…

Con estas funciones es fácil encontrar los triangulares que tienen sus cifras en orden creciente amplio. El criterio sería

ESTRIANGULAR(N) AND CIFRAS_CRECIENTES(N)

La primera función la hemos usado mucho. Puedes usar la búsqueda *estriangular(hoja* en Google. Exige que 8*n+1 sea cuadrado.

El resultado sería:

0
1
3
6
15
28
36
45
55
66
78
136
378
666

Es evidente que coincide con lo publicado. Esto solo ha sido la comprobación de que nuestra función está correctamente diseñada.

En PARI la detección de cifras crecientes es brevísima. Basta plantear

digits(m)==vecsort(digits(m))

Es una solución muy ingeniosa, porque viene a decir que las cifras actuales coinciden con las cifras ordenadas. Si se desea orden estricto, sin repeticiones, ha de incorporarse el parámetro 8 de esta forma: vecsort(digits(m,,8))

Por ejemplo, con esta línea encuentras los triangulares con cifras en orden creciente estricto:

for(i=0,10^3,if(digits(i)==vecsort(digits(i),,8)&&issquare(8*i+1),print1(i,", ")))

```
? for(i=0,10^3,if(digits(i)==vecsort(digits(i),,8)&&issquare(8*i+1),print1(i,",
")))

0, 1, 3, 6, 15, 28, 36, 45, 78, 136, 378,
```

```
for(i=0,10^3,if(digits(i)==vecsort(digits(i),,8)&&issquare(8*i+1),print1(i,", ")))
```

Usamos los triangulares como introducción a las técnicas adecuadas. Si deseas practicar o profundizar puedes consultar estas sucesiones:

http://oeis.org/A028864: Primos con cifras crecientes.

http://oeis.org/A028820: Ídem cuadrados.

http://oeis.org/A273045: Números de Fibonacci.

Como los números oblongos, del tipo N(N+1) son olvidados fácilmente, los rescataremos aquí:

Oblongos con cifras crecientes

Un número oblongo es el doble de un triangular, luego si en estos 8*n+1 ha de ser cuadrado, en los oblongos lo será 4*n+1. En esto se basa nuestra función ESOBLONGO, y con ella podemos investigar en Excel junto a CIFRAS_CRECIENTES. El resultado es

0
2
6
12
56
156
1122
2256

Con PARI podemos llegar más lejos:

0, 2, 6, 12, 56, 156, 1122, 2256, 4556, 11556, 111222, 445556, 11112222, 44455556, 222233556, 1111122222, 4444555556, 111111222222, 444445555556, 11111112222222, 44444455555556, 1111111122222222, 4444444555555556, 111111111222222222,

Primera versión: generar los oblongos a partir del 2, sumando luego 4, 6, 8. 10. El inconveniente es que hay que partir siempre del 2, no se puede iniciar, por ejemplo en 10^10. Es muy rápido al principio, pero luego ralentiza.

m=2;k=2;while(m<10^8,if(digits(m)==vecsort(digits(m)),print1(m,", "));k+=2;m+=k)

Lo hemos probado en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html

```
? m=2;k=2;while(m<10^8,if(dígitos(m)==vecsort(dígitos(m)),print1(m, "));k+=2;m+=k)
2, 6, 12, 56, 156, 1122, 2256, 4556, 11556, 111222, 445556, 11112222, 44455556,
```

Segunda versión: construir m(m+1) y después aplicar el criterio. Es más lento, porque tiene que multiplicar en cada caso

for(i=10^3,10^7,m=i*(i+1);if(digits(m)==vecsort(digits(m)),print(m)))

Lo hemos probado con GP/PARI CALCULATOR con este resultado, que comprende los valores incluidos para m, 10^3 a 10^7:

```
11112222
44455556
222233556
1111122222
4444555556
111111222222
444445555556
11111112222222
44444455555556
```

Tercera versión: Es la más lenta, porque, como en Excel, aplica el criterio de que sea cuadrada la expresión (4*n+1). Lo comprobamos para números no muy grandes en la web de PARI:

ok(n)=digits(n)==vecsort(digits(n))&&issquare(4*n+1)

for(i=0,10^6,if(ok(i),print(i)))

```
0
2
6
12
56
156
1122
2256
4556
11556
111222
445556
```

Potencias perfectas con cifras crecientes

En este tipo nos limitaremos a presentar el resultado, para animar a los lectores a intentar reproducirlo. Como pista, en PARI habría que usar la función ***ispower***:

4, 8, 9, 16, 25, 27, 36, 49, 125, 128, 144, 169, 225, 256, 289, 1156, 1225, 1369, 1444, 4489, 6889, 11236, 11449, 13456, 13689, 27889, 33489, 111556, 112225, 113569, 134689, 146689, 344569, 444889, 2666689, 2778889, 11115556, 11122225, 11135569, 11336689, 11444689, 13446889,…

Cubos

Aquí nos detendremos, porque su número es, al parecer, finito. Sólo se han encontrado los cubos 0, 1, 8, 27 y 125 con cifras crecientes en sentido amplio (en el estricto tendríamos menos posibilidades).

Empleando diversas técnicas y lenguajes, no ha sido posible encontrar más ejemplos de cubos con cifras crecientes, por lo que se puede enunciar la conjetura:

Sólo existen cinco cubos perfectos con sus cifras crecientes en sentido amplio en base 10.

Con hoja de cálculo podemos usar la función ESCUBO junto a la de cifras crecientes. Por el problema de los decimales, no es fácil determinar si un número desconocido es un cubo. Hemos usado esta versión:

```
Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo = False
End Function
```

Buscamos, por ejmplo, entre 0 y 10^6, y conseguiremos tan solo esos cinco casos:

0
1
8
27
125

En PARI se pueden plantear dos puntos de vista: en el primero usar una función que detecte la propiedad directamente en un número cualquiera, y en el segundo se trata de ir construyendo los cubos uno a uno y esperar a que se cumpla la condición en uno de ellos.

Función directa

ok(n)=digits(n)==vecsort(digits(n))&&ispower(n,3)

Se entiende fácilmente con lo explicado con anterioridad. Esta función, aplicada a un número natural, indica si es un cubo (*ispower(n,3)*) y si sus cifras crecen (*digits(n)==vecsort(digits(n)*)).

Es muy directa y sencilla, pero resulta bastante lenta, por tener que probar todos los números, sean cubos o no.

Construcción de cubos

Para encontrar cubos es preferible construirlos desde 0. Esto es lo que efectúa esta otra variante:

for(i=0,1000,m=i^3;if(digits(m)==vecsort(digits(m)),print1 (m,”, “)))

Es tres veces más veloz que la función anterior, porque la variable **m** siempre será un cubo. He aquí el resultado:

```
? for(i=0,1000,m=i^3;if(dígitos(m)==vecsort(dígitos(m)),print1(m,", ")))
0, 1, 8, 27, 125,
```

Hemos llegado de varias formas hasta 10^24, sin detectar otro cubo con cifras crecientes, por lo que podemos dar por cierta la conjetura hasta que alguien descubra un contraejemplo.

Lo dejamos aquí por hoy. En la siguiente entrada estudiaremos las cifras decrecientes.

Cubos con cifras decrecientes

Mediante un proceso similar se pueden encontrar los cubos perfectos que presentan cifras decrecientes (en sentido amplio). En PARI vale todo lo explicado, pero hay que sustituir vecsort(digits(m)), por vecsort(digits(m),,4), que ordena las cifras en sentido contrario.

En este caso sí aparecen infinitos cubos, pero la conjetura que se deduce de ellos es distinta:

Cubos: 0, 1, 8, 64, 1000, 8000, 64000, 1000000, 8000000, 64000000, 1000000000, 8000000000, 64000000000, 1000000000000, 8000000000000, 64000000000000, 1000000000000000, 8000000000000000, 64000000000000000, 1000000000000000000, 8000000000000000000, 64000000000000000000, 1000000000000000000000,…

Conjetura: Todos los cubos con cifras decrecientes (en sentido amplio) en base10 pertenecen a uno de estos tipos: 0, 10^k, 8*10^k, 64*10^k, con k entero mayor o igual a cero.

Como la anterior, la hemos verificado hasta 10^24, por lo que también queda abierta hasta que se encuentre un contraejemplo.

Como curiosidad, por si a alguien le interesa, se reproduce el código de nuestra función CIFRAS_DECRECIENTES, que no requiere más explicaciones:

Función en VBASIC

Public Function cifras_decrecientes(n) As Boolean

Dim j, l

Dim c As Boolean

```
l = numcifras(n)
c = True
If l > 1 Then
j = l
While j >= 2 And c
If cifra(n, j) < cifra(n, j - 1) Then c = False
j = j - 1
Wend
End If
cifras_decrecientes = c
End Function
```

Por dar variedad al tema, no repetiremos algunos ejemplos tratados en la entrada anterior. Podemos buscar otros tipos. Por ejemplo, los primos. En Vbasic de Excel puedes usar nuestra función ESPRIMO, muy usada en nuestras publicaciones. Puedes buscar en Google *ESPRIMO Roldán hoja.* Si solo escribes ESPRIMO te aparecen unos productos informáticos. Con ella y CIFRAS_DECRECIENTES, puedes buscar los primeros ejemplos de primos con cifras decrecientes (en sentido amplio):

2, 3, 5, 7, 11, 31, 41, 43, 53, 61, 71, 73, 83, 97, 211, 311, 331, 421, 431, 433, 443, 521, 541, 631, 641, 643, 653, 661, 733, 743, 751, 761, 773, 811, 821, 853, 863, 877, 881, 883, 887, 911, 941, 953, 971, 977, 983, 991, 997

Los tienes en http://oeis.org/A028867. En esa página figura una versión en PARI de la búsqueda que es mejorable. Proponemos mejor esta otra:

ok(n) = digits(n) == vecsort(digits(n),,4) && isprime(n)

for(i=2,10^3,if(ok(i),print1(i,", ")))

La comprobamos en la página de PARI/GP:

```
? ok(n) = dígitos(n) == vecsort(dígitos(n),,4) && isprime(n)
for(i=2,10^3,if(ok(i),print1(i,", " )))
2, 3, 5, 7, 11, 31, 41, 43, 53, 61, 71, 73, 83, 97, 211, 311, 331, 421, 431, 433, 4
43, 521, 541, 631, 641, 643, 653, 661, 733, 743, 751, 761, 773, 811, 821, 853, 863,
877, 881, 883, 887, 911, 941, 953, 971, 977, 983, 991, 997,
```

```
ok(n) = digits(n) == vecsort(digits(n),,4) && isprime(n)
for(i=2,10^3,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

Números de Fibonacci con cifras decrecientes

Otro ejemplo interesante es el de los números de Fibonacci, porque parece que dan lugar también a una sucesión finita:

1, 2, 3, 5, 8, 21, 55, 610, 987

Para hoja de cálculo podemos usar nuestra función ESFIBO, que determina si un número es de Fibonacci o no.

Public Function esfibo(n) As Boolean 'Devuelve verdadero si N es de Fibonacci
Dim f As Boolean
Dim a

f = False
a = 5 * n * n + 4
If escuad(a) Then f = True
a = 5 * n * n - 4
If escuad(a) Then f = True
esfibo = f
End Function

Se basa en popular criterio para saber si un número pertenece a la sucesión de Fibonacci. Lo puedes consultar en *Gaussianos*:

https://www.gaussianos.com/algunas-curiosidades-sobre-los-numeros-de-fibonacci/

Si aplicamos esta función ESFIBO con CIFRAS_DECRECIENTES llegaremos al resultado presentado.

En estos casos de sucesiones finitas hay que avanzar bastante para plantear una conjetura. Por eso debemos pasar a PARI, que llega más lejos en sus cálculos:

ok(n) = digits(n) == vecsort(digits(n),,4) && (issquare(5*n^2+4) || issquare(5*n^2-4))

for(i=2,10^6,if(ok(i),print1(i,", ")))

Hasta 10^6 devuelve los mismos resultados que la hoja de cálculo, salvo el 1, que se da por supuesto:

```
? ok(n) = dígitos(n) == vecsort(dígitos(n),,4) && (issquare(5*n^2+4) || issquare(5*
n^2-4))
for(i= 2,10^6,if(ok(i),print1(i,", ")))
2, 3, 5, 8, 21, 55, 610, 987,
```

Le hemos exigido algo más, que llegue a 10^8, y no ha aparecido ningún ejemplo más.

Podemos intentar generar los números de Fibonacci según su definición. Con este otro algoritmo hemos recorrido los 10^4 primeros con el mismo resultado:

m=1;n=1;for(i=1,10^4,p=m+n;m=n;n=p;if(digits(p) == vecsort(digits(p),,4),print1(p,", ")))

En la sucesión A273046, el colaborador Charles R Greathouse IV, llega a la misma cloncusión de que es probable que no existan más ejemplos.

Es interesante que en una misma cuestión hayamos presentado tres sucesiones finitas. Es una especie de probabilidad decreciente, de tal forma que, al crecer mucho los números, la misma tiende a cero, perdiendo la posibilidad de aparición de ejemplos nuevos. Como esto es solo una explicación no matemática, se quedarán en conjeturas.

Números de Bouncy

Son aquellos números tales que sus cifras no son crecientes ni decrecientes. Como siempre queda la duda de si hablamos de orden en sentido amplio o estricto, diremos que, en el segundo caso, están publicados en http://oeis.org/A152054, con orden estricto. Probemos con el orden amplio. Bastará unir las funciones que hemos usado (para crecientes y para decrecientes) mediante las conectivas lógicas NOT y AND:

NOT CIFRAS_CRECIENTES(N) AND NOT CIFRAS_DECRECIENTES(N)

Como era de esperar, casi todos los números aparecen:

101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 120, 121, 130, 131, 132, 140, 141, 142, 143, 150, 151, 152, 153, 154, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197

No obtenemos números de una o dos cifras porque todos son crecientes o decrecientes en sentido amplio. Existirán diferencias entre los dos tipos de orden, como por ejemplo con el número 1133 que no es creciente en sentido estricto, pero sí lo es en el amplio.

En OEIS, para evitar ambiguëdades, al amplio lo identifican como *nonincreasing* o nondecreasing.

Son tantos estos números que no merece la pena dividirlos entre los distintos tipos.