Números y hoja de cálculo XIII

Curso 2020-21

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Llegamos al volumen número 13 de estos resúmenes del blog "Números y hoja de cálculo"

(http://hojaynumeros.blogspot.com/).

Por la edad del autor, no se esperan muchos más, pero al menos este se ha podido completar, antes de que el cansancio impida proseguir esta tarea, que tiene mucho de lúdica.

A veces parece que se van a agotar los temas, pero siguen apareciendo curiosidades. Un manantial de ellas son los cálculos diarios publicados en Twitter (@connumeros). Es muy frecuente que un hallazgo en ellos se convierta en una entrada del blog.

En casi todos los cursos se desarrolla un tema monográfico. Este año ha sido el de los números poligonales que no son triangulares ni cuadrados, que se dejan para otro momento. Su interés demanda un estudio más extenso.

CONTENIDO

SUMAS

REPRESENTACIÓN DE ZECKENDORF

Cada entero positivo puede expresarse de manera única como una suma de números distintos de Fibonacci no consecutivos. Este resultado se denomina teorema de Zeckendorf y la secuencia de números de Fibonacci que se suman se denomina representación de Zeckendorf. Se llaman así en honor al médico belga y matemático aficionado E. Zeckendorf.

Para descomponer un número en sumandos de la sucesión de Fibonacci, se ha demostrado que el mejor procedimiento es el de ir restando al número el término de Fibonacci mayor posible, hasta llegar a una diferencia que sea también de Fibonacci, con lo que se termina en un cero. El teorema correspondiente afirma que siempre se llegará a este término en las diferencias.

Puedes consultar el tema en

https://www.gaussianos.com/fibonacci-la-representacion-de-zeckendorf-y-la-conversion-entre-kilometros-y-millas/

Está desarrollado de forma amena y resulta interesante. Aquí nos limitaremos a la construcción del algoritmo, para lo que repasaremos algunas técnicas y propiedades relacionadas con la famosa sucesión.

Mayor término de Fibonacci menor que N

Hemos recordado que el procedimiento para la representación de Zeckendorf de un número N consiste en ir tomando el mayor término de Fibonacci posible entre los números menores o iguales que N. El problema ahora es cómo saber si un número pertenece a la sucesión de Fibonacci o no. Existe un criterio bastante simple, y es:

Un número N pertenece a la sucesión de Fibonacci si y sólo si $5N^2+4$ o $5N^2-4$ es un cuadrado perfecto.

(Ver http://gaussianos.com/algunas-curiosidades-sobre-los-numeros-de-fibonacci/)

Según eso, ésta puede ser la función que devuelva VERDADERO si un número es del tipo Fibonacci y FALSO en el caso opuesto:

```
Public Function esfibo(n) As Boolean 'devuelve verdadero si N es de Fibonacci
Dim f As Boolean
Dim a

f = False
a = 5 * n * n + 4
```

If escuad(a) Then f = True
a = 5 * n * n - 4
If escuad(a) Then f = True
esfibo = f
End Function

La función *escuad* ya está explicada muchas veces en este blog. Con el comando ***Buscar*** la puedes localizar. Dada esta función, para cualquier número N podemos definir esta otra función, **antefibo**, que devuelve el mayor número de Fibonacci que podemos restar de N. Su listado puede ser:

Function antefibo(n)
Dim i

i = n ‘Pudiera ser que N fuera de Fibonacci, y terminaría el proceso
While Not esfibo(i)
i = i – 1 ‘Vamos bajando números hasta encontrar el primer “Fibonacci”
Wend
antefibo = i
End Function

Con la ayuda de esta función ya es sencillo efectuar la descomposición de Zeckendorf. El listado siguiente recoge una función que devuelve todos los sumandos y su número de orden en la sucesión de Fibonacci:

```
Function zeckendorf$(n)
Dim p, q
Dim s$

s = "" 'Contenedor para la solución
p = n
While p > 0
q = antefibo(p) 'Primer sumando de Fibonacci
p = p - q
s = s + Str$(quefibo(q)) + "% " + Str$(q) + ", " 'Se construye la solución
Wend
If s = "" Then s = "NO"
zeckendorf = s
End Function
```

Con esta función se puede construir un listado de representaciones de este tipo. Aquí puedes observar como ejemplo los números comprendidos entre 100 y 110.

100	11% 89, 6% 8, 4% 3,
101	11% 89, 6% 8, 4% 3, 2% 1,
102	11% 89, 7% 13,
103	11% 89, 7% 13, 2% 1,
104	11% 89, 7% 13, 3% 2,
105	11% 89, 7% 13, 4% 3,
106	11% 89, 7% 13, 4% 3, 2% 1,
107	11% 89, 7% 13, 5% 5,
108	11% 89, 7% 13, 5% 5, 2% 1,
109	11% 89, 7% 13, 5% 5, 3% 2,
110	11% 89, 8% 21,

En todos ellos, el primer sumando es 89, el número de Fibonacci número 11, y después 13, 8 o 21, hasta llegar a 1 o 2.

Hay que observar que los números de orden nunca son consecutivos. La razón estriba en que la suma de dos términos de Fibonacci consecutivos da lugar a otro mayor del mismo tipo, y ya habría sido elegido antes como sumando.

Para lo que sigue, puede ser útil incluir en el resultado el número de sumandos, para realizar clasificaciones. Por ejemplo, en el caso de 100 y 101 quedaría:

100	3 ##	11% 89, 6% 8, 4% 3,
101	4 ##	11% 89, 6% 8, 4% 3, 2% 1,

Nos informa, para futuras búsquedas, de que 100 presenta 3 sumandos, 89+8+3, y 101 presenta 4: 89+8+3+1.

En este procedimiento, el número 1, que puede definirse como F(2) o F(1), aparece siempre como F(2). Esto es importante en algunas propiedades de esta representación.

Si establecemos una búsqueda según el primer dígito, podremos clasificar los números según el número de sumandos. Vemos algunos ejemplos:

Un sumando

Si buscamos el valor de 1 como dígito inicial del resultado, obtendremos los mismos números de Fibonacci:

1	1 ## 2% 1,
2	1 ## 3% 2,
3	1 ## 4% 3,
5	1 ## 5% 5,
8	1 ## 6% 8,
13	1 ## 7% 13,
21	1 ## 8% 21,
34	1 ## 9% 34,
55	1 ## 10% 55,
89	1 ## 11% 89,
144	1 ## 12% 144,
233	1 ## 13% 233,
377	1 ## 14% 377,

Para dos sumandos

4	2 ## 4% 3, 2% 1,
6	2 ## 5% 5, 2% 1,
7	2 ## 5% 5, 3% 2,
9	2 ## 6% 8, 2% 1,
10	2 ## 6% 8, 3% 2,
11	2 ## 6% 8, 4% 3,
14	2 ## 7% 13, 2% 1,
15	2 ## 7% 13, 3% 2,
16	2 ## 7% 13, 4% 3,
18	2 ## 7% 13, 5% 5,
22	2 ## 8% 21, 2% 1,

Están publicados en http://oeis.org/A179242

Para tres:

12	3 ## 6% 8, 4% 3, 2% 1,
17	3 ## 7% 13, 4% 3, 2% 1,
19	3 ## 7% 13, 5% 5, 2% 1,
20	3 ## 7% 13, 5% 5, 3% 2,
25	3 ## 8% 21, 4% 3, 2% 1,
27	3 ## 8% 21, 5% 5, 2% 1,
28	3 ## 8% 21, 5% 5, 3% 2,
30	3 ## 8% 21, 6% 8, 2% 1,
31	3 ## 8% 21, 6% 8, 3% 2,
32	3 ## 8% 21, 6% 8, 4% 3,
38	3 ## 9% 34, 4% 3, 2% 1,
40	3 ## 9% 34, 5% 5, 2% 1,

Publicados en http://oeis.org/A179243

Así podríamos continuar, pero carece de interés.

Multiplicación de Fibonacci

La representación de Zeckendorf da lugar a un producto muy curioso, que consiste, dados dos números representados como suma de elementos de Fibonacci, formar la siguiente expresión:

$$A°B = \sum F_i \circ \sum F_j = \sum\sum F_{i+j}$$

Lo hemos escrito de forma abreviada, pero la idea es formar un sumatorio doble en el que cada sumando sea un número de Fibonacci cuyo índice sea la suma de los índices de cada uno de los factores.

Por ejemplo, si deseamos multiplicar 22 por 17, según las tablas de más arriba, 22 es una suma de números de Fibonacci de índices 8 y 2, mientras 17 se basa en 7, 4 y 2. Podemos formar una tabla de doble entrada, sumar índices y buscar el número de Fibonacci correspondiente:

	Multiplicación de Fibonacci de 17 por 22		
22 o 17	7	4	2
8	610	144	55
2	34	8	3
		Suma	**854**

Hemos ido sumando cada par de índices, como pueden ser 7 y 8. Su suma 15 la convertimos en F(15)=610, y así vamos procediendo con cada par. Al final, sumamos, y nos da como resultado 854.

Esta multiplicación es claramente conmutativa, pero Donald Knuth demostró que también es asociativa.

Es un reto comprobar esto con una función más automatizada que la propuesta en párrafos anteriores. Los resultados del tipo propuesto no son muy útiles para multiplicar

101	4 ## 11% 89, 6% 8, 4% 3, 2% 1,

Los sustituiremos por un formato más sencillo, en el que solo figurarán los índices. Omitimos el listado de la nueva función ***multizeck(n)***. Para quien tenga curiosidad, se adjunta en el Anexo.

Con esta función es fácil comprobar con Excel la propiedad asociativa. Lo vemos en el esquema construido al efecto:

Factores	**23**		**25**		**28**
Descomposición	2, 8, 3,		3, 8, 4, 2,		3, 8, 5, 3,
Productos de 2 factores	23 o 25	**1293**		25 o 28	**1573**
Propiedad asociativa:		1293 o 28	**80557**	23 o 1573	**80557**

Hemos tomado como ejemplo los números 23, 25 y 28. En primer lugar, por separado, hemos multiplicado 23 por 25 y 25 por 28, con resultados 1293 y 1573 respectivamente. Después se ha hallado el producto de ellos por el tercero, con el mismo resultado, 80557.

ANEXO

Función auxiliar

```
Function mzeck$(n)
Dim s$
Dim p, q, m

p = n
m = 0
s = ""
While p > 0
m = m + 1
q = antefibo(p)
s = s + Str$(quefibo(q)) + ","
p = p - q
Wend
mzeck = Str$(m) + "," + s
End Function
```

Función Producto

```
Function multizeck(a, b)
Dim u(20), v(20)
Dim s$
Dim m, p, q, i, j, z

s = mzeck(a)
m = InStr(1, s, ",")
```

```
p = Val(Left$(s, m - 1))


For i = 1 To p
s = Right(s, Len(s) - m)
m = InStr(1, s, ",")
If Len(s) > 0 Then u(i) = Val(Left$(s, m - 1))
Next i
s = mzeck(b)
m = InStr(1, s, ",")
q = Val(Left(s, m - 1))

For i = 1 To q
s = Right(s, Len(s) - m)
m = InStr(1, s, ",")
If Len(s) > 0 Then v(i) = Val(Left$(s, m - 1))
Next i

z = 0
For i = 1 To p
For j = 1 To q
z = z + fibo(u(i) + v(j))
Next j
Next i
multizeck = z
End Function
```

CIFRAS

PRODUCTO DE CIFRAS CON INCREMENTO

El día 14 de mayo de 2020, @AnecdotesMaths publicó en Twitter la siguiente igualdad:

315 = (3+4)(1+4)(5+4)

Siempre estamos atentos a desarrollos a partir de cualquier curiosidad que encontremos, por lo que dedicaremos esta estudio a las igualdades del tipo

<u>abc</u>… = (a+k)(b+k)(c+k)…, donde a,b, c… son cifras de un número y k una constante entera.

El subrayado del primer miembro indica que **son cifras** del número y no producto. Generalizamos a continuación la igualdad leída en Twitter.

El valor de k está acotado por el 10, ya que si aumentamos esta cantidad tendríamos:

(a+10)(b+10)(c+10)…>10*10*10*…> <u>abc</u>… ,

Sería imposible la igualdad pedida.

Para iniciar las búsquedas, necesitamos una función que nos devuelva las cifras de un número por separado. Puedes consultar los códigos para VBasic de Excel y Calc en la siguiente entrada de nuestro blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/04/cancelaciones-anomalas-22.html

Allí se explican las funciones NUMCIFRAS (número de cifras), CIFRA, (una cifra sola) y TROZOCIFRA (devuelve varias cifras)

En PARI puedes usar:

cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)

Es equivalente a TROZOCIFRAS, ya que devuelve las cifras entre los órdenes p y q, con lo que si son iguales equivalen a una sola cifra.

Para el total de cifras, PARI permite usar esta expresión:

#Vec(Str(N))

Equivale a "cardinal del vector formado por la expresión en texto de N"

Con estas funciones, no es difícil encontrar ejemplos como los deseados.

Versión para Excel y Calc

Hemos elegido la siguiente función para encontrar los números que poseen la propiedad deseada:

Function ciframasconst(n)
Dim i, j, k, p

k = 0 ‘Esta constante, si es mayor que 0, indicará éxito
For i = 0 To 9 ‘La variable i es la constante que se suma a las cifras
p = 1 ‘Inicio del producto de cifras
For j = 1 To numcifras(n)
p = p * (cifra(n, j) + i) ‘Se construye el producto de cifras aumentadas
Next j
If p = n Then k = i ‘Si el producto coincide con el número, tomamos nota de la constante sumada
Next i
ciframasconst = k ‘Si k>0, se da la propiedad
End Function

La función devuelve la constante que se suma a las cifras, de forma que si vale 0, es señal de que no se cumple la propiedad, y, en caso contrario, devuelve el valor de la constante que se suma. En la siguiente tabla figuran los primeros números que cumplen lo pedido y, junto a ellos, la constante que se suma:

12	2
18	1
24	2
35	2
50	5
56	2
90	6
120	4
210	5
315	4
450	5
780	5
840	6
1500	5

Vemos que, efectivamente, 315 cumple la igualdad para k=4, es decir, que 315=(3+4)(1+4)(5+4)

Otro ejemplo sería el 840, que la cumple para k=6:

840=(8+6)(4+6)(0+6)=14*10*6=840

Con esta función podemos extender la búsqueda hasta donde deseemos, recordando que solo ensayamos valores de k entre 0 y 10:

Los primeros números obtenidos son:

12, 18, 24, 35, 50, 56, 90, 120, 210, 315, 450, 780, 840, 1500, 3920, 4320, 4752, 7744, 16500,

24960,…

Están ya publicados en http://oeis.org/A055482

A055482 There exists some k>0 such that n is the product of (k + digits of n).

12, 18, 24, 35, 50, 56, 90, 120, 210, 315, 450, 780, 840, 1500, 3920, 4320, 4752, 7744, 16500, 24960, 57915, 59400, 60480, 91728, 269500, 493920, 917280, 1293600, 2419200, 3386880, 34992000, 266378112, 317447424, 1277337600, 3714984000, 14948388000, 48697248600, 460522782720, 896168448000

Versión en PARI

El algoritmo usado se traslada fácilmente al lenguaje PARI:

```
cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)

prod_cifr_inc(n,k)=my(m=#Vec(Str(n)),p=1,i);for(i=1,
m,p=p*(cutdigit(n,i,i)+k));p

for(i=1,10^6,for(k=1,9,if(i==prod_cifr_inc(i,k),print1(i,
", "))))
```

Da los mismos resultados:

Primera variante

En lugar de producto de cifras incrementadas podemos usar la suma de sus cuadrados, es decir, que se cumpla la igualdad

abc…=(a+k)^2+(b+k)^2+(c+k)^2

La acotación para k puede ser más amplia, por ejemplo, la raíz cuadrada del número N dividido entre el número de cifras. Así, 6754 podría alcanzar la cota 41 en la base de cada sumando:

6754>4*41^2=6724

El uso de valores de k de dos cifras complicaría una cuestión que solo es lúdica, por lo que seguiremos dándole valores entre 1 y 9. Dejamos abierta una ampliación de valores.

Un pequeño cambio en la función ***ciframascons*** nos devolvería los primeros números que cumplen esta condición:

20	2
40	2
106	3

114	4
118	2
121	5
146	3
158	2
171	4
230	7
274	5
325	7
413	9
469	6
481	8

Así, 325 coincide con la suma de los cuadrados de las cifras incrementadas estas en 7 unidades:

325=(3+7)^2+(2+7)^2+(5+7)^2=100+81+144

Con cubos

Si en lugar de cuadrados usamos cubos, obtenemos este otro listado:

141	1
251	1
440	2
532	2
560	1

1036 3
1307 3
1471 3
2240 6
2313 6
2609 3
2917 3
3016 6
3878 3
4799 3

Tomamos como ejemplo 3878, que con la constante igual a 3 cumple:

3878=(3+3)^3+(8+3)^3+(7+3)^3+(8+3)^3=216+1331+1000+1331

Dejamos como ampliación de quien nos lea la búsqueda de casos distintos. Por ejemplo, se podrían usar trozos de cifras en lugar de cifras aisladas.

ROTACIONES POR BLOQUES DE CIFRAS

Unas curiosidades no muy estudiadas se producen en números cuando la mitad derecha de sus cifras se permuta con el bloque de la izquierda sin alterar el orden interno de cada bloque. Por ejemplo, 24133 es primo, pero si rotamos sus cifras por bloques, es decir, que el 33 se permuta con el 24, se convierte en 33124, que es un cuadrado. Igual le ocurre a 24547, primo, que al rotar bloques también se convierte en cuadrado: 47524.

Otros números son primos y al rotar siguen siendo primos, como 1123 y 2311. Otros permanecen cuadrados, o triangulares, y así podemos seguir recorriendo casos. Se comprende que si el número de cifras es par, la rotación es completa, y, si es impar, se deja invariante la cifra del centro. Esta operación la rotularemos como función "rotar". Así:

ROTAR(27365)=65327

ROTAR(7654)=5476

Con la experiencia acumulada en el uso de la hoja de cálculo, no es complicado diseñar esta función "rotar". Para ello necesitamos dos funciones que hemos usado varias veces en este blog, como son NUMCIFRAS y TROZOCIFRAS. Sus listados los puedes consultar en nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/04/curiosidades-con-cifras-trozos.html

La primera cuenta las cifras de un número, y TROZOCIFRAS devuelve las cifras del número entre dos extremos prefijados.

El listado de la función ROTAR puede ser:

```
function rotar(n)
dim nc,nc1,r
'rota las cifras alrededor del centro si su número es impar
nc=numcifras(n)
if nc=1 then rotar=n:exit function ‘Es de una sola cifra
if nc mod 2 = 1 then ‘Número impar de cifras
nc1=(nc+1)/2
r=trozocifras(n,1,nc1-1)*10^nc1+trozocifras(n,nc1,nc1)*10^(nc1-1)+trozocifras(n,nc1+1,nc)
else
nc1=nc/2 ‘Número par de cifras
r=trozocifras(n,1,nc1)*10^nc1+trozocifras(n,nc1+1,nc)
end if
rotar=r
end function
```

Así, por ejemplo:

ROTAR(198262)=262198

Lo puedes comprobar si implementas la función en tu equipo.

Búsquedas

Sobre esta operación realizaremos algunas búsquedas de curiosidades. Eliminaremos los números terminados en 0, porque llevan a resultados con números diferentes de cifras, que no resultan atractivos, y tampoco usaremos números invariantes a la operación de rotar, como puede ser 2347234. Los primeros eliminados se caracterizarán por N MOD 10 = 0, y los segundos porque ROTAR(N)=N. Los ceros interiores también pueden alterar el número de cifras, pero omitiremos esta dificultad.

Veremos a continuación algunos casos concretos:

Cuadrado que se convierte en cuadrado

Dado que en nuestras búsquedas podemos alcanzar números grandes, es útil disponer de la función ROTAR en una versión para PARI, que es el instrumento que usamos cuando la hoja de cálculo no satisface las exigencias que le imponemos. El listado que sigue se limita a traducir paso por paso el algoritmo usado para hoja de cálculo:

```
numcif(n)=1+logint(n,10)

cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)

rotar(n)={my(nc=numcif(n),r=0,nc1=0);if(nc==1,r=n);

if(nc%2==1&&nc<>1,nc1=(nc+1)/2;r=cutdigit(n,1,nc1
-1)*10^nc1+cutdigit(n,nc1,nc1)*10^(nc1-
1)+cutdigit(n,nc1+1,nc));
```

```
if(nc%2==0,nc1=nc/2;r=cutdigit(n,1,nc1)*10^nc1+cutdigit(n,nc1+1,nc));return(r)}

for(i=10,10^8,if(issquare(i),j=rotar(i);if(i%10<>0&&j<>i&&issquare(j),print1(i,", "))))
```

Obtendremos:

144, 169, 441, 961, 16641, 25281, 41616, 81225, 1002001, 1004004, 1006009, 1008016, 1214404, 2253001, 2256004, 2259009, 3297856, 4004001, 4008004, 4044121, 6255001, 8567329, 9006001, 14010049, 20412324, 23242041, 32410249, 56040196, 81649296, 82410084, 92968164,…

Hemos indicado que algunos ejemplos con ceros interiores pueden alterar el número de cifras con la función ROTAR.

Primo que se convierte en primo

En el anterior código en PARI podemos sustituir las llamadas a la función *issquare* por la de *isprime*, con lo que obtendremos resultados similares, de números primos que siguen siendo primos con una rotación de bloques. Los primeros resultados son:

13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 107, 113, 149, 157, 167, 179, 199, 311, 337, 347, 359, 389, 701, 709, 733, 739, 743, 751, 761, 769, 907, 937, 941, 953, 967, 971, 983, 991, 1103, 1109, 1123, 1163, 1181, 1193, 1301, 1303, 1319, 1321, 1327, 1361, 1777, 1783, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1979,…

Entre ellos figura el 73, el número de Sheldon, presentado en la serie de televisión “Big Bang”. No solo se convierte en el primo 37, sino que también se intercambian sus números de orden como primos:

73=Primo(21) y 37=Primo(12).

Entre ellos también figuran años primos del siglo XX y de los siglos con número de orden par.

Caso primo-cuadrado

Volvemos al caso que presentamos en los primeros párrafos, el de los primos que se convierten en cuadrados al rotar. Al igual que en el caso anterior, bastará usar las funciones *isprime* y *issquare* en el lugar adecuado. Resultará este listado:

61, 163, 487, 691, 1621, 2137, 2179, 2467, 2953, 3631, 9601, 21157, 21319, 24001, 24133, 24547, 25087, 36559, 36637, 36901, 49411, 49801, 56101, 56527, 64303, 69997, 84631, 121579, 124669, 129769, 136309, 156217, …

Entre ellos aparecen los que solo sufren un intercambio de una cifra, como 69997.

Si seguimos jugando con las dos funciones *issquare* y *isprime* comprobaremos que la situación es reversible, como era de esperar, pero con el orden cambiado.

Siguiendo nuestro criterio de no cansar, y habiendo repetido el procedimiento, sólo se incluyen algunos listados más por si los lectores desean reproducirlos:

Triangular - triangular

153, 351, 5565, 6105, 6555, 53956, 56953, 81003, 128778, 490545, 778128, 1252153, 1532125, 1613706, 7063161, 7401628, 7966036, 11061456, 14561106, 16287778, 22301181, 23787753, 32534211, 42113253, 44006271, 49109005, 50717556, 55466778, 67785546, 75565071, 77532378, 77781628,…

En ellos se advierte el efecto de los ceros interiores, como en 81003, que alteran el efecto de la rotación.

Oblongo – Oblongo

20306, 162006, 2504306, 22122912, 29122212, 44602362, 65068422, 84226506,…

Resultan muy pocos, pero esto es frecuente en este tipo de números.

CONSECUTIVOS CON LAS MISMAS CIFRAS

El caso de 169=13^2 y 196=14^2 suele llamar la atención por el hecho de que dos elementos consecutivos de una lista tengan las mismas cifras en el sistema de numeración decimal, o lo que es igual que las cifras de uno sean anagramas de las cifras del otro. Hay muchos otros ejemplos de términos de listas que comparten cifras. Por ejemplo, los primos consecutivos 49279 y 49297. Estudiaremos algunos ejemplos de estas coincidencias.

Ya que este puede ser el más popular, comenzamos el estudio con el caso de cuadrados consecutivos, que, como suele suceder, ya está bien estudiado. Quienes seguís este blog sabéis que en estos casos nos llama más la atención los algoritmos o funciones necesarios para búsquedas con hoja de cálculo o PARI.

Función CIFRAS_IDENTICAS

Para abordar estas cuestiones disponemos hace años de la función CIFRAS_IDENTICAS, que efectúa un recuento de las frecuencias de cada cifra dentro de dos números y las compara para ver si son idénticas o existe alguna diferencia.

La versión para VBASIC de Excel y Calc puede tener esta estructura:

Public Function cifras_identicas(m, n) As Boolean

Dim i, h, s
Dim ci As Boolean
Dim ca(10), cb(10)

For i = 0 To 9: ca(i) = 0: cb(i) = 0: Next i ‘Se habilitan diez contenedores para las frecuencias de las cifras

h = m ‘Se copia **m** porque se a ir alterando
While h > 0
i = Int(h / 10)
s = h - i * 10 ‘Se extrae cada cifra
h = i
ca(s) = ca(s) + 1 ‘Se acumulan las frecuencias
Wend

h = n ‘Se repite el mismo trabajo con **n**
While h > 0
i = Int(h / 10)
s = h - i * 10
h = i
cb(s) = cb(s) + 1
Wend

ci = True 'Se supone que las cifras son idénticas
For i = 0 To 9
If ca(i) <> cb(i) Then ci = False 'Si dos frecuencias son distintas, es falso
Next i
cifras_identicas = ci
End Function

Así, la función aplicada a los números 2223334448 y 8234234234 devuelve VERDADERO, pues las cifras 2, 3, 4 y 8 poseen frecuencias iguales.

2223334448
8234234234
VERDADERO

Si alteramos alguna frecuencia, nos devolverá FALSO:

2223334448
8234234238
FALSO

Hemos tenido que construir una función de forma algo compleja, porque el lenguaje VBASIC no da mucho de sí. La función que usamos tendría este otro código en PARI:

cifras_identicas(m,n)=vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))

Se entiende con sólo leerlo: “las cifras ordenadas de **m** han de ser idénticas a las de **n**”.

Con estas dos funciones ya estamos preparados para emprender búsquedas.

Cuadrados consecutivos

Con la función para hojas de cálculo podemos comparar cada cuadrado con su siguiente. Mediante un bucle de búsqueda o dos columnas de Excel podemos ir comparando N^2 con (N+1)^2 y ver si las cifras son idénticas o no:

	N^2	(N+1)^2	CIFRAS_IDENTICAS
10	100	121	FALSO
11	121	144	FALSO
12	144	169	FALSO
13	169	196	VERDADERO
14	196	225	FALSO
15	225	256	FALSO

Hemos recorrido los primeros números y comparado las cifras entre su cuadrado y el cuadrado siguiente, y se ha obtenido esta tabla:

N	N^2	(N+1)^2
13	169	196
157	24649	24964
913	833569	835396
4513	20367169	20376196
14647	214534609	214563904
19201	368678401	368716804
19291	372142681	372181264
19813	392554969	392594596
20191	407676481	407716864
27778	771617284	771672841
31828	1013021584	1013085241
34825	1212780625	1212850276
37471	1404075841	1404150784
39586	1567051396	1567130569
40297	1623848209	1623928804

Los primeros cuadrados con esta propiedad están publicados en http://oeis.org/A227692

A227692 Smaller of two consecutive squares which are anagrams (permutations) of each other.

169, 24649, 833569, 20367169, 214534609, 368678401, 372142681, 392554969, 407676481, 771617284, 1013021584, 1212780625, 1404075841, 1567051396, 1623848209, 2538748996, 2866103296, 2898960964, 3015437569, 3967236196, 4098688441, 4937451289

Sus bases también están publicadas en http://oeis.org/A072841

A072841 Numbers k such that the digits of k^2 are exactly the same (albeit in different order) as the digits of (k+1)^2.

13, 157, 913, 4513, 14647, 19201, 19291, 19813, 20191, 27778, 31828, 34825, 37471, 39586, 40297, 50386, 53536, 53842, 54913, 62986, 64021, 70267, 76513, 78241, 82597, 89356, 98347, 100147, 100597, 103909, 106528, 111847, 115024, 117391, 125986

Zak Seidov indica en esa página que todos los elementos de esta lista tendrán la forma 9k+4. Se puede razonar con facilidad: si N^2 y (N+1)^2 poseen las mismas cifras, y por tanto la misma suma de ellas, luego su diferencia será múltiplo de 9, es decir:

(N+1)^2-N^2=9m, o lo que es igual,

2N+1=9m, 2N=9m-1, luego 2N tendrá resto -1 respecto a 9, que equivale a resto 8. Por tanto, N tendrá resto 4, y será de la forma 9k+4.

Michel Marcus propone un código PARI idéntico al propuesto más arriba (no lo había consultado previamente):

(PARI) isok(n) = vecsort(digits(n^2)) == vecsort(digits((n+1)^2)); \\ Michel Marcus, Sep 30 2016

Primos consecutivos

Si comparamos cada número primo con su siguiente, podemos detectar pares anagramáticos. Para Excel o Calc necesitaremos las funciones ESPRIMO y PRIMPROX, que puedes consultar en la siguiente entrada de nuestro blog:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/04/proposito-de-ormiston.html

Con estas dos funciones podemos construir otra que nos devuelva si un número es primo y anagramático con su siguiente:

Public Function anagram_primo(n) As Boolean

If esprimo(n) And cifras_identicas(n, primprox(n)) Then anagram_primo = True Else anagram_primo = False

End Function

Puedes intentar reproducir la tabla siguiente, mediante un bucle FOR-NEXT de búsqueda:

Primo	Siguiente primo
1913	1931
18379	18397
19013	19031
25013	25031
34613	34631
35617	35671
35879	35897
36979	36997
37379	37397
37813	37831
40013	40031
40213	40231
40639	40693
45613	45631
48091	48109
49279	49297

Si usamos en PARI la instrucción ***nextprime***, podemos fácilmente detectar de otra forma qué primos consecutivos son anagrámaticos entre sí:

cifras_identicas(m,n)=vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))

anagram_primo(k)=isprime(k)&&cifras_identicas(k,nextprime(k+1))

for(i=2,10^5,if(anagram_primo(i),print1(i,", ")))

El resultado es:

```
1913, 18379, 19013, 25013, 34613, 35617, 35879, 36979, 37379, 37813, 40013, 4021
3, 40639, 45613, 48091, 49279, 51613, 55313, 56179, 56713, 58613, 63079, 63179,
64091, 65479, 66413, 74779, 75913, 76213, 76579, 76679, 85313, 88379, 90379, 906
79, 93113, 94379, 96079, 97213, 98737,
?
```

Coincide con el obtenido con Excel y con el publicado en la siguiente página:

http://oeis.org/A069567

A069567 Smaller of two consecutive primes which are anagrams of each other.

1913, 18379, 19013, 25013, 34613, 35617, 35879, 36979, 37379, 37813, 40013, 40213, 40639, 45613, 48091, 49279, 51613, 55313, 56179, 56713, 58613, 63079, 63179, 64091, 65479, 66413, 74779, 75913, 76213, 76579, 76679, 85313, 88379

A estos pares de primos se les da el nombre de “pares de primos de Ormiston”. Se ha conjeturado que existen infinitos pares de este tipo. Existen conjuntos similares pero de más de dos primos.

Triangulares consecutivos

Podemos sustituir la función ESPRIMO por ESTRIANGULAR. Esta última se basa en la idea de que un número triangular multiplicado por 8 y sumado con la unidad se convierte en un cuadrado. Es fácil razonarlo:

$$8\frac{n(n+1)}{2}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

Con esta propiedad se construye la siguiente función:

Function estriangular(n) As Boolean

Dim a
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function

Si la usamos de una forma parecida a como integramos ESPRIMO en ANAGRAM_PRIMO, podemos construir una búsqueda similar con triangulares. Para ello necesitamos otra función, que dado un triangular, nos devuelva su número de orden:

```
Public Function ordentriang(n)
Dim k
If estriangular(n) Then k = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)
Else k = 0
ordentriang = k
End Function
```

Al final, la búsqueda de triangulares consecutivos anagramáticos quedaría así:

```
Public Function anagram_triang(n) As Boolean
Dim k
Dim es As Boolean

es = False
If estriangular(n) Then
k = ordentriang(n)
If cifras_identicas(n, (k + 1) * (k + 2) / 2) Then es =
True
End If
anagram_triang = es
End Function
```

Con ella podemos buscar los triangulares consecutivos anagramáticos. No es fácil, porque el primero es 404550. Puede merecer la pena pasar a PARI:

```
cifras_identicas(m,n)=vecsort(digits(m))==vecsort(digits(n))
anagram_triang(k)={my(b,a,m=0);if(issquare(8*k+1),
b=truncate((sqrt(8*k+1)-1)/2);a=(b+1)*(b+2)/2;if(cifras_identicas(k,a),m=1));m
}
for(i=1,1e8,if(anagram_triang(i),print(i)))
```

Con este código obtenemos los primeros triangulares anagramáticos con su siguiente:

404550, 2653056, 3643650, 5633046, 6413571, 10122750, 10656036, 13762881, 19841850, 26634051, 32800950, 47848653, 56769840, 71634465, 89184690,…

La lista la tienes más completa en

http://oeis.org/A247305

A247305 The smaller of two consecutive triangular numbers which are permutations of each other.

404550, 2653056, 3643650, 5633046, 6413571, 10122750, 10656036, 13762881, 19841850, 26634051, 32800950, 47848653, 56769840, 71634465, 89184690, *103672800, 137108520, 317053971, 345069585, 392714325, 408508236, 440762895, 508948560, 598735710, 718830486, 825215625,…*

De forma parecida a lo que ocurrió con los cuadrados, la diferencia entre dos triangulares será múltiplo de 9, pero esa diferencia es n+1, luego n+1=9k, y n(n+1)/2=(n/2)*9k. Si k es par, (k=2m), quedaría n(n+1)/2=n*9m, que sería múltiplo de 9. Si k es impar, lo será n+1, luego n/2 será entero al ser par n. Por tanto, también quedaría un múltiplo de 9.

Todos los términos de la sucesión son múltiplos de 9.

Oblongos consecutivos

Podemos repetir el estudio con los números oblongos, es decir, con **n(n+1)** comparado con **(n+1)(n+2)**. Seguiremos con PARI, pero sustituyendo la condición ***issquare(8*k+1)*** que caracteriza a los triangulares por ***issquare(4*k+1)***, que corresponde a sus dobles, que son los oblongos. Así que, si definimos como ok(k) la función que determina si un oblongo es anagramático con su siguiente, nos quedaría:

```
ok(k)={my(b,m=0);if(issquare(4*k+1),b=truncate(sqrt(4*k+1)-1)/2;if(vecsort(digits(k))==vecsort(digits((b+1)*(b+2))),m=1));m}
```

Con esta función podemos encontrar los primeros oblongos que cumplen la condición pedida. Los primeros son estos:

23256, 530712, 809100, 11692980, 17812620, 20245500, 22834062, 23527350, 29154600, 83768256, 182236500, 189847062, 506227500, 600127506, 992218500, 1363566402, 1640209500, 2175895962, 2422657620, 2477899062, 2520190602, 3041687952, 3764129256, 4760103042,…

Esta sucesión permanecía inédita y la hemos publicado en **https://oeis.org/A337784**.

Existe una forma más rápida de encontrar estos oblongos, y es darle el protagonismo a sus índices. En lugar de una función usaremos un bucle FOR-NEXT:

for(i=1,1000000, a=i*(i+1); b=(i+1)*(i+2); if(vecsort(digits(a))==vecsort(digits(b)), print1(a,", ")))

Si en la instrucción ***print1(a,", ")*** sustituimos **a** por **i**, nos devolverá los índices de los oblongos encontrados:

152, 728, 899, 3419, 4220, 4499, 4778, 4850, 5399, 9152, 13499, 13778, 22499, 24497, 31499, 36926, 40499, 46646, 49220, 49778, 50201, 55151, 61352, 68993,…

Relación con el 9

Todos los números oblongos descubiertos son múltiplos de 9. Lo razonamos:

Si **n(n+1)** es anagramático con **(n+1)(n+2)**, su diferencia, **2(n+1)** será un múltiplo de 9

2(n+1)=9k; n=9k/2-1, luego **k** es par y **n** tendría resto 8 respecto al módulo 9. Lo puedes comprobar en el listado de índices de unas líneas más arriba. Así que **n=(9k-2)/2** con **k** par.

El número oblongo **n(n+1)** quedaría como **n(n+1)=(9k-2)/2*((9k-2)/2+1)=n*9k/2**. Al ser **k** par, **n(n+1)** será múltiplo de 9. También los puedes comprobar en el listado de oblongos. De hecho, sus diferencias son múltiplos de 18.

Con esto finalizamos el tema. Otros tipos de números no presentan con facilidad esta propiedad de ser anagramáticos.

PRODUCTOS PALINDRÓMICOS

En nuestras búsquedas de números y de desarrollos curiosos nos hemos encontrado a menudo con operaciones que dan lugar a números capicúas o palindrómicos (aquí usaremos la palabra capicúa, que es más popular entre nosotros). Para abreviar, nos restringiremos a la operación producto con datos no necesariamente capicúas, pero cuyo resultado sí lo es. Usaremos factores cercanos como objetivo de la búsqueda.

Siguiendo la costumbre general, consideramos capicúas a los de una cifra.

En este blog disponemos de la función ESCAPICUA, que puedes consultar en el Anexo de nuestra entrada https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/02/suma-y-producto-de-cubo-y-otro-tipo-1.html El problema es que depende mucho de la estructura del lenguaje VBASIC DE Excel y Calc. Proponemos una nueva versión que se traslada mejor a otro lenguaje:

Function escapicua(n) As Boolean
Dim a, b, c, i, j, t
Dim es As Boolean

If n < 10 Then escapicua = True: Exit Function ‘Si es de una cifra, es capicúa
es = True ‘Suponemos que es capicúa

c = 1

While n >= 10 ^ c: c = c + 1: Wend ‘Calcula el número de cifras

t = Int((c + 1) / 2) ‘Punto medio de las cifras

i = 1

While i <= t And es

a = Int((n - Int(n / 10 ^ i) * 10 ^ i) / 10 ^ (i - 1)) ‘a y ***b*** son cifras simétricas

j = c - i + 1

b = Int((n - Int(n / 10 ^ j) * 10 ^ j) / 10 ^ (j - 1))

If a <> b Then es = False ‘Si las cifras simétricas son desiguales, no es capicúa

i = i + 1

Wend

escapicua = es

End Function

Con esta función es fácil analizar si un producto es capicúa o no. Podéis elegir la versión que más os guste.

En el lenguaje PARI, al poder usar listas y vectores, la función es muy simple. La que sigue se inspira en la propuesta por Michel Marcus:

ispalindromic(n) = my(d = digits(n)); Vecrev(d) == d

La función ***digits*** convierte el número en un vector de cifras y solo queda comprobar que es idéntico a su reverso.

Productos entre números próximos

Caso N(N+1)

Un caso sencillo es el de multiplicar dos números consecutivos para dar como resultado un número oblongo (ver http://oeis.org/wiki/Oblong_numbers)

En hoja de cálculo basta construir una columna con productos N(N+1) y después aplicarle la función ESCAPICUA. Nosotros hemos usado un sencillo buscador que realiza la misma función, con este resultado:

N	N(N+1) capicúa
1	2
2	6
16	272
77	6006
538	289982
1621	2629262
2457	6039306
5291	27999972
5313	28233282

Estos primeros casos están publicados en http://oeis.org/A028336

Con nuestra función en PARI podemos llegar más lejos sin esfuerzo:

```
1  2
2  6
16  272
77  6006
538  289982
1621  2629262
2457  6039306
5291  27999972
5313  28233282
52008  2704884072
142401  20278187202
143498  20591819502
```

Código:

ispalindromic(n) = my(d = digits(n)); Vecrev(d) == d

for(i=1,10^6,if(ispalindromic(i*(i+1)),print(i," ",i*(i+1))))

Es curioso el caso del 77, que siendo capicúa, produce un oblongo también capicúa: 6006=77*78

Una simpática referencia a estas búsquedas la tienes en http://www.worldofnumbers.com/consec.htm

CASO N(N+2)

Este caso lo podemos tratar de la misma forma que el anterior. Esta es la tabla que se puede construir con hoja de cálculo:

N	N(N+2) Capicúa
1	3
2	8
9	99
17	323
23	575
64	4224
75	5775
99	9999
191	36863
204	42024
999	999999
1747	3055503
1907	3640463
2365	5597955
2966	8803088
5731	32855823
9999	99999999

Es curioso el caso de los números formados por nueves. Estas igualdades son muy simples, pero ilustrativas:

9×(9+2)=99
99×(99+2)=9999
999×(999+2)=999999
9999×(9999+2)=99999999

También destaca el capicúa 191, que se convierte en otro capicúa: 191*(191+2)=36863

Están publicados los primeros valores de N en http://oeis.org/A028503 y algunas curiosidades en http://www.worldofnumbers.com/quapron.htm. En ellas se comprueba la pertenencia de 9, 99, 999, 9999,…

Una consecuencia inmediata de la forma de estos productos es que equivalen a **un número cuadrado**

menos la unidad. Es fácil verlo: $a(a+2)=a^2+2a=(a+1)^2-1$. Se puede comprobar mentalmente con los primeros, o creando una columna nueva en la hoja de cálculo.

Caso N(N+3)

Finalizamos este tipo de producto con el caso de dos factores que se diferencian en tres unidades, es decir, N(N+3)

Aplicando los mismos criterios de búsqueda llegamos a la sucesión de palíndromos. Esta vez usaremos el siguiente código PARI:

ispalindromic(n) = my(d = digits(n)); Vecrev(d) == d

for(i=1,10^6,if(ispalindromic(i*(i+3)),print(i," ",i*(i+3))))

Los primeros valores de N y del palindrómico N(N+3) son

1	4
8	88
28	868
66	4554
88	8008
211	45154
298	89698
671	452254
2126	4526254
2998	8996998
28814	830333038
29369	862626268
29998	899969998
63701	4058008504
212206	45032023054
212671	45229592254
299998	89999699998
636776	405485584504

Si en el anterior caso destacábamos el caso de 9, 99, 999, aquí llama la atención el de 28, 298, 2998,…en los que se forman:

28*(28+3)=868
298*(298+3)=89698
2998*(2998+3)=8996998

Estos casos están publicados en http://oeis.org/A028553. En esa página se enlazan otras de

Patrick De Geest que analizan estos casos y los siguientes, N(N+4), N(N+5), que no estudiaremos aquí.

Caso K(2K+1)

Con las mismas técnicas que los anteriores podemos investigar aquellos números de los que uno es el doble del otro más la unidad. Resultan estos casos:

1	3
5	55
9	171
17	595
18	666
66	8778
1331	3544453
1774	6295926
4191	35133153
5544	61477416
9453	178727871

Elegimos esta relación para ver si la cumplía algún número primo de Sophie Germain

(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo_de_Sophie_Germain),

pero solo hemos encontrado el par (5, 11) con producto capicúa 55.

Caso K*K

Es el caso de los cuadrados que son capicúas.

1	1
2	4
3	9
11	121
22	484
26	676
101	10201
111	12321
121	14641
202	40804
212	44944
264	69696
307	94249
836	698896
1001	1002001
1111	1234321
2002	4008004
2285	5221225
2636	6948496

Son bastantes, y están publicados en
http://oeis.org/A002778

Caso K*2K

Es como buscar los productos que son doble de un cuadrado. No aparecen tantos como era de esperar, ya que la siguiente tabla presenta los menores de 10^5:

N	2N	Producto capicúa
1	2	2
2	4	8
11	22	242
101	202	20402
111	222	24642
1001	2002	2004002
1034	2068	2138312
1111	2222	2468642
6523	13046	85099058
10001	20002	200040002
10101	20202	204060402
11011	22022	242484242
12064	24128	291080192

Están publicados los resultados, pero no los valores de N, en http://oeis.org/A028985

En esa página se destaca que el número de divisores de estos resultados es impar

En efecto, la suma de divisores de un número tiene como fórmula

$$\sigma(N) = (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots {p_1}^{e_1})\,(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots {p_2}^{e_2})\ldots$$

Si el resultado es el doble de un cuadrado, su descomposición factorial tendrá la forma

$$N = 2{p_1}^{2r} \cdot {p_2}^{2s} \cdot {p_3}^{2t} \ldots \cdot {p_k}^{2v}$$

Todos los factores con exponente par producirán en la fórmula de arriba factores impares. Por ejemplo, 7^4 produciría $1+7+7^2+7^3+7^4$, que es impar. Igual ocurre con el 2, que, por ejemplo, $2^2=1+2+2^2$, impar. Por último, el 2 que encabeza la expresión produciría el factor 1+2=3, luego todos los paréntesis de la fórmula serán impares, y con ellos el producto.

EXPRESIONES PALINDRÓMICAS TRIPLES

El día 26 de marzo de 2021 publiqué en Twitter (@connumeros) esta igualdad de tipo palindrómico:

26321=16*5*61+16561+16*5*61

La triple repetición simétrica de las cifras 16561 es muy atractiva, e invita a descubrir casos similares. Para fijar ideas, nos limitaremos por ahora a dejar un número de una cifra como centro de los productos, como ocurre en 125=1*2*1+121+1*2*1 (caso impar de cifras) o bien tomar las dos mitades de cifras en el caso par de ellas, como ocurre en 261=9*9+99+9*9.

Para buscar los números que presentan estas expresiones consideraremos capicúas de más de una cifra, para evitar obviedades. Para cada número buscaremos capicúas menores que él y analizaremos si sus diferencias presentan el tipo de producto deseado. También excluiremos los números capicúas con un cero central, que dan lugar a cálculos triviales.

Para poder efectuar las búsquedas necesitaremos algunas funciones sobre cifras ya publicadas en este blog:

Localización de funciones en el blog

ESCAPICUA

Analiza si un número es capicúa o no. Su respuesta es VERDADERO o FALSO.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/02/suma-y-producto-de-cubo-y-otro-tipo-1.html

NUMCIFRAS

Cuenta las cifras de un entero positivo

CIFRA

Extrae de un número una cifra determinada

TROZOCIFRAS

Extrae varias cifras contiguas de un número

Las tres figuran en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/04/cancelaciones-anomalas-12.html

Con estas funciones se puede construir la que nos interesa. Para cada número buscará capicúas para el sumando central y, si cumplen lo exigido, ellos serán los valores de la función. Si no hay solución se devolverá un cero.

public function doblecapi(n)
dim a, b, c, d, m,f

a=0 ‘Variable para la solución
m=n ‘Buscamos un capicúa desde m hasta 10
while a=0 and m>10 ‘No consideramos capicúas de una cifra
if escapicua(m) then ‘Hemos encontrado un capicúa
f=numcifras(m) ‘Contamos las cifras
b=trozocifras(m,1,int(f/2)) ‘Tomamos la mitad de las cifras por defecto
if f mod 2=1 then c=cifra(m,int(f/2)+1) else c=1 ‘Distinguimos entre par e impar
if m+b*c*cifrainver(b)*2=n and c<>0 then a=m ‘Es la línea más importante. Descubre la expresión palindrómica
end if
m=m-1 ‘Sigue la búsqueda del capicúa central
wend
doblecapi=a ‘Devolverá el capicúa central o un cero si no hay solución
end function

Con esta función logramos las primeras soluciones, acompañada cada una del capicúa central correspondiente:

13	11
30	22
51	33
76	44
105	55
113	111
125	121
137	131
138	66
149	141
161	151
173	161
175	77
185	171
197	181
209	191
216	88
220	212
238	222
256	232
261	99
274	242
292	252

Puedes comprobar algunas soluciones. Por ejemplo:

292=2*5*2+252+2*5*2=20+252+20=292

216=8*8+88+8*8=64+88+64=216

Podemos traducir este procedimiento al lenguaje PARI, aunque queda un código un poco largo. Las primeras líneas reproducen las funciones auxiliares:

```
palind(n)=n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))

cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)

cifra(a,p)=cutdigit(a,p,p)

reverse(n)=eval(concat(Vecrev(Str(n))))

numcif(n)=#Vec(Str(n))

doblecapi(n)={my(a=0,b,c,m,f);m=n;while(a==0&&m
>10,if(palind(m),c=1;print(m);f=numcif(m);b=cutdigit
(m,1,truncate(f/2));if(f%2==1,c=cifra(m,truncate(f/2)+
1));

if(m+b*c*reverse(b)*2==n&&c<>0,a=m));m-=1);a}
```

Hasta aquí la función *doblecapi*, y podemos añadir esta línea de búsqueda:

```
for(i=10,500,if(doblecapi(i),print1(i,", ")))
```

Obtendremos el listado

13, 30, 51, 76, 105, 113, 125, 137, 138, 149, 161, 173, 175, 185, 197, 209, 216, 220, 238, 256, 261, 274, 292, 310, 328, 331, 346, 359, 364, 387, 415, 443, 446, 471, 488, 499,

Coincide con el obtenido en VBasic de Excel.

Rutina para comprobar

Podemos cambiar el punto de vista, y comenzar con un listado de capicúas, para añadirle después el producto doble para encontrar una solución. No es una función, pero podemos programarla como subrutina. Las soluciones aparecerán en columna, y al finalizar debemos ordenar las soluciones (lo hará Excel en el menú Datos).

```
sub doblecap()
dim i,f,b,c, m,n,fila

n=500 ‘Marcamos un tope a la búsqueda
fila=2
for i=10 to n
if escapicua(i) then ‘Encontramos un capicúa
f=numcifras(i)
b=trozocifras(i,1,int(f/2))
if f mod 2=1 then c=cifra(i,int(f/2)+1) else c=1
if c<>0 then
m=i+b*c*cifrainver(b)*2 ‘Aplicamos la suma al capicúa
fila=fila+1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 1).Value = m ‘Se escribe la solución
end if
end if
next i
end sub
```

Así queda la solución en la hoja de cálculo, una vez ordenados los resultados:

	A
1	13
2	30
3	51
4	76
5	105
6	113
7	125
8	137
9	138
10	149
11	161
12	173
13	175
14	185
15	197
16	209

Es muy buena costumbre verificar los resultados mediante varios métodos y herramientas.

Podríamos cambiar las condiciones del problema, pero ha resultado todo un poco fatigoso, como para volverlo a plantear. Lo dejamos abierto.

NÚMEROS DE SAINT-EXUPÉRY

Reciben este nombre en la página OEIS (http://oeis.org) aquellos números que coinciden con el producto de los tres lados de una terna pitagórica. El primero, como era de esperar, es 60, que es el producto de 3, 4 y 5, elementos de la terna más sencilla que conocemos. El segundo, 480, es el producto de sus dobles, 6*8*10. Siguen infinitos de este tipo (porque también es infinito el número de ternas), y nuestro objetivo en este apartado es analizar métodos para encontrarlos.

La idea sencilla es ir construyendo ternas y después tomar nota del producto de sus lados. El inconveniente reside en que así no podemos averiguar si un número cualquiera es de este tipo o no. Si nos preguntan si lo es 238772, no vamos a formar todas las ternas hasta llegar a él. Por eso, como en otras ocasiones, recurriremos a una función que nos responda a esa pregunta.

Algoritmo con fuerza bruta

Esta es la aproximación a un problema con la solemos comenzar en este blog. Fingimos no saber nada de la cuestión y emprendemos una búsqueda sin apoyarnos en ninguna propiedad. Usaremos la siguiente función:

Public Function Saint_Exupery(n)
Dim a, b, c, p, r
Dim s$

a = 3: b = 4: c = 5: p = 60 ‘Iniciamos valores con la terna (3, 4, 5)
s = "" ‘Recogerá soluciones
r = Sqr(n) ‘Tope de búsquedas
While a <= r And s = ""
b = a + 1 ‘Segundo cateto
p = a * b * c ‘Posible número de Saint_Exupery
While b <= r And s = ""
c = n / a / b ‘Tercer cateto
If a ^ 2 + b ^ 2 = c ^ 2 Then s = Str$(a) + Str$(b) + Str$(c) ‘Es terna pitagórica y se publica
b = b + 1
Wend
a = a + 1
Wend
Saint_Exupery = s
End Function

Con esta función podemos responder a la pregunta de si 238772 es del tipo buscado, y la respuesta es que no, porque devuelve una cadena vacía. Más adelante veremos una razón más sencilla, y es que no es múltiplo de 60.

También con ella podemos encontrar los primeros números de Saint_Exupery:

En la tabla siguiente, cada número viene acompañado de la terna de la que es producto:

Número	Terna
60	3 4 5
480	6 8 10
780	5 12 13
1620	9 12 15
2040	8 15 17
3840	12 16 20
4200	7 24 25
6240	10 24 26
7500	15 20 25
12180	20 21 29
12960	18 24 30
14760	9 40 41
15540	12 35 37
16320	16 30 34

Indirectamente, esta es una forma de ordenar ternas por el producto de sus lados.

No es este un algoritmo rápido. Para llegar a estos resultados se han necesitado 1m y 20s. Pronto veremos una simplificación.

Estos números ya están publicados en OEIS, de donde hemos obtenido su definición:

A057096 Saint-Exupéry numbers: ordered products of the three sides of Pythagorean triangles.

60, 480, 780, 1620, 2040, 3840, 4200, 6240, 7500, 12180, 12960, 14760, 15540, 16320, 20580, 21060, 30720, 33600, 40260, 43740, 49920, 55080, 60000, 65520, 66780, 79860, 92820, 97440, 97500, 103680, 113400, 118080, 120120, 124320, 130560, 131820, 164640

(http://oeis.org/A057096)

Segundo algoritmo

En el algoritmo de fuerza bruta hemos obviado el hecho de que los lados de la terna han de ser divisores del número de Saint-Exupéry buscado. Si tenemos esto en cuenta, la búsqueda se simplifica bastante. Podemos intentar esta variante:

```
Public Function Saint2(n)
Dim a, b, c
Dim s$

a = 5
s = ""
While a <= n / 2 And s = ""
If n / a = n \ a Then ‘Exigimos que el primer lado sea divisor de n
b = a – 1 ‘Buscamos el siguiente divisor, más pequeño que a
While b > 1 And s = ""
```

If n / b = n \ b Then
c = n / a / b ‘El tercer divisor se calcula directamente
If a ^ 2 = b ^ 2 + c ^ 2 Then s = Str$(a) + Str$(b) + Str$(c)
End If
b = b - 1
Wend
End If
a = a + 1
Wend
Saint2 = s
End Function

Esta versión constituye una mejora en rapidez, porque tarda 54 segundos en reproducir la misma tabla de arriba.

Tercera versión

A propósito, para que se vea la utilidad de un apoyo teórico, hemos ignorado una propiedad muy popular de las ternas, y es que en cualquiera de ellas hay un múltiplo de 3, uno de 4 y uno de 5, que pueden coincidir o no en un mismo término. Por tanto, el producto de los tres lados será múltiplo de 60. Esto facilita mucho las cosas, porque se puede insertar un condicional del tipo

n/60=n\60 o **n MOD 60=0**, con lo que solo se analizarán los múltiplos de 60.

Con esta mejora, nuestro equipo, con bastantes años sobre él, solo tarda 13 segundos.

Ahora ha llegado el momento de traducir este algoritmo al lenguaje PARI:

saint(n)={my(a=5,b,c,m=0);if(n%60==0,while(a<=n/2&&m==0,if(n%a==0,b=a-1;while(b>=1&&m==0,if(n%b==0,c=n/a/b;if(c<a&&a^2==b^2+c^2,m=1));b-=1));a+=1));m}

for(i=60,60000,if(saint(i),write1("final.txt",i,", "))

No se gana mucha rapidez con él, porque PARI no es muy eficiente cuando se manejan bucles anidados. La ventaja que presenta es que llega fácilmente a números grandes. El listado siguiente llega hasta 60000:

60, 480, 780, 1620, 2040, 3840, 4200, 6240, 7500, 12180, 12960, 14760, 15540, 16320, 20580, 21060, 30720, 33600, 40260, 43740, 49920, 55080, 60000,…

Dos cuestiones

En las búsquedas que hemos emprendido no hemos encontrado un número que sea producto de lados de dos ternas distintas. Parece ser que su existencia es una cuestión abierta.

Nuestras funciones pueden resolver el llamado “Problema de Napoleón”, planteado por el mismo Saint-

Exupéry. No vamos a desarrollar aquí ese problema. Puedes consultar

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Parallelepipede_Plane.pdf

En ese texto se llega a la solución 756, 825 y 1119. Si aplicamos nuestra función *saint2* al número 697920300 (ver texto recomendado), nos devuelve al momento esa solución:

Número	697920300
Terna	1119 825 756

(Ver también

https://www.antoinedesaintexupery.com/personne/le-probleme-du-pharaon/)

POLIGORIALES

Los números poligoriales se definen de forma similar a los factoriales, pero en lugar de multiplicar números naturales consecutivos, lo hacen con los números poligonales.

Un número poligorial de orden k equivale al producto de los primeros números poligonales de orden k. Por ejemplo, 180 es poligorial de orden 3, porque es el producto de los cuatro primeros números triangulares: 180=1*3*6*10. 518400 lo es de orden 4, porque equivale al producto de los cuadrados 1, 4, 9, 16, 25 y 36.

En el caso de los factoriales los factores son números naturales, y no hay que calcularlos previamente al producto, pero en el caso de los poligoriales, cada factor posee su propia fórmula, que hay que evaluar. Como trabajamos con números poligonales, es útil usar la misma fórmula en todos los órdenes, aunque luego exista la posibilidad de simplificación en cada caso. Es la siguiente:

$$P_{n,k} = \frac{n\big(n(k-2)-(k-4)\big)}{2}$$

En ella **k** es el orden y **n** la longitud de un lado, que es la variable que se recorre al plantear el producto.

Con esta fórmula no es difícil encontrar una función que devuelva el valor de un poligorial de parámetros n y k:

```
Public Function poligorial(n, k)
Dim i, j, p

If k < 2 Then poligorial = 1: Exit Function ‘No se definen poligonales de dos lados
p = 1 ‘Inicio del producto de poligonales
For i = 1 To n
p = p * i * (i * (k - 2) - k + 4) / 2 ‘Cada factor se evalúa con la fórmula para poligonales
Next i
```

poligorial = p
End Function

Casos particulares

A continuación recorreremos algunos órdenes, obteniendo el listado de los primeros términos y alguna propiedad o curiosidad. Comenzamos por los triangulares. Con la función de arriba, es fácil obtener esa lista de los primeros números poligoriales triangulares:

Número	Poligorial triangular
1	1
2	3
3	18
4	180
5	2700
6	56700
7	1587600
8	57153600
9	2571912000
10	141455160000

Un listado más completo lo tienes en http://oeis.org/A006472. Como en esa página figuran casi todos los casos, nos limitaremos a incluir el enlace en cada caso.

No es difícil encontrar una fórmula para el poligorial triangular:

$$P(n,3)=\prod_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n!\,(n+1)!}{2^n}$$

Se puede expresar de otra forma, pero así es fácil calcularla con hoja de cálculo:

Si, por ejemplo, N figura en la celda I4, su poligorial triangular sería ***=FACT(I4)*FACT(I4+1)/2^I4***. Puedes probarlo con cualquier elemento de la tabla:

FACT(7)*FACT(7+1)/2^7=1587600

En la dirección enlazada puedes consultar propiedades combinatorias cuya naturaleza no las hace aptas para ser tratadas con una simple hoja de cálculo.

En esa página figura una aproximación para estos poligoriales:

a(n) ~ 4*Pi*n^(2*n)/(2^n*exp(2*n)).

No es muy buena, como puedes comprobar en la siguiente tabla de comparación:

Poligorial triangular	4*Pi*n^(2*n)/(2^n*exp(2*n)).
3	3
18	17
180	174
2700	2626
56700	55367
1587600	1554884
57153600	56105366
2571912000	2529416046

Poligoriales cuadrados

Este orden es mucho más simple en su generación que el anterior, ya que cada elemento es un producto de cuadrados consecutivos, luego es, en sí mismo, otro cuadrado, que coincide con el cuadrado de un factorial. Lo ves en la tabla:

Número	Poligorial cuadrado	Raíz (factorial)
1	1	1
2	4	2
3	36	6
4	576	24
5	14400	120
6	518400	720
7	25401600	5040
8	1625702400	40320
9	131681894400	362880
10	13168189440000	3628800

Por tanto, su fórmula será:

$$P(n,4) = \prod_{i=1}^{n} n^2 = n!^2$$

El listado de los primeros junto con muchas propiedades combinatorias lo puedes consultar en http://oeis.org/A001044

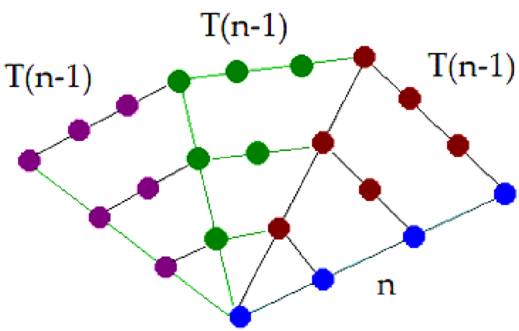
Fórmula general en PARI

Ha llegado el momento de pensar en los poligoriales como productos de sumas, ya que los poligonales equivalen a sumas cuyos elementos tienen la expresión **1+(k-2)*(i-1).** En efecto, los triangulares suman números enteros i, como 10=1+2+3+4, por lo que para k=3 suman 1+(3-2)*(i-1)=1+i-1=i. Los cuadrados suman impares: 1+3+5+7+9=25=5^2, con lo que para k=4 queda 1+(4-2)*(i-1)=1+2i-2=2i-1

Según estas consideraciones, que se basan en que todo poligonal equivale a k-2 números triangulares sumados con su índice (ver mi publicación “Números y formas”

http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf),

estos sumandos **1+(k-2)*(i-1)** se pueden extender a todos los poligoriales. En nuestra figura lo puedes entender mejor:



En ella se observa que en cada especie de arco están incluidas (k-2)*(i-1)+1 unidades: 3*0+1, 3*1+1, 3*2+1, 3*3+1…

Según esto, la función en PARI que devuelve el poligorial(n,k) puede ser:

polygorial(n,k)={my(i,j);prod(i=1,n,sum(j=1,i,1+(k-2)*(j-1)))}

Expresa muy bien la idea de que el poligorial es un producto de sumas.

Puedes comprobar, por ejemplo:

Polygorial(6,4)=518400

Polygorial(9,3)=2571912000

Poligoriales pentagonales

Con la fórmula en PARI (que tiene traducción sencilla para VBASIC) ya podemos encontrar poligoriales de cualquier orden. Si hacemos k=5 obtendremos los de orden pentagonal (o pentagoriales):

1, 5, 60, 1320, 46200, 2356200, 164934000, 15173928000, 1775349576000, 257425688520000,…

Su listado y propiedades los encontrarás en http://oeis.org/A084939

Resto de poligoriales

Una vez conseguido un procedimiento general de obtención de términos, el resto es casuística o propiedades combinatorias no abordables con hoja de cálculo. Un texto sencillo para ampliar el tema es

https://web.archive.org/web/20140617132401/http://danieldockery.com/res/math/polygorials.pdf

En la página OEIS están incluidos más órdenes de poligoriales. A continuación se insertan algunos listados conseguidos de forma personal con nuestra función poligorial seguidos de su comprobación en OEIS:

Hexagonales

Hemos usado el código PARI

polygorial(n,k)={my(i,j);prod(i=1,n,sum(j=1,i,1+(k-2)*(j-1)))}

for(i=1,10,print1(polygorial(i,6),", "))

1, 6, 90, 2520, 113400, 7484400, 681080400, 81729648000, 12504636144000, 2375880867360000,…

Esta sucesión está incluida en http://oeis.org/A000680, sin destacar que se trata de poligoriales hexagonales hasta el apartado de fórmulas.

Una forma de obtener estos números es mediante la expresión

$$P(n,6) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

Igualmente, es fácil encontrarlos mediante la recursión a(n)=a(n-1)*C(2n,2), siendo C el número de combinaciones o un binomial (en Excel, COMBINAT). En la siguiente tabla generamos estos números mediante fórmula directa y por recursión (anterior por las combinaciones de 2n sobre 2):

Número	Poligorial hex. (2n)!/2^n	Por recursión (por C(2n,2))
1	1	1
2	6	6
3	90	90
4	2520	2520
5	113400	113400
6	7484400	7484400
7	681080400	681080400
8	81729648000	81729648000
9	12504636144000	12504636144000
10	2375880867360000	2375880867360000

Con las herramientas presentadas podríamos seguir creando poligoriales.

Heptagoriales:

1, 7, 126, 4284, 235620, 19085220, 2137544640, 316356606720, 59791398670080, 14050978687468800,… http://oeis.org/A084940

Octogoriales:

1, 8, 168, 6720, 436800, 41932800, 5577062400, 981562982400, 220851671040000, 61838467891200000,… http://oeis.org/A084941

Y así se puede seguir hasta el orden deseado. Todos tienen propiedades combinatorias interesantes, que no tienen cabida aquí.

LOS NÚMEROS DE PELL

Se llaman así a los denominadores del desarrollo en fracciones continuas de la raíz cuadrada de 2. Como este algoritmo no suele ser muy conocido, remitimos a nuestras entradas referidas a él. Como fueron varias, es preferible que consultes el resumen *Números y hoja de cálculo II* en su capítulo “Las olvidadas fracciones continuas”. Lo puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/publicaciones/hojanum2.pdf

En esa publicación podrás repasar lo más importante de estas fracciones, que sirven para aproximar tanto los números racionales como los irracionales. En este último caso, si son cuadráticos, los coeficientes de dichas fracciones son periódicos, detalle muy importante, porque nos permite realizar iteraciones. Vemos todo esto a continuación:

Raíz de 2 en forma de fracción continua

Copiamos a continuación la introducción al capítulo que hemos enlazado:

Llamamos fracción continua a la expresada de esta forma:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$$

donde ***a*** *es entero y* ***b, c****…son enteros positivos llamados* ***cocientes****. Toda fracción ordinaria se puede expresar de esta forma, y todo número irracional admite aproximaciones mediante desarrollos de este tipo. Las fracciones continuas se usan cuando se desea manejar un representación de los números reales independiente del sistema de numeración (salvo en la expresión de los cocientes).*

Como hemos indicado más arriba, en el caso de irracionales cuadráticos los cocientes son periódicos. Lo intentamos ver con la raíz cuadrada de 2 y una calculadora:

1,4142135623731 = 1+0,4142135623731 =
1+1/2,414213562 = 1+1/(2+0,414213562) =
1+1(2+1/2,414213562) = 1+1(2+1/2+0,414213562) = …

Aunque de forma aproximada, ya vemos la periodicidad. De hecho, la fracción continua de la raíz cuadrada de 2 es

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Si se interrumpe el desarrollo, que es infinito y periódico y se calcula el valor de lo truncado obtendremos las llamadas *reducidas*. No vamos a reproducir aquí la teoría, porque nuestro interés está en los denominadores de esas reducidas. Desde hace mucho tiempo se sabe que tanto los cocientes como las reducidas se calculan a partir del *algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D*. Dejamos por ahora el fundamento de todo esto, porque lo que nos va a interesar es la obtención de los números de Pell por recursión.

Podemos usar nuestra hoja de cálculo *fraccont.xlsm* para reproducirlo todo (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#fraccont)

Reproducimos el resultado que da para la raíz cuadrada de 2:

1,41421356	Fracción continua:	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
		1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Resolución aproximada											
		1,00000	1,50000	1,40000	1,41667	1,41379	1,41429	1,41420	1,41422	1,41421	1,41421
0,0001											

En la parte izquierda hemos escrito los decimales de la raíz cuadrada de 2, (=RAIZ(2)). La línea de arriba contiene los cocientes de la fracción continua, que, como vemos, es periódica salvo el primero. Debajo están escritas las reducidas, que son fracciones que se aproximan al valor de la raíz de 2, según puedes observar en la fila verde de abajo.

De toda esta teoría nos interesan los valores de los denominadores (lo demás lo puedes ignorar): 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378,…Estos son los llamados “Números de Pell”.

Se puede demostrar que la generación de estos números se obtiene por recursión mediante un antiguo algoritmo llamado de “los cumulantes”. Compruébalo:

$P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=2*P_2+P_1=2*2+1=5$,
$P_4=2*P_3+P_2=2*5+2=12$,…

$\mathbf{P_n=2*P_{n-1}+P_{n-2}}$

Aquí comienza verdaderamente el tema:

Llamaremos números de Pell a aquellos números enteros obtenidos mediante esta definición por recursión:

$P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_n = 2*P_{n-1} + P_{n-2}$

Los primeros son: 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, 2744210, 6625109, 15994428, 38613965, 93222358, 225058681, 543339720, 1311738121, 3166815962, 7645370045,…

Están publicados en http://oeis.org/A000129

Los puedes reproducir mediante la recursión, pero podemos usar otra herramienta que ofrece *Hojamat.es* sobre las sucesiones recurrentes.

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

En la hoja "Segundo orden" podemos escribir los datos de esta recursión: 1 y 2 como elementos iniciales de los números de Pell así como 2 y 1 como coeficientes de la fórmula de recursión. Quedaría así:

Coeficientes				
A	2		B	1
Valores iniciales				
X0	1		x1	2

Si le das al botón **Ver sucesión** obtendrás los primeros números de Pell:

Sucesión	1
	2
	5
	12
	29
	70
	169
	408
	985
	2378
	5741
	13860
	33461
	80782
	195025
	470832
	1136689
	2744210
	6625109
	15994428

Si bajas a celdas inferiores podrás encontrar la ecuación característica, que es la fórmula que devuelve los números de Pell sin necesidad de recursión. La hoja nos devuelve esta ecuación:

X(n)= .85355*(2.41421)^n+ .14645*(-.41421)^n)

Está escrita con decimales, pero puedes comprobar fácilmente que coincide con la que te dará cualquier publicación:

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

Si le das un valor entero positivo a n, con la fórmula se obtendrá P_n. A partir de ella se deduce que el cociente entre dos números de Pell consecutivos se acerca al valor del número de plata:

$$2{,}414213562\ldots = 1 + \sqrt{2}$$

La razón es que al crecer **n** el segundo sumando tiende a 0. Lo comprobamos con nuestra herramienta *recurre2.xlsm*:

P(n)	P(n+1)/P(n)
1	
2	2
5	2,5
12	2,4
29	2,416666667
70	2,413793103
169	2,414285714
408	2,414201183
985	2,414215686
2378	2,414213198
5741	2,414213625
13860	2,414213552
33461	2,414213564
80782	2,414213562
195025	2,414213562
470832	2,414213562

La recurrencia también es útil para investigar si un número cualquiera es de Pell o no. Como el proceso es bastante rápido, bastará usar esa recurrencia desde P(1)=1 y P(2)=2 hasta llegar al número dado. Si el proceso pasa por él, será de Pell y, si lo sobrepasa, no lo será. Lo hemos plasmado en esta función:

Función ESPELL

Public Function espell(n)
Dim a, b, c
Dim es As Boolean

If n = 1 Or n = 2 Then espell = True: Exit Function ' Si es 1 o 2, hemos terminado
a = 2: b = 5: es = False ‘Iniciamos en P(3)=5 y es=false (lo normal es que no sea tipo Pell)
While b <= n
If b = n Then es = True ‘Si pasa por el número, será de tipo Pell
c = a + 2 * b: a = b: b = c ‘Recurrencia
Wend ‘Si sobrepasa al número, no es de Pell
espell = es
End Function

Puedes probarla con números que sabes que son del tipo Pell y otros que no lo sean, para ver su funcionamiento.

Si conoces el lenguaje PARI, puedes usar esta otra, que es idéntica, pero de estructura más compacta:

espell(n)={my(a=2,b=5,c,m=0);while(b<=n,if(b==n,m=1);c=a+2*b;a=b;b=c);m||n==1||n==2}

Son soluciones de ecuaciones de Pell

Lo que sigue es sólo una ventana a otro tema. Si no te interesan las ecuaciones de Pell, ignóralo. Si ya tienes una idea, esto te servirá para repasar o avanzar.

Los valores P_{2n} son soluciones de la ecuación de Pell x^2-$2y^2$=1

Hemos usado nuestra hoja

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

En ella hemos a D el valor 2 y hemos pedido soluciones para que el segundo miembro valga 1:

X	Y	
3	**2**	**1**
17	12	1
99	70	1
577	408	1
3363	2378	1
19601	13860	1
114243	80782	1
665857	470832	1

Observamos que las soluciones para Y son los números de Pell de índice par.

Los valores P_{2n-1} son soluciones de la ecuación de Pell x^2-$2y^2$=-1

X	Y	
1	**1**	**-1**
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1

En efecto, para el -1 resultan los números de Pell de índice impar 5, 29, 169,…

Aquí lo dejamos, ya que era una idea para profundizar.

Los números de Pell y las ternas pitagóricas

Los números de Pell nos sirven para descubrir catetos de una terna pitagórica primitiva que se diferencien en una unidad. Para ello recordemos que las ternas se formaban mediante estas tres expresiones: **($2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2)**, con m y n coprimos y de distinta paridad. Si los dos catetos se diferencian en una unidad se cumplirá que **$m^2-n^2=2mn+1$**. Hemos escrito 1, pero también resultan casos con el -1

Convertimos **$m^2-n^2=2mn+1$ en $(m-n)^2-2n^2=1$** (o a -1)

Por tanto, m-n y n serán soluciones de la ecuación de Pell contenidas en las tablas de arriba.

Tomemos, por ejemplo, las soluciones 99 y 70. Calculamos:

$m-n=99$, $n=70$, $m=169$, $m^2-n^2= 23661$ y
$2mn=2*169*70=23660$, y son consecutivos.

Vemos otro: $m-n=17$, $n=12$, $m=29$ y $m^2-n^2=697$ y $2mn=696$.

Los valores de m y n resultan ser números de Pell consecutivos.

¿Pueden ser de otro tipo los números de Pell?

Si combinamos nuestra función ESPELL vista más arriba con otras del mismo tipo como ESCUAD, ESPRIMO, ESOBLONGO o ESTRIANGULAR, podemos saber si un número de Pell puede pertenecer a otro tipo. Aquí tienes algunos resultados:

Primos

Sí existen números de Pell que son primos. Los primeros son 2, 5, 29, 5741,…Sus índices han de ser primos también. Puedes profundizar en estas páginas:

https://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html

http://oeis.org/A086383

Cuadrados

Sólo son de Pell y cuadrados estos dos: el 1 y el 169

Triangulares

Ocurre algo similar, que el 1 es el único número de Pell triangular

Oblongos

Hemos encontrado 2 y 12 y no parece haber más.

Semiprimos

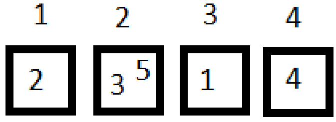
Hemos encontrado 169=13*13, 985=5*197, 1136689=137*8297, 6625109

Con esto tienes una idea básica de lo que son los números de Pell y algunas de sus propiedades.

UNOS NÚMEROS DE LAH

Si deseamos construir una aplicación sobreyectiva de un conjunto de **n** elementos sobre otro de **n-1**, debemos buscar un origen para cada elemento del segundo conjunto, pero siempre nos sobrará uno del primero, que habrá que asignarlo a un elemento imagen ya elegido, con lo que este poseerá dos orígenes.

Esta situación se entiende bien con el símil de cajas y bolas. Deseamos meter **n** bolas en **n-1** cajas, de forma que todas las cajas tengan al menos una bola y que todas las bolas estén asignadas a alguna caja. Esto nos obliga a meter dos bolas en una caja concreta.



En la imagen observamos una aplicación sobreyectiva de los números {1, 2, 3, 4, 5} sobre las cajas {1, 2, 3, 4}

En ella hemos tenido que hacer convivir el 3 y el 5 en una misma caja.

¿Cuántas formas existen de construir este tipo de aplicaciones? Con esta pregunta llegaremos a un caso particular de los llamados números de Lah, cuando el parámetro k es igual a 2

$$L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

(Imagen tomada de

https://en.wikipedia.org/wiki/Lah_number)

Deducción de la fórmula

Observemos lo que hemos hecho:

En primer lugar debemos llenar las cajas con una bola. Como tenemos 5 bolas para 4 cajas, las posibles elecciones serán *variaciones sin repetición de 5 sobre 4*, es decir, 5*4*3*2. Esas serían las formas de completar las cajas. Siempre nos sobrará una bola, que podemos asignar a una de las 4 cajas posibles, luego debemos multiplicar por 4 y quedaría 5*4*3*2*4. Si razonamos así, estaríamos contando estos casos como dobles. Por ejemplo, en la imagen, repetiríamos el razonamiento con el 3 y con el 5, con lo que habríamos contado 5*4*3*2*4=480, en lugar de los 240 que efectivamente existen, es decir, 5*4*3*2*4/2=4*5!/2

Generalizando: El número de aplicaciones sobreyectivas de {1,2…n} sobre {1, 2,…n-1} equivale a un caso concreto de números de Lah (cuando k=2) dado por la expresión

$$N = \frac{(n-1)n!}{2}$$

Estos números están publicados en

http://oeis.org/A001286

1, 6, 36, 240, 1800, 15120, 141120, 1451520, 16329600, 199584000, 2634508800, 37362124800, 566658892800, 9153720576000, 156920924160000, 2845499424768000, 54420176498688000, 1094805903679488000, …

Entre ellos figura el 240 que hemos deducido para n=5: 4*5!/2=2*120=240

Para el caso de n=3 el número de aplicaciones sería 6. Representamos las cajas mediante paréntesis: (12)(3), (13)(2), (23)(1), (1)(23), (2)(13), (3)(12)

Hay que advertir que dentro de cada paréntesis no influye el orden.

La fórmula para Excel sería (N-1)*FACT(N)/2

Podemos deducir la fórmula con otro razonamiento: Se puede decidir antes de nada qué dos bolas comparten caja. Esta elección se hace mediante *combinaciones sin repetición de n elementos tomados de 2 en 2*, es decir **n(n-1)/2**. Una vez elegido el par, hay que asignarle una caja, y esto supone **n-1** posibilidades, con lo que quedaría un total de **n(n-1)/2*(n-1)** casos. Así nos quedarán libres **n-2** bolas y **n-2** cajas. Entre ellas se pueden formar **(n-2)!** aplicaciones biyectivas, que completarían el proceso. En resumen, tendríamos **n(n-1)/2*(n-1)*(n-2)!=(n-1)*n!/2**, como ya sabíamos.

Una propiedad derivada

En el razonamiento anterior usamos la expresión **n(n-1)/2** como número de combinaciones, pero también es un número triangular de orden n-1, que equivale a la suma de consecutivos 1+2+3+…+n-1, luego estos números también se pueden expresar como

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)!$$

Lo puedes ver en esta tabla de Excel:

		Factores k*m!						
n	n!	1	2	3	4	5	6	Suma
1	1	1						**1**
2	2	2	4					**6**
3	6	6	12	18				**36**
4	24	24	48	72	96			**240**
5	120	120	240	360	480	600		**1800**
6	720	720	1440	2160	2880	3600	4320	**15120**

La parte central coloreada representa el conjunto de términos del sumatorio. A la derecha figuran en negrita los números de Lah para k=2, suma de los anteriores, y a la izquierda los factoriales. De esta tabla se pueden extraer unas representaciones interesantes para los números de Lah que estamos estudiando. Te dejamos que lo deduzcas:

6=(1+2)*1*2
36=(1+2+3)*1*2*3
240=(1+2+3+4)*1*2*3*4
1800=(1+2+3+4+5)*1*2*3*4*5
15120=(1+2+3+4+5+6)*1*2*3*4*5*6

Queda atractivo.

Recurrencia

Finalizamos este estudio con una breve referencia a la generación de cada número respecto al anterior y al número de orden. No hay que razonar mucho para comprender que

$$L(n+1) = L(n) \cdot n(n+1)/(n-1)$$

Se puede reproducir esta generación escribiendo una columna de índices y aplicar esta fórmula en una segunda columna a partir del 1:

n	L(n)	Factor multiplicador
1	**1**	
2	6	6
3	36	6
4	240	6,66667
5	1800	7,5
6	15120	8,4
7	141120	9,33333
8	1451520	10,2857

No importa que el factor multiplicador no sea entero, porque se compensa con los factores del anterior número de Lah (sabemos que el resultado ha de ser entero).

SEMIPRIMOS DE LA FORMA N²+K

Una forma de obtener ideas para el blog es la de elegir un número al azar y buscarlo en OEIS (http://oeis.org), la Enciclopedia de sucesiones enteras. En una de estas exploraciones aparecieron las relaciones de los números semiprimos con los cuadrados. Me pareció un tema que podía dar juego, y aquí lo tenéis.

Comenzamos con aquellos semiprimos que sobrepasan a un cuadrado en un número **k** prefijado. Recorreremos algunos casos de k.

Podemos imaginar una función en la que identificamos **n** como semiprimo le restamos **k** y vemos si es cuadrado. Por motivos de rendimiento, es preferible pensarlo al revés, que sería averiguar si el número es de la forma n^2+k y después comprobar si es semiprimo. Se puede disponer de una función *essemiprimo* (o, en algunos lenguajes de programación, hacer bigomega(n)=2), pero integraremos esa comprobación en el código general.

Se puede usar una función (***semiconcuad(n,k))*** construida para Excel o Calc, pero fácilmente trasladable a otros lenguajes. Usaremos en ella la función *escuad*, que identifica los cuadrados y que puede tener este listado:

Public Function escuad(n) As Boolean

If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End Function

También usamos la función *esprimo* que puedes encontrar en cualquier buscador escribiendo "*función esprimo hoja*". Se ha usado mucho en este blog, por lo que se puede omitir cualquier explicación sobre ella.

function semiconcuad(n,k) as boolean
dim d,m,r,q
dim noes as boolean

If not escuad(n-k) or n=1 then semiconcuad=false:exit function
'Si n-k no es cuadrado o n=1, sale del algoritmo
d=2:noes=true:r=sqr(n) 'La raíz cuadrada de n es el tope de los divisores propios
while d<=r and noes 'Se busca si es semiprimo

q=int(n/d) 'Para cada divisor se busca el complementario
if n=d*q and esprimo(q) and esprimo(d) then noes=false 'Busca dos factores primos
d=d+1
wend
semiconcuad=not noes 'Es semiprimo
end function

Con el Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) es también fácil encontrar estos números. Por ejemplo, para el siguiente caso de K=1 plantearíamos

semiprimo
es cuadrado(N-1)

Resultarían estos números

Solución
10
26
65
82
122
145

Veremos a continuación que coinciden con los publicados en OEIS.

Caso k=1

Si aplicamos una búsqueda para k=1 resultan estos primeros semiprimos:

10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501, 2602, 2705, 3365, 3482, 3601, 3722, 3845, 4097, 4226, 4762, 5042, 5777, 6085, 6242, 6401, 7226, 7397, 7745, 8465, 9026, 9217, 10001

Están publicados en http://oeis.org/A144255

En esa publicación se destaca que sus factores primos serán distintos, porque n^2+1 no puede ser cuadrado. Por ejemplo, $26=5^2+1=2*13$.

Las bases de los cuadrados no presentan ninguna pauta aparente: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 15, 19, 22, 25, 28, 29, 30, 34, 35, 39,…

Con la función presentada más arriba es fácil encontrar los primeros semiprimos de la forma $\mathbf{n^2+k}$. Es útil si deseamos saber si un número cualquiera cumple lo exigido, pero si solo nos interesa el listado, se puede sustituir por una subrutina. La que sigue escribe con rapidez las primeras 50 soluciones para k=1 en la celda 9,9 de la primera hoja:

```
sub listsemiconcuad() as boolean

dim d,m,r,q,k
dim res$
dim noes as boolean

k=1:res$=""
for n=1 to 50
m=n^2+1
d=2:noes=true:r=sqr(m)
while d<=r and noes
q=int(m/d)
if m=d*q and esprimo(q) and esprimo(d) then
noes=false:res$=res$+", "+str$(m)
d=d+1
wend
next n
call escribestring(0,8,8,res$)
end sub
```

Se obtiene el listado:

10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501

Es interesante el listado en PARI publicado en esa página, pero requiere alguna corrección. Puedes usar este:

print(select(n->bigomega(n)==2, vector(100, n, n^2+1)))

Caso K=2

Con nuestra función *semiconcuad*, haciendo k=2, es fácil obtener un listado:

6	2	[2,1][3,1]
38	6	[2,1][19,1]
51	7	[3,1][17,1]
123	11	[3,1][41,1]
146	12	[2,1][73,1]
291	17	[3,1][97,1]
326	18	[2,1][163,1]
731	27	[17,1][43,1]
843	29	[3,1][281,1]
1227	35	[3,1][409,1]
1371	37	[3,1][457,1]
1766	42	[2,1][883,1]
1851	43	[3,1][617,1]

En la tabla figuran el número semiprimo, la base del cuadrado correspondiente y la factorización del primero. Los semiprimos aquí tampoco serán cuadrados.

Las bases de los cuadrados en la segunda columna están publicadas en http://oeis.org/A242330

Con PARI obtenemos estas soluciones en forma de lista

print(select(n->bigomega(n)==2, vector(100, n, n^2+2)))

[6, 38, 51, 123, 146, 291, 326, 731, 843, 1227, 1371, 1766, 1851, 2306, 2603, 2811, 2918, 3027, 3602, 4227, 4358, 4763, 5186, 5331, 5627, 6243, 6891, 7058, 7571, 8102, 8651, 9411]

Igualmente, para k=3:

4	1	[2,2]
39	6	[3,1][13,1]
259	16	[7,1][37,1]
327	18	[3,1][109,1]
403	20	[13,1][31,1]
579	24	[3,1][193,1]
679	26	[7,1][97,1]
1027	32	[13,1][79,1]
1159	34	[19,1][61,1]
1299	36	[3,1][433,1]
1603	40	[7,1][229,1]
1939	44	[7,1][277,1]

Las bases de los cuadrados, 1, 6, 16, 18, 20, 24, … están publicadas en http://oeis.org/A242331. Aquí sí hay una solución cuadrada, el 4, igual a 1^2+3.

K=-1

Este caso es interesante, porque en él el semiprimo equivale a $n^2-1=(n+1)(n-1)$ lo que nos lleva a que sus factores son primos gemelos, y por tanto el semiprimo pertenecerá a http://oeis.org/A037074

Los primeros serán:

15	4	[3,1][5,1]
35	6	[5,1][7,1]
143	12	[11,1][13,1]
323	18	[17,1][19,1]
899	30	[29,1][31,1]
1763	42	[41,1][43,1]
3599	60	[59,1][61,1]
5183	72	[71,1][73,1]

En la factorización de la derecha aparecen claramente los pares de primos gemelos.
Los números de la segunda columna, bases de los cuadrados correspondientes, será, pues, los promedios de los pares de primos gemelos.

Se puede plantear algo similar para los cubos, buscando semiprimos de la forma $\mathbf{n^3+k}$, pero está casi todo publicado y no tiene interés añadido.

MEDIA CONTRAARMÓNICA ENTERA

Al cociente $\mathbf{(a^2+b^2)/(a+b)}$ se le suele llamar media contraarmónica de **a** y **b**

(Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Contraharmonic_mean).

Si **a** y **b** son enteros (estudiaremos solo los positivos) podemos preguntarnos si esta media es también entera.

En la página direccionada más arriba podrás descubrir que esa media y la media armónica son equidistantes de la media aritmética, siendo la armónica la de menor valor. Lo expresamos:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Si resta cada una de la anterior observarás que esa diferencia equivale a

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

La tercera es la media armónica, que es el inverso de la media aritmética de los inversos de a y b. Puedes estudiarla en https://es.wikipedia.org/wiki/Media_arm%C3%B3nica

Lo repasamos con un ejemplo, a=30, b=20. Los valores de estas medias serían:

Contraarmónica: $(30^2+20^2)/(30+20)=26$ (hemos elegido el ejemplo con valor entero)

Aritmética: (30+20)/2=25

Armónica: 2*20*30/(20+30)=24

Hemos comprobado que los tres valores son equidistantes.

También cumplen unas proporciones interesantes. Si llamamos **mc** a la contraarmónica y **mh** a la armónica se cumple:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-mh}{mh-b}=\frac{mc-b}{a-mc}$$

En el ejemplo, 30/20=3/2; (30-24)/(24-20)=(26-20)/(30-26)=6/4=3/2

Puedes repasar estas proporciones en el documento https://oeis.org/A210494/a210494.pdf

Media contraarmónica entera para un *a* dado y *b* máximo

Ya podemos entrar en el estudio que nos hemos propuesto, y es investigar para qué pares la media contraarmónica es entera. Como para cada valor de **a** pueden existir varias soluciones para **b**, nos vamos a dedicar tan solo a los valores de **b** que sean máximos, pero menores que **a**.

En principio, encontrar esos pares de valores no parece complicado. La siguiente función nos lo facilita. La idea es recorrer, para cada **n**, el mayor valor de **k** que cumpla esa condición. Buscamos el mayor porque puede abrir rutas hacia otras cuestiones, y porque suelen aparecer varias soluciones. Hemos cambiado la notación de **a** y **b** a **n** y **k**, para destacar que lo trataremos todo como una propiedad de **n**.

```
Public Function divsumapote(n)
Dim k, a
a = 0
For k = 1 To n - 1
If (n ^ 2 + k ^ 2) Mod (n + k) = 0 Then a = k
Next k
divsumapote = a
End Function
```

El interés de este algoritmo está en la quinta línea. En primer lugar nos preguntamos ***If (n ^ 2 + k ^ 2) Mod (n + k) = 0***, o dicho de otra forma, si se cumple la media contraarmónica de **n** y **k** es entera. En ese caso le damos a la variable **a** el valor de **k** correspondiente, pero como el bucle de cálculo continúa, ese valor de **a** llegará lo más alto posible, devolviéndonos así el máximo valor de **k**. Si ese valor es 0, el número **n** elegido no cumple esa condición.

Con esta función hemos encontrado los primeros valores de **n** y **k** que tienen su media contraarmónica entera:

N	K
6	3
12	6
15	10
18	9
20	12
24	12
28	21
30	20
35	15
36	18
40	24
42	30
45	36
48	24
54	27
56	42

Los valores de **n** ya están publicados, aunque con una orientación diferente, en http://oeis.org/A005279

6, 12, 15, 18, 20, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 75, 77, 78, 80, 84, 88, 90, 91, 96, 99, 100, 102, 104, 105, 108, 110, 112, 114, 117, 120, 126, 130, 132,…

Por ejemplo, 42 y 30 figuran en nuestra tabla porque

Mc(42,30)=(42^2+30^2)/(42+30)=37

Si esta media es entera, la armónica también lo será. Se puede demostrar con este desarrollo:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2-2ab}{a+b}=a+b-\frac{2ab}{a+b}$$

Si el primer miembro es entero, el último término también lo será, y resulta que se trata de la media armónica. En el ejemplo:

Si 37 es entero, la media armónica será 42+30-37=35, también entero.

Así que si la media contra armónica es entera, también lo será la armónica (y a la inversa), con lo que la aritmética será entera o un racional con denominador 2.

Por ejemplo, con 45 y 36, las medias son: $mc=(45^2+36^2)/(45+36)=41$, mh=2*45*36/(45+36)=40 y ma=(45+36)/2=40,5=81/2

Si 2ab/(a+b) es entero h, será 1/h=(a+b)/2ab=1/2b+1/2a

Esta expresión relaciona tres fracciones egipcias unitarias.

En nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/02/suma-y-diferencia-de-fracciones.html

dedicamos muchas líneas para demostrar que el denominador de una fracción egipcia unitaria que es diferencia de otras dos del mismo tipo debía tener dos divisores d y e tales que d<e<2d. Por tanto, eso le debe ocurrir a 2a, ya que

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{h}-\frac{1}{2b}$$

Esto explica que en la sucesión que hemos descubierto para **a** se defina así en OEIS: “Numbers having divisors d,e with d < e < 2*d”

Por ejemplo, 42 posee los divisores 6 y 7 que cumplen 6<7<6*2.

Esto también explica el hecho de haber encontrado números primos entre los valores de a ni ninguna de sus potencias.

Pertenencia de los números hexagonales

Estos números se obtienen con la fórmula H(n)=n(2n-1). Esto nos garantiza que cumplen la condición del párrafo anterior. En efecto, si repasamos los dos listados, el de números hexagonales (http://oeis.org/A000384) y el de los números que hemos obtenido (http://oeis.org/A005279) se tendrá:

Hexagonales(sin el cero y el 1): 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496,

Nuestros: **6**, 12, **15**, 18, 20, 24, **28**, 30, 35, 36, 40, 42, **45**, 48, 54, 56, 60, 63, **66**, 70, 72, 75, 77, 78, 80, 84, 88, 90, **91**, 96, 99, 100, 102, 104, 105, 108, 110, 112, 114, 117, **120**, 126, 130, 132, 135, 138, 140, 143, 144, 150, **153**,

Hemos destacado en negrita los hexagonales dentro de la otra sucesión.

Lo podemos ver de forma algebraica: H=n(2n-1) forma un par con K=(n-1)(2n-1) y queda:

$$\frac{H^2+K^2}{H+K}=\frac{(2n-1)^2\cdot(n^2+(n-1)^2)}{(2n-1)(2n-1)}=n^2+(n-1)^2$$

Efectivamente, es un entero. Por ejemplo:

45=5*(2*5-1) es hexagonal y K=(5-1)(2*5-1)=36

La media **mc** sería $(45^2+36^2)/(45+36)=41$, que coincide, como hemos visto, con $5^2+(5-1)^2$

HIPOTENUSA MÚLTIPLO DE UNO DE LOS CATETOS.

Hace unas semanas tuve ocasión de estudiar la terna pitagórica (9, 40, 41) y me llamó la atención el hecho de que la medida del cateto 9 dividía al perímetro 9+40+41=90. Me pregunté si existían muchos números con esa propiedad. Aquí tenéis mis búsquedas y razonamientos.

Al principio creí que sería un hecho más bien extraordinario, pero después de las primeras búsquedas me di cuenta de que existen muchos casos de este tipo, aunque son más abundantes aquellos en los que el perímetro no es múltiplo de ninguno de los catetos.

Solo tiene interés estudiar las ternas primitivas, en las que los tres lados son primos entre sí, porque si se cumple en una primitiva, también se cumplirá en sus derivadas, porque tanto el perímetro como los lados se multiplican por el mismo número, con lo que el carácter de múltiplo se conserva.

La primera terna en la que se cumple esto es la (3, 4, 5). Su perímetro es 12, y es múltiplo de 3 y 4.

La siguiente es (5, 12, 13), porque P=5+12+13=30, que es múltiplo de 5 (pero no de 12)

La primera terna en la que no se cumple es la (20, 21, 29), ya que el perímetro es 70, que no es múltiplo ni de 20 ni de 21.

Sospechamos, pues, que ninguno de los dos casos contrarios es excepcional.

Función de búsqueda

Hay dos formas de construir ternas primitivas. Una de ellas es la tradicional de buscar expresiones del tipo (**2mn, m^2-n^2, m^2+n^2**) con **m** y **n** primos entre sí y paridad distinta. Esta forma la dejamos para más adelante. Hemos visto que el algoritmo correspondiente no gana mucha velocidad.

(Ver este procedimiento en

https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitag%C3%B3rica)

La otra forma es la que no usa esa teoría. Para una posible hipotenusa **n**, se descompone su cuadrado, si es posible, en suma de otros dos cuadrados enteros, y si las bases son primas entre sí y además el perímetro es múltiplo de uno al menos de los catetos, se cumplirá lo exigido. Lo plasmaremos en VBasic de Excel y más tarde en PARI.

Para Excel podemos usar la siguiente función de tipo texto. Su nombre recuerda cómo iniciamos lel capítulo, con un cateto 9 que dividía al perímetro 90.

```
Public Function cateto_div_terna$(n) 'n es la hipotenusa de la terna estudiada
Dim a, b, c, p, j, k
Dim s$
Dim noes As Boolean

a = n ^ 2 'Descomponemos n^2 en dos cuadrados
j = 1
b = 1: c = a - 1
s$ = ""
noes = True
j = 1 'Es la base del primer cuadrado
While j < n And noes
b = j ^ 2: c = a - b
If escuad(c) Then 'Segundo cuadrado posible
k = Sqr(c)
```

p = n + j + k ‘Perímetro

If (p Mod j = 0 Or p Mod k = 0) And mcd(mcd(j, k), n) = 1 Then noes = False: s$ = Str$(n) + Str$(j) + Str$(k) + Str$(p)

‘La condiciones son que p sea múltiplo de j y de k y que todos sean primos entre sí.

Si se cumplen se recoge la solución en s$.

End If

j = j + 1

Wend

cateto_div_terna = s

End Function

Con esta función no es difícil recorrer números, quedarnos con la hipotenusa y reconstruir la terna. Aquí tienes las primeras soluciones:

Hipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Perímetro
5	3	4	12
13	5	12	30
17	8	15	40
25	7	24	56
37	12	35	84
41	9	40	90
61	11	60	132
65	16	63	144
85	13	84	182
101	20	99	220
113	15	112	240
145	17	144	306
181	19	180	380
197	28	195	420

Si continuamos buscando, llegaremos a una lista más extensa:

5, 13, 17, 25, 37, 41, 61, 65, 85, 101, 113, 145, 181, 197, 221, 257, 265, 313, 325, 365, 401, 421, 481, 485, 545, 577, 613, 677, 685, 761, 785, 841, 901, 925, 1013, 1025, 1105, 1157, 1201, 1297, 1301, 1405, 1445, 1513, 1601, 1625, 1741, 1765, 1861, 1937, 1985, 2113, 2117, 2245, 2305, 2381, 2501, 2521, 2665, 2705, 2813, 2917, 2965, 3121, 3137,

La versión en PARI es una simple traducción de la de Excel. La llamamos ok(k) para su posible publicación en OEIS:

```
ok(k)={my(a=k^2,j=1,b=1,c=a-1,l,p,
m=0);while(j<k&&m==0,b=j^2;c=a-
b;if(issquare(c),l=sqrtint(c);p=k+j+l;if((p%j==0||p%l=
=0)&&gcd(gcd(j,l),k)==1,m=1));j+=1);m}

for(i=1,2000,if(ok(i),print1(i,", ")))
```

Su resultado coincide, como era de esperar, con el obtenido en Excel:

```
5, 13, 17, 25, 37, 41, 61, 65, 85, 101, 113, 145, 181, 197, 221, 257, 265, 313,
325, 365, 401, 421, 481, 485, 545, 577, 613, 677, 685, 761, 785, 841, 901, 925,
1013, 1025, 1105, 1157, 1201, 1297, 1301, 1405, 1445, 1513, 1601, 1625, 1741, 17
65, 1861, 1937, 1985,
```

Hemos recorrido listas de ternas primitivas para seleccionar las que cumplen lo exigido, y se llega al mismo listado.

Estudio teórico

Tras la búsqueda a ciegas podemos plantearnos un estudio más profundo. Nos basaremos en la clásica fórmula de generación de ternas primitivas:

($2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2) con **m** y **n** coprimos y de distinta paridad.

En ese caso el perímetro P tendrá la fórmula P=**$2mn+m^2-n^2+ m^2+n^2=2m(m+n)$**

Se pueden dar tres casos:

1) El perímetro es múltiplo del cateto par

$2m(m+n)/(2mn)=(m+n)/n=m/n+1$

Al ser m y n coprimos y de distinta paridad, para que sea múltiplo ha de ser n=1 y m=2r, con lo que hipotenusa será **$m^2+n^2=4r^2+1$**.

El perímetro será $4r+4r^2+1+4r^2-1=8r^2+4r=4r(2r+1)$ y pertenecerá a http://oeis.org/A033586 y la diferencia entre hipotenusa y cateto mayor será de dos unidades.

Puedes verificar que todas las soluciones en las que el perímetro es múltiplo del cateto impar tienen esta forma. Así ocurre con el ejemplo con el 17, que forma la terna (8, 15, 17), en la que $17=4*2^2+1$, el perímetro es 8+15+17=40, que es múltiplo de 8.

Por tener esta expresión, las hipotenusas correspondientes pertenecerán a http://oeis.org/A053755 y las primeras serán 5, 17, 37, 65, 101, 145, 197, 257, 325, 401,…

2) El perímetro es múltiplo del cateto impar

En ese caso hay que estudiar el cociente $\mathbf{2m(m+n)/(m^2-n^2)=2m/(m-n)=2+2n/(m-n)}$, lo que obliga a que 2n/(m-n) sea entero. El denominador m-n ha de ser impar, luego ha de dividir a n y n/(m-n)=t será entero. Se deduce que n=(m-n)t; n(t+1)=m*t; n/t=m/(t+1)=k, lo que lleva a que k=1, pues en caso contrario, m y n no serían primos entre sí. Por tanto queda que n=t y m=t+1, es decir, que m y n son consecutivos. La hipotenusa quedaría como **(n+1)^2+n^2**.

Esto ocurre en el ejemplo del principio de esta estudio, (9, 40, 41): $41=5^2+4^2$, $9=5^2-4^2$; 40=2*4*5, y 41+40+9=90 es múltiplo del cateto impar.

Las hipotenusas de este tipo pertenecen a http://oeis.org/A001844

La terna quedará: $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)=(2n^2+2n, 2n+1, 2n^2+2n+1)$ y serán consecutivos la hipotenusa y un cateto

El perímetro será 2(n+1)(2n+1) y pertenecerá a http://oeis.org/A002939

Estos dos casos cubren toda la sucesión de hipotenusas que estamos estudiando.

Esto da lugar a otra función alternativa más rápida:

```
Public Function cateto2_div_terna(n) 'Da la hipotenusa para que el perímetro sea divisible
Dim b, c, j, k, a
Dim es As Boolean

j = 1
a = j ^ 2
es = False
While a < n And Not es
b = n - a
If escuad(b) Then ‘Se descompone n en suma de dos cuadrados
c = Sqr(b)
If c < j And (c = 1 And a Mod 2 = 0 Or Abs(j - c) = 1) Then es = True ‘Las dos condiciones
End If
j = j + 1: a = j ^ 2
Wend
cateto2_div_terna = es
End Function
```

Es interesante la intersección entre los dos casos:

3) El perímetro es múltiplo de los dos catetos

Es el caso del 5 y del 145, que cumplen las dos condiciones estudiadas. Es decir, en ellos se dará que

$4r^2+1=(n+1)^2+n^2$

$5=4*1^2+1=2^2+1^2$

$145=4*6^2+1=9^2+8^2$

Desarrollando y despejando $4r^2$ tenemos: $n^2+2n+1+n^2-1=2(n^2+n)$ ha de ser un cuadrado (que será par con seguridad) y la hipotenusa una unidad mayor. Aquí tienes los primeros:

n	(n+1)^2+n^2-1	Hipotenusa
1	4	5
8	144	145
49	4900	4901
288	166464	166465
1681	5654884	5654885
9800	192099600	192099601

Resultan ser elementos de http://oeis.org/A076218, pero con una definición alternativa.

Si te gustan las ecuaciones diofánticas, puedes plantear lo siguiente:

$(n+1)^2+n^2=4r^2+1$; $2n^2+2n+1=4r^2+1$; $4n^2+4n+2=8r^2+2$; $(2n+1)^2-8r^2=1$.

Esta es una ecuación de Pell, y la puedes resolver con nuestra hoja de cálculo http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/pell.xls

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Los valores de X serán, según lo visto más arriba, iguales a 2n+1. Si les restamos 1 y los dividimos entre 2, resultarán los índices de la tabla de arriba y las soluciones serán del tipo $n^2+(n+1)^2$:

3	1	5
17	8	145
99	49	4901
577	288	166465
3363	1681	5654885
19601	9800	192099601
114243	57121	6525731525
665857	332928	2,21683E+11

Esta tabla completa el estudio, que ha resultado con más base teórica de la que podía pensarse al inicio de las búsquedas.

SUMANDOS CON EL MISMO CARÁCTER QUE LA SUMA

Si manejamos muchos tipos de números, observaremos que no es infrecuente que un número de un tipo sea suma de otros dos que comparten ese tipo con él. Los ejemplos más sencillos son los números pares, en los que es fácil descomponer un par en suma de otros dos (incluido el 0), como 22=10+12. También es clásico el ejemplo de las ternas pitagóricas, en las que un cuadrado (de la hipotenusa) es suma de otros dos cuadrados (los de los catetos), como 5^2=3^2+4^2. El caso más conocido es el de los números de Fibonacci, que son suma de los dos anteriores.

Según el Último Teorema de Fermat, no podemos buscar otros ejemplos con cubos o potencias mayores, así que no trataremos con potencias.

(https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%9Altimo_teorema_de_Fermat)

En este blog solemos manejar frecuentemente números semiprimos, oblongos, triangulares y poligonales. De los primos no hablamos, porque solo cumplirían esto los términos mayores de un par de primos gemelos, como 19=17+2

Realizaremos unas búsquedas y razonamientos sobre algunos de ellos.

Suma de semiprimos

Llamamos semiprimos a los números que son producto de dos factores primos, iguales o diferentes.

Para identificar semiprimos usamos esta función de Excel (creada en este blog)

Public Function essemiprimo(n) As Boolean
Dim a, b, r
Dim es As Boolean

es = False ‘Al principio suponemos que no es semiprimo
a = 2 ‘La variable **a** recorrerá los números primos
r = Sqr(n)
While a <= r And Not es
b = n / a ‘Dividimos n entre el primo y si el cociente es primo, ya lo tenemos
If esprimo(b) Then es = True
a = primprox(a) ‘Se busca el próximo primo
Wend
essemiprimo = es
End Function

Hemos tenido que crear esta función porque el lenguaje VBasic es algo pobre para estos cálculos. En PARI lo tendríamos más fácil. Basta pedir que **bigomega(n)=2**. Esta función cuenta factores primos con repetición. Si vale 2, es que **n** es semiprimo.

Tanto con una como con la otra, tomaremos semiprimos, los descompondremos en dos sumandos y si ambos también son semiprimos, habremos encontrado un ejemplo.

En Excel usamos la función SUMATIPO que está diseñada para adaptarla a todos los casos que estudiemos en este apartado. En el listado figura la búsqueda de semiprimos:

Function sumatipo$(n)
Dim i, j
Dim s$

s = ""
If essemiprimo(n) Then
i = 4 ‘Primer semiprimo
While i < n And s = ""
If essemiprimo(i) Then
j = n - i
If essemiprimo(j) Then s = Str$(i) + Str$(j) ‘Da la solución si la encuentra
End If

i = i + 1
Wend
End If
sumatipo = s ‘Devolverá un texto con la solución
End Function

Esta función devuelve una cadena vacía si no cumple la condición o los dos sumandos si la cumple.

Si organizamos una búsqueda obtendremos el resultado inesperado de que todos los semiprimos se descomponen así salvo cinco (4, 6, 9, 22 y 33 http://oeis.org/A137253)

En efecto, los primeros a partir del 10 se descomponen así:

10=2*5=6+4=2*3+2*2
14=2*7=10+4=2*5+2*2
15=3*5=6+9=2*3+3*3
Puedes reproducir la búsqueda con PARI. Inserta en la página https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html el siguiente código:

sumatipo(n)=my(m=0);if(bigomega(n)==2,i=4;while(m==0&&i<n,if(bigomega(i)==2&&bigomega(n-i)==2,m=1);i+=1));m

for(i=6,200, if(sumatipo(i),print1(i,", ")))

Obtendrás todos los semiprimos salvo 4, 6, 9, 22 y 33:

```
10, 14, 15, 21, 25, 26, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 1
06, 111, 115, 118, 119, 121, 122, 123, 129, 133, 134, 141, 142, 143, 145, 146, 155, 158, 159, 161, 166, 169, 177, 17
8, 183, 185, 187, 194,
```

Si sustituimos *sumatipo(i)* por *bigomega(i)==2&&sumatipo(i)==0* y comenzamos en el 4, obtendremos

```
4, 6, 9, 22, 33,
```

Son las cinco excepciones.

En los ejemplos de más arriba, los sumandos semiprimos comparten algún factor. Casi todos los semiprimos se pueden descomponer en sumandos con los cuatro factores distintos, como por ejemplo 95, que se descompone como 21+74=3*7+2*37, y los cuatro factores primos 3, 7, 2 y 37 son todos distintos.

Hay una forma de encontrarlos con PARI:

sumatipo(n)=my(m=0);if(bigomega(n)==2,i=4;while(m==0&&i<n,if(omega(i)==2&&omega(n-i)==2&&omega(i*(n-i))==4,m=1);i+=1));m

for(i=4,250, if(sumatipo(i),print1(i,", ")))

En esta función *sumatipo* usamos *omega* para exigir que los sumandos sean semiprimos y su producto tenga cuatro factores primos, lo que garantiza que sean los cuatro distintos.

Al aplicarla nos llevamos la sorpresa de que todos los semiprimos a partir de 85 pueden descomponerse de esa forma. Los semiprimos que no lo admiten son

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 58, 62, 82.

Es solo una conjetura.

Suma de triangulares

Si en la función *sumatipo* sustituimos *essemiprimo* por *estriangular*, podremos encontrar los números triangulares (tipo N(N+1)/2) que se descomponen en suma de otros dos triangulares. La función *estriangular* se basa en que si n es triangular, 8n+1 es cuadrado

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2009/12/suma-de-tres-numeros-triangulares.html)

Basándonos en esa propiedad, la función puede tener este código:

```
Public function estriangular(n) as boolean
dim a
a = Int(sqr(8*n+1))
if a*a=8*n+1 then estriangular = true else estriangular = false
end function
```

Hecha la sustitución obtenemos los triangulares que son suma de otros del mismo tipo:

6, 21, 36, 55, 66, 91, 120, 136, 171, 210, 231, 276, 351, 378, 406, 496, 561, 666, 703, 741, 820, 861, 946, 990, 1035, 1081, 1176, 1225, 1326, 1378, 1431, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1891, 1953, 2016, …

Están publicados en http://oeis.org/A089982

Por ejemplo, 1326=465+861, y los tres son triangulares

Con el Buscador esta tarea es muy sencilla. Escribimos:

TRIANGULAR
SUMA T T

El resultado es

Solución	Detalles
6	3 + 3
21	6 + 15
36	15 + 21
55	10 + 45
66	21 + 45
91	36 + 55
120	15 + 105
136	45 + 91
171	66 + 105
210	105 + 105
231	21 + 210
276	45 + 231
351	120 + 231
378	78 + 300
406	28 + 378

Cuando un número **m** es suma de dos triangulares se cumple que **todos los factores primos de 4m+1 son del tipo 4k+1**, porque ese número es suma de dos cuadrados al menos. En efecto, se puede plantear:

$$\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}=m$$

Esto equivale a

$$4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 8m + 2$$

Es decir

$$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 8m + 2$$

Para que un número admita esta descomposición ningún factor primo suyo puede ser del tipo 4k+3, luego 8m+2 lo cumplirá, y también su mitad 4m+1, ya que el 2 no influye en esa posibilidad.

Por otra parte, en los números triangulares la expresión 8m+1 es un cuadrado, luego 8m+2 es igual a otra suma de cuadrados distinta de la anterior, y sus factores primos del tipo 4k+1 serán al menos dos, e igual le ocurrirá a su mitad 4m+1.

Lo vemos con un ejemplo: 21 es un triangular que se descompone en suma de dos triangulares, ya que 21=15+6, es decir, que 6*7/2=5*6/2+3*4/2, y el valor de 4m+1 es en este caso 85, que se descompone como 85=5*17=(4*1+1)(4*4+1), luego ambos factores primos son del tipo 4k+1 y son dos, con lo que se cumple la consideración indicada en el párrafo anterior. Además, $85=7^2+6^2$.

Suma de oblongos

Esta búsqueda es similar a la anterior, con la sustitución de la expresión 8m+1 (que es un cuadrado en los triangulares) por 4m+1, que tiene una propiedad similar en los oblongos. Corregimos la función *sumatipo* en este sentido y obtenemos los números oblongos que son suma de dos oblongos:

12, 42, 72, 110, 132, 182, 240, 272, 342, 420, 462, 552, 702, 756, 812, 992, 1122, 1332, 1406, 1482, 1640, 1722, 1892, 1980, 2070, 2162, 2352, 2450, 12, 42, 72, 110, 132, 182, 240, 272, 342, 420, 462, 552, 702, 756, 812, 992, …

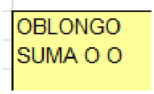
Por ejemplo, 462 es oblongo, ya que 462=21*22, y se descompone en 462=42+420, que son ambos oblongos: 42=6*7 y 420=20*21

Este listado lo hemos obtenido con la versión en PARI, que es más rápida.

```
sumatipo(n)=my(m=0);if(issquare(4*n+1),i=2;while(m==0&&i<n,if(issquare(4*i+1)&&issquare(4*(n-i)+1),m=1);i+=1));m

for(i=4,5000, if(sumatipo(i),print1(i,", ")))
```

Con el Buscador:



Solución	Detalles
12	6 + 6
42	12 + 30
72	30 + 42
110	20 + 90
132	42 + 90
182	72 + 110
240	30 + 210
272	90 + 182
342	132 + 210
420	210 + 210
462	42 + 420

Estos números poseen una propiedad similar a la de los triangulares, y es que si m es uno de ellos, 2m+1 solo tiene factores primos del tipo 4k+1 y al menos dos.

Por ejemplo, 72 es oblongo (8*9) y suma de oblongos, 42 (6*7) y 30 (5*6), y en este caso 2*72+1=145 tiene como factores primos 5 y 29, ambos del tipo 4k+1.

Sus índices, aunque con otra orientación, están publicados en http://oeis.org/A012132

Otros poligonales

Hemos estudiado los números triangulares y no hemos considerado los cuadrados porque este caso es propio de las ternas pitagóricas

(https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitag%C3%B3rica).

Pasamos entonces a los números pentagonales, ya estudiados este año aquí.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/numeros-pentagonales-1.html

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/numeros-pentagonales-2.html

Si lees estas entradas comprobarás que el criterio para ver si un número P es pentagonal consiste en que ha de ser cuadrado 1+24P. Si en la función *sumatipo* uso la función explicada en ellas *ordenpentagonal*, basta pedir que no sea nula para que aparezcan los primeros casos.

Son estos:

Pentagonal	Dos sumandos pentagonales
70	35 35
92	22 70
852	70 782
925	210 715
1247	532 715
1426	425 1001
1926	925 1001
2625	590 2035
3577	145 3432
5192	1162 4030
6305	3015 3290
6501	2625 3876
7107	2262 4845

Estos números están publicados en http://oeis.org/A136117

Números hexagonales

Se tratan igual que los pentagonales, siguiendo las funciones definidas en las entradas de este blog dedicadas a ellos.

El resultado es

Hexagonal	Sumandos hexagonales
276	45 231
703	325 378
861	231 630
1225	190 1035
2850	435 2415
3003	153 2850
4560	2145 2415
5151	780 4371
8128	1225 6903
10878	3003 7875
11781	1770 10011
12090	4950 7140
12720	630 12090

Publicados en http://oeis.org/A133215

Aquí paramos el estudio.

MÚLTIPLOS A PARES

La sucesión de OEIS número A077338 incluye los múltiplos **k** más pequeños de un primo de forma que **k+1** sea múltiplo del siguiente primo. Según el ejemplo contenido en esa página, 77 es múltiplo de 11 y 78 lo es del siguiente primo 13, ya que 77=7*11 y 78=77+1=6*13. La idea es prometedora, y emprendo búsquedas sobre ella sin saber hasta dónde nos llevará.

Reproducción de la sucesión

En este blog usamos con frecuencia las funciones ESPRIMO y PRIMPROX, de creación propia, y cuyos listados figuran en varias entradas. Por ejemplo en https://bit.ly/3qrRUkq tienes los dos listados.

ESPRIMO devuelve verdadero o falso según sea su argumento y PRIMPROX nos informa del primo siguiente a un número. Con ellas dos podemos construir una función muy sencilla que determine si un múltiplo de un número primo cumple lo exigido.

En primer lugar usaremos una función que calcule el mínimo múltiplo que cumple la condición exigida. Puede ser esta, en VBASIC de Excel:

Function multiplosapares(p) ‘Actúa sobre un primo y busca el mínimo múltiplo con la condición pedida
Dim n, q, r, s, m
If Not esprimo(p) Then multiplosapares = 0: Exit Function ‘Si no es primo, no hay solución
m = 0 ‘Posible solución
n = p ‘Múltiplo de p
q = primprox(p) ‘Primo siguiente a ***p***
While m = 0 ‘Busca mientras no exista solución
r = n / p: s = (n + 1) / q ‘Pares de cocientes
If r = Int(r) And s = Int(s) Then m = n ‘Si ambos cocientes son enteros, lo hemos conseguido
n = n + p ‘Busca el siguiente múltiplo
Wend
multiplosapares = m
End Function

Estamos suponiendo que siempre existe solución. Si no fuera así, la función entraría en un bucle infinito sin salida. Si la aplicamos a los primeros números primos obtendremos este listado:

Número primo p	N mútiplo de p y N+1 del siguiente
2	2
3	9
5	20
7	21
11	77
13	169
17	170
19	114
23	115
29	464
31	961
37	1147
41	902
43	516
47	423
53	530

Cada número de la segunda columna es múltiplo del correspondiente de la primera y, si le sumamos una unidad, lo será del siguiente primo. Por ejemplo, 516 es múltiplo de 43 (516=43*12), y si le sumamos 1, 517 es múltiplo del siguiente primo 47 (517=47*11).

Como ya indicamos, estos primeros números están publicados en http://oeis.org/A077338:

A077338 a(n) = smallest multiple of prime(n) such that a(n) +1 is a multiple of prime(n+1).

2, 9, 20, 21, 77, 169, 170, 114, 115, 464, 961, 1147, 902, 516, 423, 530, 1829, 3416, 1206, 2627, 4818, 1659, 1245, 7565, 7372, 5252, 2781, 5885, 9265, 13334, 4191, 3013, 9590, 2085, 11324, 19781, 21352, 6846, 4843, 5190, 16289, 31132, 18527, 28564,…

Si traducimos la función en VBASIC a PARI podemos reproducir este listado. El código sería este:

multpares(p)=my(m=0,n=p,q=nextprime(p+1),r,s);while(m==0,n/p;s=(n+1)/q;if(r==truncate(r)&&s==truncate(s),m=n);n+=p);m

forprime(i=2,200,print1(multpares(i),", "))

Al usar el bucle *forprime* no hay que exigir que *p* sea primo. El resultado para los primeros primos menores que 200 es

```
? multpares (p) = my (m = 0, n = p, q = nextprime (p + 1), r, s); while (m == 0, n / p; s = (n + 1) / q; if (r == tru
ncar (r) && s == truncar (s), m = n); n + = p); m
forprime (i = 2,200, print1 (multpares (i), ","))
2, 9, 20, 21, 77, 169, 170, 114, 115, 464, 961, 1147, 902, 516, 423, 530, 1829, 3416, 1206, 2627, 4818, 1659, 1245, 7
565, 7372, 5252, 2781, 5885, 9265, 13334, 4191, 3013, 9590, 2085, 11324, 19781, 21352, 6846, 4843, 5190, 16289, 3113
2, 18527, 28564, 19700, 17512,
```

(Imagen capturada de la web https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html)

Se ve que coincide con lo publicado en OEIS. Por cierto que la sucesión no es creciente, a mayor primo no tiene que corresponder mayor solución.

Problema inverso

Podíamos ver el problema desde los números incluidos en la sucesión anterior. Dado un número cualquiera, ¿cómo saber si pertenece a ella? Para ello deberíamos recorrer todos los primos que pueden ser sus divisores y ver si alguno propicia la condición que nos interesa. La solución, en VBASIC podría ser esta:

Function esmultipares(n)
Dim p, es

If n = 2 Then esmultipares = 2: Exit Function ‘El 2 coincide con su primo
p = 2 ‘Primer primo a probar
es = 0 ‘Caso en el que no hay solución
While p <= n / 2 And es = 0
If multiplosapares(p) = n Then es = p ‘Encontrada solución
p = primprox(p) ‘Se pasa al siguiente primo
Wend
esmultipares = es
End Function

Por ejemplo, esta función, aplicada al último término de los publicados, 28564, da como solución 193 y , en efecto, se cumple que 28564/193=148, luego es múltiplo, y su siguiente, 28565, es múltiplo de 197, su siguiente primo, ya que 28565/197=145.

Términos que son consecutivos

En el listado observamos soluciones consecutivas, como 19 con 20, 114 con 115 y 169 con 170 ¿Habrá más? Lo podemos ver con esta nueva función. Basta exigir que N y N+1 sean soluciones.

No hay muchos casos, por lo que acudiremos al lenguaje PARI, que permite mejor tratamiento de números grandes. El siguiente código nos permite encontrar que 193 es el primo correspondiente a 28564:

```
multpares(p)=my(m=0,n=p,q=nextprime(p+1),r,s);while(m==0,n/p;s=(n+1)/q;if(r==truncate(r)&&s==truncate(s),m=n);n+=p);m

esmultpares(n)=my(p=2,es=0);while(p<=n/2&&es==0,if(multpares(p)==n,es=p);p=nextprime(p+1));es

print(esmultpares(28564))
```

Si adaptamos la última línea podemos encontrar los pares de consecutivos que existen en la sucesión. Después de llegar a 100000, no hemos encontrado más pares de consecutivos que los señalados más arriba.

Cuadrados contenidos en la sucesión

Si a la condición *esmultpares(n)* le añadimos (en PARI) *issquare(n)* podemos encontrar los cuadrados contenidos en la sucesión que estudiamos. Solo hemos encontrado tres: 9, 169 y 961.

En efecto, 9 es múltiplo de 3 y 10 de 5, que es su siguiente primo, 169 de 13 y 170 de 17, y, por último, 961 es múltiplo de 31 y 962 de 32.

Otros casos

Ejemplos de triangulares solo hemos encontrado uno: 21=6*7/2 es múltiplo de 7, y su siguiente, 22, del siguiente primo 11.

Oblongos hay dos entre los primeros números, 2=1*2 y 20=4*5, que cumplen la condición pedida.

Por último, los capicúas son cuatro, dentro de los primeros términos: 2, 9, 77 y 464.

El tema no nos da para más. Una línea de búsqueda consistiría en usar N+K en lugar de N+1, para ver si se encuentra algo curioso.

SE CONSERVAN PROPIEDADES AL MULTIPLICAR POR 10

Muchas propiedades de los números enteros se conservan cuando le añadimos un cero a la derecha, es decir, si los multiplicamos por 10. Un ejemplo son todas las referentes a ser múltiplo de otro número, como los pares o los múltiplos de 3 o 5, que siguen siéndolo si les añadimos un 0. Igual ocurre con las hipotenusas de las ternas pitagóricas.

Otras propiedades desaparecen en esta operación, como el hecho de ser un cuadrado perfecto. Si a 144 le añadimos un cero, se convierte en 1440, que no es cuadrado. Igual ocurre con la propiedad de ser primo o semiprimo. Tampoco parece (lo he comprobado parcialmente) que los términos de la sucesión de Fibonacci cumplan esto.

Por último, existen propiedades que se conservan en unos números sí y en otros no. Esas son las que estudiaremos aquí con algunos números figurados.

Oblongos

Los oblongos, es decir los del tipo k=n(n+1) se caracterizan porque 4k+1 ha de ser un cuadrado. Por tanto, para que un oblongo conserve su carácter al multiplicarlo por 10, también deberá ser cuadrado 40k+1. En este hecho se basa esta condición en PARI:

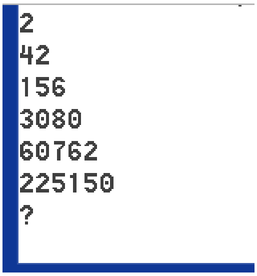
ok(n)=issquare(4*n+1)&&issquare(40*n+1)

Con ella, añadiendo un bucle, podemos investigar qué oblongos conservan su carácter al añadirles un cero:

ok(n)=issquare(4*n+1)&&issquare(40*n+1)

for(i=1,10^6,if(ok(i), print(i)))

Obtenemos:



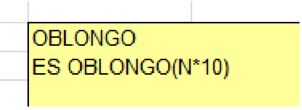
Con un poco de paciencia, llegando hasta potencias altas de 10, podemos encontrar esta sucesión:

2, 42, 156, 3080, 60762, 225150, 4441556, 87618960, 324666342, 6404720870, 126346479756, 468168640212, 9235603053182, 182191536189390, 675098854519560, 13317733197967772, 262720068838620822, 973492080048565506, 19204162035866474240

Por ejemplo, 3080 es oblongo, porque 3080=55*56, y 30800 también lo es, ya que 30800=175*176

Esta sucesión está formada por los dobles de la siguiente que estudiaremos.

También con paciencia, el Buscador nos da las primeras soluciones:



Solución	D
2	
42	
156	
3080	

Otro método de búsqueda

Si llamamos "y" a la raíz cuadrada de 4k+1 y "x" a la de 40k+1, ambas deben ser enteras, y despejando k tenemos que $k=(y^2-1)/4=(x^2-1)/40$, con lo que llegamos a una ecuación de tipo Pell: $x^2-10y^2=-9$

Podemos plantear una búsqueda de todos los números "y" tales que $10y^2-9$ sea cuadrado. Estos son los primeros resultados:

y	x	k
1	1	0
3	9	2
13	41	42
25	79	156
111	351	3080
493	1559	60762
949	3001	225150
4215	13329	4441556
18721	59201	87618960
36037	113959	324666342

El valor de k se obtiene de $(y^2-1)/4$ y coincide con el oblongo buscado. Es un algoritmo mucho más rápido que el anterior.

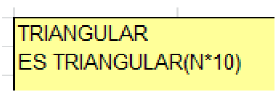
Triangulares

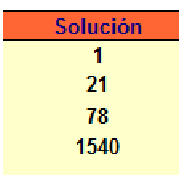
Si probamos con los triangulares, basta saber que la condición que han de cumplir es que 8T+1 sea un cuadrado, luego, si los buscamos de la misma forma que los oblongos, resultarán números que serán la mitad de los anteriores. Están publicados en http://oeis.org/A068085. Puedes comprobar en su listado que son la mitad de los oblongos del apartado anterior (en OEIS suelen comenzar por el 0)

0, 1, 21, 78, 1540, 30381, 112575, 2220778, 43809480, 162333171, 3202360435, 63173239878, 234084320106, 4617801526591, 91095768094695, 337549427259780, 6658866598983886, 13136003441931041

En nuestra sucesión hemos logrado dos términos más.

Con el Buscador:





Solución
1
21
78
1540

Podemos organizar una búsqueda alternativa, como procedimos con los oblongos. Tendríamos que plantear $x^2-10y^2=-9$ y solo cambiaría que para obtener k deberíamos usar $(y^2-1)/8$.

Algunos poligonales

Los pentagonales no presentan ningún caso entre los primeros números, pero en los hexagonales existe alguno:

1540 es el único hexagonal menor que 10^8 que posee la propiedad de que al añadirle un cero por la derecha sigue siendo hexagonal:

La fórmula de los hexagonales es n(2n-1) y se cumple que

1540=28×(2×28-1)
15400=88×(2×88-1)

Una idea sería la de extraer ejemplos del listado de triangulares visto más arriba, ya que todo hexagonal equivale a un triangular impar. Así hemos obtenido otro ejemplo, 3202360435, de índice 40015, y que al multiplicarlo por 10 se convierte en el hexagonal de índice 126538.

En efecto:

3202360435=40015*(2*40015-1)
32023604350=(126538*(126538*2-1))
Los primeros heptagonales con esta propiedad son 7, 748, 2772, 202635 y 78857064.

Se puede usar la condición

ok(n)=issquare(40*n+9)&&issquare(400*n+9),

según se vio en una reciente entrada de este blog dedicada a estos números.

Por último, no parece que existan octogonales que cumplan lo exigido. Con esto dejamos la búsqueda, que ha resultado más limitada de lo esperado.

UNA CURIOSIDAD NO BUSCADA

En el mes de marzo, mientras estudiaba los cálculos que publico en Twitter (@connumeros), descubrí esta curiosidad, y es que unos números consecutivos o cercanos presentaban divisores con una estructura muy similar. Estos eran:

13322 es múltiplo de 6661, pues 13322=2*6661
13323, lo es de 4441, ya que 13323=3*4441
13324, de 3331, pues se cumple 13324=4*3331
Por último, 13326 lo es de 2221: 13326=6*2221

Parece que la clave la tiene el número 13332=2*6666=3*4444=4*3333=6*2222. Si en estos cuatro productos convertimos la última cifra en un 1, resultan los números de arriba:

2*(6666-5)=2*6661=13322=13332-10
3*(4444-3)=3*4441=13323=13332-9
4*(3333-2)=4*3331=13324=13332-8

6*(2222-1)=6*2221=13326=13332-6

El que las diferencias sean 10, 9, 8 y 6 produce que tres productos sean consecutivos y el último alterno: 13322, 13323, 13324 y 13326.

Esta sería la explicación sencilla para esta curiosidad, y también funciona con 1322, 1323, 1324 y 1326, ya que 1322 es múltiplo de 661 y los siguientes de 441, 331 y 221 respectivamente. Evidentemente, también sería esto de aplicación a los números 133322 y siguientes con la misma estructura.

¿Habrá más casos similares a este? Organizaremos una búsqueda.

Primer paso: divisores adecuados

Por concretar el problema, admitiremos como divisores adecuados aquellos del tipo 221, 331, 441,…2221, 3331, 4441,…22221, 33331, 44441,…Es decir, que las primeras cifras sean todas iguales y distintas de 1, mientras que la última ha de valer 1. Desechamos, pues los repidígitos 11111… y también 21, 31, 41,…porque en estos últimos no de da repetición.

Para saber si un número es divisor adecuado podemos usar el conjunto de cifras convirtiendo el número en un *string*, o bien usar los restos módulo 10^k. Optamos por este segundo método. Esta sería la función para detectar este tipo de divisores en VBASIC de Excel:

Function esrepe1(n)
Dim i, c, f, g
Dim es As Boolean

n < 221 Then esrepe1 = False: Exit Function ‘Se estudian los superiores a 221
c = Int(Log(n) / Log(10) + 1) ‘Cálculo del número de cifras
es = True ‘Se supone que sí es adecuado
f = (n Mod 100) \ 10 ‘Calcula la segunda cifra, que no debe valer 1
g=n Mod 10 ‘Calcula la primera cifra, que ha de valer 1
If f = 1 or g<>1 Then esrepe1 = False: Exit Function ‘No es adecuado
i = 2 ‘Se recorre el resto de cifras
While i <= c And es = True
If f <> (n Mod 10 ^ i) \ 10 ^ (i - 1) Then es = False ‘Si una cifra es diferente, no es adecuado
i = i + 1
Wend
esrepe1 = es
End Function

Con esta función encontramos algo que ya sabíamos, que estos son los primeros divisores adecuados:

221, 331, 441, 551, 661, 771, 881, 991, 2221, 3331, 4441, 5551, 6661, 7771, 8881, 9991, 22221, 33331, 44441,…

Aunque los conozcamos nosotros, debe poderlos identificar también la hoja de cálculo.

En el lenguaje PARI construimos la función en tres pasos:

```
digit(a, q)=(a%10^q)\10^(q-1)
numdigit(n)=truncate(log(n)/log(10))+1 )
isrep1(n)={my(c=numdigit(n),e=0,f,i);if(n>=221&&digit(n,1)==1,f=digit(n,2);if(f<>1,e=1;i=2;while(i<=c&&e==1,if(f<>digit(n,i),e=0);i+=1)));e}
```

La función ***digit*** extrae una cifra del número***, numdigit*** calcula el número de cifras y ***isrep1*** determina si es adecuado.

Si le añadimos un bucle de búsqueda, obtendremos el mismo listado.

Segundo paso: Múltiplos de esos divisores

Un segundo paso consistirá en descubrir candidatos a la propiedad buscada entre los múltiplos de los divisores adecuados.

Usaremos esta función de Excel y más adelante otra de PARI. En las búsquedas es bueno disponer de dos métodos para comprobar que resultan las mismas soluciones.

En Excel

Function multirepe(n) 'Determina si ***n*** posee un divisor adecuado.
Dim i, r
Dim es

If esrepe1(n) Then multirepe = True: Exit Function 'Si es adecuado, ya hemos terminado.
es = False 'Comenzamos suponiendo que no lo es
i = 221 'Inicio de búsqueda de divisores
While i <= n And Not es
If esrepe1(i) Then
If n / i = n \ i Then es = True 'Si es un divisor y además adecuado, será válido
End If
i = i + 1
Wend
multirepe = es
End Function

Obtenemos este listado de posibles inicios de conjuntos con la propiedad pedida

221, 331, 441, 442, 551, 661, 662, 663, 771, 881, 882, 884, 991, 993, 1102, 1105, 1322, 1323, 1324, 1326, 1542, 1547, 1653, 1655, 1762, 1764, 1768, 1982, 1983, 1986, 1989, 2204, 2205, 2210, 2221, 2313, 2317, 2431, 2643, 2644, 2646, 2648, 2652, 2755, 2873, 2973, 2979,…

En PARI

Con PARI podemos usar esta definición de cuatro filas:

```
digit(a, q)=(a%10^q)\10^(q-1)
numdigit(n)=truncate(log(n)/log(10))+1
isrep1(n)={my(c=numdigit(n),e=0,f,i);if(n>=221&&digit(n,1)==1,f=digit(n,2);if(f<>1,e=1;i=2;while(i<=c&&e==1,if(f<>digit(n,i),e=0);i+=1)));e}
multirep(n)={my(s=0,i=1);while(i<=n&&s==0,if(n/i==n\i&&isrep1(i),s=1);i+=1);s}
```

Este es el resultado en la web de PARI:

```
221, 331, 441, 442, 551, 661, 662, 663, 771, 881, 882, 884, 991, 993, 1102, 1105, 1
322, 1323, 1324, 1326, 1542, 1547, 1653, 1655, 1762, 1764, 1768, 1982, 1983, 1986,
1989,
```

En estos listados ya se percibe que 661, 662 y 663 cumplen lo exigido, pero no 665. Más adelante figuran 1322, 1323, 1324 y 1326 que sí lo cumplen. Esto refuerza nuestra confianza en los métodos de búsqueda.

Ahora sólo nos queda, y será una búsqueda lenta, encontrar conjuntos de cuatro números, los tres primeros consecutivos y el cuarto alterno, que sean múltiplos de los divisores adecuados. Nos costará bastantes minutos en un ordenador personal.

Después de buscar, sólo se han obtenido los resultados previstos: 1322, 13322, 133322,…

Así que es una propiedad poco frecuente, ligada a los números 666, 6666, 66666,…No hay más búsquedas.

NÚMEROS POLIGONALES

NÚMEROS POLIGONALES EN GENERAL

En este apartado reunimos algunas propiedades y técnicas contenidas en ellas para construir una introducción general a los números poligonales.

Estos números son, en realidad, una curiosidad histórica y manantial de propiedades y coincidencias con otras ramas de las Matemáticas, y por eso se mantiene su estudio. Para la definición y características generales de estos números remitimos a algunas páginas que los tratan:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number

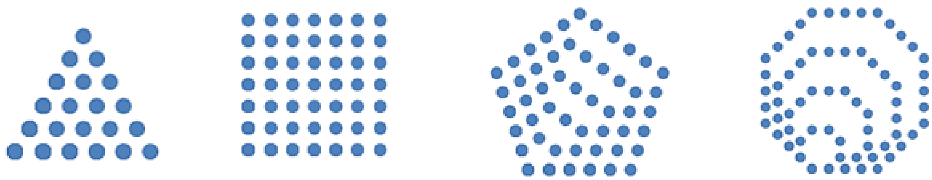
https://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html

http://oeis.org/wiki/Polygonal_numbers

DEFINICIÓN

Los números poligonales se forman mediante los contornos de polígonos regulares con lados de 1 a k puntos, con la condición de que compartan un vértice y sus dos lados contiguos.

Se entiende mejor con imágenes. Las páginas enlazadas más arriba las contienen con muy buen diseño. Aquí incluiremos unas más imperfectas, pero generadas de forma automática con Excel:



Triangular k=6 Cuadrado k=7 Pentagonal k=6 Octogonal k=5

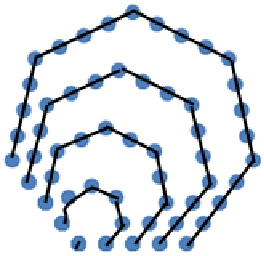
El objeto de estas y otras imágenes similares es aclarar que los poligonales no están formados por polígonos concéntricos, sino adosados a un vértice y dos lados adyacentes.

FÓRMULA

Para entender mejor la estructura interna de los números poligonales presentaremos varias formas de descomponerlos, y de cada una deduciremos la misma fórmula.

Polígonos adosados

En la definición hemos aludido a polígonos semejantes adosados y con lados crecientes. Para contar unidades, los hemos convertido en capas con forma de línea quebrada, con una estructura como de cebolla:



Aunque la idea de capas es sencilla, presenta el inconveniente de que cada polígono comparte unidades con el anterior y no se puede contar completo su perímetro. Lo explicamos con la imagen de arriba:

La primera capa es la unidad, por definición. En la segunda hay 7 unidades, ya que tiene forma de heptágono, pero comparte una con la anterior, luego la capa tendrá 7-1=6 unidades. La tercera está formada por 14, pero comparte 3 con las anteriores, se quedará en 2*7-3=11. De la misma forma, la cuarta tendrá 3*7-5=16 y la quinta 4*7-7=21. En total se contarán 1+6+11+16+21=55, que corresponde al valor de un número poligonal de 7 lados e índice 5.

De este esquema podemos deducir la fórmula de los números poligonales, que también deduciremos más adelante con otros esquemas. Llamaremos **orden n** al número de lados e **índice (o lado) k** a las unidades de cada lado. Al poligonal lo representaremos por **P(n,k)** o $\mathbf{P_{n,k}}$.

Según el razonamiento anterior, habrá que sumar:

1+n-1+2n-3+3n-5+4n-7+…+(k-1)n-(2(k-1)-1)

Aplicamos la fórmula de la suma de una progresión aritmética (en este caso dos progresiones)

$S_n=(a_1+a_n)*n/2$

Nos quedará, distinguiendo bien las dos progresiones n, 2n, 3n,…(k-1)n y 1, 3, 5, 7,…2(k-1)-1

P(n,k)=1 + (n+(k-1)n)*(k-1)/2 - (1+2(k-1)-1)*(k-1)/2=1+(k-1)/2(kn-(2k-2))

Desarrollando esto nos queda

P(n,k)=k^2*(n-2)-k(n-4))/2

Es costumbre sacar factor común k, con lo queda la conocida fórmula para poligonales:

$$P_{n,k} = \frac{k(k(n-2)-(n-4))}{2}$$

En el ejemplo del que hemos partido se daría el valor 55:

P(7,5)=5*(5*(7-2)-(7-4))/2=5*(25-3)/2=5*22/2=55

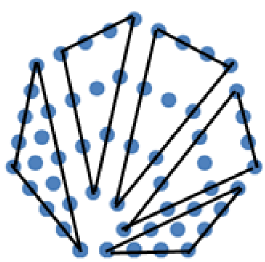
Hemos complicado un poco el cálculo para llegar a la fórmula general, pero las capas siguen una progresión aritmética: 1, 6, 11, 16, 21,…de diferencia 5. Podemos generalizar y considerar que si el número de lados es **n**, la diferencia será **n-2**, con lo que la suma será

$P(n,k)=1+1+n-2+1+2(n-2)+1+3(n-2)+\ldots \quad =(1+1+(k-1)(n-2))k/2=k/2(k(n-2)-(n-4))$ y llegamos a la misma fórmula. Así que

El número poligonal P(n,k) equivale a la suma de k términos de una progresión aritmética con diferencia n-2, desde 1 hasta 1+(k-1)(n-2)

Un triángulo de lado k y n-3 triángulos de lados k-1

En el mismo heptágono del apartado anterior podemos contar unidades separándolas en forma de triángulos. El primero vemos que tienen 5 unidades de lado, y después se pueden adosar cuatro con 4 unidades por lado.



En general, P(n,k) será igual a **un triángulo de lado k y n-3 triángulos de lado k-1**.

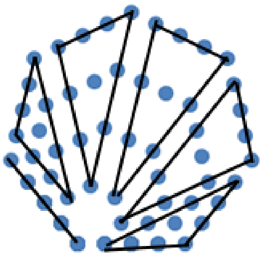
Recordemos que la fórmula de un número triangular de lado k es $T(k)=k(k+1)/2$. Con estas aclaraciones, podemos iniciar la cuenta:

POL(n,k)=T(k)+(n-3)T(k-1)=k(k+1)/2+(n-3)*k(k-1)/2=k(k+1+(n-3)(k-1))/2=**k(k(n-2)-(n-4))/2**

Llegamos a la misma fórmula general.

Un lado y n-2 triángulos

Es fácil ver que si sumamos un lado de longitud k y n-2 triángulos de lado k-1, también se forma el poligonal:



Procedemos a sumar como en los casos anteriores:

POL(n,k)=k+(n-2)k(k-1)/2=k(2+(n-2)(k-1))/2=**k(k(n-2)-(n-4))/2**

O bien **POL(n)=((n-2)k^2-(n-4)k)/2**

Caracterización de los números poligonales

En la fórmula general POL(n,k)=((n-2)k^2-(n-4)k)/2 podemos despejar la variable **k** en función del valor P del número poligonal y del orden o número de lados **n**:

(n-2)k^2-(n-4)k-2P=0

El discriminante $D=b^2-4ac$ de esta ecuación ha de ser un cuadrado, a fin de que k sea entero, es decir, que deberá ser cuadrada la expresión

$(n-4)^2+8P(n-2)$

Por ejemplo, deseamos saber si el número 81 es heptagonal, o poligonal de 7 lados.

Aplicaremos $D=(7-4)^2+8*81(7-2)=9+8*81*5=3249=57^2$

Como es cuadrado, podemos continuar. Para despejar k volvemos a la ecuación de segundo grado, y quedará **k=(n-4+RAIZ(D))/(2(n-2)**

En nuestro ejemplo, k=(3+57)/(2*5)=6

Luego 81 es un número heptagonal de lado o índice 6.

Este proceso se puede plasmar en una función de hoja de cálculo. La hemos llamado QUEPOLIGONAL, para averiguar si un número es un poligonal concreto:

Function quepoligonal(n, k) Los parámetros son el número n y el tipo de poligonal
Dim d
d = Sqr((k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2)) ‘Raíz cuadrada del discriminante
‘Si la raíz es entera, el número es poligonal del tipo dado y se despeja
If d <> Int(d) Then quepoligonal = 0 Else quepoligonal = (k - 4 + d) / (2 * k - 4)
End Function

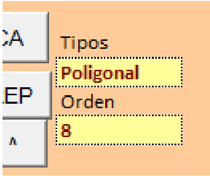
CALCULADORA “CALCUPOL”

Esta calculadora es una hoja de cálculo (En Excel o Calc) que puedes descargar desde mi página web:

	calcupol.xlsm
	calcupol.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/calcupol.xlsm

Esta herramienta está diseñada para varios tipos de números figurados, como los piramidales, oblongos o centrados. Para usar la calculadora para números poligonales hay que comenzar eligiendo el tipo **Poligonal** y después el **Orden**. No es necesario para algunos cálculos, pero sí es conveniente tenerlo fijado. Por ejemplo, para estudiar los octógonos elegiríamos **Poligonal** de **orden 8**.

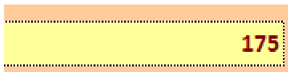


Las operaciones fundamentales que puedes efectuar con esta calculadora son:

Cálculo directo: Basta señalar los botones (recuerda que todo va con el ratón, no con el teclado) $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\text{POL}}$ $\boxed{\text{K}}$ $\boxed{=}$

siendo N el orden y K el índice. Por ejemplo, para encontrar el decágono de lado 7 señalaríamos 1 0 POL 7 = con el resultado de 175, que es correcto, como puedes comprobar en http://oeis.org/A001107

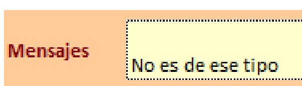
El resultado se te ofrece en la pantalla superior de la calculadora:



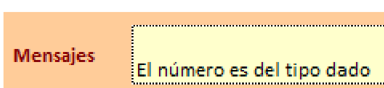
No olvides el signo =. Los resultados se borran con el botón CA.

Identificación: Dado un número cualquiera, puedes usar la tecla ES para saber si ese número es poligonal de algún tipo. Concreta como Orden 9 e intenta averiguar si el número 2291 es un eneágono. Escribirías CA 2 2 9 1 ES

Como hemos elegido el número al azar, lo más probable es que no sea eneágono. Efectivamente, nos responde:



Si hubiéramos escrito el 2301, cercano al anterior, la respuesta hubiera sido positiva:



Además, en la pantalla superior aparecería su índice:

Así que hemos comprobado que 2301 es eneagonal de índice 26. Consulta http://oeis.org/A001106

Próximo y anterior

¿Cómo hemos llegado al número 2301? Como teníamos en pantalla el número a probar 2291, bastó usar el botón PROX para que nos devolviera el siguiente eneágono al de prueba:

Con las teclas PROX y ANT podemos recorrer todos los números poligonales de un índice dado. Si tienes en pantalla 1 y usas PROX de forma reiterada, recorrerás la sucesión de poligonales que desees.

El resto de prestaciones lo tienes explicado en las Instrucciones que acompañan a la calculadora en su misma hoja. No le pidas la misma versatilidad que a las comerciales. Algunos cálculos combinados no serán correctos.

RECURRENCIAS

El estudio por capas que emprendimos en el apartado anterior nos llevó a

El número poligonal P(n,k) equivale a la suma de k términos de diferencia n-2, desde 1 hasta 1+(k-1)(n-2)

Por tanto, el siguiente término de la progresión será 1+k(n-2). Esto nos lleva a una relación recurrente:

P(n,k+1)=P(n,k)+k(n-2)+1

Por ejemplo, los primeros números hexagonales son 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66 , 91,…Por tanto 91 es el hexagonal de índice 7. A partir de él podemos encontrar el número 8 con esta relación de recurrencia:

H(8)=H(7)+7*(6-2)+1=91+28+1=120, que , en efecto es el siguiente hexagonal.

Esta recurrencia la usaremos como tabla y como función.

Como tabla, basta crear los primeros términos mentalmente y después seguir aplicando la recurrencia. Probamos con octogonales, en los que los primeros serán 1 y 8. Después, al octogonal de índice k habrá que sumarle, según hemos visto, k(8-2)+1=6k+1 (es como la fórmula de una nueva capa), y quedará esta tabla:

K	Octogonal	
1	1	
2	8	
3	21	OCT(k+1)=OCT(k)+6k+1
4	40	
5	65	
6	96	
7	133	
8	176	
9	225	
10	280	
11	341	
12	408	

En efecto, la segunda columna contiene los primeros octogonales, creados a partir de 1 y 8 junto con sus índices, mediante ***OCT(k+1)=OCT(k)+6k+1***

Lo puedes comprobar en http://oeis.org/A000567

Como función, podemos acudir a la recursividad que admite Excel y otras hojas de cálculo, que permiten que una función se llame a sí misma, dentro de unos límites. Si lo intentas con números grandes te puede fallar. Este código usa la recursividad:

Public Function polig_rec(n, k)

If k = 1 Then
polig_rec = 1 ‘El primer poligonal es 1
ElseIf k = 2 Then
polig_rec = n ‘El segundo es ***n***
Else

polig_rec = polig_rec(n, k - 1) + (n - 2) * (k - 1) + 1 ‘Recursividad

End If

End Function

Lo hemos probado con los hexagonales, que se generan con la fórmula n(2n-1), y hemos comprobado la coincidencia entre ambas técnicas:

N	N(2N-1)	Recursivo
1	1	1
2	6	6
3	15	15
4	28	28
5	45	45
6	66	66
7	91	91
8	120	120
9	153	153
10	190	190

Recurrencia en función de n

Si fijamos el valor de k, es posible deducir el valor de P(n,k) en función de P(n-1,k). Es una recurrencia que se basa en las descomposiciones en triangulares vistas más arriba, y consiste en sumarle un triangular de lado k-1:

P(n+1,k)=P(n,k)+T(k-1)=P(n,k)+k(k-1)/2

Lo demostramos:

$P(n,k)+T(k)=k(k*(n-2)-(n-4))/2+k(k-1)/2=(nk^2-2k^2-nk+4k+k^2-k)/2=$

$((n+1-2)k2-(n+1-4)k)/2=P(n+1,k)$

Por ejemplo, Pol(8,5)=65, Pol(7,5)=55 y T(4)=10 y se cumple 65=55+10

Con esta recurrencia podemos generar todos los poligonales que comparten índice. Por ejemplo, los de índice 4 se formarán sumando 4*3/2=6 al anterior:

En la imagen puedes comprobar que esos poligonales con k=4 presentan diferencias de 6.

Orden	k=4
Triangular	10
Cuadrado	16
Pentagonal	22
Hexagonal	28
Heptagonal	34
Octogonal	40

Una recurrencia de tercer orden

Es posible construir una recurrencia entre poligonales sin implicar el índice.

En http://oeis.org/wiki/Polygonal_numbers hemos encontrado la siguiente:

P(n,k)=3P(n,k-1)-3P(n,k-2)+P(n,k-3)

No es difícil justificarlo. Escribimos las fórmulas generales como polinomios en k y al desarrollar se comprueba la igualdad:

Desarrollamos el segundo miembro:

$3((k-1)^2*(n-2)-(k-1)(n-4))/2-3((k-2)^2*(n-2)-(k-2)(n-4))/2+((k-3)^2*(n-2)-(k-3)k(n-4))/2$

Como los cuadrados dependientes de k^2 y los de k son los mismos en los tres sumandos, bastará comprobar la equivalencia pare ellos solos:

Con cuadrados: $3(k-1)^2-3(k-2)^2+(k-3)^2=3k^2-6k+3-3k^2+12k-12+k^2-6k+9=k^2$

$3(k-1)-3(k-2)+k-3=3k-3-3k+6+k-3=k$

Luego en la recurrencia se construyen tanto k^2 como k y, por tanto, es válida.

Para estudiar la recurrencia incorporaremos el 0 como primer término de los poligonales. El segundo sería 1 y el siguiente, como ya hemos visto, n. Los coeficientes de la recurrencia son, según hemos visto, 3, -3 y 1.

Acudimos a nuestra hoja de cálculo para recurrencias lineales:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Probamos la recurrencia para poligonales de 13 lados. Las condiciones iniciales serán 0, 1, 13 y los coeficientes los ya conocidos 3, -3 y 1:

Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	0	x1	1	x2	13

Pulsamos el botón de “Ver sucesión” y obtendremos:

0
1
13
36
70
115
171
238
316
405
505
616
738

Estos son los primeros poligonales de índice 13. Lo puedes comprobar en http://oeis.org/A051865

Hemos conseguido generar estos poligonales mediante recurrencia lineal sobre los tres primeros (incluido el 0 por comodidad)

Una propiedad transversal

2*P(n,k)=P(n-h,k)+P(n+h,k)

Esta igualdad expresa que cada número poligonal es el promedio entre otros dos de su mismo índice y con los órdenes simétricos respecto al suyo.

Por ejemplo, el hexagonal de índice 6 es 66, y el cuadrado y el octogonal de ese índice son, respectivamente, 36 y 96, con lo que se cumple que 66=(36+96)/2

Su demostración es muy sencilla, pues partiendo de la fórmula general aplicada a P(n-h,k) y P(n+h,k) basta sacar factor común un 2:

k(k(n-h-2)-(n-h-4))/2+k(k(n+h-2)-(n+h-4))/2=k(k(2(h-2)-2(n-4))/2=2*P(n,k)

Esto permite, si disponemos de los primeros poligonales, como son los triangulares y cuadrados, generar los siguientes. Si en la identidad anterior hacemos h=1 y despejamos P(n+h,k) tendremos:

P(n+1,k)=2*P(n,k)-P(n-1,k)

Se puede ordenar en forma de tabla de Excel:

Índice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonales	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonales	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Eneagonales	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonales	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

En ella, las dos primeras filas se han escrito manualmente, y por eso están destacadas en rojo. Las siguientes se han formado restando el doble del elemento de la fila anterior con el de dos filas más arriba. Puedes comprobar que el resultado es correcto. Por ejemplo, el octogonal tercero, 21, se ha formado mediante 2*18-15=36-15=21.

Otra propiedad

*Stuart M. Ellerstein, en http://oeis.org/A057145, afirma que **P(2n+4.n)=n³**.*

No parece complicado demostrarlo. Sustituimos n por 3n+4 y k por n en la fórmula general:

$P(2n+4,n)=n(n*(2n+4-2)-(2n+4-4))/2=n(2n^2+2n-2n)/2=n^3$

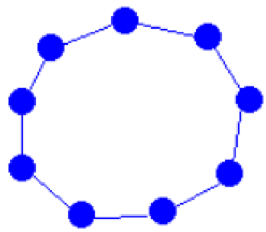
Por ejemplo, un decágono (n=2*3+4) de índice 3 equivale a $3^3=27$

En efecto, escribimos en la calculadora *calcupol* $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{POL}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ y nos resulta 27.

Pedimos prestado este título de una entrada de este blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/06/eres-un-poligonal.html

En ella nos planteábamos si un número dado no puede ser poligonal de ningún tipo, sin contar con el que tiene el mismo número de lados que él mismo:



Así, el número 9 es un eneágono.

Lo que sigue complementa otra entrada de este blog dedicada al tema

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/01/multipoligonal.html

En la imagen también se descubre que el máximo número de lados de un número poligonal coincide con él mismo. Esto nos posibilita buscar qué poligonales pueden coincidir con N buscando entre 3 y N mediante un bucle. Como disponemos de la función *quepoligonal*, bastará analizarla en ese rango. Así se efectúa en esta función, que devuelve “NO” si un número no es poligonal salvo con su mismo número de lados, o bien la colección de tipos de poligonales si existen.

Function mpolig$(n)
Dim i, p
Dim s$

If n < 3 Then mpolig = "NO": Exit Function ‘Si es menos que 3 no puede ser poligonal
s$ = ""
For i = 3 To n – 1 ‘Llegamos hasta ***n-1***, porque ***n*** no nos vale
p = quepoligonal(n, i) ‘Preguntamos si es poligonal
If p > 0 And p = Int(p) Then s$ = s$ + " #" + Str$(i) + ", " + Str$(p) ‘Si lo es, devolvemos los tipos
Next i
mpolig = s
End Function

Con esta función descubrimos los números N que pueden ser poligonales para un índice menor que N. Son los verdaderos poligonales, por lo que se les denomina como *poligonales regulares*.

En la imagen puedes consultar los primeros, que vienen acompañados por los distintos tipos que admiten:

N	Tipos de poligonal
6	# 3, 3
9	# 4, 3
10	# 3, 4
12	# 5, 3
15	# 3, 5 # 6, 3
16	# 4, 4
18	# 7, 3
21	# 3, 6 # 8, 3
22	# 5, 4
24	# 9, 3
25	# 4, 5
27	# 10, 3
28	# 3, 7 # 6, 4
30	# 11, 3
33	# 12, 3
34	# 7, 4
35	# 5, 5
36	# 3, 8 # 4, 6 # 13, 3

La lista termina con el 36, que es, como ves, poligonal de tres tipos: triangular de lado 8, cuadrado de lado 6 y poligonal de 13 lados de medida 3.

En nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html y siguiente, se estudia el caso de los triangulares cuadrados, entre ellos el 36, con el uso de la ecuación de Pell.

Estos poligonales regulares están publicados en

http://oeis.org/A090466

Cambiando ligeramente las condiciones de búsqueda obtendremos aquellos números que no pueden ser poligonales salvo con el tipo trivial.

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 17, 19, 20, 23, 26, 29, 31, 32, 37, 38, 41, 43, 44, 47, 50, 53, 56…

Están publicados en http://oeis.org/A090467

Entre ellos figuran los números primos. Los que son compuestos, como 4, 8 y 14, los tienes en http://oeis.org/A176949

Se puede razonar esta presencia. Para que un número poligonal sea primo deberá ocurrir que

P=k(k(n-2)-(n-4))/2, con P primo.

El número k es mayor que 2 en los poligonales regulares, luego k/2 no puede valer 1. Por tanto, si queremos que P sea primo, deberemos considerar que el paréntesis valga 2, es decir:

Será k(n-2)-n+4=2, kn-2k-n+2=0, (k-1)(n-2)=0

Esto nos lleva o a k=1 o a n=2, en cuyo caso P sería negativo. No hay posibilidad de que P sea primo.

Caso de los múltiplos de 3

Los números que sí figuran todos entre los poligonales regulares son los múltiplos de 3 mayores que 3. Sigue la sucesión http://oeis.org/A090466 y verás que no falta ninguno. Esto es así por dos razones:

a) En el criterio para saber si un número es poligonal que sea un cuadrado la expresión **$(n-4)^2+8P(n-2)$** hacemos **P=3(n-1)**, con lo que representa a todos los múltiplos de 3 a partir de 6 (recordemos que b>2). Unos cambios en la expresión nos llevarán a un cuadrado:

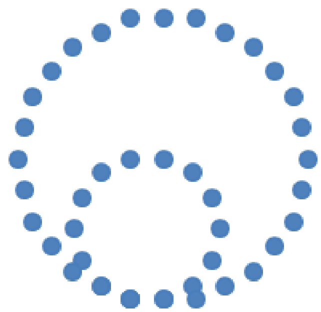
$(n-4)^2+8P(n-2) = n^2-8n+16+24(n-1)(n-2) = n^2-8n+16+24n^2-72n+48 = (1+24)n^2-(8+72)n+16+48 = 25n^2-80n+64 = (5n-8)^2$

Esto demuestra que los números múltiplos de 3 son poligonales. Su número de lados se obtendrá despejando n en P=3(n-1) y nos queda n=P/3+1. Como veremos más adelante, esta no sería la única solución. Muchos de ellos son también triangulares.

Un ejemplo: 39 es múltiplo de 3. Encuentro n tal como se explicó en el párrafo anterior: n=39/3+1)=14. Por tanto 39 se puede expresar como un polígono de 14 lados. Encontramos su índice, despejando en $39=k(k*(14-2)-(14-4))/2 = 6k^2-5k$

Resolvemos $6k^2-5k-39=0$ y nos da k=3 como solución entera positiva.

Luego el poligonal pedido es



Está formado por la suma (ver primera parte de este estudio) 1+(14-1)+(14*2-3)=1+13+25=39

b) Existe otra razón para justificar que todos los múltiplos de 3 a partir de 6 sean poligonales. Basta para ello fijar k en 3. Si k=3 queda:

P=3*(3*(n-2)-(n-4))/2=(9n-18-3n+12)/2)=(6n-6)/2=3n-3, que es un múltiplo de 3.

Todos los poligonales de índice 3 son múltiplos de 3

Número de tipos de poligonal para un número

Si modificamos la función *mpolig* para que devuelva un número en lugar de una cadena de texto, podremos clasificar los números naturales según el número de tipos distintos de poligonal (no trivial) que admitan.

Los que acabamos de estudiar tendrán un resultado de 0, pues solo admiten el poligonal trivial. Hemos visto que otros admiten un poligonal nada más. Con la función *mpolig* modificada se descubren los primeros:

Un tipo: 6, 9, 10, 12, 16, 18, 22, 24, 25, 27, 30, 33, 34, 35, 39, 40, 42, 46, 48, 49, 52, 54, 57, 58, 60,…

Están publicados en http://oeis.org/A177029. Allí se catalogan como que presentan dos tipos de poligonales, porque cuentan el caso trivial.

Dos tipos: 15, 21, 28, 51, 55, 64, 70, 75, 78, 91, 96, 100, 111, 112, 117, 126, 135, 136, 141, 144, 145, 148, 154, 156,…

Por ejemplo, 111 puede ser un eneágono de lado 6 (111=6*(6*(9-2)-(9-4))/2=3*37=111) y también un poligonal de 38 lados de medida 3 (111=3*(3*(38-2)-(38-4))/2=3*37=111)

Tres tipos: 36, 45, 66, 81, 105, 120, 153, 171, 190, 196, 210, 261, 280, 351, 378, 396, 400, 405, 406, 456, 465, 477,…

Comienza con el 36, que hemos indicado, se estudió en este blog como triangular cuadrado. Además, vimos que podía ser un poligonal de 13 lados.

Los demás poligonales regulares presentarán más de tres tipos (cuatro contando el trivial). Los primeros son:

225,231,276,325,435,441,540,561,595,616,651,820,861,936,946,1035,1089,1128,1225,…

1128, por ejemplo, puede ser triangular, hexagonal, poligonal de 42 lados o de 377.

Con esta cuestión finalizamos el estudio general de los números poligonales. En otras entradas se van estudiando los casos particulares, y en el año 2021 publicaremos en http://www.hojamat.es/ un resumen de todos los casos.

Como los poligonales de índice pequeño son los más populares, existen varias sucesiones con dos de esos casos simultáneos. Algunas de ellas son:

Triangulares y cuadrados

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, 63955431761796,… http://oeis.org/A001110

Les dimos unas vueltas en las entradas de este blog

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/11/damos-vueltas-los-triangulares.html

En ellas se acude a la ecuación de Pell, a recurrencias y fórmulas generales para estos números. Se añade una función generatriz y algunas curosidades.

Triangulares y hexagonales

Es fácil ver que todo número hexagonal de índice k equivale a un triangular de índice 2k-1. Puedes consultar el capítulo de números hexagonales. En este blog hemos estudiado el caso contrario, el de triangulares que no pueden ser hexagonales por tener lado par.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/09/triangulares-de-lado-par.html

Cuadrados y pentagonales

Son más raros. Los primeros están publicados http://oeis.org/A036353

1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001, 83314021887196947001, 799981229484128697805801,…

Cuadrados y hexagonales

También escasean: 1, 1225, 1413721, 1631432881, 1882672131025, 2172602007770041, 2507180834294496361, 2893284510173841030625, http://oeis.org/A046177

No merece la pena seguir.

Teorema de Fermat para poligonales

El teorema del número poligonal de Fermat afirma que cada número natural es suma de a lo máximo n números poligonales. Omitimos su historia, que puedes consultar fácilmente. Aquí nos interesa su comprobación mediante nuestra herramienta Cartesius http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Esta herramienta, diseñada en Excel y Calc, no es muy potente, y solo es útil para comprobaciones con números pequeños.

Explicaremos su uso con un ejemplo, como sería encontrar todas las descomposiciones del número 100 en suma de cinco pentagonales o menos. Para conseguirlo hemos usado esta programación en Cartesius:

xtotal=5
xt=1..10
xt=suc((3*(n-1)^2-(n-1))/2)
suma=100
creciente

Con ella hemos conseguido estas descomposiciones:

X1	X2	X3	X4	X5
0	5	22	22	51
1	1	1	5	92
1	1	12	35	51
1	5	12	12	70
12	22	22	22	22

Observamos que 100 admite una descomposición en suma de cuatro pentagonales y otras cuatro con cinco pentagonales. Puedes comprobar en

http://oeis.org/A000326

que, efectivamente, todos los sumandos son pentagonales.

Explicamos línea por línea el planteo:

xtotal=5

Como buscamos sumandos pentagonales, según el Teorema de Fermat, debemos exigir que sean 5. Se entiende que eso es lo que indica *xtotal=5*

xt=1..10

Esta línea indica el rango de búsqueda de los sumandos. Suele estar indicado elegir la raíz cuadrada del número que se estudia, en este caso el 100. Si no se tiene seguridad, basta consultar las columnas de sumandos. En este caso:

X1
0
1
5
12
22
35
51
70
92
117

Como llega a 100 y se pasa, hemos elegido bien el rango.

xt=suc((3*(n-1)^2-(n-1))/2)

Esta es la fórmula para pentagonales, pero la hemos aplicado a **n-1** en lugar de a **n**, para permitir la entrada del 0 en los sumandos.

suma=100

No necesita explicación. Exige que la suma sea 100

Creciente

Esta orden no es necesaria, pero, al exigir sumandos crecientes, simplifica bastante la presentación final.

Al pulsar sobre el botón **Iniciar**, obtendremos todas las descomposiciones que hemos incluido más arriba.

Si el rango elevado al número de sumandos se acerca a números de cinco cifras, el proceso se hace muy lento y hay que dejar al ordenador que trabaje él solo durante bastantes minutos. Es una “explosión combinatoria”. Lo bueno es que consigues todos los datos posibles.

Otro ejemplo sería descomponer 80 en números hexagonales:

xtotal=6
xt=1..9
xt=suc((n-1)*(2*(n-1)-1))
suma=80
creciente

Resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	1	6	28	45
0	1	1	6	6	66
1	6	15	15	15	28
6	6	6	6	28	28

Dejamos aquí las propiedades generales de los poligonales.

NÚMEROS PENTAGONALES

Introducción

Dentro del repaso sistemático de los números poligonales que haremos en este curso, les toca el turno hoy a los pentagonales, poligonales de cinco lados. Además de las propiedades generales que comparten todos los tipos de poligonales, estos presentan algunas propiedades interesantes propias, como algún teorema muy conocido. Las recorremos.

Definición e inserción con los poligonales en general

Los números poligonales se forman mediante los contornos de polígonos regulares con lados de 1 a **n** puntos, con la condición de que compartan un vértice y sus dos lados contiguos. En nuestro caso se trata de pentágonos, pero ya conocerás los números triangulares, cuadrados o hexagonales, que presentan el mismo proceso de formación.

Quienes estudian estos números por primera vez tienen dificultades en entender este esquema, pues lo confunden con pentágonos concéntricos. La figura anterior la hemos construido con Excel, por lo que no presenta la regularidad en su diseño propia de programas de dibujo e imágenes.

Fórmula

Todos los números poligonales se pueden calcular con la siguiente fórmula (ver mi publicación "Números y formas"
http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf):

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

En ella **k** es el números de lados y **l** la longitud de cada lado o ***índice***. En nuestro caso de pentagonales haremos **k=5** y al lado le llamaremos **n**. Quedará:

$$p_n = \frac{n(n \cdot (5-2) - (5-4))}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Con esta fórmula puedes obtener los primeros números pentagonales:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 852, 925, 1001, 1080, 1162, 1247, 1335, 1426, 1520, 1617, 1717, 1820, 1926, 2035, 2147,…

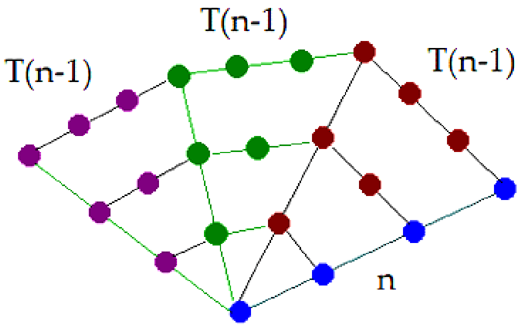
Los tienes publicados en http://oeis.org/A000326

Con la fórmula y una hoja de cálculo puedes obtener fácilmente una tabla:

N	Pentagonal N
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92
9	117
10	145

Otra forma de deducir la fórmula

Según la propiedad general de los poligonales, los pentagonales serán equivalentes a tres triangulares de una unidad menos más la longitud del lado. En la imagen, los triangulares están dibujados con distintos colores y el lado final en azul.

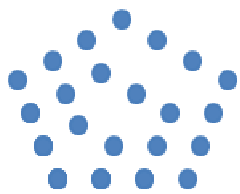


Luego

$$p_n = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{3n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

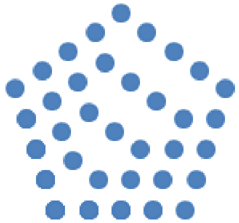
Puedes contar las unidades de los primeros pentagonales en las siguientes imágenes, creadas con Excel:

N=4



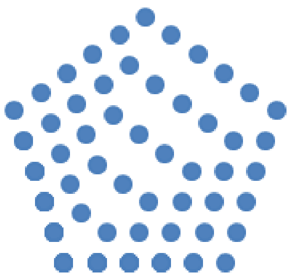
Puedes contar a ojo que son 22 unidades, tal como predice la fórmula.

N=5



Son 35 unidades.

N=6



Los números pentagonales no deben confundirse con los números pentagonales centrados, que puedes estudiar en mi publicación enlazada más arriba.

Fórmula recursiva

Hemos copiado esta fórmula de OEIS:

a(0) = 0, a(1) = 1; for n >= 2, a(n) = 2*a(n-1) - a(n-2) + 3. - Miklos Kristof, Mar 09 2005

Si sustituimos cada término por la fórmula basta simplificar para obtener a(n). En la siguiente captura de pantalla (calculadora WIRIS) se puede observar la simplificación:

$$2*(n-1)*(3*(n-1)-1)/2-(n-2)*(3*(n-2)-1)/2+3 \quad = \quad \frac{3}{2}\cdot n^2-\frac{1}{2}\cdot n$$

Como simple curiosidad, con esta función usaríamos la recurrencia explicada. No tiene utilidad, pero sirve para buscar rutas alternativas en casos similares:

```
Public Function penta2(n)
If n = 1 Then
penta2 = 1
ElseIf n = 2 Then
penta2 = 5
Else
penta2 = 2 * penta2(n - 1) - penta2(n - 2) + 3
End If
End Function
```

No necesita explicación, ya que asigna el valor 1 al primer pentagonal, el 5 al segundo y al resto la recurrencia. Con ella podemos construir una tabla de valores, que coincida con lo ya explicado:

N	Pentagonal (recurrencia)
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92

Criterio para reconocer pentagonales

En este blog hemos usado con frecuencia las funciones ESCUAD y ESTRIANGULAR para saber si un número es de ese tipo (cuadrado o triangular) o no. No es difícil construir una similar para los pentagonales. Basta seguir estos cálculos algebraicos. Sea P el posible número pentagonal y llamemos n a su orden. Entonces

$P=n*(3n-1)/2; 2P=3n^2-n; 3n^2-n-2P=0$

Al resolver esta ecuación de segundo grado vemos que el discriminante es 1+24P, luego debe ser un cuadrado perfecto. Ya tenemos un criterio, pues serán pentagonales los números que cumplan que 1+24P sea un cuadrado. Si esto se cumple, al resolver la ecuación obtendremos su índice.

Esta función devuelve un cero si el número no es pentagonal y si lo es, dará el valor de su índice u orden:

Public Function ordenpentagonal(n)
Dim a, b

b = 0 ‘Iniciamos el orden con un cero, por si no es pentagonal
a = 1 + 24 * n ‘Discriminante
If escuad(a) Then b = (1 + Sqr(a)) / 6 ’ Si el discriminante es cuadrado, resolvemos
If b = Int(b) Then ordenpentagonal = b ‘Si ***b*** es entero, ese será el orden
End Function

En la siguiente tabla puedes ver una lista de números consecutivos de los que solo 12 y 22 son pentagonales:

N	Orden
10	0
11	0
12	3
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	4

Con esta función puedes buscar directamente números pentagonales mayores. Por ejemplo, 1001 es el pentagonal 26 y 10045 es el número 82.

Uso de la calculadora “Calcupol”

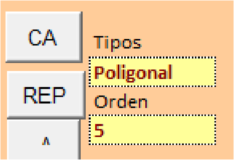
Si ya la conoces, puedes saltar estos párrafos.

Esta calculadora es una hoja de cálculo (En Excel o Calc) que puedes descargar desde mi página web:

	calcupol.xlsm
	calcupol.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/calcupol.xlsm

Para usar la calculadora para números pentagonales basta elegir Tipo **Poligonal** y **Orden 5**. No es necesario para calcularlos, pero sí para otras prestaciones.



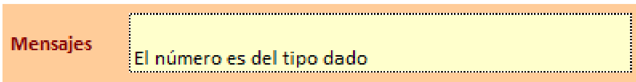
Las operaciones fundamentales que puedes efectuar son:

Cálculo directo: Basta escribir (recuerda que todo va con el ratón) 5 POL y después el índice o longitud del lado (termina siempre con el signo =). Por ejemplo, si tecleas 5 POL 1 2 = obtendrás el pentagonal número 12, que es el 210:

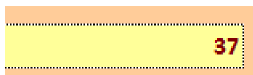
Identificación: Si ya has concretado Poligonal Orden 5, puedes usar la tecla ES para saber si un número es o no pentagonal. Escribe, por ejemplo, 2035 y pulsa esa tecla ES

(puedes borrar pantalla con la tecla CA)

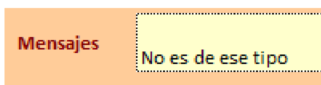
Obtendrás una respuesta afirmativa



Y en pantalla aparecerá su índice, 37:



Borra pantalla y escribe 2040 y observarás la respuesta negativa:



Próximo y anterior

Con las teclas PROX y ANT podemos recorrer todos los número pentagonales. Si tienes en pantalla 2040, al pulsar ANT obtendrás de nuevo 2035 y si ahora usas PROX se saltará el valor 2040 y pasará al siguiente pentagonal 2147.

Algunas propiedades

El promedio de los primeros números pentagonales es un número triangular

Antes de sumar los números pentagonales hay que recordar estas dos igualdades:

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con estas dos fórmulas podemos sumar pentagonales:

$$\sum_{1}^{n} P_i = \sum_{1}^{n} \frac{3i^2 - i}{2} = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}$$

Con unas pocas simplificaciones llegamos a

$$\sum_{1}^{n} P_i = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

De esta igualdad sacamos dos consecuencias:

La expresión de la suma de los primeros números pentagonales coincide con la fórmula de los piramidales pentagonales. Esto es consecuencia de su definición.

Puedes comprobarlo en mi publicación “Números piramidales”

(http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf)

Tal como hemos afirmado, si dividimos la expresión obtenida entre n obtendremos el promedio de los primeros pentagonales y, en efecto, resulta un número triangular:

$$\frac{n^3+n^2}{2n}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Por tanto, el promedio es triangular.

Números pentagonales como suma de números consecutivos

Según Jon Perry, podemos interpretar el pentagonal de orden **n** como la suma de **n** números enteros consecutivos que comienzan en **n**. Es decir:

$$P_n=\sum_{i=n}^{2n-1} i$$

Por ejemplo, $P_4=4+5+6+7=22$, $P_5=5+6+7+8+9=35$.

Si recordamos que los números triangulares, de fórmula n(n+1)/2, son suma de números consecutivos, tendríamos, para P_5:

P_5=5+6+7+8+9=9(9+1)/2-4*(4+1)/2=45-10=35.

En general, según esta propiedad:

P_n =T(2n-1)-T(n-1)=(2n-1)*2n/2-(n-1)*n/2=(4n^2-2n-n^2+n)/2=(3n^2-n)/2=n(3n-1)/2

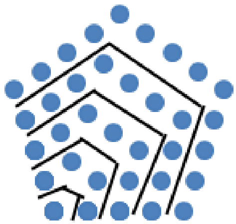
Por tanto, coincide con la fórmula de los números pentagonales.

Hemos comprobado de paso que todo número pentagonal es diferencia entre dos triangulares.

Números pentagonales como suma de una progresión aritmética:

También Jon Perry interpreta un número pentagonal como una suma parcial en la progresión aritmética de diferencia 3: 1, 4, 7, 10, 13,…

Antes de demostrarlo algebraicamente, podemos visualizar esta propiedad fácilmente. Basta considerar las líneas poligonales que hemos añadido al esquema gráfico de estos números:



Aunque las líneas están trazadas a mano alzada, se perciben bien los sumandos 1, 4, 7, 10 y 13.

Si recordamos la fórmula de la suma de una progresión aritmética, podremos justificarlo algebraicamente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(1 + 1 + 3(n-1)\big)n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}$$

Esta propiedad nos permite calcular cualquier número pentagonal por recursión. Basta darse cuenta de que $\mathbf{P_{n+1}=P_n+3n+1}$.

Así, $P_1=1$, $P_2=1+3+1=5$, $P_3=5+3*2+1=12$, $P_4=12+3*3+1=22$,…

Un número pentagonal es suma de un combinatorio y un cuadrado

En efecto:

$$\binom{n}{2} + n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Un número pentagonal es un tercio de otro triangular

Es fácil demostrar que si el orden del pentagonal es k, el del triangular es 3k-1:

$$3P_k = 3\frac{k(3k-1)}{2} = \frac{(3k-1)(3k)}{2} = T(3k-1)$$

Pentagonales multipoligonales

Los números pentagonales pueden ser también cuadrados, triangulares o hexagonales. Los cuadrados los puedes consultar en

http://oeis.org/A036353

0, 1, 9801, 94109401, 903638458801, 8676736387298001, 83314021887196947001, 799981229484128697805801, 7681419682192581869134354401, 73756990988431941623299373152801

Disponemos en este blog de la función *doblepolig*, que nos indica si un número pertenece a dos tipos concretos de número poligonal. Puedes consultarla en

https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=multipoligonal

Con esta función es trivial reproducir la lista de más arriba,ya que basta exigir *doblepolig(5,4)*.El problema radica en que Excel no puede llegar a estos números enormes, pero sí detecta el 9801:

9801 # 4, 99 # 5, 81 # 180, 11 # 274, 9 # 655, 6 # 3268, 3 # 9801, 2

Se observa que 9801 es cuadrado y pentagonal, además de poligonal de 180, 274, 655, 3268 y 9801 lados.

Con esta función podemos encontrar los primeros pentagonales que son poligonales de otros tipos. Incluimos algunos (no tenemos en cuenta el 1):

Pentagonal y triangular: 210 y40755
Pentagonal y hexagonal: 40755
Pentagonal y heptagonal: 4347
Y así podríamos seguir.

Teorema de Fermat para pentagonales

Fermat afirmó, y se demostró posteriormente, que todo número natural es suma de a lo más n números poligonales. En el caso de los pentagonales se deduce que todo natural es suma de como máximo cinco pentagonales.

La comprobación práctica de esta propiedad puede resultar algo complicada de seguir. No es difícil conseguirlo con nuestro programa de Excel y Calc *Cartesius*

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

En la captura de pantalla siguiente se presentan todas posibilidades de descomposición en pentagonales del número 121. Observamos que puede obtenerse con dos, tres, cuatro o cinco sumandos pentaonales. El papel del cero e importante. Sin él, sólo obtendríamos sumas de cinco sumandos pentagonales.

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	51	70
0	0	35	35	51
0	5	12	12	92
1	1	1	1	117
1	1	5	22	92
1	12	22	35	51
5	12	12	22	70

El planteo adecuado para conseguir esto es similar al siguiente:

xtotal=5
xt=1..10
xt=suc((n-1)*(3*(n-1)-1)/2)
suma=121
creciente
Explicamos línea por línea:

xtotal=5: Indica que el número de sumandos es 5

xt=1..10: Este es el rango de búsqueda de los índices de los pentagonales que se van a sumar. Es deseable que abarque hasta el índice del número que se va a probar o algo más. En nuestro caso, para 121 está bien un rango de 10.

xt=suc((n-1)*(3*(n-1)-1)/2): Esta es la instrucción fundamental. Indica que se construya el pentagonal de índice n-1, para que así contemos con el cero como sumando

suma=121: Escribe el total que deben dar los sumandos. En este caso, 121.

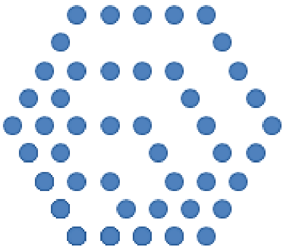
Creciente: Se incluye para eliminar casos repetidos.

Con esto finaliza nuestro repaso de los números pentagonales. Podíamos pasar a los generalizados, pero no entra dentro de los objetivos de este blog.

NÚMEROS HEXAGONALES

Definición e inserción con los poligonales en general

Los números hexagonales se generan, como todos los poligonales, alineando los elementos en estructuras de este tipo adosadas en orden creciente, y compartiendo dos lados cada una con la anterior, como se puede ver en este esquema construido con Excel:



Se corresponde con el número hexagonal de índice 5, ya que se han adosado cuatro estructuras hexagonales además de la inicial de un solo elemento. Estos esquemas se conservan por su carácter histórico, pero varias de las propiedades que veremos más adelante podrían servir como definición además de la clásica.

Todos los números poligonales se pueden calcular con la siguiente fórmula (ver mi publicación "Números y formas"

http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf):

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

En nuestro caso k=6, lo que simplifica bastante la fórmula, que queda como

$$hx_l = p_{6,l} = \frac{l(l \cdot 4 - 2)}{2} = l(2l-1)$$

Nombraremos el hexagonal de índice l como **hx_l**. Como estamos acostumbrados a escribir los índices como **n**, la fórmula quedaría:

$$hx_n = n(2n-1)$$

Un sencillo cambio nos indica que un hexagonal coincide con un número triangular de índice impar:

$$hx_n = \frac{2n(2n-1)}{2} = T_{2n-1}$$

Todo número hexagonal coincide pues con un triangular de índice 2n-1, es decir, impar. Los de índice par no pueden ser hexagonales.

Hace tiempo publicamos en nuestro blog una entrada dedicada a estos triangulares de índice par. Por su interés, la enlazamos:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/09/triangulares-de-lado-par.html

Los primeros números hexagonales son 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66 , 91 , 120 , 153 , 190 , 231, 276, 325, 378, 435, 496 , 561 , 630, 703, 780, 861, 946 ...Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A000384

Sencillos cálculos revelan que todos son triangulares. Por ejemplo, 561=33*34/2.

Esta lista es fácilmente reproducible con hoja de cálculo, gracias a la sencillez de la fórmula n(2n-1):

Índice	Hexagonal
1	1
2	6
3	15
4	28
5	45
6	66
7	91
8	120
9	153
10	190

Entre ellos figuran dos números perfectos, 6 y 28. En realidad, todos los perfectos son hexagonales, debido a su fórmula, que es del tipo n(2n-1):

$P=2^{k-1}(2^k-1) = 2^{k-1}(2*2^{k-1}-1)$

Otras expresiones de los números hexagonales

*a(n) = binomial(n+1,2) + 3*binomial(n,2).*

No es difícil comprobar esta identidad, que usa números combinatorios:

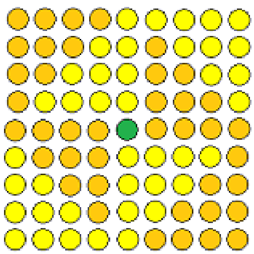
$$hx_n = \binom{n+1}{2} + 3\binom{n}{2}$$

$$hx_n = \binom{n+1}{2} + 3\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{4n^2-2n}{2} = n(2n-1)$$

Criterio para reconocer hexagonales

Si un hexagonal es un triangular de lado impar, nos servirá el criterio para triangulares, que es que **ocho veces un triangular más la unidad ha de ser un cuadrado**.

En esta imagen puedes comprobar que ocho triángulos de lado 4 (y diez elementos) se adosan dejando un hueco (el círculo verde):



Por tanto 8T+1 siempre es un cuadrado si T es triangular.. Así que en un hexagonal también se tiene que cumplir con 8H+1. Si sumamos una unidad al lado del cuadrado de la imagen nos resulta 2n+2. Y si n ha de ser impar, tendremos 2(2k+1)+2=4k+4, que será entero si lo dividimos entre 4. En resumen, ha de ser un entero esta expresión:

$$\frac{\sqrt{8H+1}+1}{4}$$

Con esta expresión y nuestra función ESCUAD, (es cuadrado) obtenemos la función que caracteriza si un número es hexagonal y además nos devuelve su índice:

```
Function ordenhexagonal(n)
Dim a, b

b = 0
a = 8 * n + 1
If escuad(a) Then 'Criterio del 8H+1
b = (Sqr(a) + 1) / 4 'Búsqueda del lado
If b <> Int(b) Then b = 0
End If
ordenhexagonal = b 'Si no es hexagonal dará cero.
End Function
```

Con esta función puedes detectar hexagonales en cualquier intervalo. Por ejemplo, entre los últimos 20 años, 2016 fue el único hexagonal, con orden 32. En esta captura de Excel lo puedes comprobar:

2010	0
2011	0
2012	0
2013	0
2014	0
2015	0
2016	32
2017	0
2018	0
2019	0
2020	0

Definiciones por recurrencia

Mediante sumas acumuladas

Si un número hexagonal coincide con un triangular determinado, valdrán las recurrencias para estos números. Sabemos que $Hx_n=T_{2n-1}$. Por tanto, si el triangular T_{n-1} se convierte en el siguiente T_n sumándole su índice **n-1**, al hexagonal habrá que sumarle dos índices, 2n-2 y 2n-1, es decir, **4n-3**. En efecto, si $Hx_3=15$, $Hx_4=15+4*4-3=15+13=28$, como bien podemos comprobar.

En esta tabla hemos escrito el primer 1 y después hemos ido añadiendo 4n-3:

N	HEX(N)	
1	1	
2	6	Se añade 4*n-3
3	15	
4	28	
5	45	
6	66	
7	91	
8	120	
9	153	
10	190	

Mediante recurrencia lineal

Jaume Oliver Lafont propone la siguiente en OEIS (adaptamos la escritura):

Hx(n) = 3*Hx(n-1) - 3*Hx(n-2) + Hx(n-3), Hx(0)=0, Hx(1)=1, Hx(2)=6.

La comprobaremos con nuestra hoja dedicada a las recurrencias lineales, en este caso de tercer orden (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

Abrimos la hoja correspondiente al tercer orden y rellenamos los coeficientes 3, -3, 1 y los términos iniciales 0, 1, 6:

Coeficientes					
A	3	**B**	-3	**C**	1
Valores iniciales					
X0	0	**x1**	1	**x2**	6

Pulsamos el botón de "*Ver sucesión*" y obtenemos una columna con los números hexagonales incluido el cero:

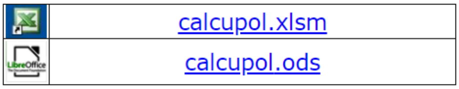
0
1
6
15
28
45
66
91
120
153
190
231
276
325

Es una simple curiosidad.

Uso de la calculadora "Calcupol"

Si ya la conoces, puedes saltar estos párrafos.

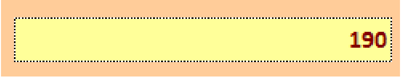
Esta calculadora es una hoja de cálculo (En Excel o Calc) que puedes descargar desde mi página web:



http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/calcupol.xlsm

En primer lugar es conveniente poner la calculadora en modo *poligonal* y de orden 6:

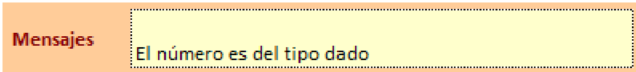
Cálculo directo: Basta escribir (recuerda que todo va con el ratón) 6 POL y después el índice o longitud del lado (termina siempre con el signo =). Por ejemplo, si tecleas $\boxed{6}$ $\boxed{\text{POL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ obtendrás el hexagonal número 10, que es el 190:



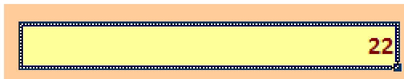
Identificación: Si ya has concretado Poligonal Orden 6, puedes usar la tecla $\boxed{\text{ES}}$ para saber si un número es o no hexagonal. Escribe, por ejemplo, 946 y pulsa esa tecla $\boxed{\text{ES}}$

(puedes borrar pantalla con la tecla CA)

Obtendrás una respuesta afirmativa

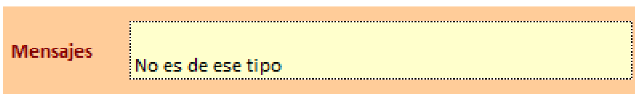


En pantalla aparecerá su índice



En efecto, Hx_{22}=946

Escribe otro número, por ejemplo 947, que no será hexagonal. En ese caso la respuesta será:



Próximo y anterior

Con las teclas PROX y ANT podemos recorrer todos los número hexagonales. Si tienes en pantalla 2000, al pulsar ANT obtendrás de nuevo 1891, que es el hexagonal más cercano a 2000 e inferior a él y si ahora usas PROX saltará al valor 2016, que es el siguiente hexagonal.

Otras propiedades

Los números hexagonales son el resultado de sumar los números del tipo 4k+1 a partir del 1.

En efecto:

$H_1=1$, $H_2=1+5=6$, $H_3=1+5+9=15$,…

En general, aplicando la fórmula para sumar progresiones aritméticas:

$$S_n = \frac{(1+4n+1)\cdot n}{2} = n(2n+1) = H_n$$

Los números hexagonales coinciden con el semiperímetro en las ternas pitagóricas primitivas en las que la hipotenusa es consecutiva con el cateto mayor.

(Ver http://oeis.org/A000384, comentario de Lekraj Beedassy)

En efecto, estas ternas se pueden representar como

(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2,).

El primer lado y la hipotenusa no pueden ser consecutivos, pues su diferencia es al menos de dos unidades, luego si los hay son los dos últimos:

Si $m^2+n^2-2mn=1$, será $(m-n)^2=1$ y m-n=1, n=m-1, porque n<m.

El perímetro es 2m(m+n) y el semiperímetro m(m+n)=m(2m-1), que es un número hexagonal.

Por ejemplo, en la terna (9, 40, 41) son consecutivos 40 y 41, el perímetro vale 90 y su mitad, 45, es un número hexagonal.

Descomposición en suma de cuatro hexagonales

Salvo unos pocos números (5, 10, 11, 20, 25, 26, 38, 39, 54, 65, 70, 114 y 130. Ver https://oeis.org/A007527), todos los demás se pueden expresar como suma de cuatro números hexagonales.

Lo comprobamos con nuestra herramienta Cartesius para el intervalo (100,110):

B	C	D	E		M	N
						Total
X1	X2	X3	X4	X5	X12	19
0	6	28	66			100
0	28	28	45			101
1	6	28	66			101
1	28	28	45			102
6	6	45	45			102
6	15	15	66			102
0	6	6	91			103
15	15	28	45			103
1	6	6	91			104
0	15	45	45			105
0	0	15	91			106
1	15	45	45			106
6	6	28	66			106
0	1	15	91			107
6	28	28	45			107
1	1	15	91			108
0	15	28	66			109
6	6	6	91			109
1	15	28	66			110

Hemos manipulado algo la imagen de Cartesius para eliminar columnas en blanco. Se ha añadido la opción del 0 para destacar los números que sólo necesitan dos o tres hexagonales, como el 106. Los demás necesitan cuatro hexagonales. Observamos en la columna de la derecha que varios números aparecen como resultado de sumas distintas. El 106, por ejemplo equivale a tres sumas distintas.

Incluimos el planteo. Aunque no hayas manejado esta herramienta lo entenderás:

xvar=100&110 ‘Recorremos desde 100 a 110
xtotal=4 ‘Son cuatro los sumandos
xt=1..9 ‘Cada sumando actúa sobre el intervalo (1,9)
xt=suc((n-1)*(2*n-3)) ‘Número hexagonal n-1 (para abarcar el cero)
suma=vx ‘La suma también va del 100 al 110
creciente ‘Para evitar repeticiones

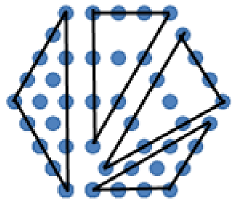
Según MathWorld, Legendre demostró que todo número mayor que 1791 es una suma de cuatro números hexagonales, y Duke y Schulze-Pillot mejoraron esto a tres números hexagonales por cada entero suficientemente grande

(https://mathworld.wolfram.com/HexagonalNumber.html)

Un número hexagonal equivale a la suma de un triangular con el mismo índice sumado con el triple del triangular anterior.

Es decir: $Hx_n=T_n+3T_{n-1}$

Dejamos como ejercicio la demostración algebraica, porque la imagen siguiente es bastante clarificadora. El primer triángulo tiene índice 5 y los otros tres, 4.



Si en la imagen separamos el lado de la izquierda, de cinco elementos, obtenemos esta otra equivalencia (Lekraj Beedassy)

$Hx_n=n+4T_{n-1}$

También es fácil de demostrar algebraicamente.

Los números hexagonales son permutaciones con repetición de 2n elementos {0,1} en las que el 1 figure repetido dos veces.

Lo que estamos afirmando es la validez de esta fórmula (permutaciones con repetición o número binomial):

$$Hx_n = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \binom{2n}{2}$$

Con nuestra herramienta ***Combimaq*** hemos creado las permutaciones correspondientes al valor 15 del tercer hexagonal:

SU1	SU2	SU3	SU4	SU5	SU6
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0

La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#combimaq

Hemos usado estas condiciones:

Condiciones
TOTAL 6
PARCIAL 6
ORDEN SI
REPETIR SI
CUENTA SI
SIMBOLOS

Símbolos		Cuentas
0		4
1		2

Es fácil su demostración algebraica:

$$\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = Hx_n$$

La suma de los inversos de los números hexagonales equivale al doble del logaritmo neperiano de 2 (Vaclav Kotesovec, Apr 27 2016)

Finalizamos este recorrido por las propiedades de los números hexagonales aproximando la suma de sus inversos mediante hoja de cálculo. Se puede comprobar creando una columna con los números hexagonales, adosando junto a ella una columna de inversos y usando después la suma. Si deseas avanzar a miles de términos, es preferible la siguiente función:

```
Public Function sum_inv_hex(n)
Dim i, s
s = 0
For i = 1 To n
s = s + 1 / (i * (2 * i - 1))
Next i
sum_inv_hex = s
End Function
```

Su código se entiende fácilmente. Te puedes crear un esquema en el que escribas el número de términos y le apliques la función para comparar el resultado con 2LOG(2):

Número de términos	2000
Suma inversos	1,386044392
2LOG(2)	1,386294361

Una forma sencilla para comprobar esto se basa en nuestra hoja de cálculo “Visor de sucesiones”

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#visor)

Le escribimos la fórmula del inverso de un número hexagonal

Fórmula	
Usa N como variable y no escribas el signo =)	
1/(N*(2*N-1))	

Activamos el Visor y nos devuelve una aproximación a la suma:

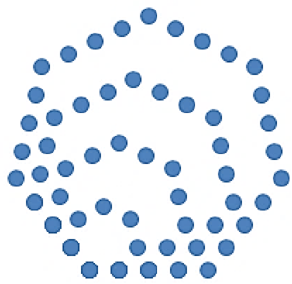
Estadísticas	
Suma A(N)	**1,383797**
Máximo A(N)	**1**
Suma Función	**0**

Con esto finalizamos el tema.

NÚMEROS HEPTAGONALES

Definición e inserción con los poligonales en general

Los números heptagonales se generan, como todos los poligonales, alineando los elementos en estructuras de este tipo adosadas en orden creciente, y compartiendo dos lados cada una con la anterior, como se puede ver en este esquema construido con Excel:



Observamos que se ha construido adosando cuatro heptágonos con tamaño creciente. Como se cuenta también la unidad inicial, este número heptagonal tendría índice 5.

Si estás siguiendo esta serie sabrás ya que todos los números poligonales se calculan con la fórmula

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

Tal como procedimos con otros poligonales, si hacemos k=7 obtendremos la fórmula adecuada para los heptagonales, que representaremos como Hp:

$$Hp_n = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Con una hoja de cálculo se crea rápidamente una columna de heptagonales aplicando esta fórmula:

N	HEP(N)
1	1
2	7
3	18
4	34
5	55
6	81
7	112
8	148
9	189
10	235

Los primeros números heptagonales son:

1 , 7 , 18 , 34 , 55 , 81 , 112 , 148 , 189 , 235 , 286, 342, 403, 469, 540, 616 , 697, 783, 874, 970, 1071, 1177, 1288, 1404, 1525, 1651, 1782,…

(http://oeis.org/A000566)

Caracterización de los números heptagonales

Si multiplicamos un heptagonal por 5 y añadimos una unidad, obtenemos un número triangular. En efecto:

$$5 \cdot Hp_n + 1 = \frac{25n^2 - 15n + 2}{2} = \frac{(5n-1)(5n-2)}{2}$$
$$= T_{5n-1}$$

El criterio para saber si un número es triangular es que 8T+1 sea cuadrado, luego, en el caso del heptagonal deberá ser cuadrado C^2=8(5Hp+1)+1=40Hp+9

Por ejemplo, ¿Es heptagonal 783?

Aplico el criterio: C=40*783+9=31329=177^2, luego es un cuadrado y 783 es heptagonal.

La raíz cuadrada siempre terminará en 7. Si sustituimos el número a probar por la fórmula de un heptagonal, queda:

$$40Hp + 9 = 40\frac{n(5n-3)}{2} + 9 = 100n^2 - 60n + 9 \\ = (10n-3)^2$$

Claramente, la expresión 10n-3 termina en 7 en el sistema decimal de numeración.

Si se cumple el criterio, podemos encontrar el orden del heptagonal:

Igualamos la fórmula del heptagonal a su valor llegamos a la ecuación

$5n^2$-3n-2H=0

Escribiendo la solución en función de C llegamos a una relación muy simple: n=(C+3)/10.

Todo esto se puede resumir en una función:

Function ordenheptagonal(n)
Dim a, b

b = 0 ‘Comenzamos haciendo cero el posible orden
a = 40 * n + 9 ‘Buscamos el cuadrado
If escuad(a) Then ‘Si es cuadrado, n es heptagonal
b = (Sqr(a) + 3) / 10 ‘Calculamos su orden
End If
ordenheptagonal = b
End Function

De esta forma podemos identificar si un número es heptagonal o no.

En la tabla siguiente hemos buscado el primer heptagonal a partir de 400:

N	Orden
400	0
401	0
402	0
403	13
404	0
405	0
406	0
407	0
408	0
409	0
410	0

Vemos que sólo 403 es heptagonal de orden 13, porque 403=13*(5*13-3)/2

Otras formas de expresar los heptagonales

Paul Barry da en OEIS este desarrollo: a(n) = Sum_{k = 1..n} (4*n - 3*k).

Traducimos a nuestra notación:

$$Hp_n = \sum_{k=1}^{n} (4n - 3k)$$

Es fácil de comprobar, ya que el sumatorio de 4n será $4n^2$, y el de 3k es el triple de un número triangular, quedando

$Hp(n)=4n^2-3n(n+1)/2=n(5n-3)/2$, que es la fórmula del heptagonal.

Por ejemplo, para n=6

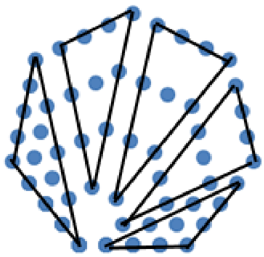
N=6	
k	4N-3K
1	21
2	18
3	15
4	12
5	9
6	6
SUMA	**81**

Viendo este ejemplo te puedes preguntar si existen más heptagonales que sean cuadrados. La respuesta es afirmativa y los tienes publicados en

http://oeis.org/A036354

Los números heptagonales equivalen a un número triangular de su mismo lado sumado con cuatro veces su anterior.

Lo podemos comprobar con la siguiente imagen



También es sencilla la justificación algebraica:

Es n(n+1))/2+4(n-1)n/2=n(5n-3)/2=Hp(n)

Es válida para heptagonales la descomposición **Hp(n)=n+5T(n-1)**, como suma de un lado y cinco triangulares de lado n-1

En efecto, n+5n(n-1)/2=n(5n-3)/2=Hp(n)

Recurrencias

Todos los poligonales siguen esta sencilla recurrencia **P(n,k)=P(n,k-1)+(k-1)(n-2)+1**. En el caso de los heptagonales hacemos n=5 y queda Hp(k)=Hp(k-1)+5(k-1)+1

Hp(k)=Hp(k-1)+5(k-1)+1=Hp(k-1)+5(k-1)+1

Así, nos queda esta tabla:

k	5k+1	Hp(k)
1	6	1
2	11	7
3	16	18
4	21	34
5	26	55
6	31	81
7	36	112
8	41	148

La primera columna contiene índices, la segunda los incrementos 5k+1 y la tercera las sumas, que se convierten en los heptagonales. Hemos destacado que 55=21+34

En OEIS proponen varias recurrencias. Comprobamos la de Jaume Oliver Lafont:

a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3), a(0) = 0, a(1) = 1, a(2) = 7.

Lo intentamos con nuestra herramienta de sucesiones recurrentes lineales http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Abrimos la hoja “Tercer orden” y rellenamos datos:

Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	0	x1	1	x2	7

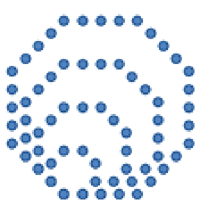
Los coeficientes son 3, -3 y 1, y como iniciales hemos elegido 0, 1, 7. Pulsamos el botón “Ver sucesión” y obtenemos los primeros heptagonales.

0
1
7
18
34
55
81
112
148
189
235
286

NÚMEROS OCTOGONALES

Definición e inserción con los poligonales en general

La formación de un número octogonal sigue el mismo procedimiento que en los casos anteriores. El simple estudio de esta imagen lo aclara:



Vemos en ella cuatro octógonos que se forman sobre un mismo vértice y sus dos lados adyacentes, con un número de unidades por lado creciente. Su índice es 5, porque lo forman cuatro polígonos más la unidad del principio que también se cuenta. Así que este esquema representa un poligonal de orden 8 con índice 5.

Par calcular su número de unidades partimos, como en toda la serie, de la fórmula general:

$$p_{k,l} = \frac{l(l \cdot (k-2) - (k-4))}{2}$$

Basta sustituir k por 8 para obtener la fórmula adecuada para los octogonales, que representaremos como Oc(n):

$$Oc_n = \frac{n(n(8-2) - (8-4))}{2} = 3n^2 - 2n$$

Así, el número de unidades del octogonal de la imagen de arriba será:

$$Oc_5 = 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 65$$

Con esta expresión es fácil crear una columna de octogonales en una hoja de cálculo:

N	OC(N)
1	1
2	8
3	21
4	40
5	65
6	96
7	133
8	176
9	225
10	280

Estos son los primeros octogonales:

1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936,… (http://oeis.org/A000567)

Descomposiciones diversas de un número octogonal

Los números octogonales participan de las descomposiciones generales de todos los poligonales. Las repasamos para este caso:

Suma de una progresión aritmética de diferencia 6 partiendo de 1

1+7=8

1+7+13=21

1+7+13+19=40

Basta ver en la imagen anterior que en cada capa nueva de octógonos el incremento es 6 unidades mayor que el anterior. Algebraicamente:

$$Oc_{n+1} - Oc_n = 3(n+1)^2 - 2(n+1) - 3n^2 + 2n$$
$$= 6n + 1$$

Un triángulo de lado k y 5 triángulos de lados k-1

Por ejemplo, 176 es el octogonal de orden 8 y equivale a un triangular de ese índice y cinco del anterior:

176=8*9/2+5*7*8/2=36+5*28=36+140=176

Gráficamente:

Algebraicamente: $n(n+1)/2+5n(n-1)/2 = (n^2+n+5n^2-5n)/2 = 3n^2-2n$

Un lado de longitud k y 6 triángulos de índice k-1

Una propiedad similar se demostró en tipos anteriores, por lo que omitimos su justificación. Es tan sencilla como la anterior.

Lo aplicamos al octogonal de índice 9, 225:

225=9+6*8*9/2=9+6*36=9+216=225

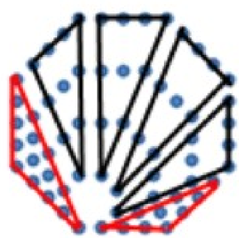
Un cuadrado y cuatro triángulos de una unidad menos

Esta descomposición es propia de los octogonales. Se deduce de su fórmula:

$$Oc_n = 3n^2 - 2n = n^2 + 2(n^2 - n) = n^2 + 4n(n-1)/2$$

Lo aplicamos al 133, que tiene lado 7:

$133=7^2+4*6*7/2=49+4*21=49+84=133$



En la imagen reconocemos los cuatro cuadrados (contornos en negro) y dos triangulares consecutivos (índices 4 y 5, los de contorno rojo) que adosados forman un cuadrado de lado 5.

Del desarrollo efectuado anteriormente también se deduce la siguiente descomposición:

Un octogonal equivale a la suma de un cuadrado con el doble de un oblongo

Los números oblongos son los del tipo N(N+1) o N(N-1). Así que también lo hemos deducido sin saberlo:

$$Oc_n = 3n^2 - 2n = n^2 + 2(n^2 - n) = n^2 + 2n(n-1)$$

El octogonal 280 se puede descomponer así:

$280=10^2+2*10*9=100+180=280$

Criterio para reconocer octogonales

Como en otros casos, para que N sea octogonal, ha de tener solución entera positiva la ecuación $N=3n^2-2n$, o $\mathbf{3n^2-2n-N=0}$

Resolviendo:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+3N}}{3}$$

Si la solución es entera positiva, N será octogonal. Lo podemos plasmar con la función:

```
Function ordenoctogonal(n)
Dim a, b

b = 0
a = 3 * n + 1 ‘Debe ser un cuadrado
If escuad(a) Then
b = (1 + Sqr(a)) / 3 ‘Solución de la ecuación
If b <> Int(b) Then b = 0 ‘Ha de ser entera
End If
ordenoctogonal = b
End Function
```

Con esta función podemos comprobar, por ejemplo, que en el rango 300-310 no existe ningún octogonal:

Rango	Es octogonal
300	0
301	0
302	0
303	0
304	0
305	0
306	0
307	0
308	0
309	0
310	0

Si hubiéramos buscado en el rango 400-410 habríamos encontrado que 408 es el octogonal número 12:

407	0
408	12
409	0

Algunas propiedades

Los números octogonales alternan la paridad .

Con índice par 2k:

$Oc(2k)=3(2k)^2-2(2k)=12k^2-4k$, que es claramente par.

Con impar 2k+1:

$Oc(2k+1)=3(2k+1)^2-2(2k+1)=12k^2+12k+3-4k-2=12k^2+12k-4k+1$, que es impar.

Esta alternancia se comprueba en su listado:

1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560,…

Una propiedad atractiva

Amarnath Murthy propone en http://oeis.org/A000567 la siguiente propiedad:

Oc(n) = (3n-2)(3n-1)(3n)/((3n-1) + (3n-2) + (3n))

En efecto: (3n-2)(3n-1)(3n)/(3*(3n-1)) = n(3n-2) = $3n^2-n$=Oc(n)

Traduciendo a lenguaje ordinario, los octogonales equivalen al producto de tres números naturales consecutivos adecuados dividido entre su suma. Por ejemplo, el 408 equivale a 34*35*36/(34+35+36).

Número de divisores

J. Lowell propone en esa misma página que el octogonal de índice **n** equivale al número de divisores de 24^(n-1). En realidad, no es necesario usar el número 24, pues valdría para esta propiedad cualquier número con dos divisores y exponentes 3 y 1 respectivamente. En efecto, en este caso la función TAU que cuenta divisores valdría:

TAU=(1+3(n-1))(1+n-1)=(3n-2)*n=3n^2-2n

En la página indicada de OEIS se presentan más propiedades, pero con las que hemos publicado ya basta por hoy.

OTROS POLIGONALES

Existen infinitos tipos de números poligonales. Hemos llegado hasta ahora hasta los octogonales, y a partir de ellos los temas se repiten demasiado. En estae çultimo estudio sobre ellos nos limitaremos a publicar su fórmula, algún enlace interesante y alguna propiedad. Para todos ellos es válida nuestra calculadora *Calcupol*

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados)

Números nonagonales

Son aquellos formados por polígonos de nueve lados adosados como es habitual en los poligonales. En la imagen figura el nonagonal de orden 4, que contiene 46 unidades.

Fórmula

Aplicamos la fórmula general de los poligonales para k=9 y llamamos N(n) al nonagonal de orden n:

$$N(n)=\frac{n(n*(9-2)-(9-4))}{2}=\frac{n(7n-5)}{2}$$

Siguiendo el objetivo de este estudio, solo destacaremos lo más importante.

Alguna propiedad

Un nonagonal se relaciona con los triangulares mediante esta equivalencia:

7*N(n)+3=T(7n-3)

Es fácil verlo

$$7N(n)+3=\frac{7n(7n-5)}{2}+3=\frac{49n^2-35n+6}{2}$$
$$=\frac{(7n-3)(7n-2)}{2}=T(7n-3)$$

Por ejemplo, 111 es el nonagonal de orden 6, y se cumple:

7*111+3=780=T(39)=T(7*6-3), luego es equivalente 7*111+3 al triangular número 39, es decir 7*6-3.

Criterio para reconocerlos

Según la propiedad anterior, 8*(7N+3)+1 ha de ser un cuadrado (criterio de los triangulares)

Luego debe serlo 56N+25. Si se cumple que esta expresión es cuadrada, y tiene raíz cuadrada R entera, N será nonagonal. Sustituyo N por su expresión y queda $56n(7n-5)/2+25=R^2$; $4*49n^2-5*4*7n+25=R^2$;

$(14n^2-5)^2=R^2$; luego $14n^2-5=R$, y queda

$$n = \frac{\sqrt{56N + 25} + 5}{14}$$

Un ejemplo:¿Es nonagonal 2301?

Formamos 56*2301+25 y resulta 128881, que es cuadrado perfecto de raíz 359. Usamos la fórmula anterior y obtenemos n=(359+5)/14=26. Como es entero, la respuesta es afirmativa, 2301 es el nonagonal de orden 26.

Listado

Los primeros nonagonales están publicados en http://oeis.org/A001106

0, 1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, 396, 474, 559, 651, 750, 856, 969, 1089, 1216, 1350, 1491, 1639, 1794, 1956, 2125, 2301, 2484, 2674, 2871, 3075, 3286, 3504, 3729, 3961, 4200, 4446, 4699, 4959, 5226, 5500, 5781, 6069,…

Como es costumbre en esa página, se incluye el 0.

Recurrencia

Sólo destacaremos una última propiedad, y es que se generan con una recurrencia lineal de tercer orden y coeficientes (3, -3, 1)

Volcamos la imagen de nuestra hoja http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Recurrencias lineales de tercer orden							
Coeficientes							
A	3		B	-3		C	1
Valores iniciales							
X0	0		x1	1		x2	9

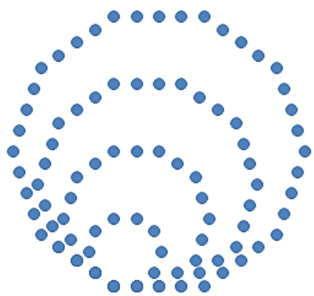
Hemos considerado también el cero como elemento inicial. Con el botón de "*Ver sucesión*" nos resulta el listado de nonagonales:

0
1
9
24
46
75
111
154
204
261
325
396
474
559
651
750

Con esto terminamos para dar paso a los decagonales.

Números decagonales

Un número decagonal cuenta decágonos anidados, al igual que ocurrió en los tipos anteriores con sus polígonos correspondientes.



En la imagen podemos distinguir cuatro decágonos anidados más el correspondiente a un punto, por lo que se tratará de un decagonal de orden 5, número que coincide con las unidades contenidas en cada lado.

Fórmula

Repetimos el trabajo efectuado en ocasiones anteriores, sin explicación ya. Nombraremos el número decagonal como D(n):

$$D(n) = \frac{n(n * (10-2) - (10-4))}{2} = \frac{n(8n-6)}{2}$$
$$= 4n^2 - 3n$$

Por ejemplo, el decagonal de la imagen anterior equivale a

D(5)=4*25-3*5=100-15=85

Si tienes paciencia, puedes contarlos.

Con esta fórmula podemos encontrar los primeros decagonales. Están publicados en

http://oeis.org/A001107

1 , 10 , 27 , 52 , 85 , 126 , 175 , 232, 297, 370, 451, 540, 637, 742, 855, 976, 1105, 1242, 1387, 1540,… (hemos omitido el 0)

La fórmula obtenida se puede interpretar de otra forma:

$D(n) = 4n^2-3n = n^2+3n(n-1)$, lo que se puede ver como la suma de un cuadrado con el triple de un número oblongo. No tiene mucho interés, salvo que, como los oblongos son todos pares y su triple también, los números decagonales tienen la misma paridad que su número de orden. Se puede comprobar en el listado.

Alguna propiedad

El decagonal de orden n equivale a la suma de **2n** enteros consecutivos a partir de **n-1** (Bruno Berselli, Jan 16 2018)

La demostración se basa en la fórmula de las progresiones aritméticas. En este caso el último término es 3n-2, luego queda:

$$S=\frac{(a_1+a_{2n})}{2}2n=(n-1+3n-2)n=4n^2-3n$$

Efectivamente, obtenemos un decagonal.

Lo comprobamos con el decagonal de orden 3, que es el 27. Deberemos sumar 6 enteros consecutivos a partir del 2: 2+3+4+5+6+7=27, que era lo esperado.

Suma de impares con resto 1 módulo 8

Esta propiedad es una adaptación de otra más general, pero su sencillez hace que merezca su inclusión. Por ejemplo, 85 es el decagonal número 5, y debe ser equivalente a la suma 1+9+17+25+33, y así es.

Un homenaje a Ramanujan

Neven Juric incluye este desarrollo en

http://oeis.org/A001107

1^3 + 3^3*(n-1)/(n+1) + 5^3*((n-1)*(n-2))/((n+1)*(n+2)) + 7^3*((n-1)*(n-2)*(n-3))/((n+1)*(n+2)*(n+3)) + ...

Merece la pena comprobarlo, por ejemplo para n=4, cuyo decagonal es 52:

1^3+3^3*3/5+5^3*(3*2)/(5*6)+7^3*(3*2*1)/(5*6*7)

Lo hemos calculado con Wiris (https://calcme.com/a):

$$1^3+3^3{*}3/5+5^3{*}(3{*}2)/(5{*}6)+7^3{*}(3{*}2{*}1)/(5{*}6{*}7) \quad = \quad 52$$

Valga como homenaje al genio.

Una recurrencia

Finalizamos con una recurrencia y nuestra herramienta para ellas, ya usada en los nonagonales:

*a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3) for n>2, a(0)=0, a(1)=1, a(2)=10. - Jaume Oliver Lafont, Dec 02 2008*

Aplicamos los datos a nuestra hoja de cálculo http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Coeficientes					
A	3	**B**	-3	**C**	1
Valores iniciales					
X0	0	**x1**	1	**x2**	10

Usamos el botón para ver sucesión y, en efecto, obtenemos los primeros decagonales (con el 0):

0
1
10
27
52
85
126
175
232
297
370
451
540

Números undecagonales

A los poligonales de 11 lados les prestaremos menos atención. Dejamos el estudio en pocos detalles:

Fórmula

Es fácil ver que es la siguiente:

$$U(n) = \frac{(9n^2 - 7n)}{2}$$

Con ella podemos construir una columna en hoja de cálculo con los primeros undecagonales:

n	U(n)
1	1
2	11
3	30
4	58
5	95
6	141
7	196
8	260
9	333

Están publicados en http://oeis.org/A051682

Números dodecagonales

Imagen

A partir de estos lados los polígonos se van redondeando, adquiriendo la apariencia de circunferencias:

Este es el dodecagonal de orden 4, que contiene 64 unidades. Ya es difícil contarlas porque unos lados se confunden con otros.

Fórmula

Es sencillo demostrar que es $D(n)=5n^2-4n$

Con esta fórmula generamos los primeros números dodecagonales:

1, 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, 460, 561, 672, 793, 924, 1065, 1216, 1377, 1548, 1729,… http://oeis.org/A051624

NÚMEROS POLIGONALES DOBLEMENTE CENTRADOS

El día 17/02/21 publiqué en Twitter (@connumeros) lo siguiente:

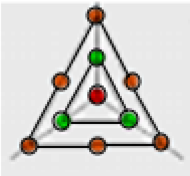
17221 es un número multipoligonal centrado, porque equivale a un poligonal de ese tipo de 20 lados con medida 42 y también a otro de 21 lados y medida 41. Es interesante comparar las fórmulas:

17221=(20×42^2-20×42+2)/2

17221=(21×41^2-21×41+2)/2

Esto, que parece una casualidad, me llamó la atención por el hecho de que 42 es el doble de 21, y eso podría suponer que este tipo de coincidencias fuera más frecuente de lo esperado inicialmente. En efecto, existen coincidencias de este tipo y otros parecidos con abundancia de casos concretos.

En primer lugar hay que recordar que los poligonales centrados se forman mediante figuras concéntricas, y no adosadas como los poligonales usuales.



En la imagen está representado el triangular centrado de orden 3, que equivale a 10 unidades. En efecto, según la fórmula

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

POLC(3,3)=(3*3^2-3*3+2)/2=(27-9+2)/2=10

(Ver mi publicación "Números y formas", http://www.hojamat.es/publicaciones/numform.pdf)

Podríamos usar esta fórmula para estudiar la casualidad que publiqué en Twitter:

POLC(20, 42)=(20×42^2-20×42+2)/2=17221

POLC(21,41)=(21×41^2-21×41+2)/2=17221

En general, usaremos las variables (n, k) para el primer poligonal y (n+1, k-1) para el segundo, olvidando por ahora si n es el doble de k+1 o no. Es decir, restringiremos la búsqueda al caso en el que los dos parámetros, número de lados n y orden k sean consecutivos con su par.

Podemos plantear esta igualdad:

$(n*k^2-n*k+2)/2=((n+1)*(k-1)^2-(n+1)*(k-1)+2)/2$

Simplificando y agrupando factores queda:

$n*(k^2-k)=(n+1)((k-1)\text{^}2-(k-1))$

O bien

nk(k-1)=(n+1)(k-1)(k-2)

nk=(n+1)(k-2)=nk+k-2n-2

k=2(n+1)

Luego el hecho de que 42 fuera el doble del 21 no era casual, sino obligado en este caso.

Así que todo poligonal centrado en el que n sea el doble de k-1 debe cumplir la condición de partida. Lo vemos:

k	n=k/2-1	POLC(n,k)	POLC(n+1,k-1)
8	3	85	85
10	4	181	181
12	5	331	331
14	6	547	547
16	7	841	841
18	8	1225	1225
20	9	1711	1711
22	10	2311	2311
24	11	3037	3037
26	12	3901	3901
28	13	4915	4915
42	20	17221	17221

En la tabla comenzamos con los números pares consecutivos y con su mitad menos 1 como orden. Aplicamos las fórmulas con parámetros consecutivos y comprobamos que da el mismo resultado. En la última fila se ha añadido el caso de 17221.

Esta tabla se podría prolongar y comprobaríamos que todos los poligonales centrados en los que el orden k sea par y el número de lados el adecuado (k/2-1) presentarán esta coincidencia.

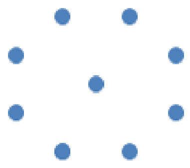
Ya tenemos resuelto el caso planteado, pero en este blog nos seguimos planteando siempre segundas preguntas, y, en este caso ¿existirán muchos números multipoligonales centrados además de los estudiados?

Caso general

Para descubrir a cuántos poligonales centrados equivale uno concreto recorreremos todos los posibles parámetros n y k tomando nota de las repeticiones.

Poligonales no triviales

Al igual que con los números poligonales usuales, todo número entero positivo es poligonal centrado, ya que es igual a la unidad más un polígono de dos unidades por lado. En la imagen vemos el número 9 representado por la unidad centrada con un octógono, es decir, con un lado menos y dos unidades por lado:



Muchos números sólo poseen esta representación como poligonales centrados. Les llamaremos poligonales centrados triviales. Los no triviales están publicados en http://oeis.org/A275340 y los primeros son (han incluido casos con n<3, como 4 y 7):

4, 7, 10, 11, 13, 16, 19, 21, 22, 25, 28, 29, 31, 34, 37, 40, 41, 43, 46, 49, 51, 52, 55,…

Esto acota nuestra búsqueda, porque el caso trivial se repite demasiado y no nos interesa.

Comenzaremos, como casi siempre en este blog, con una función de Excel, que nos devolverá las formas de ser poligonal centrado de cada número. Veremos que se excluye el caso trivial:

Function multipoligc$(n)

Dim i, j, m

Dim s$

s = "" ‘Variable que recibirá los resultados

m = 0 ‘Número de resultados

For i = 3 To n ‘Número de lados, comenzando en 3

For j = 3 To n ’ Unidades por lado, evitando el caso trivial de 2

If n = (i * j * (j - 1) + 2) / 2 Then m = m + 1: s = s + Str$(i) + Str$(j) + " # " ‘Existe una solución. Se incrementa el contador y se incorpora al conjunto obtenido

Next j

Next i

If s <> "" Then s = ajusta(m) + ":" + s ‘Se añade el contador al resultado

multipoligc = s

End Function

Si el resultado de esta función es la cadena vacía, es que no es "multipoligonal" y, en caso contrario, la cadena contiene el número de soluciones y sus parámetros.

Estos serían los primeros no triviales:

10	1: 3 3 #
13	1: 4 3 #
16	1: 5 3 #
19	2: 3 4 # 6 3 #
22	1: 7 3 #
25	2: 4 4 # 8 3 #
28	1: 9 3 #
31	3: 3 5 # 5 4 # 10 3 #
34	1: 11 3 #
37	2: 6 4 # 12 3 #
40	1: 13 3 #
41	1: 4 5 #
43	2: 7 4 # 14 3 #
46	2: 3 6 # 15 3 #
49	2: 8 4 # 16 3 #
51	1: 5 5 #
52	1: 17 3 #
55	2: 9 4 # 18 3 #
58	1: 19 3 #
61	4: 4 6 # 6 5 # 10 4 # 20 3 #
64	2: 3 7 # 21 3 #
67	2: 11 4 # 22 3 #
70	1: 23 3 #
71	1: 7 5 #
73	2: 12 4 # 24 3 #
76	2: 5 6 # 25 3 #

Los resultados se inician con el número de soluciones. Por ejemplo, el 43 posee dos formas de ser poligonal centrado, una de 7 lados y orden 4 y otra de 14 lados y orden 3.

En efecto, 43=1+7+14+21 y también 43=1+14+28, sumas de capas concéntricas (o múltiplos de 7 y 14)

Observamos que 61 posee cuatro representaciones. La razón es que 61-1=60 posee muchos divisores distintos.

El número con el que comenzamos este estudio, 17221, presenta 10 formas de ser poligonal centrado:

17221: 10: 20 42 # 21 41 # 82 21 # 164 15 # 615 8 # 820 7 # 1148 6 # 1722 5 # 2870 4 # 5740 3 #

Entre ellas, las que dieron lugar a estas búsquedas, 20 42 y 21 41

TRIANGULARES QUE SON OBLONGOS

Un número triangular puede ser doble de otro triangular, como ocurre con el 6=3*4/2, que es doble de 3=2*3/2. Como a los dobles de los triangulares les llamamos *oblongos*, de ahí el título de este apartado: triangulares que también son oblongos. Recordemos que la fórmula del triangular de orden **n** es **T(n)=n(n+1)/2** y la del oblongo **O(n)=n(n+1)**.

En nuestro almacén de funciones disponemos de estas dos, que nos pueden servir para una búsqueda:

Public function estriangular(n) as boolean
dim a

a = Int(sqr(8*n+1))
if a*a=8*n+1 then estriangular = true else estriangular = false
end function

Public Function esoblongo(n) As Boolean
If escuad(4 * n + 1) Then esoblongo = True Else esoblongo = False
End Function

No las explicamos porque su uso es muy frecuente en este blog y, si usas la búsqueda, te encontrarás con ellas en muchas cuestiones.

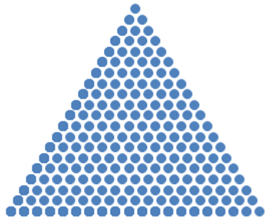
Si aplico estos dos criterios de búsqueda con Excel o Calc, rápidamente obtendré las primeras soluciones:

N	Orden Triang	Orden Oblong.
6	3	2
210	20	14
7140	119	84

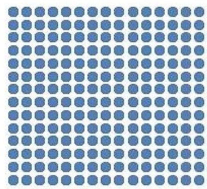
Por ejemplo, 210 es el triangular número 20 (210=20*21/2) y también el oblongo de orden 14, pues 210=14*15.

Gráficamente:

Triangular 210: 1+2+3+4+…+19+20



Oblongo 210=15*14



Para encontrar más, es conveniente pasar al lenguaje PARI y tener en cuenta que en los triangulares T, es un cuadrado la expresión 8T+1, y en los oblongos 4T+1. De esa forma resulta un código muy breve:

for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))

Con él conseguimos unos ejemplos más:

```
? para (i = 1, 10 ^ 8, si (es cuadrado (8 * i + 1) && es cuadrado (4 * i + 1), imprime (i)))
6
210
7140
242556
8239770
```

```
for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))
```

Puedes consultar los siguientes en http://oeis.org/A029549

0, 6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470, 372759573255306, 12662852473364940, 430164224521152660, 14612920781245825506, 496409142337836914550, 16863297918705209269200

Observamos que no hay muchos ejemplos, y que crecen rápidamente.

Estudio teórico

Al estudiar números poligonales, casi todas las situaciones terminan siendo previsibles, porque la búsqueda puede traducirse en un estudio teórico y en la resolución de alguna ecuación diofántica. En el caso que estudiamos se trataría de la ecuación de Pell, sobre la que disponemos de una herramienta con hoja de cálculo.

En primer lugar, planteamos que un triangular equivalga a un oblongo:

Comenzamos con $x(x+1)/2=y(y+1)$

Al desarrollar productos queda $x^2+x=2y^2+2y$

En estas cuestiones es frecuente completar cuadrados multiplicando por 4 y sumando algo, en este caso un 2: $4x^2+4x+2=2(4y^2+4y+1)$; $(2x+1)^2+1=2(2y+1)^2$

Si cambiamos de variable: $a=2x+1$; $b=2y+1$, queda $a^2-2b^2=-1$

Esta ecuación es de tipo Pell, con un coeficiente D=2 en el segundo cuadrado. La resolveremos con nuestra hoja PELL

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

El problema de esta ecuación es que se resuelve mejor si el segundo miembro es igual a 1. No entraremos en teorías, que ya publiqué en este blog:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/ecuacion-de-pell.html

En esta herramienta comienzas por escribir el valor de D, que en este caso es 2 y el del segundo miembro, que es -1:

Escribe el valor de D (entero y no cuadrado perfecto)	2
Escribe el valor del segundo miembro, +1 ó -1	-1

A continuación, la hoja aplica un algoritmo de fracciones continuas y sus reducidas y ofrece soluciones. En este caso se alternan las correspondientes a 1 con las de -1:

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119
1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Hemos tenido suerte, y obtenido soluciones para el valor -1, pero estas son soluciones para A y B, y después hay que pasarlas a X y a Y:

A	B	X=(A-1)/2	Y=(B-1)/2	Triangular	Oblongo
1	1	0	0	0	0
7	5	3	2	6	6
41	29	20	14	210	210
239	169	119	84	7140	7140
1393	985	696	492	242556	242556
8119	5741	4059	2870	8239770	8239770
47321	33461	23660	16730	279909630	279909630

En las dos últimas columnas aparecen las primeras soluciones de los triangulares que son idénticos a unos oblongos

Podemos seguir encontrando nuevos casos, porque la ecuación de Pell produce recurrencias, que recoge la herramienta nuestra que estamos utilizando:

1	1	+1 ó -1
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1

Estas soluciones se han obtenido mediante la recurrencias $x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$, $y_n=x_{n-1}+y_{n-1}$. Este tema lo puedes estudiar en la entrada enlazada.

Son las recurrencias en Pell, pero como se alternan las soluciones 1 y -1, hay que reiterar cada recurrencia, y queda:

$x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1}$

$y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$

A partir de la primera solución X=1, Y=1, que corresponde al triangular 0, podemos, con estas iteraciones, comprobar las dos primeras columnas de la tabla obtenida:

A	B
1	1
7	5
41	29
239	169
1393	985
8119	5741
47321	33461

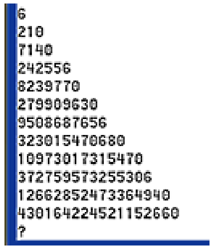
Se puede comprobar con facilidad: 7=3*1+4*1, 5=2*1+3*1, 41=3*7+4*5 y 29=2*7+3*5, y así con todos. A partir de los dos últimos valores A=47321 B=33461 se pueden construir los siguientes, y completar la tabla hasta el límite que se desee. No sería una búsqueda, sino una obtención rigurosa.

Obtención de un listado por recurrencia

Las ideas anteriores se pueden plasmar en este código PARI:

a=1;b=1;for(i=1, 12, a1=3*a+4*b;b1=2*a+3*b;a=a1;b=b1;c=(b-1)/2;print(c*(c+1)))

En él se someten A y B a la recurrencia y después se extrae de su valores un nuevo triangular oblongo. Este listado devuelve el compilador:



Lo importante es que se puede avanzar siempre y que, por tanto, existen infinitos triangulares oblongos.

Recurrencia

Si los valores de X e Y siguen una recurrencia lineal, los triangulares que dependen de ellos también seguirán una propia. Para no enredarnos en cálculos algebraicos, usaremos una ecuación del tipo T(n+1)=A*(T(n)+B*T(n-1)+C. Le daremos tres juegos de valores para obtener un sistema de ecuaciones que nos dará los valores de A, B y C. Es un método rápido.

Usaremos los valores 0, 6, 210, 7140 y 242556. Quedará (sustituimos A, B, C por X, Y, Z para la resolución automática):

210=6X+0Y+Z

7140=210X+6Y+Z

242556=7140X+210Y+Z

Se resuelve con WIRIS (https://calcme.com/a) :

$$\text{resolver}(210 = 6X + 0Y + Z, 7140 = 210X + 6Y + Z, 242556 = 7140X + 210Y + Z)$$

$$\{\{X = 34, Y = -1, Z = 6\}\}$$ Calc

Coincide con la publicada en OEIS:

*a(n+2) = 34*a(n + 1) - a(n) + 6. - Charlie Marion, Feb 11 2011*

Por ejemplo, 7140=34*210-6+6.

Hemos combinado búsqueda con teoría, que es la mejor forma de iniciar un tema.