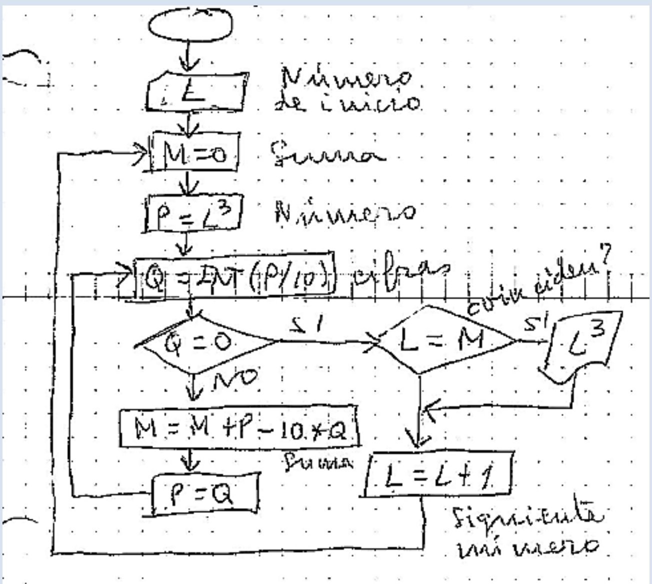
Números y hoja de cálculo XI



Curso 2018-19

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Esta publicación recoge el resumen de lo publicado en mi blog “Números y hoja de cálculo”

(http://hojaynumeros.blogspot.com/)

durante el curso 2018-19.

Al igual que anteriores ocasiones, contiene temas ocasionales y además dos ciclos temáticos. Es una forma de dar amenidad al blog, pero introduciendo desarrollos más extensos.

En este curso se han iniciado las simulaciones estadísticas con una herramienta de hoja de cálculo. Es un procedimiento que puede mejorar la comprensión de teorías y técnicas. Intentaremos completar la serie en el curso 2019-20.

El otro ciclo de entradas sobre cuadrados de cifras surgió de una cuestión muy sencilla, pero que se fue extendiendo por asociación de propiedades.

Cada año hay que pensar, dada la edad del autor, que el blog callará, pero no parece que vaya a ocurrir el siguiente curso, pues hay temas en preparación. Seguiremos.

CONTENIDO

PERMUTACIÓN DE CIFRAS AL SUMAR SU PRODUCTO

Nuestras colaboraciones en Twitter (@connumeros) nos sugieren otros estudios similares con más profundidad. En el día 9/5/18 publicamos que el número 9158, al sumarle el producto de sus cifras, se convertía en 9518, que está formado por las mismas cifras en distinto orden. Investigando un poco vimos que Derek Orr ya había publicado casos similares en OEIS en 2014

(Ver http://oeis.org/A247888 y http://oeis.org/A243102)

Los primeros casos son:

239+2*3*9=293
326+3*2*6=362
364+3*6*4=436

Al estar publicados, aquí sólo estudiaremos las técnicas de hoja de cálculo que nos pueden permitir reproducir resultados.

Función PRODUCIFRAS

Es evidente que la primera herramienta que necesitamos es la función PRODUCIFRAS, que devuelve el producto de las cifras de un número. Ese producto no debe ser cero, pues en ese caso el resultado sería el número original y no se produciría la permutación “no trivial” de las cifras. Esto supone que sólo nos resultarán números sin la cifra cero en las soluciones.

Sugerimos este listado para PRODUCIFRAS en VBA de Excel:

```
Public Function producifras(n)
Dim h, i, s, m

h = n  'la variable h recoge el valor de n
s = 1 ,'El producto comienza con un 1 en la variable s
While h > 0  'Mientras queden cifras…
i = Int(h / 10) 'Se queda con todas las cifras menos la última
m = h - i * 10 'La variable m recoge la última cifra
h = i 'La variable h tiene una cifra menos
s = s * m 'La última cifra se incorpora al producto
Wend
producifras = s
End Function
```

Necesitamos además una función que nos indique si dos números presentan el mismo conjunto de cifras y con la misma frecuencia, como 2344 y 4342. El Basic de Excel no incluye la función VECSORT, propia de otros lenguajes, que nos permite ordenar un vector de números. Con ella bastaría ordenar las cifras de uno y otro número y comparar. Así se soluciona el problema en PARI, como puedes ver en la página enlazada, http://oeis.org/A243102.

Lo solucionaremos para VBA de Excel creando las matrices **ca(10)** y **cb(10)**, que acumulen las frecuencias de las cifras de cada número **a** o **b**. Para gestionar bien el 0, anotaremos la cifra k en el elemento k+1. Así, un 7 se contaría en el elemento ca(8) o cb(8), y el conjunto {0,1,2…8,9) en los elementos ca(1), ca(2),… o bien cb(1), cb(2),…Finalmente, comparamos la matriz **ca** con la **cb** y si son idénticas es que los números contienen las mismas cifras con la misma frecuencia.

El listado sería este:

Public Function cifras_identicas(m, n) As Boolean

Dim i, j, s
Dim ci As Boolean
Dim nn$, mm$, c$
Dim ca(10), cb(10)

For i = 1 To 10: ca(i) = 0: cb(i) = 0: Next i ‘Vaciamos las matrices ca y cb

h = m ‘Extraemos las cifras de m y las volcamos en la matriz ca
While h > 0
i = Int(h / 10)
s = h - i * 10
h = i
ca(s + 1) = ca(s + 1) + 1
Wend

h = n ’Igualmente, las de n las volcamos en cb
While h > 0
i = Int(h / 10)
s = h - i * 10
h = i
cb(s + 1) = cb(s + 1) + 1
Wend
‘Ahora comparamos las dos matrices, y si existe una sola discrepancia, los números no tienen iguales cifras e iguales frecuencias

ci = True ‘Comenzamos suponiendo que las cifras son idénticas
For i = 1 To 9
If ca(i) <> cb(i) Then ci = False ‘Basta una discrepancia para que sea falso

```
Next i
cifras_identicas = ci
End Function
```

Ahora sólo nos queda recorrer un rango de números, por ejemplo del 1 al 3000 y quedarnos con aquellos en los que al sumarles el producto de las cifras (si es distinto de cero) se convierten en otros de las mismas cifras. Podría ser así:

```
For i=1 to 3000
a=producifras(i)
if a<>0 and cifras_identicas(i,i+a) then msgbox(i)
Next i
```

Aquí tienes el listado de los primeros números con esa propiedad, que coinciden con los publicados por Derek Orr

i	i+a
239	293
326	362
364	436
497	749
563	653
598	958
613	631
637	763
695	965
819	891
1239	1293
1326	1362
1364	1436
1497	1749
1563	1653
1598	1958
1613	1631

Como comprobación de la potencia del lenguaje PARI, se incluye el código usado por dicho autor, en el que usa la función **vecsort**:

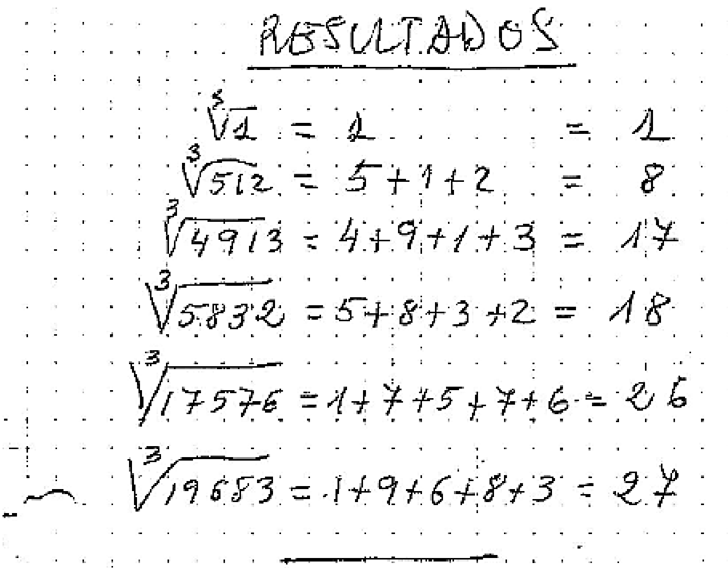
for(n=1, 10^5, d=digits(n); p=prod(i=1, #d, d[i]); v=digits(n+p); if(v!=d, v=vecsort(v); d=vecsort(d); if(v==d, print1(n, ", "))))

Nuestro objetivo ha sido el uso de una hoja de cálculo, que es más lenta, pero encaja en los objetivos de este blog.

NÚMERO IGUAL AL CUBO DE LA SUMA DE SUS CIFRAS

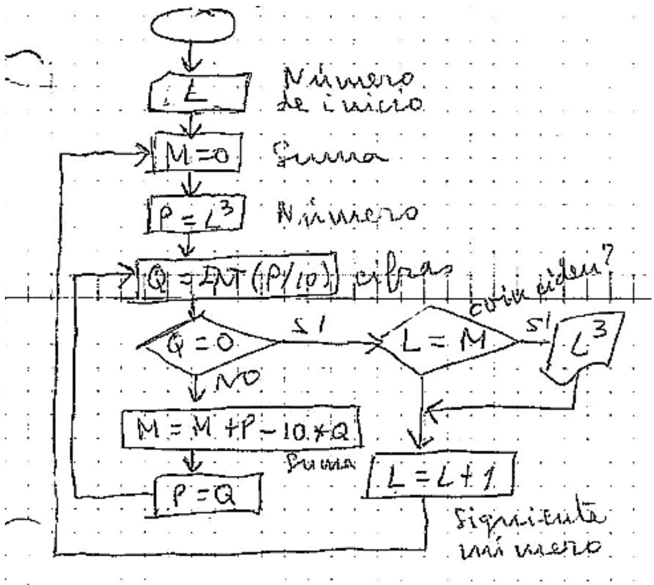
Hace unas semanas, ordenando mis papeles, encontré una hoja de hace casi cuarenta años en la que resumía un ejercicio para la calculadora programable Texas Instrument TI-58. Me impresionó recordar lo complicado que era su lenguaje de programación y las dificultades que tuvimos que soportar quienes iniciamos el uso de la Informática en las aulas. Por ello, he querido, a través de mi propia persona, rendir homenaje al profesorado que dio esos primeros pasos.

Resulta que lo que yo estaba buscando en esa hoja eran los números de Dudeney (no puedo recordar si en aquellos años los conocía por este nombre, creo que sí), aquellos que coinciden con el cubo de la suma de sus cifras, como $4913=(4+9+1+3)^3$. Yo lo expresaba de distinta forma, como vemos en mi manuscrito escaneado:

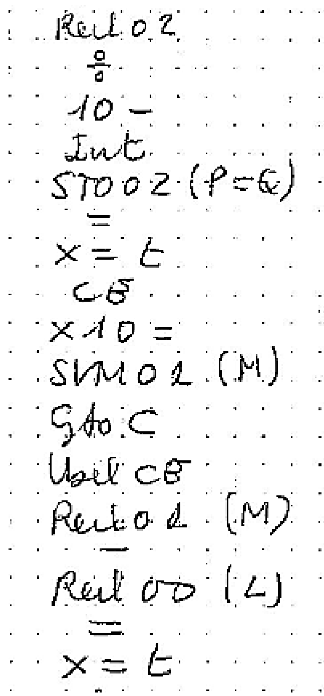


Se expresa en él la búsqueda de números cuya raíz cúbica coincide con la suma de sus cifras. Es preferible la formulación de más arriba, que evita el uso de la raíz, con toda la complicación de su expresión decimal.

En este manuscrito se incluía también un diagrama de flujo, que ahora, con la programación estructurada y la orientada a objetos, ha quedado como algo antiguo, pero que en su momento nos ayudó mucho a razonar. En él se evita el uso de la raíz cúbica.



La falta de costumbre me ha obligado a estudiar este esquema con detenimiento, lo que aumenta mi asombro al recordar la precariedad de medios de entonces. Y peor era su traducción al lenguaje propio de la TI-58, muy próximo al ensamblador. Véase una muestra:



Rcl 02
÷
10 −
Int
STO 02 (P=Q)
=
x = t
CB
×10 =
SUM 01 (M)
Gto C
Lbl CB
Rcl 01 (M)
−
Rcl 00 (L)
=
x = t

¿Cómo abordaríamos este problema pasadas cuatro décadas?

En el caso de este blog acudiríamos a Excel o Calc, con su lenguaje Basic, o al lenguaje PARI, que se nos ha hecho imprescindible.

Uso de la función SUMACIFRAS

En este curso hemos usado con frecuencia la suma de cifras de un número, pero para evitar la consulta a otros apartados, reproduzco de nuevo aquí la función usada. Se aplica a dos argumentos, el número **n** y el exponente **k** al que se elevan las cifras en la suma:

Public Function sumacifras(n, k)
Dim h, i, s, m

h = n ‘Copia el valor de **n**
s = 0 ‘Variable que contendrá la suma
While h > 9 ‘Se extraen cifras hasta que sólo quede una
i = Int(h / 10) ‘Dos líneas para extraer la siguiente cifra
m = h - i * 10
h = i ‘El valor de h va descendiendo al extraerle cifras
s = s + m ^ k ‘Se incrementa la suma
Wend
s = s + h ^ k ‘Última cifra
sumacifras = s
End Function

Aqu sólo usaremos exponente 1, por lo que las llamadas a la función serán del tipo ***sumacifras(n;1)***

Con esta función se puede organizar la búsqueda de los números de Dudeney:

For i = 1 To 100
b = i ^ 3
If sumacifras(b, 1) = i Then msgbox(b)
Next i

Con un código algo más preciso, se puede construir la tabla:

Raíz cúbica	Número	Suma de cifras
1	1	1
8	512	8
17	4913	17
18	5832	18
26	17576	26
27	19683	27

En ella quedan destacadas las igualdades entre la raíz cúbica y la suma de cifras. No hay más soluciones, como demostraremos más adelante.

En esta edición se incorpora el uso de nuestro Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) a la resolución de este problema. La razón es que se han ampliado sus prestaciones y que een este caso basta con una condición para encontrar números de Dudeney:

ES SUMACIF(N)^3=N

Nos devuelve el mismo resultado:

Solución
1
512
4913
5832
17576
19683

Estos números están publicados en blogs y páginas de Matemáticas, y en especial en http://oeis.org/A061209

A061209 Numbers which are the cubes of their digit sum.

0, 1, 512, 4913, 5832, 17576, 19683

Llama la atención la simplicidad del código en PARI:

(PARI) for(n=0, 999999, sumdigits(n)^3==n&&print1(n", ")) \\ M. F. Hasler, Apr 12 2015

¿Por qué interrumpimos la búsqueda en las seis cifras? Esto lo razoné hace cuarenta años, cuando me iniciaba en la programación con números enteros. Copio y adapto mi razonamiento:

En un número **n** de k cifras, la suma de las mismas S es como máximo 9+9+9+…+9 k veces, luego S<10k. Por otra parte, **n** estará comprendido entre $10^{(k-1)}$ y 10^k. Si el número tiene más de seis cifras tendremos que su raíz cúbica cumplirá R>=$10^{(k-1)/3}$ y (k-1)/3>2k. Será imposible que S=R, ya que S<10k<10^{2k}<R

La desigualdad central se ve mejor con logaritmos decimales:

10k<10^{2k} equivale a 1+log(k)<2k, en el que 1<k y log(k)<k, luego la desigualdad se cumple.

Esta es la razón por la que es inútil buscar más números de Dudeney.

Una vez resuelto el problema con la potencia tres, es sencillo extenderlo a las siguientes potencias. Lo dejamos como ejercicio. Por cierto, para cuadrados sólo existen dos soluciones, 1 y 81.

Las soluciones con cuartas potencias son

1	1
7	2401
22	234256
25	390625
28	614656
36	1679616

Las tienes publicadas en http://oeis.org/A061210, y se puede demostrar que no existen soluciones con más de ocho cifras.

Con quintas potencias son estas:

1	1
28	17210368
35	52521875
36	60466176
46	205962976

(http://oeis.org/A254000)

Caso general

En http://oeis.org/A023106 están publicados todos aquellos números que son potencia de la suma de sus cifras, sin especificar el exponente:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 81, 512, 2401, 4913, 5832, 17576, 19683, 234256, 390625, 614656, 1679616, 17210368, 34012224, 52521875, 60466176, 205962976, 612220032, 8303765625, 10460353203, 24794911296, 27512614111, 52523350144, 68719476736,…

Podemos reproducir esta lista, no considerando los de una cifra, que son casos particulares (exponente 1). Basta usar esta función, que para cada número te devuelve "NO" si no tiene la propiedad exigida, y la suma de cifras y el exponente si la tiene:

Public Function tipodudeney(n) As String
Dim p$
Dim i, j, s, t

p$ = "" 'Resultado, en principio vacío
For i = 2 To Sqr(n) 'Recorremos posibles raíces enésimas de **n**
s = Int(Log(n) / Log(i) + 0.000001) 'Evaluamos el posible exponente entero

If n = i ^ s Then ‘Si efectivamente, es raíz enésima, sumamos cifras

t = sumacifras(n, 1)

If t = i Then p$ = p$ + Str(i) + " " + Str(s) + " " ‘Si existe coincidencia, añadimos solución

End If

Next i

If p = "" Then p = "NO" ‘No existe solución

tipodudeney = p$ ‘Se publica raíz y exponente

End Function

Con un poco de paciencia, porque en Excel va lento (y en Calc más), logramos las primeras soluciones. Estas son las inferiores a 500000:

81	9	2
512	8	3
2401	7	4
4913	17	3
5832	18	3
17576	26	3
19683	27	3
234256	22	4
390625	25	4

Entre ellas figuran exponentes 2, 3 y 4, con soluciones ya conocidas.

Dejamos aquí el estudio. Ha sido interesante revisar uno de mis primeros trabajos en programación. Si encuentro otro, lo adaptaré también.

SUMA DE NÚMEROS OBLONGOS CONSECUTIVOS

En los cálculos sobre fechas que publicamos en Twitter (@connumeros) se dio la casualidad de que dos fechas muy cercanas se podían expresar ambas como extensas sumas de números oblongos consecutivos. Así:

Día 14/5/18

14518 es suma de siete productos de números consecutivos que a su vez son consecutivos (es decir, siete oblongos consecutivos):

14518=42×43+43×44+44×45+45×46+46×47+47×48+48×49

Día 19/5/18

Se nos vuelve a presentar la suma de productos de números consecutivos que a su vez son consecutivos (es decir, oblongos consecutivos), pero esta vez son nueve, nada menos:

19518=42×43+43×44+44×45+45×46+46×47+47×48+48×49+49×50+50×51

Esta cercanía nos animó a estudiar la propiedad con cierta extensión, para ver, como es costumbre en este blog, hasta dónde nos llevarían las exploraciones sobre un tema. Es fácil ver que, al ser los números oblongos doble de los triangulares, este problema esté muy relacionado con el de sumas de números triangulares consecutivos.

Sabemos que la suma de los n primeros números triangulares es n(n+1)(n+2)/6.

(Ver https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular#Suma_de_los_primeros_n%C3%BAmeros_triangulares)

De aquí se deduce que en el caso de los oblongos será n(n+1)(n+2)/3. Si en la suma no se comienza desde el primer oblongo (1*2) podremos restar esta expresión aplicada al último sumando con la correspondiente al anterior al primer sumando.

Esto nos lleva a una generación de soluciones en forma de tabla de doble entrada y otra mediante una función:

Soluciones obtenidas mediante una tabla de hoja de cálculo

En la siguiente tabla hemos situado valores de n(n+1)(n+2)/3 tanto en fila como en columna. Si restamos después unos de otros nos resultarán los números que se pueden formar mediante sumas de oblongos consecutivos. Aparecerán desordenados y repetidos. Nos valen también los de la segunda fila:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		2	**8**	**20**	**40**	**70**	**112**	**168**	**240**	**330**	**440**	**572**	**728**	**910**	**1120**	**1360**
1	**2**		6	18	38	68	110	166	238	328	438	570	726	908	1118	1358
2	**8**			12	32	62	104	160	232	322	432	564	720	902	1112	1352
3	**20**				20	50	92	148	220	310	420	552	708	890	1100	1340
4	**40**					30	72	128	200	290	400	532	688	870	1080	1320
5	**70**						42	98	170	260	370	502	658	840	1050	1290
6	**112**							56	128	218	328	460	616	798	1008	1248
7	**168**								72	162	272	404	560	742	952	1192
8	**240**									90	200	332	488	670	880	1120
9	**330**										110	242	398	580	790	1030
10	**440**											132	288	470	680	920
11	**572**												156	338	548	788
12	**728**													182	392	632
13	**910**														210	450
14	**1120**															240
15	**1360**															

Para obtener una lista ordenada es preferible una búsqueda algorítmica mediante una función. Lo vemos:

Búsqueda mediante una función

La suma entre n(n+1) y (n+k-1)(n+k), k sumandos, sería así:

n(n+1)+(n+1)(n+2)+…..(n+k-1)(n+k)=(n+k-1)(n+k)(n+k+1)/3-(n-1)n(n+1)/3

Hemos restado la suma de los n+k-1 primeros con la correspondiente a n-1.

Desarrollamos y queda:

$$S(n,n+k-1)=kn^2+k^2n+\frac{(k-1)k(k+1)}{3}=P$$

Por ejemplo,

23*24+24*25+25*26+26*27+27*28=S(23,27)=3260 equivale a

5*23^2+5^2*23+(5-1)*5*(5+1)/3=3260

Este desarrollo nos da una primera condición para que un número P pueda desarrollarse como suma de oblongos consecutivos. Proseguimos:

$$kn^2+k^2n+\frac{(k-1)k(k+1)}{3}=P$$

$$3kn^2+3k^2n+k(k^2-1)-3P=0$$

Despejamos n en función de P:

$$n=\frac{-3k^2+\sqrt{9k^4-12k(k(k^2-1)-3P)}}{6k}$$

El discriminante

$$D=12k^2-3k^4+36kP$$

ha de ser cuadrado perfecto. Esta es la primera condición para que P sea suma de oblongos. También el resultado para **n** ha de ser **entero positivo**.

Lo vemos para P=14518 y k=7, según lo publicado en Twitter:

D=12*7^2-3*7^4+36*7*14518=3651921=1911^2, luego se cumple que D es cuadrado perfecto. Sustituimos en la expresión de **n** y queda:

n=(-3*7^2+1911)/(6*7)=42, que coincide con el desarrollo publicado para 14518.

Por una casualidad, 19518 también inicia su suma de oblongos en 42:

P=18518, k=9

D=12*9^2-3*9^4+36*9*19518=6305121=2511^2

n=(-3*9^2+2511)/(6*9)=42

Este criterio nos puede servir para ver qué números se pueden descomponer en suma de oblongos consecutivos.

Tomamos el número **P** y probamos los criterios anteriores para los valores de **k** entre 1 y el máximo valor que cumpla k*(k^2-1)<3P, que es una cota fácil de deducir de las igualdades anteriores. Para cada **k** exigiremos que el discriminante sea cuadrado perfecto y calcularemos **n** para ver si es entero positivo.

Así encontraremos todos los números que sean suma de oblongos consecutivos:

2, 6, 8, 12, 18, 20, 30, 32, 38, 40, 42, 50, 56, 62, 68, 70, 72, 90, 92, 98, 104, 110, 112, 128, 132, 148, 156, 160, 162, 166, 168, 170, 182, 200, 210, 218, 220, 232, 238, 240, 242, 260, 272, 288, 290, 306, 310, 322, 328, 330,…

Para encontrarlos se puede usar esta función, que devuelve una cadena vacía si el número no se puede descomponer, o una cadena que contiene todos los valores de n y k para los que es suma de oblongos. Podría ser esta:

Function essumaob(n) As String
Dim e$
Dim k, p, q

e$ = "" ‘Comenzamos con una cadena vacía
k = 1
While k * (k ^ 2 - 1) <= 3 * n ‘Recorremos los valores posibles de k
p = 12 * k ^ 2 - 3 * k ^ 4 + 36 * k * n ‘Se calcula el discriminante
If escuad(p) Then ‘Si es cuadrado perfecto, se sigue el proceso
q = (Sqr(p) - 3 * k ^ 2) / 6 / k ‘Encontramos el valor de n inicial en la suma

‘Si n es entero positivo, se toma nota en la cadena

If q = Abs(Int(q)) and q>0 Then e$ = e$ + Str$(q) + ", " + Str$(k) + " "

End If

k = k + 1

Wend

essumaob = e

End Function

Esta función sólo se debe aplicar a números pares, que son los únicos que pueden coincidir con una suma de oblongos. Aquí tienes algunos:

N	ESSUMAOB
10	
12	3, 1
14	
16	
18	2, 2
20	4, 1 1, 3
22	
24	
26	
28	
30	5, 1
32	3, 2

Vemos que 12 presenta n=3, k=1, ya que 12=3*4. Existen dos soluciones para 20: n=4, k=1, pues 20=4*5, y también n=1, k=3, es decir, 20=1*2+2*3+3*4

Con esta función podemos analizar cualquier otro número. Aquí tenemos la solución para los ejemplo 14518, 19518:

N	ESSUMAOB
14518	42, 7
19518	42, 9

Se confirman las soluciones encontradas más arriba.

Si todas las soluciones las dividimos entre 2, resultarán los números que equivalen a suma de triangulares consecutivos. Los tienes publicados en http://oeis.org/A034706 con el añadido de un cero:

A034706 Numbers which are sums of consecutive triangular numbers.

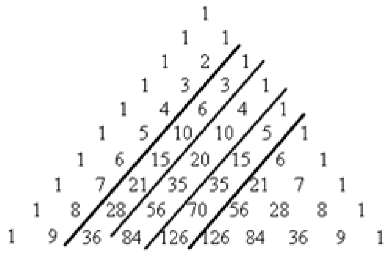
0, 1, 3, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 19, 20, 21, 25, 28, 31, 34, 35, 36, 45, 46, 49, 52, 55, 56, 64, 66, 74, 78, 80, 81, 83, 84, 85, 91, 100, 105, 109, 110, 116, 119, 120, 121, 130, 136, 144, 145, 153, 155, 161, 164, 165, 166, 169, 171, 185, 190, 196, 199, 200, 202, 210 (list; graph; refs; listen; history; text; internal

Relación con los números combinatorios

Es fácil ver que n(n+1)(n+2)/3 es el doble del número combinatorio C(n;3). Por tanto, las fórmulas que hemos usado en párrafos anteriores se pueden resumir en

$$SUMAOB(n,k) = 2\binom{n+k-1}{3} - 2\binom{n-1}{3}$$

Tomamos la diagonal del 3 en el triángulo de pascal y formamos todas las diferencias mutuas multiplicadas por 2:



Deberemos tomar los valores 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168,…dobles de la cuarta diagonal y restar "todos con todos". Llegaríamos a los mismos valores 2, 6, 8, 12, 18, 20, 30, 32, 38, 40, 42, 50,…

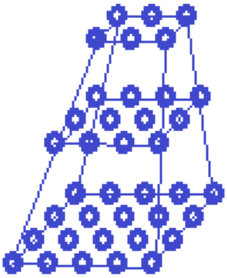
Relación con los números piramidales

La suma de triangulares consecutivos daba lugar a los números piramidales triangulares, u ortoedros

(Ver nuestra entrada ´

http://hojaynumeros.blogspot.com/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html)

Como en este caso no los sumamos todos, sino sólo a partir de un índice, en lugar de piramidales triangulares serían "troncopiramidales". Como también nuestros sumandos son el doble de un triangular, lo que obtenemos son "troncopiramidales de base oblonga". En la imagen tienes representado así el número 38=2*3+3*4+4*5



¿Qué números están repetidos en el listado?

Algunos números suma de oblongos aparecen repetidos en los listados.

Por ejemplo, 128=7*8+8*9=56+72 y
128=5*6+6*7+7*8=30+42+56

Para descubrir el número de soluciones que puede presentar un número P como suma de oblongos consecutivos basta modificar ESSUMAOB para que nos devuelva el número de soluciones en lugar de los valores de n y k. Sólo hay que cambiar alguna línea. Puede quedar así:

Function numsumaob(n)
Dim k, p, q, v

v = 0 ‘En lugar de una cadena devuelve el número de soluciones
k = 1
While k * (k ^ 2 - 1) <= 3 * n ‘Esta parte coincide con ESSUMAOB

p = 12 * k ^ 2 - 3 * k ^ 4 + 36 * k * n
If escuad(p) Then
q = (Sqr(p) - 3 * k ^ 2) / 6 / k
If q = Abs(Int(q)) And q > 0 Then v = v + 1 ‘Incrementa el contador de soluciones
End If
k = k + 1
Wend
numsumaob = v ‘Devuelve el número de soluciones
End Function

Con esta función podemos identificar rápidamente los primeros números que coinciden al menos dos veces con una suma de oblongos consecutivos:

Número P		Valores de n y k
20		4, 1 1, 3
72		8, 1 5, 2
110		10, 1 2, 5
128		7, 2 5, 3
200		9, 2 5, 4
240		15, 1 1, 8
272		16, 1 8, 3
328		7, 4 2, 8
420		20, 1 4, 7
552		23, 1 4, 8
722		18, 2 14, 3
870		29, 1 5, 9
920		16, 3 11, 5
1028		17, 3 14, 4
1120		9, 7 1, 14
1192		11, 6 8, 8
1352		25, 2 3, 13
1520		21, 3 7, 10

Por ejemplo, 328 presenta los valores n=7, k=4 y n=2, k=8, es decir:

328=7*8+8*9+9*10+10*11

$328=2*3+3*4+4*5+5*6+6*7+7*8+8*9+9*10$

El primer número que admite tres desarrollos es el 4360, con los valores n=31, k=4; n=27, k=5; n=9, k=15

Con más soluciones no existen ejemplos menores que 500000. Se podrían buscar con instrumentos más rápidos que las hojas de cálculo.

ACERCAMIENTO ENTRE POTENCIAS

Se sabe que sólo existen dos potencias que se diferencien en una unidad, que son $8=2^3$ y $9=3^2$. Sí pueden existir otros casos con diferencias mayores entre cuadrado y cubo. Vemos los primeros ejemplos:

Dif=2: $5^2+2=3^3$
Dif:=3: $2^2-3=1^3$
Dif=4: $2^2+4=2^3$; $11^2+4=5^3$
Dif=5 y 6: No hay ejemplos elementales
Dif=7: $1^2+7=2^3$; $181^2+7=32^3$
Dif=8: $3^2-8=1^3$; $4^2-8=2^3$; $312^2-8=46^3$
Dif=9: $6^2-9=3^3$; $15^2-9=6^3$; $253^2-9=40^3$
Dif=10: No hay ejemplos elementales.

Todos son casos particulares de la ecuación $x^2=y^3+k$, que necesita conocimientos profundas de Teoría de Números para su resolución. Por eso, aquí se usarán técnicas de búsqueda de soluciones en casos particulares.

Diferencias entre cuadrados y cubos

Podemos usar una función que mida el acercamiento a un cubo. Así, si se construye una lista de cuadrados, se podrán elegir aquellos que se diferencien de un cubo en un número dado. Así se han encontrado los ejemplos del párrafo anterior.

La función adecuada puede ser esta, que está diseñada para cualquier valor del exponente. Actúa sobre un número (que puede ser otra potencia), una diferencia dada y el exponente de la potencia. Al número le sumamos y restamos la diferencia dada, y con otra función, *espotentipo*, se averigua si es potencia perfecta o no.

Public function difepot(n,dife,ex1) as boolean
'para un número n ver si dista dife unidades de una potencia dada
‘Variables: **n** es el número, **dife**, la diferencia dada y **ex1** el exponente de la potencia.

dim a,b
dim es as boolean

es=false ‘Declaramos que la función es falsa
a=n+dife ‘Buscamos la potencia “por arriba”

If espotentipo(a,ex1) then 'Más abajo se explica esta función

es=true 'Si es potencia, la diferencia es válida.

else

b=n-dife 'Buscamos la potencia "por abajo y procedemos del mismo modo"

if b>0 then

If espotentipo(b,ex1) then es=true

end if

end if

difepot=es

end function

La función *espotentipo* busca si un número es potencia con un exponente dado. Actúa sobre el número y el exponente y devuelve VERDADERO o FALSO. Su código es el siguiente:

Public Function espotentipo(n, k) As Boolean

Dim m, i

Dim e As Boolean

m = Log(n) / k

m = Int(Exp(m)) 'Mediante logaritmos, encuentra un posible valor para la base de la potencia

e = False

For i = m - 1 To m + 1 'Por si existen errores de redondeo, prueba con m, m+1 y m-1

If i ^ k = n Then e = True ‘Si con uno de ellos se reconstruye la potencia, es válido

Next i

espotentipo = e

End Function

Con estas dos funciones, bastará crear una lista de cuadrados y ver si alguno de ellos se diferencia de un cubo (mayor o menor que él) en una cantidad dada. Por ejemplo, si construimos la lista de los veinte primeros cuadrados, veremos que al llegar al 14, su cuadrado se diferencia en 20 unidades del cubo de 6: $14^2+20=6^3$.

Potencia más cercana

Podemos encontrar, para un número cualquiera, la potencia de cierto exponente que esté más cercana, y evaluar su diferencia. Para ello podemos usar esta otra función:

Public function difepot2(n,ex1)

'busca la potencia ex1 más cercana y devuelve la diferencia

dim p,q

p=int(n^(1/ex1))

dife=abs(n-p^ex1)

q=abs(n-(p+1)^ex1) ‘Busca la potencia si es menor o mayor. Ambas valen.

if q<dife then dife=q 'Se queda con la diferencia menor.

difepot2=dife

end function

En esta tabla puedes observar las diferencias con el cubo más cercano. Se descubre que esos cubos son el 8 o el 27. Hasta el 17, el cubo más cercano es el 8, y a partir del 18, el 27.

10	2
11	3
12	4
13	5
14	6
15	7
16	8
17	9
18	9
19	8
20	7
21	6
22	5
23	4
24	3
25	2

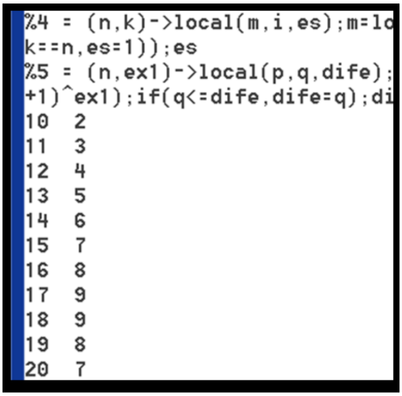
Versión en PARI

Estas funciones de Excel no tienen mucha potencia de cálculo. Por eso, en algún momento usaremos sus versiones en PARI, cuyo código es el siguiente:

espotentipo(n,k)=local(m,i,es);m=log(n)/k;m=truncate(exp(m));es=0;for(i=m-1,m+1,if(i^k==n,es=1));es

difepot(n,ex1)=local(p,q,dife);p=truncate(n^(1/ex1)); dife=abs(n-p^ex1);q=abs(n-(p+1)^ex1);if(q<=dife,dife=q);dife

Con el uso de ambas, hemos reproducido la tabla anterior entre el 10 y el 20:



```
%4 = (n,k)->local(m,i,es);m=lo
k==n,es=1));es
%5 = (n,ex1)->local(p,q,dife);
+1)^ex1);if(q<=dife,dife=q);di
10  2
11  3
12  4
13  5
14  6
15  7
16  8
17  9
18  9
19  8
20  7
```

Como ejemplo del uso de esta función, se inserta a continuación la tabla de diferencias entre cuadrado y cubo menores que 10 (y mayores que 0) para potencias interiores a 1000000:

n	n^2	m	m^3	Dife
2	4	1	1	3
4	16	2	8	8
5	25	3	27	2
6	36	3	27	9
11	121	5	125	4
15	225	6	216	9
181	32761	32	32768	7
253	64009	40	64000	9
312	97344	46	97336	8

Otras potencias

Diferencias mínimas entre cubo y cuarta potencia, dife<30:

n	n^3	m	m^4	Dife
2	8	1	1	7
3	27	2	16	11
4	64	3	81	17
37	50653	15	50625	28

Entre cuartas y quintas potencias, dife<50:

n	n^4	m	m^5	Dife
2	16	1	1	15
3	81	2	32	49
4	256	3	243	13

Así podemos seguir con otros casos. Terminamos con cubos y séptimas potencias:

n	n^3	m	m^7	Dife
2	8	1	1	7
3	27	1	1	26
5	125	2	128	3
13	2197	3	2187	10

Para terminar, agrupamos en una misma tabla diferencias menores que 10 en algunos casos. Hemos eliminado en la segunda potencia los valores 1 y 2, ya conocidos y triviales:

n	exp1	n^exp1	exp2	m	m^exp2	Dife
2	5	32	2	6	36	4
2	5	32	3	3	27	5
2	7	128	2	11	121	7
2	7	128	3	5	125	3
3	3	27	2	5	25	2
5	2	25	3	3	27	2
5	3	125	2	11	121	4
6	2	36	3	3	27	9
6	3	216	2	15	225	9
8	5	32768	2	181	32761	7
11	2	121	3	5	125	4
15	2	225	3	6	216	9
32	3	32768	2	181	32761	7
40	3	64000	2	253	64009	9
46	3	97336	2	312	97344	8
181	2	32761	3	32	32768	7
181	2	32761	5	8	32768	7
253	2	64009	3	40	64000	9
312	2	97344	3	46	97336	8

ESCALADAS DE CONWAY

El año pasado, 2017, se notificó que una conjetura de Conway, conocida como “escalada a un primo” había resultado ser falsa. Tienes la noticia, comentarios y contraejemplos en estos dos blogs:

http://francis.naukas.com/2017/06/14/contraejemplo-a-una-conjetura-de-conway-sobre-los-primos/

https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-la-escalada-hasta-un-primo/

Si los has leído (y si no, te bastará con mi explicación) entenderás que el proceso que propone Conway es el de descomponer el número en sus factores primos agrupados con exponentes y ordenados en orden creciente, como $144=2^4*3^2$, y después escribir seguidos y mezclados bases y exponentes de las potencias resultantes (2432).

Si un número primo está elevado a la unidad, esta se ignora y no se añade al nuevo número.

Si llamamos f(n) a esa función obtendremos:

F(144)=2432

La idea de Conway es la de ir reiterando esta función hasta llegar a un número primo p, en el que es evidente que f(p)=p, dando fin al proceso.

En el caso del 144:
F(144)=2432, f(2432)=2719, que es primo y con él termina el proceso.

Los dos blogs citados te darán más detalles. Nuestro objetivo ahora es conseguir el algoritmo con el Visual Basic de las hojas de cálculo. Es, por tanto un interés operativo más que matemático.

Función fconway(n)

A continuación se inserta el listado para hoja de cálculo de la función de Conway, pero antes hay que acudir a la función *ajusta(n)*, que elimina del número **n** los espacios en blanco que Excel o Calc añaden a los números naturales. Su código es el siguiente:

Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a) ‘Convierte el número en un string
While Left$(d$, 1) = " " ‘Mientras esté precedido de un espacio, este se elimina
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1) ‘Se corta el string desde su segundo carácter
Wend
ajusta$ = d$
End Function

Una vez contamos con esta función, se tratará ahora de descomponer el número en factores y concatenar factores primos y exponentes, eliminando aquellos iguales a la unidad. Puede ser así:

Public Function fconway(n)

Dim primo(20), expo(20), numomega *'Reservamos 20 memorias para primos y exponentes*
Dim s$
Dim f, a, e, i

a = n 'Recibimos n en la variable a
f = 2: i = 0: numomega = 0 'numomega es el número de primos
While f * f <= a 'Vamos extrayendo primos hasta la raíz cuadrada de a
e = 0
While a / f = Int(a / f)
e = e + 1 'Se toma nota del exponente, que va creciendo
a = a / f 'Se elimina el factor primo encontrado
Wend
If e > 0 Then 'Se incorpora el nuevo primo con su exponente a las memorias
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = f
expo(numomega) = e
End If
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 'Se avanza en posibles primos
Wend

If a > 1 Then ‘Se recoge el último primo
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = a
expo(numomega) = 1
End If
s$ = "" ‘Construimos la concatenación de primos y exponentes mayores que 1
For i = 1 To numomega
s$ = s$ + ajusta(primo(i)) ‘Se incorpora el primo
If expo(i) > 1 Then s$ = s$ + ajusta(expo(i)) ‘Se añade el exponente si es mayor que 1
Next i
fconway = Val(s$) ‘Convertimos el string en número
End Function

Si escribimos un número cualquiera (en los blogs citados no se recomienda usar el 20) en una celda de Excel y tenemos implementada la función anterior

(debes entrar en Programador – VisualBasic. Puedes consultar

http://hojamat.es/guias/descubrir/htm/macros.pdf),

podemos calcularla en la celda inferior, y después extenderla hacia abajo hasta que el resultado se repita o alcancemos una magnitud para la que Excel pasa a notación científica. Puedes ver algún ejemplo en la imagen:

12	144	542	34
223	2432	2271	217
223	2719	3757	731
	2719	13172	1743
		223789	3783
		317219	31397
		745317	31397
		3282813	
		322315859	
		2314013733	
		3,2299E+10	

En el primero, se alcanza el primo inmediatamente. En el segundo, al segundo intento, como ya vimos más arriba. El siguiente sobrepasa la capacidad de Excel, y el cuarto llega al primo en cinco pasos.

Podemos convertir este proceso en una función, pero si llegamos a los límites de Excel habrá que devolver un valor que lo indique, como podría ser el cero. Hemos diseñado esta:

Public Function finconway(n)
Dim a, b

a = 1: b = n ‘Usamos dos variables para cada iteración
While a <> b And a < 100000000000# And a > 0 ‘Límites de la iteración

a = b ‘Guardamos **b** en la variable **a**

b = fconway(b) ‘Avanzamos un paso en la iteración

If a >= 100000000000# Then a = 0 ‘Si el número es muy grande, lo hacemos cero

Wend

finconway = a

End Function

Con esta función se resuelve rápidamente el ascenso a primo. Aquí tienes los resultados desde 5 hasta 15, por ejemplo:

N	FINCONWAY(N)
5	5
6	23
7	7
8	23
9	2213
10	2213
11	11
12	223
13	13
14	311
15	1129

Esta función, aplicada al 542, devolvería un 0, ya que sobrepasa el límite de Excel para la escritura de todas las cifras. Este inconveniente se salva usando otro lenguaje. Hemos adaptado y completado la función en PARI incluida en la sucesión http://oeis.org/A080670 para definir la función *finconway* en ese lenguaje.

Su código es:

```
fconway(n)=if(n>1, my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~,
s=Str(s, f[i, 1], if(f[i, 2]>1, f[i, 2], ""))); eval(s), 1)
finconway(n)=my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b
=fconway(b));a
```

Con ella es fácil reproducir los resultados de la tabla anterior:

```
? \r ini.txt
%7 = (n)->if(
,2],"")));eva
%8 = (n)->my(
5
23
7
23
2213
2213
11
223
13
311
1129
?
```

Con el lenguaje PARI sí podemos encontrar el primo al que llegan las iteraciones con inicio en 542. Sería 131811420855589. En la imagen se puede observar cómo lo presenta PARI:

```
%1 = (n)->if(n>1,my(f=factor(n),s="");for(i=1,#f~,s=Str(s,f[i,1],i
,2],"")));eval(s),1)
%2 = (n)->my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b=fconway(b));a
131811420855589
?
```

La conjetura

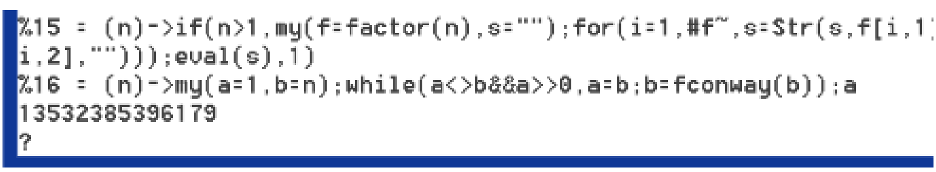
Si has leído las entradas de blog recomendadas más arriba, sabrás que existe un contraejemplo en el que la iteración no asciende a un primo, sino a un compuesto.

Se trata del valor
$13532385396179=13*53^2*3853*96179$

Con nuestra función en PARI se detecta su invariancia en la iteración:

```
fconway(n)=if(n>1, my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~,
s=Str(s, f[i, 1], if(f[i, 2]>1, f[i, 2], ""))); eval(s), 1)
finconway(n)=my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b
=fconway(b));a
print(finconway(13532385396179))
```

En la imagen observamos que el resultado es el mismo valor:



```
%15 = (n)->if(n>1,my(f=factor(n),s="");for(i=1,#f~,s=Str(s,f[i,1]
i,2],""));eval(s),1)
%16 = (n)->my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b=fconway(b));a
13532385396179
?
```

Con esto terminamos, ya que el único objetivo era usar medios elementales para reproducir los ascensos a primo de Conway y el contraejemplo descubierto recientemente.

EQUIVALENCIA ENTRE SUMAS DE CUBOS

Sabemos desde Fermat que un cubo no se puede descomponer en suma de otros dos cubos, pero sí es posible que una suma de cubos sea equivalente a otra distinta. El día 23/11/18, de forma indirecta, publiqué en Twitter (@connumeros) esta igualdad:

19^3+2^3=16^3+14^3+3^3

Como veremos más adelante, estas equivalencias son más frecuentes de lo que se podría esperar en una primera aproximación. Comenzaremos, pues, con este tipo, en el que una suma de dos cubos es equivalente a otra de tres.

Para ello diseñaremos una función, que más tarde modificaremos, que admita un número **n** y busque sumas equivalentes del tipo dado, en las que **n** sea la mayor base de cubo en la expresión. La salida de la función será en modo texto, para poder leer bien todas las soluciones.

Usaremos este algoritmo:

Public Function doblecubo$(n)
Dim p, q, r, k, a, b, u, v
Dim c$

If n < 2 Then doblecubo = "NO": Exit Function ‘El número debe ser mayor que 2
c$ = "": k = 0 ‘**c$** recoge las soluciones y **k** las cuenta
For p = 1 To n
a = n ^ 3 + p ^ 3 ‘Se forma la suma de dos añadiendo otro sumando
b = a ^ (1 / 3) ‘Tope de búsqueda
For q = 1 To b ‘Doble bucle de búsqueda
For r = 1 To q
u = a - q ^ 3 - r ^ 3
If u > 0 Then v = Round(u ^ (1 / 3)) Else v = 0
If v > 0 And a = q ^ 3 + r ^ 3 + v ^ 3 And v <= r And v <= q Then k = k + 1: c$ = c$ + Str$(n) + Str$(p) + "=" + Str$(q) + Str$(r) + Str$(v) + " "
‘Si se acepta el tercer cubo, se vuelca en **c$** y se incrementa el contador
Next r
Next q
Next p
If k = 0 Then doblecubo = "NO" Else doblecubo = c$
End Function

Con esta función formamos una tabla con los primeros números que admiten esta descomposición. La segunda columna representa los cinco cubos que intervienen.

Parece ser que sólo los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 y 13 no participan en equivalencias de este tipo:

7	7 1 = 6 4 4
8	8 7 = 9 5 1
9	9 7 = 10 4 2
11	11 7 = 9 9 6
14	14 2 = 12 8 8 14 10= 13 11 6 14 13= 17 3 1
15	15 3 = 12 11 7 15 5= 14 9 3
16	16 7 = 15 10 4 16 14= 18 10 2
17	17 7 = 13 12 11 17 11= 15 14 5
18	18 14 = 20 8 4 18 17= 20 14 1
19	19 2 = 16 14 3 19 5= 17 12 7
20	20 12 = 19 14 5

Por ejemplo, con base 16 obtenemos dos equivalencias:

16^3+7^3=15^3+10^3+4^3; 16^3+14^3=18^3+10^3+2^3

(Puedes escribir estas equivalencias en una celda de Excel (con signo + o = delante) y te devolverá VERDADERO)

Si sumamos los cubos del primer par, encontramos los valores comunes de las dos sumas, que están publicados en http://oeis.org/A085336

344, 855, 1072, 1674, 2752, 3402, 3500, 3744, 4439, 4941, 5256, 6244, 6840, 6867, 6984, 8576, 9288, 9604, 9728, 10261, 10656, 10745, 10773, 10989, 13357, 13392, 14167, 14364, 15093,…

Estudiando todos los números siguientes no parece que haya más excepciones. Incluso el número de soluciones aumenta con buen ritmo. Si modificamos la función para que devuelva

el número de soluciones, observamos una tendencia al crecimiento con muchas oscilaciones.

Su coeficiente R^2 es muy bajo, debido a las oscilaciones y el crecimiento tiene una pendiente media de 0,277.

Problema de Ramanujan

En la anécdota famosa del taxi

(ver https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan)

aparece el número 1729 como el menor que se expresa de dos formas distintas como suma de dos cubos: 1729=1^3+12^3=10^3+9^3

Cambiaremos nuestra función ***sumacubos*** para que cubra este caso. No es difícil. Basta con suprimir un bucle FOR-NEXT y añadir alguna desigualdad:

```
Public Function doblecubo$(n)
Dim p, q, k, a, b, u, v
Dim c$

If n < 2 Then doblecubo = "NO": Exit Function
c$ = "": k = 0
For p = 1 To n
a = n ^ 3 + p ^ 3
b = a ^ (1 / 3)
For q = 1 To b
u = a - q ^ 3
If u > 0 Then v = Round(u ^ (1 / 3)) Else v = 0
If v > 0 And a = q ^ 3 + v ^ 3 And v <> p And v <> n
And v <= q Then k = k + 1: c$ = c$ + Str$(n) + Str$(p)
+ "=" + Str$(q) + Str$(v) + "  "
Next q
Next p
If k = 0 Then doblecubo = "NO" Else doblecubo = c$
End Function
```

El siguiente listado está basado en la base del primer cubo, por lo que algunos resultados están duplicados:

10 10 9 = 12 1

12 12 1 = 10 9

15	15 9 = 16 2
16	16 2 = 15 9
20	20 18 = 24 2
24	24 2 = 20 18 24 19= 27 10
27	27 10 = 24 19
30	30 18 = 32 4 30 27= 36 3

Vemos que la primera equivalencia, 10,9 con 12, 1 es la de Ramanujan. Después le siguen

4104=15^3+9^3=16^3+2^3,
13832=20^3+18^3=24^3+2^3,…

La lista con los primeros valores la tienes en http://oeis.org/A001235

1729, 4104, 13832, 20683, 32832, 39312, 40033, 46683, 64232, 65728, 110656, 110808, 134379, 149389, 165464, 171288, 195841,…

¿Puede un cubo ser equivalente a una suma de tres?

La respuesta es afirmativa. Basta adaptar la función ***doblecubo(n)*** no añadiendo un sumado nuevo en las primeras líneas. Por ejemplo:

6^3=5^3+4^3+3^3

9^3=8^3+6^3+1^3, 12^3=10^3+8^3+6^3,
18^3=15^3+12^3+9^3,…

Tienes publicadas las bases del primer miembro de la igualdad en http://oeis.org/A023042

A023042 Numbers whose cube is the sum of three distinct nonnegative cubes.

6, 9, 12, 18, 19, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100, 102, 103, 105, 106, 108, 110, 111, 112, 113

Aunque en esa página figuran dos listados en PARI, por su semejanza con la función ***doblecubo***, se inserta el nuestro original y su resultado:

```
for(n=2,100,k=0;for(p=1,n,a=n^3;for(q=1,n,for(r=1,q,
u=a-q^3-
r^3;if(u>>0,v=round(u^(1/3)),v=0);if(v>>0&&a==q^3+
r^3+v^3,k+=1))));if(k>>0,print1(n,", ")))
```

```
6, 9, 12, 18, 19, 20, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48
, 50, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 63, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 78, 80, 81, 82
, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 97, 99, 100,
?
```

Un cubo suma de cuatro

Con nuestra herramienta Cartesius

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Podemos usar este planteamiento (en el listado se busca solución para el cubo de 7):

xtotal=4
xt=1..7
xt=suc(n^3)
suma=343
creciente

Se fija un total de cuatro cubos del 1 al 7 para que sumen el cubo de 7.

Así obtenemos la solución

7^3=6^3+5^3+1^3+1^3

Cambiando datos:

12^3=11^3+7^3+3^3+3^3
13^3=12^3+7^3+5^3+1^3
13^3=10^3+9^3+7^3+5^3…
Tienes publicadas las bases 7, 12, 13,… en http://oeis.org/A274334

A274334 Numbers n such that n^3 is the sum of 4 positive cubes.

7, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68,…

Soluciones con más sumandos

Podemos destacar

8^3=6^3+6^3+4^3+2^3+2^3
9^3=7^3+7^3+3^3+2^3+2^3
9^3=8^3+5^3+4^3+3^3+1^3
10^3=9^3+6^3+3^3+3^3+1^3
10^3=7^3+7^3+5^3+5^3+4^3
7^3=6^3+4^3+3^3+3^3+2^3+1^3
Y muchas más.

El estudio que hemos desarrollado explica, como ya sospechábamos, el hecho de que en nuestros cálculos diarios de Twitter aparezcan tantas combinaciones de cubos.

SUMA POR DIFERENCIA Y UNA UNIDAD

El día 29/10/18 publiqué en Twitter (@connumeros) la siguiente propiedad del número de fecha 291018:

291018 presenta dos productos muy parecidos basados en el número 540:
291018=(540-33)(540+34)
291018=(540-7)(540+6)

Es algo parecido a la diferencia de cuadrados (suma por diferencia) con el añadido de una unidad al

sumando o al sustraendo. Pueden darse los dos casos, que representaremos por
N=(m+p)(m-p+1) o bien N=(m+p)(m-p-1)
Al primer caso le llamaremos C(-1), porque el sustraendo es una unidad menor que p, y al segundo C(+1).

Es fácil ver que **N** ha de ser par, pues si **m** y **p** son ambos pares o impares, su suma **m+p** será par, y si son de distinta paridad, lo es el otro factor. Al multiplicar siempre habrá un factor par, lo que convierte también en par el producto.

A la inversa, todo número par mayor que 2 (para evitar el valor 0) presenta dos soluciones triviales:
Todo número par n>2 cumple esta descomposición haciendo m=n/2+1 y p=n/2-1, pues entonces n=(n/2+1+n/2-1)(n/2+1-(n/2-1)-1)=n*1

También cumple esta otra: m=n/2, p=n/2, con n=(n/2+n/2)(n/2-n/2+1)=n*1

A partir de ahora eliminaremos estos dos casos, y sólo consideraremos el caso m-p>2.

Con esa restricción, el primer número que admite esta descomposición es el 10, si hacemos m=4 y p=1
10=(4+1)(4-2)=5*2

Será pues un caso del tipo C(+1).

Para saber si un número se puede descomponer de esta forma podemos usar la siguiente función:

```
Public Function sumapordif$(n) ‘Es de tipo string para contener soluciones
Dim m, p, a, k
Dim c$
c$ = "": k = 0 ‘c$ contiene soluciones y k las cuenta
For m = 2 To n - 1
For p = 1 To m – 3 ‘Respetamos una diferencia mayor que 2
a = 0
If n = (m + p) * (m - p - 1) Then a = 1 ‘Probamos las dos fórmulas
If n = (m + p) * (m - p + 1) Then a = -1
If a <> 0 Then k = k + 1: c$ = c$ + Str$(m) + Str$(p) + "#" + Str$(a)
‘Si alguna de las dos se verifica, se incorpora la solución y se incrementa el contador
Next p
Next m
If k > 0 Then c$ = Str$(k) + c$ ‘Se incorpora el contador a la solución
sumapordif = c$
End Function
```

Con ella podemos descubrir los primeros números pares que admiten solución:

10	1 4 1# 1
14	1 5 2# 1
18	2 5 1# 1 6 3# 1
20	1 4 1#-1
22	1 7 4# 1
24	1 6 2# 1
26	1 8 5# 1
28	2 5 2#-1 6 1# 1
30	3 5 1#-1 7 3# 1 9 6# 1
34	1 10 7# 1
36	3 6 3#-1 7 2# 1 8 4# 1
38	1 11 8# 1
40	2 6 2#-1 7 1# 1
42	3 6 1#-1 9 5# 1 12 9# 1
44	2 7 4#-1 8 3# 1
46	1 13 10# 1
48	1 10 6# 1
50	3 7 3#-1 8 2# 1 14 11# 1
52	2 8 5#-1 9 4# 1
54	4 7 2#-1 8 1# 1 11 7# 1 15 12# 1
56	1 7 1#-1
58	1 16 13# 1
60	5 8 4#-1 9 3# 1 9 6#-1 10 5# 1 12 8# 1

Para cada número figura en primer lugar el número de soluciones. Así, 60 presenta 5 soluciones. Después figuran los valores de m y p seguidos de # y de +1 o -1 según el tipo de solución.

Vemos que la solución para el 54 es *4 7 2#-1 8 1# 1 11 7# 1 15 12# 1*. Eso significa que posee cuatro soluciones, una del tipo C(-1) y las otras del otro tipo. En efecto, se cumple:
54=(7+2)(7-1)=(8+1)(8-2)=(11+7)(11-8)=(15+12)(15-13)

Soluciones dobles con el mismo valor de m

Un problema más difícil es el de determinar si un número, como el 291018 admite dos (o más) soluciones con el mismo valor de **m**. El algoritmo puede resultar algo complejo, por lo que hay que estudiarlo con atención. Para los valores de **m** usamos el rango desde 2 hasta la mitad del número, ya que m+p ha de ser divisor propio de n (si desechamos los casos triviales). Después, para cada valor de m contamos los casos favorables y, si son mayores que 1, los reservamos en la variable c$ para construir la función. Este es el listado:

Public Function sumapordifdup$(n)
Dim p, h, v, b, m, n2

Dim c$

If n Mod 2 <> 0 Then sumapordifdup = "": Exit Function ‘Desechamos los impares
n2 = n / 2 ‘n/2 es el tope para **m**
v = 0 ‘Contador de soluciones si procede
m = 2 ‘Inicio de **m**
c$ = "" ‘Contenedor de la solución
While m < n2 And v = 0 ‘Avanza hasta la mitad de **n** si no hay solución
p = 1: h = 0: c$ = "" ‘Se inician los valores para **p**
While p < m - 1 And v = 0
b = m + p ‘Se construye la suma **m+p** para ver si es divisor
If n Mod b = 0 Then ‘Si es divisor, se prueban las dos posibilidades
If n = b * (m - p - 1) Or n = b * (m - p + 1) Then c$ = c$ + Str$(m) + Str$(p): h = h + 1
‘La línea anterior es fundamental, porque cuenta soluciones para un mismo valor de **m**
End If
p = p + 1
Wend
If h > 1 Then v = h ‘Si hay más de una solución, se para el proceso
m = m + 1
Wend

If v>0 then sumapordifdup$ = c$ else sumapordifdup$ = “”
End Function

Aplicada esta función a nuestro valor 291018 se obtiene:

291018
540 6 540 34

Coincide con el planteamiento inicial de este estudio.

Esta función no nos informa sobre si el tipo es C+1 o C-1, pero es que se ha querido simplificar. Después de obtenida la solución se puede efectuar una comprobación manual.

Con esta función podemos obtener los primeros números que satisfacen una relación doble como la solicitada:

N	Valores de m (duplicado) y p
36	7 2 7 5
60	9 3 9 6
70	9 1 9 5
90	11 4 11 7
126	12 2 12 6
168	15 6 15 9
180	14 1 14 6

198	15 3 15 7
216	17 7 17 10
270	19 8 19 11
286	18 4 18 8
300	18 2 18 7
330	21 9 21 12
378	20 1 20 7
390	21 5 21 9
396	23 10 23 13
450	22 3 22 8
468	25 11 25 14

Por ejemplo, 330=(21+9)(21-10)=(21+12)(21-11) Posee, pues, las dos soluciones pedidas para el valor 21, que era lo exigido.

Vemos que existen muchos ejemplos de una propiedad que parecía más restrictiva, pero este tipo de hechos no se descubren hasta no emprender el estudio.
Si descomponemos estos números en factores primos, observaremos que poseen más de cuatro divisores, lo que propicia que se dé la casualidad que estamos comentando:

Número	Factores primos con exponente	Número de divisores
36	[2,2][3,2]	9
60	[2,2][3,1][5,1]	12
70	[2,1][5,1][7,1]	8
90	[2,1][3,2][5,1]	12
126	[2,1][3,2][7,1]	12
168	[2,3][3,1][7,1]	16
180	[2,2][3,2][5,1]	18
198	[2,1][3,2][11,1]	12
216	[2,3][3,3]	16
270	[2,1][3,3][5,1]	16
286	[2,1][11,1][13,1]	8
300	[2,2][3,1][5,2]	18
330	[2,1][3,1][5,1][11,1]	16
378	[2,1][3,3][7,1]	16
390	[2,1][3,1][5,1][13,1]	16
396	[2,2][3,2][11,1]	18
450	[2,1][3,2][5,2]	18
468	[2,2][3,2][13,1]	18

SUMA DE FRACCIONES EGIPCIAS UNITARIAS

Recordamos que una fracción egipcia unitaria es aquella de numerador igual a la unidad. Una fracción egipcia en general es una suma de varias fracciones egipcias unitarias.

Puedes consultar

https://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n_egipcia

https://www.gaussianos.com/fraccion-egipcia/

Lo que nos interesa en este apartado es encontrar sumas o diferencias de dos fracciones de este tipo unitarias, cuyo resultado también sea unitario. En concreto, deseamos encontrar tres valores enteros positivos a, b y c tales que

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Simultáneamente estudiaremos su correspondiente expresión como diferencia:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}$$

Un ejemplo clásico es 1/2=1/3+1/6, o bien 1/3 = 1/2 - 1/6

Existe una solución trivial para cada valor de a y es que

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$$

Para evitar esa solución supondremos que b>c en

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(podría ser a la inversa, pero llamamos b al mayor de los dos).

Es evidente que 1/a es mayor que 1/b y 1/c, luego a<b y a<c. Como hemos supuesto que b es el mayor, tendremos la doble desigualdad **a<c<b**.

Búsqueda mediante un algoritmo

Siguiendo nuestra metodología habitual, buscaremos soluciones en primer lugar y después las analizaremos.

Si deseamos encontrarlas fácilmente, será bueno darle protagonismo a **b**, para que los valores de **a** y de **c** sean menores que él y se pueda acudir a un doble bucle, en el que **c** recorra (en principio) desde 2 hasta b-1 y **a** desde 1 hasta b-2. Por tanto **b>2**. Nos dedicaremos a la diferencia de fracciones, que sabemos que es equivalente a la cuestión de la suma.

Función sumaegipcias(b)

Hemos comenzado la búsqueda mediante la siguiente función que devuelve, para cada **b**, los valores posibles de **a** y **c**. Al ser varias las posibles soluciones, se devolverán en modo texto, para tener una visión global de todas ellas. La función que se presenta más abajo usa el hecho de que el valor de **b** despejado en la condición general es **a*c/(c-a)**.

Su listado es el siguiente:

```
Public Function sumaegipcias$(b)
Dim a, c, d
Dim s$

s$ = "" ‘Recibirá las soluciones en modo texto
If b < 3 Then sumaegipcias = "NO": Exit Function
For c = 2 To b – 1 ‘Bucles de búsqueda
For a = 1 To c - 1
d = a * c / (c - a) ‘Fracción que ha de ser entera
```

If d = Int(d) Then If d = b Then s$ = s$ + "1/" + Str$(a) + "-" + "1/" + Str$(c) + "   "
'Si es entera y coincide con b, se recoge en s$
Next a
Next c
If s$ = "" Then s$ = "NO" 'Si la cadena está vacía, es que no hay solución
sumaegipcias = s$
End Function

Aplicada esta función a un conjunto de números, por ejemplo desde el 6 hasta el 15, observamos que no todos admiten esta descomposición:

Valor de b	Soluciones
6	1/ 2-1/ 3
7	NO
8	NO
9	NO
10	NO
11	NO
12	1/ 3-1/ 4 1/ 4-1/ 6
13	NO
14	NO
15	1/ 6-1/ 10

Sólo la cumplen 6, 12 y 15. El 12 por partida doble. Puedes verificar estas igualdades (escritas como diferencias, pero podrían ser sumas):

1/6=1/2-1/3, 1/12=1/3-1/4, 1/12=1/4-1/6, 1/15=1/6-1/10

Aquí tienes los valores de **b** entre 1 y 100 que admiten la descomposición pedida:

6, 12, 15, 18, 20, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 75, 77, 78, 80, 84, 88, 90, 91, 96, 99, 100

Estos valores te pueden dar alguna pista. Reflexionamos sobre ellos:

Escribamos **c-a=k**, con lo que el cociente b=a*c/(c-a) se convierte en **b=(a+k)*a/k**. Así lo analizamos mejor.

*El denominador **b** no puede ser primo*

En efecto: Al ser entero (a+k)*a/k puede ocurrir:

Si **k** divide a **a**: entonces k1=a/k y b=k1(a+k). **b** tendría al menos dos factores (si k=a nos encontraríamos con la solución trivial de más arriba, en la que b=2a y que no consideramos)

Si **k** no divide a **a**: Llamemos d=MCD(a,k). Ese valor d no puede ser 1, pues entonces **k** sería primo con **a**, pero como tiene que dividir a a+k, dividiría a (a+k)-k=a, lo que llevaría a una contradicción.

Si d>1, se podría simplificar b=(a+k)*a/k entre d, resultando los cocientes a'=a/d y k'=k/d: b=(a+k)*a/k=(a+k)*a'/k', en el que k' es primo con a', luego, por el teorema de Euclides, k' ha de dividir a (a+k), luego divide a la diferencia a+k-k=a. Así que k' es un divisor de a. De esa forma b=a'*p, siendo a'>1 (ver el párrafo anterior) y p=(a+k)/k'>1, luego no puede ser b primo.

*La diferencia **c-a=k** es menor que **a***

De la igualdad **b=(a+k)*a/k** deducimos

b*k=(a+k)*a=c*a,

pero sabemos que b>a y b>c, luego la igualdad solo es posible si k<a<c.

Este largo razonamiento nos ha descubierto que, o bien *k divide a **a***, como es el caso en

1/12=1/4-1/6, en el que k=6-4=2 y divide a 4,

o bien *unos factores de k dividen a **a** y otros a **a+k***, ambos mayores que 1. Sería el caso

1/15=1/6-1/10, en el que k=10-6=4=2*2 y 2 divide a 6 y "el otro" 2 al 10, resultando b=6*10/4=15.

Más adelante daremos una caracterización de estos números.

Otro algoritmo

Esta sección la puedes dejar si no te interesa demasiado la construcción de algoritmos.

Otro planteamiento parte de que según lo anterior, b*k=c(c+k), hay que buscar un número tal que si lo multiplico por k, se pueda descomponer en dos factores con diferencia k. Por ejemplo, 12 multiplicado por 2 da 24 que tiene dos factores, 4*6 diferenciados en 2.

El valor de c sería una solución de la ecuación $c^2+kc-bk=0$, es decir:

$$c = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4bk}}{2}$$

De esa forma el valor de c no se obtiene por búsqueda, sino por cálculo. Lo implementamos como otra función

```
Public Function sumaegipcias2$(b)
Dim k, c
Dim s$

s$ = ""
If b < 3 Then sumaegipcias2 = "NO": Exit Function
For k = 1 To b - 1
c = (-k + Sqr(k ^ 2 + 4 * b * k)) / 2 'Calculamos el valor de c
If c = Int(c) And c + k < b Then s$ = s$ + "1/" + Str$(c) + "-" + "1/" + Str$(c + k) + "   "
Next k
If s$ = "" Then s$ = "NO"
sumaegipcias2 = s$
End Function
```

Comprobamos que son equivalentes:

	SUMAEGIPCIAS	SUMAEGIPCIAS2
6	1/ 2-1/ 3	1/ 2-1/ 3
12	1/ 3-1/ 4 1/ 4-1/ 6	1/ 3-1/ 4 1/ 4-1/ 6
15	1/ 6-1/ 10	1/ 6-1/ 10
18	1/ 6-1/ 9	1/ 6-1/ 9
20	1/ 4-1/ 5	1/ 4-1/ 5
24	1/ 6-1/ 8 1/ 8-1/ 12	1/ 6-1/ 8 1/ 8-1/ 12
28	1/ 12-1/ 21	1/ 12-1/ 21
30	1/ 5-1/ 6 1/ 10-1/ 15 1/ 12-1/ 20	1/ 5-1/ 6 1/ 10-1/ 15 1/ 12-1/ 20
35	1/ 10-1/ 14	1/ 10-1/ 14
36	1/ 9-1/ 12 1/ 12-1/ 18	1/ 9-1/ 12 1/ 12-1/ 18
40	1/ 8-1/ 10 1/ 15-1/ 24	1/ 8-1/ 10 1/ 15-1/ 24
42	1/ 6-1/ 7 1/ 14-1/ 21	1/ 6-1/ 7 1/ 14-1/ 21
45	1/ 18-1/ 30 1/ 20-1/ 36	1/ 18-1/ 30 1/ 20-1/ 36

Es más rápida de proceso que la anterior.

Otra definición de los números encontrados

El listado de los valores de **b** está publicado, pero con otra definición distinta

http://oeis.org/A005279

Numbers having divisors d,e with d < e < 2d.

6, 12, 15, 18, 20, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 75, 77, 78, 80, 84, 88, 90, 91, 96, 99, 100, 102, 104, 105, 108, 110, 112, 114, 117, 120, 126, 130, 132, 135, 138, 140, 143, 144, 150, 153, 154, 156, 160, 162, 165, 168, 170, 174, 175, 176

Según esto, las soluciones para nuestras diferencias de fracciones egipcias coinciden con aquellos números que poseen dos divisores a y b, en los que a<b<2a, es decir, que uno de ellos está comprendido entre el otro divisor y su doble. Si repasas el listado anterior, todos lo cumplen, e incluso algunos de ellos son producto de dos divisores de este tipo:

6=2*3, 35=5*7, 42=6*7, …

Entre ellos figuran los números oblongos, 6, 12, 20, 30, 42,…del tipo n(n+1), como puedes comprobar.

Demostramos esta equivalencia:

El contrarrecíproco es fácil de razonar. Si no existen estos pares de divisores, $a<b<2a$, cualquier expresión que construyamos similar a **b=(a+k)*a/k**, no podría garantizar que k es menor que a, como demostramos más arriba que era necesario.

Al revés, parto de que existen dos divisores de un número N tales que $a<b<2a$

Podemos suponer que son primos entre sí, pues, en caso contrario, dividimos entre su M.C.D. y seguirán siendo divisores y cumpliendo $a<b<2a$. Si son primos entre sí, su producto, que sería el M.C.M, no puede ser mayor que N (en ese caso el M.C.M. sería N). Así que a*b<=N.

Para mayor claridad, distinguimos dos casos:

N=a*b

Entonces bastará multiplicar ambos por k=b-a, con lo que tendremos N=a*b=a(a+k)=ak(ak+kk)/k^2, pero k^2 es la nueva diferencia, luego N tiene la forma deseada de a1(a1+k1)/k1

Por ejemplo, 77=7*11 multiplicamos por 4 y queda 1/77=1/28-1/44=(44-28)/(77*16)=16/(77*16)=1/77, y 1/77=1/28-1/44

70=10*7, diferencia 3, multiplico: 70=30*21/9, luego 1/70=1/21-1/30

N=m*a*b

En este caso el producto de a*b no iguala a N, En ese caso multiplicamos a y b por **mk**, resultando:

N=mamk(amk+mkk)/mkmk y mkk es la nueva diferencia. Simplificando N=amk(amk+mkk)/mkk, que es del tipo pedido:

Ejemplo: 66 contiene al 2 y al 3, con 2<3<2*2 y se cumple 66=11*2*3. Multiplicamos ambos por su diferencia 1 y por m=11, resultando 22 y 33 y queda 66=22(22+11)/11, es decir

1/66=1/22-1/33

84=2*6*7, con 6<7<2*6. El M.C.D(6,7)=1, k=1, m=2, luego multiplicamos por 2*1=2, y queda 12 y 14:

84=12*14/2, luego 1/84=1/12-1/14

También podíamos haber usado 4 y 7, con 4<7<2*4, k=3, m=3, 84=3*4*7, y multiplicamos ambos por 3*3=9, lo que nos llevaría a 1/84=1/36-1/63.

Hemos descubierto esta equivalencia bastante interesante, pues caracteriza cuándo un valor puede ser denominador en una diferencia de fracciones egipcias.

PRODUCTOS CÍCLICOS

En los cálculos sobre fechas que publico en Twitter (@connumeros), uso a menudo el desarrollo de números naturales mediante expresiones del tipo N=a*b+b*c+c*a, a las que llamaré *productos cíclicos*, dando por supuesto que solo se usarán tres números enteros positivos a, b y c. No se extenderá el estudio a más sumandos.

Por ejemplo, 16119=69*75+75*76+76*69.

Adelantaremos el hecho de que casi todos los números enteros admiten este tipo de representación y, en general, con muchas soluciones. Las excepciones las iremos viendo a lo largo del estudio.

Primer caso: 1<=c<=b<=a

Según acotemos los sumandos llegaremos a soluciones distintas. En primer lugar supondremos que 1<=c<=b<=a. Dado que los tres pueden alcanzar un valor mínimo de 1, no es difícil calcular la cota que tendría **a**:

Si es ab+bc+ca=N, entonces a=(N-cb)/(c+b), luego bc<N y como b>=c>=1, a<(N-bc)/2<=(N-1)/2, que sería el caso en el que b=c=1.
Podemos recorrer valores de a entre 1 y (N-1)/2, que sería el caso en el que **b** y **c** valieran 1. Y **b** puede también recorrer desde 1 hasta el valor actual de **a**. Con esos valores, la tercera constante c se calculará mediante c=(N-ab)/(a+b)

Estas consideraciones las podemos plasmar en una función que devuelva todas las descomposiciones de un número en productos cíclicos. Últimamente, para recoger varias soluciones acudimos a funciones tipo texto (string), acudiendo a la palabra "NO" cuando no exista descomposición en producto cíclico.
En este caso usamos la siguiente función:

```
Public Function prodciclo$(n)
Dim s$
Dim i, j, k

s$ = "" 'Variable que recogerá las soluciones
For i = 1 To (n - 1) / 2 'Recorrido de la variable a
j = 1
While j <= i And j < n / i 'Recorrido de b
```

k = (n - i * j) / (i + j) ‘Se calcula la tercera variable ***c***
If k = Int(k) And k <= j Then s$ = s$ + Str$(i) + Str$(j) + Str$(k) + " " ‘Se incorpora otra solución
‘k tiene que entero y menor o igual que ***j***
j = j + 1
Wend
Next i
If s$ <> "" Then prodciclo = s$ Else prodciclo = "NO"
End Function

Números que no admiten un producto cíclico

Al construir una búsqueda con esta función nos llevamos la sorpresa de que los números que **no admiten** producto cíclico solo son estos:

1, 2, 4, 6, 10, 13, 18, 22, 25, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462

Se puede aceptar la conjetura de que no hay más números con esa característica, ya que al ir aplicando la función a números grandes, aumenta mucho el número de soluciones. Por ejemplo, 21823 admite las soluciones para a, b y c:

89 87 80   111 83 65   113 75 71   117 76 67   119 89 54   121 91 51   125 123 26   137 99 35   139 139 9

145 63 61 146 95 33 147 97 31 153 104 23 159 97 25 163 100 21 167 72 41 169 99 19 175 123 1 185 63 41 186 67 37 187 61 42 193 91 15 197 89 15 200 93 11 213 83 14 217 75 19 219 67 25 221 71 21 225 58 31 226 45 43 231 65 23 232 67 21 233 51 35 247 87 1 287 65 9 293 51 20 297 71 2 309 35 32 325 33 31 340 63 1 343 36 25 351 61 1 357 40 19 401 38 15 409 37 15 411 41 11 453 28 19 463 25 21 485 23 21 495 43 1 501 35 8 583 28 9 674 17 15 681 31 1 703 30 1 833 15 11 947 21 2 991 21 1 1360 9 7 1363 15 1 1677 11 2 1983 10 1 2726 5 3 2727 7 1 5455 3 1

Vemos que en esta variante se admite el 1 como factor en el producto.

Con PARI también puedes detectar los números que no admiten estos productos cíclicos. Su código imita la función anterior, pero usa números como resultado en lugar de textos.

```
for(n=1,2000,a=0;for(i=1,(n-1)/2,j=1;while(j<=i&&i*j<n&&a==0,b=n-i*j;if(b%(i+j)==0,k=b/(i+j);if(k<=j,a=1));j+=1));if(a==0,print1(n,", ")))
```

Resultado

```
1, 2, 4, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462,
?
```

Estos números están publicados en OEIS (http://oeis.org/A025052)

A025052 Numbers not of form ab + bc + ca for 1<=a<=b<=c (probably the list is complete).
1, 2, 4, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462

According to Borwein and Choi, if the Generalized Riemann Hypothesis is true, then this sequence has no larger terms, otherwise there may be one term greater than 10^11.

T. D. Noe hace notar que en esta sucesión, n+1 es primo. Lo puedes comprobar fácilmente.

Segundo caso: 1<c<b<a

Si restringimos los valores a que sean desiguales y mayores que 1, tampoco es infinita la sucesión de números enteros positivos que no admiten esta representación. De hecho, 1848 es el mayor entre ellos.
Cambiando adecuadamente el código de la función, obtenemos su listado:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 37, 40, 42, 43, 45, 48, 57, 58, 60, 67, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 163, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848.
Se comprueba con PARI:

```
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 2
3, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 37, 40, 42, 43, 45, 48, 57, 58, 60, 67, 70, 7
2, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 163, 165, 168, 177, 190, 210, 2
32, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320,
1365, 1848,
```

Se puede usar un código similar al siguiente:

```
for(n=1,6000,a=0;for(i=2,(n-4)/4,j=2;while(j<i&&i*j<n&&a==0,b=n-i*j;if(b%(i+j)==0,k=b/(i+j);if(k<j,a=1));j+=1));if(a==0,print1(n,", ")))
```

Estos números están publicados como los *números idóneos* de Euler en http://oeis.org/A000926

La definición de Euler la tienes en

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_id%C3%B3neo

Sobrepasa nuestra capacidad teórica y los objetivos de este blog demostrar la equivalencia entre ambas definiciones. Si lees los comentarios de la sucesión A000926 de OEIS podrás recorrer las diversas definiciones equivalentes y la posibilidad de que la conjetura sea cierta y con un elemento más.

Casos de unicidad

Son también interesantes los casos en los que solo existe una solución. Para investigarlos habrá que cambiar nuestra función PRODCICLO para que cuente soluciones y sólo nos devuelva un resultado **cuando sea único**. No lo desarrollamos. Es fácil realizar este cambio. Se pueden plantear varios casos:

1<=a<=b<=c

Están publicados en http://oeis.org/A093670
La sucesión está acotada en el número 142 (conjetura).
3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 25, 28, 34, 37, 46, 82, 142
Reproducimos los productos cíclicos mediante nuestra función PRODCICLO

N	Producto único
3	1 1 1
5	2 1 1
7	3 1 1
8	2 2 1
9	4 1 1
12	2 2 2
13	6 1 1
14	4 2 1
16	3 2 2
25	12 1 1
28	6 2 2
34	6 4 1
37	18 1 1
46	8 3 2
82	10 4 3
142	12 10 1

0 < a < b < c

También están publicados los números que presentan un solo producto cíclico de ese tipo:

http://oeis.org/A093669

11, 14, 17, 19, 20, 27, 32, 34, 36, 43, 46, 49, 52, 64, 67, 73, 82, 97, 100, 142, 148, 163, 193

También aquí podemos conjeturar que 193 es una cota. El desarrollo de sus productos es el siguiente:

N	Producto único
11	3 2 1
14	4 2 1
17	5 2 1
19	4 3 1
20	6 2 1
27	6 3 1
32	10 2 1
34	6 4 1
36	6 3 2
43	10 3 1
46	8 3 2
49	9 4 1
52	6 5 2
64	12 4 1
67	16 3 1
73	9 5 2
82	10 4 3
97	13 6 1
100	11 6 2
142	12 10 1
148	17 6 2
163	40 3 1
193	15 7 4

1<a<b<c

Terminamos con el caso, bastante razonable, de que los factores sean mayores que la unidad y distintos. El listado es un poco largo, por lo que solo se insertan los últimos resultados (conjetura):

403	35 9 2
427	21 10 7
499	20 11 9
532	65 6 2
643	16 15 13
883	27 25 4

Es razonable pensar que 883 es el máximo valor posible en este caso, al menos entre números accesibles a una hoja de cálculo.

LOS CINCO CUBOS

En mis cálculos sobre fechas publicados en Twitter (@connumeros), a los que hacemos referencia frecuentemente en este blog, acudo casi a diario a la descomposición de un número de fecha en suma de cinco cubos o menos. El elegir el cinco se debe a limitaciones de nuestro equipo y de cualquier hoja de cálculo, que necesitan gran tiempo de cómputo para más sumandos, y al mismo atractivo de la descomposición, que queda bastante legible con pocos sumandos, pero que se complica de seis en adelante. Es, pues, una elección práctica con vistas a una publicación divulgativa.

Por ejemplo, la fecha 8/2/19 da lugar al número 8219, que se puede expresar con tres cubos:

$8219=3^3+16^3+16^3$

Al día siguiente ya se necesitan cuatro:

$9219=9^3+13^3+13^3+16^3$ o bien $9219=3^3+10^3+16^3+16^3$

Sin embargo, el día 10/2/19 necesita cinco, y el día 11 no se puede descomponer así. El número 11219 necesita más de cinco cubos.

Teorema de Waring

Esta cuestión que planteamos aquí es un caso particular del Teorema de Waring. Puedes leer sobre este teorema en

https://en.wikipedia.org/wiki/Waring%27s_problem

y
http://mathworld.wolfram.com/WaringsProblem.html

Según Waring, y en el caso que nos ocupa, el número mínimo para que todos los números puedan ser engendrados por una suma de cubos es 9, pero él lo conjeturó nada más. En las páginas enlazadas puedes ver que este número de potencias se expresa como g(n), con lo que la afirmación anterior se puede expresar como g(3)=9. En 1909, Wieferich lo demostró. Aquí solo nos interesará el caso de cinco cubos o menos.

Los cinco cubos

Nos planteamos pues, con qué frecuencia van apareciendo números en la serie natural que no se puedan expresar como suma de no más de cinco cubos. Para ello estudiaremos los casos en los que el número de cubos es 1, 2, 3, 4 o 5, y los números buscados serán el complemento de la unión de estos. El proceder así es debido a que los casos positivos (que sí admiten suma de cinco cubos o menos) tienen interés por ellos mismos, y que ya han sido publicados.

Los iremos presentando según el número de sumandos.

En todo el estudio usaremos a función POTE5(N;Z), en la que Z es el exponente, aunque aquí solo usaremos el valor 3. Esta función devuelve "NO" si el número no admite suma de cinco cubos o menos, o bien, en caso afirmativo, una cadena de texto que comience presentando el número mínimo de sumandos, seguido de las diversas soluciones si el resultado es afirmativo.

Por ejemplo, para 10219 devuelve:

POTE5(10219;3)= EC 5 &&& & 1 , 12 , 13 , 13 , 16 & 3 , 10 , 10 , 16 , 16 & 9 , 10 , 13 , 13 , 16

Los dos primeros caracteres los ignoramos por ahora, ya que serán usados por otras funciones. El primer 5 indica que el número mínimo de cubos es 5 y, a continuación se incorporan las tres soluciones del problema:

$10219=1^3+12^3+13^3+13^3+16^3$
$10219=3^3+10^3+10^3+16^3+16^3$
$10219=9^3+10^3+13^3+13^3+16^3$

Si aplicamos la función a 11219 nos devolverá “NO”.

El algoritmo es algo complejo, porque se usan cinco bucles, y, para capturar bien las soluciones, no se han simplificado mucho. En el ANEXO del final del tema tienes la codificación en Visual Basic de Excel.

Vemos los casos particulares:

Un cubo

Es el problema trivial. Los números serán los cubos perfectos, 1, 8, 27, 64,…Los tienes publicados en http://oeis.org/A000578 y no hay más que decir.

Dos cubos

Si establecemos una búsqueda con nuestra función POTE5, obtendremos el siguiente listado:

2	BA 2 &&& & 1 , 1
9	BA 2 &&& & 1 , 2
16	BA 2 &&& & 2 , 2
28	BA 2 &&& & 1 , 3
35	BA 2 &&& & 2 , 3
54	BA 2 &&& & 3 , 3
65	BA 2 &&& & 1 , 4
72	BA 2 &&& & 2 , 4
91	BA 2 &&& & 3 , 4
126	BB 2 &&& & 1 , 5 & 2 , 3 , 3 , 4
128	BB 2 &&& & 1 , 1 , 1 , 5 & 4 , 4
133	BA 2 &&& & 2 , 5
152	BB 2 &&& & 2 , 2 , 2 , 4 , 4 & 3 , 5
189	BA 2 &&& & 4 , 5
217	BB 2 &&& & 1 , 3 , 4 , 5 & 1 , 6
224	BB 2 &&& & 2 , 3 , 4 , 5 & 2 , 6
243	BB 2 &&& & 3 , 3 , 4 , 5 & 3 , 6

Ignora los dos caracteres en mayúscula (El primero es el número de cubos, que aquí siempre será B, y el segundo el número de soluciones, que ves es A para una solución y B para dos)

Junto a cada solución se presentan las bases de la suma. Por ejemplo, 91=3^3+4^3. Observa que algunos también presentan soluciones más complejas con cuatro o cinco cubos.

Si recordáis la anécdota de la matrícula del taxi de Ramanujan (https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan), sabréis que el primer número que presenta dos soluciones es 1729.

POTE5(1729;3)="BD 2 &&& & 1 , 3 , 3 , 7 , 11 & 1 , 6 , 8 , 10 & 1 , 12 & 9 , 10"

Nuestra función afirma que el mínimo de cubos es 2 y devuelve cuatro soluciones, de las que las dos últimas se corresponden con la afirmación de Ramanujan:

$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$

Los primeros números con esta propiedad están publicados en http://oeis.org/A003325 y vemos que coinciden con nuestra tabla.

A003325 Numbers that are the sum of 2 positive cubes.
2, 9, 16, 28, 35, 54, 65, 72, 91, 126, 128, 133, 152, 189, 217, 224, 243, 250, 280, 341, 344, 351, 370, 407, 432, 468, 513, 520, 539, 559, 576, 637, 686, 728, 730, 737, 756, 793, 854, 855, 945, 1001, 1008, 1024, 1027, 1064, 1072, 1125, 1216, 1241, 1332, 1339,

Se puede destacar en esta publicación el comentario de Zak Seidov, en el sentido de que si **n** pertenece a la sucesión, también pertenecerán los múltiplos de n del tipo $\mathbf{n*m^3}$ (m >= 2). Esto garantiza que la sucesión es infinita.

Tres cubos

Procedemos de la misma forma que en el caso de dos cubos:

3	CA 3 &&& & 1 , 1 , 1	
10	CA 3 &&& & 1 , 1 , 2	
17	CA 3 &&& & 1 , 2 , 2	
24	CA 3 &&& & 2 , 2 , 2	
29	CA 3 &&& & 1 , 1 , 3	
36	CA 3 &&& & 1 , 2 , 3	
43	CA 3 &&& & 2 , 2 , 3	
55	CA 3 &&& & 1 , 3 , 3	
62	CA 3 &&& & 2 , 3 , 3	
66	CA 3 &&& & 1 , 1 , 4	
73	CA 3 &&& & 1 , 2 , 4	
80	CA 3 &&& & 2 , 2 , 4	
81	CB 3 &&& & 1 , 2 , 2 , 4 & 3 , 3 , 3	
92	CA 3 &&& & 1 , 3 , 4	
99	CA 3 &&& & 2 , 3 , 4	
118	CA 3 &&& & 3 , 3 , 4	
127	CB 3 &&& & 1 , 1 , 5 & 1 , 2 , 3 , 3 , 4	
129	CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 5 & 1 , 4 , 4	
134	CB 3 &&& & 1 , 2 , 5 & 2 , 2 , 3 , 3 , 4	
136	CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 5 & 2 , 4 , 4	
141	CA 3 &&& & 2 , 2 , 5	

Algunos números presentan dos soluciones, en las que solo una está formada por tres cubos. Hay que seguir hasta el 251, que sí presenta dos soluciones de ese tipo:

$251 = 1^3+5^3+5^3 = 2^3+3^3+6^3$

Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A003072

A003072 Numbers that are the sum of 3 positive cubes.
3, 10, 17, 24, 29, 36, 43, 55, 62, 66, 73, 80, 81, 92, 99, 118, 127, 129, 134, 136, 141, 153, 155, 160, 179, 190, 192, 197, 216, 218, 225, 232, 244, 251, 253, 258, 270, 277, 281, 288, 307, 314, 342, 344, 345, 349, 352, 359, 368, 371, 375, 378, 397, 405, 408, 415, 433, 434

También en esta se puede afirmar que todo elemento multiplicado por un cubo sigue perteneciendo, y que por tanto la sucesión es infinita.

Cuatro cubos

Abreviamos. Este es el listado obtenido mediante nuestra función POTE5:

4	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 1
11	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 2
18	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2
25	DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2
30	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 3
32	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 2
37	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 3
44	DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 3
51	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 3
56	DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 3
63	DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 3
67	DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 4
70	DA 4 &&& & 2 , 2 , 3 , 3
74	DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 4
82	DB 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 4 & 1 , 3 , 3 , 3
88	DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 4
89	DB 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 4 & 2 , 3 , 3 , 3
93	DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 4
100	DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 4

Aquí también aparecen soluciones dobles en 82 y 89.

Están publicados en http://oeis.org/A003327

En este caso se ha conjeturado que todo número mayor que 7373170279850 pertenece a la sucesión. Puedes consultar
https://www.ams.org/journals/mcom/2000-69-229/S0025-5718-99-01116-3/

Cinco cubos

Llegamos al número de cubos que nos interesa. También es fácil encontrar los números que admiten una descomposición en cinco cubos:

5	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 1
12	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 2
19	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 2
26	EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 2
31	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 3
33	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 2
38	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 3
40	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 2
45	EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 3
52	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 3
57	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 3 , 3
59	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 3
68	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 4
71	EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 3 , 3
75	EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 4
78	EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 3 , 3
83	EA 5 &&& & 1 , 1 , 3 , 3 , 3
90	EA 5 &&& & 1 , 2 , 3 , 3 , 3

Observamos que son frecuentes. El primero en presentar dos soluciones es 157, pues

$157 = 1^3+1^3+3^3+4^3+4^3 = 2^3+2^3+2^3+2^3+5^3$

Están publicados en http://oeis.org/A003328

Números que no admiten descomposición en suma de cubos

Estos son los números que más nos interesan, aquellos que no admiten ninguna forma de descomposición en suma de cubos desde 1 hasta 5. Alguno de ellos necesitará hasta 9 cubos, según el teorema de Waring.

Para encontrarlos basta imponer la condición de que POTE5(N;3)=”NO”.

Los primeros son estos:

6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 34, 39, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 58, 60, 61, 69, 76, 77, 79, 84, 85, 86, 87, 95, 98

También se han publicado. Los tienes en http://oeis.org/A069136

Se puede conjeturar que esta sucesión es finita.

Este listado presenta los menores de 100, y son 32. Es de esperar que en otro rango de 100 aparezcan menos. Por ejemplo, de 1000 a 1100 son

1013, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1039, 1049, 1050, 1058, 1068, 1076, 1084, 1085, 1095.
Son solo 15.

Desde 10000 a 10100 aparecen siete: 10003, 10004, 10013, 10039, 10049, 10066, 10094.

Así podríamos seguir. Se puede conjeturar que terminarán desapareciendo en rangos mayores.

Estadísticas con los rangos de fechas

Las fechas que uso en Twitter pertenecen al rango aproximado de (1100,320000). Con una hoja de cálculo y la complejidad de la función POTE5 es desaconsejable estudiar completo este intervalo. Por eso, usaremos distintas estrategias para estudiarlo.

A) Frecuencia de los números que no admiten ser expresados como suma de cubos del 1 al 5:

Recorreremos varios intervalos de longitud 10000 hasta ver que los resultados llegan a un cierto estancamiento. Al llegar a 50000 ya se ve que los porcentajes no llegan al 5%

Intervalo	Frecuencia del NO	Porcentaje
1-10000	1463	15%
10001-20000	620	6%
20001-30000	432	4%
30001-40000	274	3%
40001-50000	226	2%

Hay que dejar claro que estos casos sí pueden pertenecer a números que necesiten seis o más cubos. Estamos tratando de los que no admiten cinco cubos o menos. Se percibe con claridad la disminución de los porcentajes, por lo que podemos confiar en que gran número de fechas de cada año admitan "los cinco cubos", o menos. Con esta herramienta que hemos creado se detectan con más facilidad, por lo que incrementarán estos desarrollos en nuestros cálculos diarios en Twitter (@connumeros).

B) Tabla de doble entrada con resultados para 2, 3, 4 y 5 cubos

Hemos dividido, de forma aproximada, los rangos de fechas en distintos intervalos. En cada uno de ellos se han estudiado 51 números consecutivos, para tener una idea de cómo se pueden distribuir en la totalidad, dato que está fuera del alcance de nuestra hoja de cálculo.

Se ha llegado a esta tabla de doble entrada:

	Número de cubos				
Intervalos	2	3	4	5	Total
0-40000	1	8	23	16	48
40000-80000	1	7	28	14	50
80000-120000	0	6	23	22	51
120000-160000	0	4	30	17	51
160000-200000	0	6	31	14	51
200000-240000	0	3	29	18	50
240000-280000	0	5	27	19	51
280000-320000	0	5	32	14	51
	2	44	223	134	

Los totales no valen siempre 51 porque faltan casos. Sólo hemos reflejado los de 2 a 5. La sorpresa en ellos, aunque no hay que darlo por cierto, es que parece haber más números con un mínimo de cuatro cubos que los que necesitan cinco. En los casos 2 y 3 es normal que presenten frecuencias bajas.

C) Recorrido aleatorio

Con la función RND (equivalente a ALEATORIO) hemos creado una columna de 200 números al azar dentro del rango de fechas. Los resultados confirman lo descubierto en el anterior procedimiento, y es que el caso más frecuente es el de cuatro cubos, seguido del de 3, siendo los otros casos mucho menos frecuentes. Como en las tablas anteriores, el 0 se interpreta como que el número necesita seis o más cubos. Estos han sido los resultados:

Número de cubos	Frecuencia	Porcentaje
0	3	2%
1	0	0%
2	1	1%
3	27	14%
4	91	46%
5	78	39%
	Total	200

Como conclusión, a partir de ahora no hay que extrañarse de la frecuencia con la que una fecha del año permita una suma de tres a cinco cubos.

ANEXO

Código de la función POTE5

```
Public Function pote5$(n, z)
Dim i, j, k, p, q
Dim a, b, c, d, e
Dim f, g, h, m, mini, nume
Dim s$

a = n ^ (1 / z) + 0.1
s$ = ""
mini = 5: nume = 0

For i = 1 To a 'primera
If n = i ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i)
If mini > 1 Then mini = 1
nume = nume + 1
End If
f = n - i ^ z
If f > 0 Then
b = f ^ (1 / z) + 0.1
```

```
For j = i To b 'segundo

If n = i ^ z + j ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j)
If mini > 2 Then mini = 2
nume = nume + 1
End If
g = n - i ^ z - j ^ z
If g > 0 Then 'tercero
c = g ^ (1 / z) + 0.1

For k = j To c 'tercero
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
If mini > 3 Then mini = 3
nume = nume + 1
End If
h = n - i ^ z - j ^ z - k ^ z
If h > 0 Then 'cuarto
d = h ^ (1 / z) + 0.1

For p = k To d 'cuarto
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z + p ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
+ " , " + Str$(p)
If mini > 4 Then mini = 4
nume = nume + 1
End If
```

```
m = n - i ^ z - j ^ z - k ^ z - p ^ z
If m > 0 Then 'quinto
e = m ^ (1 / z) + 0.1

For q = p To e 'quinto
If n = i ^ z + j ^ z + k ^ z + p ^ z + q ^ z Then
s$ = s$ + " & " + Str$(i) + " , " + Str$(j) + " , " + Str$(k)
+ " , " + Str$(p) + " , " + Str$(q)
nume = nume + 1
End If
Next q 'quinto
End If 'quinto

Next p 'cuarto
End If 'cuarto

Next k 'tercero
End If 'tercero

Next j ' segundo
End If 'segundo

Next i 'primer cubo
If s$ = "" Then s$ = "NO" Else s$ = Chr$(64 + mini) +
Chr$(64 + nume) + " " + Str$(mini) + " &&& " + s$
pote5$ = s$

End Function
```

POTENCIAS CON BASES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En el año 2017 publiqué en http://oeis.org/A292313 la sucesión de números equivalentes a una suma de tres cuadrados en progresión aritmética. Ahora he querido cambiar la cuestión, exigiendo a las bases que estén en progresión, pero no el resultado. Para un exponente general m, lo que buscaremos será aquellos números N que presenten la equivalencia con números enteros positivos:

$$N = (a-k)^m + a^m + (a+k)^m$$

En ella k representa la diferencia de la progresión y suponemos que es mayor que 0. Escrita así la igualdad podemos beneficiarnos de la simetría en los cálculos, como veremos más adelante.

Un ejemplo con cuadrados es $24318 = 87^2+90^2+93^2 = (90-3)^2+90^2+(90+3)^2$. Comenzamos por ellos.

Suma de cuadrados en progresión aritmética

Encontrar los números que se puedan representar como suma de tres cuadrados con bases enteras positivas en progresión aritmética equivale a buscar aquellos que admitan la representación
$N=(a-k)^2 + a^2 + (a+k)^2$

Esto parece fácil, pues basta crear una tabla de doble entrada para valores de a y k, siendo k<a.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	14								
3	29	35							
4	50	56	66						
5	77	83	93	107					
6	110	116	126	140	158				
7	149	155	165	179	197	219			
8	194	200	210	224	242	264	290		
9	245	251	261	275	293	315	341	371	
10	302	308	318	332	350	372	398	428	462
11	365	371	381	395	413	435	461	491	525
12	434	440	450	464	482	504	530	560	594
13	509	515	525	539	557	579	605	635	669
14	590	596	606	620	638	660	686	716	750
15	677	683	693	707	725	747	773	803	837
16	770	776	786	800	818	840	866	896	930
17	869	875	885	899	917	939	965	995	1029
18	974	980	990	1004	1022	1044	1070	1100	1134
19	1085	1091	1101	1115	1133	1155	1181	1211	1245

El inconveniente radica en que están desordenados y que no se percibe a simple vista si existen duplicados (de hecho, 371 está repetido). Por eso, los valores 14, 29, 35, 50, 56, 66,… los encontraremos también con otras técnicas.

Como es costumbre en este blog, se caracterizarán estos números mediante una función. Para ello hay que considerar la expresión simplificada de la que los define:

$$N = (a-k)^2 + a^2 + (a+k)^2 = 3a^2 + 2k^2$$

En el problema propuesto, conocemos N, y el valor de a lo podemos ir cambiando entre 2 y la raíz cuadrada de N/3, que es una cota fácil de razonar. El valor de k depende de ellos, lo que nos evita un doble bucle de búsqueda, ya que es la raíz cuadrada de $(N\text{-}3a^2)/2$. En la función que se usará nos preguntaremos si esa expresión es cuadrada, y en caso afirmativo, de ella obtendremos k y después N. Un ejemplo de función sería el siguiente:

```
Public Function basesenprog$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = "" 'Se usa un string para recoger las soluciones
k = Sqr(n / 3) 'Cota para los valores de a
For a = 2 To k
b = (n - 3 * a ^ 2) / 2 'Se estudia el posible cuadrado de la diferencia de la p.a.
If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = 0 'Si es cuadrado, se halla la diferencia d, y si no d=0
If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + str$(p) + " " + str$(a) + " " + str$(q) + "&"
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO" 'Si no hay solución, devuelve "NO"
basesenprog = s$
End Function
```

Con esta función y un bucle de búsqueda, obtenemos la lista ordenada de los números que obtuvimos con la tabla de doble entrada:

14	1 2 3&
29	2 3 4&
35	1 3 5&
50	3 4 5&
56	2 4 6&
66	1 4 7&
77	4 5 6&
83	3 5 7&
93	2 5 8&
107	1 5 9&
110	5 6 7&
116	4 6 8&
126	3 6 9&
140	2 6 10&
149	6 7 8&
155	5 7 9&
158	1 6 11&
165	4 7 10&
179	3 7 11&
194	7 8 9&

Cada uno viene acompañado de las tres bases en progresión aritmética. Por ejemplo,

$140=2^2+6^2+10^2=4+36+100$, con $6-2=10-6=4$.

Con esta función también se detecta si un número presenta más de una solución. El primer número con esta propiedad es $371=1^2+9^2+17^2$ y también $371=9^2+11^2+13^2$.

Modificando la salida de la función, se pueden descubrir más números que admitan dos o más soluciones. Los primeros son estos:

N	Soluciones
371	2
525	2
707	2
875	2
917	2
1067	2
1155	2
1218	2
1325	2
1421	2
1484	2
1550	2

El primero que presenta tres soluciones es $2387=3^2+23^2+43^2=9^2+25^2+41^2=17^2+27^2+37^2$. Las diferencias son 20, 16 y 10 respectivamente.

Si deseas las soluciones de los párrafos anteriores en forma de lista, puedes acudir al lenguaje PARI.

```
for(n=3,600,k=sqrt(n/3);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,b=(n-3*a^2)/2;if(b==truncate(b)&&issquare(b),d=sqrt(b);if(d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", ")));a+=1))
```

Obtendrás así el listado:

14, 29, 35, 50, 56, 66, 77, 83, 93, 107, 110, 116, 126, 140, 149, 155, 158, 165, 179, 194, 197, 200, 210, 219, 224, 242, 245, 251, 261, 264, 275, 290, 293, 302, 308, 315, 318, 332, 341, 350, 365, 371, 372, 381, 395, 398, 413, 428, 434, 435, 440, 450, 461, 462, 464, 482, 491, 504, 509, 515, 525, 530, 539, 557, 560, 563, 579, 590, 594, 596,…

Otra variante se inspira en la tabla de doble entrada y después elimina duplicados:

w=List();for(n=3,600,k=sqrt(n/3);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^2+a^2+(a+c)^2;if(v==n,listput(w,n)))));print(vecsort(Vec(w),,8))

```
[14, 29, 35, 50, 56, 66, 77, 83, 93, 107, 110, 116, 126, 140, 149, 155, 158, 165
, 179, 194, 197, 200, 210, 219, 224, 242, 245, 251, 261, 264, 275, 290, 293, 302
, 308, 315, 318, 332, 341, 350, 365, 371, 372, 381, 395, 398, 413, 428, 434, 435
, 440, 450, 461, 462, 464, 482, 491, 504, 509, 515, 525, 530, 539, 557, 560, 563
, 579, 590, 594, 596]
?
```

Esta sucesión permanecía inédita y la hemos publicado en http://oeis.org/A306212

Suma de cubos en progresión aritmética

Acudiremos en este caso a las mismas técnicas que usamos con los cuadrados, pero de forma más breve. Buscamos números que presenten la equivalencia

$$N = (a-k)^3 + a^3 + (a+k)^3$$

En primer lugar, acudimos a una tabla de doble entrada para a y k:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	36								
3	99	153							
4	216	288	408						
5	405	495	645	855					
6	684	792	972	1224	1548				
7	1071	1197	1407	1701	2079	2541			
8	1584	1728	1968	2304	2736	3264	3888		
9	2241	2403	2673	3051	3537	4131	4833	5643	
10	3060	3240	3540	3960	4500	5160	5940	6840	7860
11	4059	4257	4587	5049	5643	6369	7227	8217	9339
12	5256	5472	5832	6336	6984	7776	8712	9792	11016
13	6669	6903	7293	7839	8541	9399	10413	11583	12909
14	8316	8568	8988	9576	10332	11256	12348	13608	15036
15	10215	10485	10935	11565	12375	13365	14535	15885	17415
16	12384	12672	13152	13824	14688	15744	16992	18432	20064
17	14841	15147	15657	16371	17289	18411	19737	21267	23001
18	17604	17928	18468	19224	20196	21384	22788	24408	26244
19	20691	21033	21603	22401	23427	24681	26163	27873	29811

Como se presenta el mismo inconveniente de los cuadrados, de presentación sin ordenar y sin depuración de repetidos, usaremos mejor el método de la función.

Para ello simplificaremos $(a-k)^3 + a^3 + (a+k)^3 = 3a^3 + 6ak^2 = N$

Despejando k observamos que $(N-3a^3)/6a$ ha de ser cuadrado. Así que probaremos valores de a entre 2 y la raíz cúbica de N/3, tomando nota de cuando esa expresión sea cuadrada. Puede ser así:

Public Function basesenprog3$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = ""

```
k = (n / 3) ^ (1 / 3) ‘Tope para la búsqueda
For a = 2 To k
b = (n - 3 * a ^ 3) / (6 * a) ‘Expresión que ha de ser cuadrada
If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = 0
If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + str$(p) + " " + str$(a) + " " + atr$(q) + "&"
‘Existe una solución
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO"
basesenprog3 = s$
End Function
```

Filtrando los primeros números naturales mediante esta función, obtenemos el listado:

36, 99, 153, 216, 288, 405, 408, 495, 645, 684, 792, 855, 972, 1071, 1197, 1224, 1407, 1548, 1584, 1701, 1728, 1968, 2079, 2241, 2304, 2403, 2541, 2673, 2736, 3051, 3060, 3240, 3264, 3537, 3540, 3888, 3960, 4059, 4131, 4257, 4500, 4587, 4833, 5049, 5160, 5256, 5472, 5643, 5832, 5940, 6336, 6369, 6669, 6840, 6903, 6984, 7227, 7293, 7776, 7839, 7860, 8217, 8316, 8541, 8568, 8712, 8988, 9339, 9399, 9576, 9792,…

Hemos publicado esta sucesión en
http://oeis.org/A306213

El primer número que presenta dos soluciones es el 5643, ya que
$5643=(9-8)^3 + 9^3 + (9+8)^3 = (11-5)^3 + 11^3 + (11+5)^3$

Esta versión en PARI se basa en una tabla de doble entrada, eliminando repetidos:

```
w=List();for(n=3,10000,k=(n/3)^(1/3);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^3+a^3+(a+c)^3;if(v==n,listput(w,n)))));print(vecsort(Vec(w),,8))
```

Esta otra se basa en nuestra función Excel:

```
for(n=3,10000,k=(n/3)^(1/3);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,b=(n-3*a^3)/(6*a);if(b==truncate(b)&&issquare(b),d=sqrt(b),d=0);if(d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", "));a+=1))
```

Entre estas soluciones aparecen cuadrados destacables, como

$6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ y $48^2 = 4^3 + 8^3 + 12^3$

Otra relación atractiva es $6^6 = (24-6)^3 + 24^3 + (24+6)^3$ o $15^4 = (25-5)^3 + 25^3 + (25+5)^3$

Podemos encontrar también muchos cubos. El primero es 6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3

Potencias cuartas

Actuamos de igual forma, iniciando una tabla de doble entrada y después una función. La tabla es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	98								
3	353	707							
4	962	1568	2658						
5	2177	3107	4737	7187	10625				
6	4322	5648	7938	11312	15938	22032			
7	7793	9587	12657	17123	23153	30963	40817		
8	13058	15392	19362	25088	32738	42528	54722	69632	
9	20657	23603	28593	35747	45233	57267	72113	90083	111537
10	31202	34832	40962	49712	61250	75792	93602	114992	140322
11	45377	49763	57153	67667	81473	98787	119873	145043	174657
12	63938	69152	77922	90368	106658	127008	151682	180992	215298
13	87713	93827	104097	118643	137633	161283	189857	223667	263073
14	117602	124688	136578	153392	175298	202512	235298	273968	318882
15	154577	162707	176337	195587	220625	251667	288977	332867	383697
16	199682	208928	224418	246272	274658	309792	351938	401408	458562
17	254033	264467	281937	306563	338513	378003	425297	480707	544593
18	318818	330512	350082	377648	413378	457488	510242	571952	642978
19	395297	408323	430113	460787	500513	549507	608033	676403	754977

De ella se descubren los primeros elementos: 98, 353, 707, 962, 1568,…

Para construir la función necesitamos algo de Álgebra. Despejamos k, tal como procedimos en los casos anteriores:

$$(a-k)^4 + a^4 + (a+k)^4 = 3a^4 + 12a^2k^2 + 2k^4 = N$$

De esta igualdad se deduce indirectamente que $N>3a^4$ y que, por tanto, $(N/3)^{1/4}$ es cota para a.

(Este resultado es general: Si $(a-k)^n + a^n + (a+k)^n = N$, la cota es $(N/3)^{1/n}$. Se puede ver derivando la expresión para demostrar que es creciente respecto a k)
Seguimos:
$2k^4 + 12a^2k^2 - (N-3a^4) = 0$

Es una ecuación bicuadrada con solución positiva para k^2:

$$k^2 = \frac{-6a^2 + \sqrt{36a^4 + 2N - 6a^4}}{2} = \frac{\sqrt{30a^4 + 2N}}{2} - 3a^2$$

Esto nos da una condición que debe cumplir esa expresión final, y es que sea cuadrado de un entero. Por eso, esta sería la función adecuada para descubrir los números que admiten estas sumas de potencias cuartas:

```
Public Function basesenprog4$(n)
Dim a, b, k, p, q, d
Dim s$

s$ = ""
k = Sqr(Sqr(n / 3)) 'Cota superior N^(1/4)
For a = 2 To k
b = Sqr(2 * n + 30 * a ^ 4) / 2 - 3 * a ^ 2 'Valor de k^2
If escuad(b) Then d = Sqr(b) Else d = 0 'La variable d representa a k si existe solución
```

If d > 0 And d < a Then p = a - d: q = a + d: s$ = s$ + ajusta(p) + " " + ajusta(a) + " " + ajusta(q) + "&"
‘Formación de la solución en modo texto
Next a
If s$ = "" Then s$ = "NO"
basesenprog4 = s$
End Function

Con esta función se puede establecer la búsqueda, resultando, para las primeras soluciones:

98	1 2 3&
353	2 3 4&
707	1 3 5&
962	3 4 5&
1568	2 4 6&
2177	4 5 6&
2658	1 4 7&
3107	3 5 7&
4322	5 6 7&
4737	2 5 8&
5648	4 6 8&
7187	1 5 9&
7793	6 7 8&
7938	3 6 9&
9587	5 7 9&
11312	2 6 10&
12657	4 7 10&

13058	7 8 9&
15392	6 8 10&
15938	1 6 11&
17123	3 7 11&
19362	5 8 11&
20657	8 9 10&
23153	2 7 12&
23603	7 9 11&
25088	4 8 12&
28593	6 9 12&
30963	1 7 13&

La segunda columna presenta las tres bases en progresión aritmética.

Si ordenamos resulta el listado ordenado y sin repeticiones:

98, 353, 707, 962, 1568, 2177, 2658, 3107, 4322, 4737, 5648, 7187, 7793, 7938, 9587, 11312, 12657, 13058, 15392, 15938, 17123, 19362, 20657, 23153, 23603, 25088, 28593, 30963, 31202, 32738, 34832, 35747, 40962, 42528, 45233, 45377, 49712, 49763, 54722, 57153, 57267, 61250, 63938, 67667, 69152, 72113, 75792, 77922, 81473, 87713, 90083, 90368, 93602, 93827, 98787

Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A306214

Como en los casos anteriores,disponemos de dos versiones en PARI:

```
w=List();for(n=3,100000,k=(n/3)^(1/4);for(a=2,k,for(c=1,a-1,v=(a-c)^4+a^4+(a+c)^4;if(v==n,listput(w,n)))));print1(vecsort(Vec(w),,8))
```

y

```
for(n=3,100000,k=(n/3)^(1/4);a=2;v=0;while(a<=k&&v==0,d=sqrt(sqrt(2*n+30*a^4)/2-3*a^2);if(d==truncate(d)&&d>=1&&d<=a-1,v=1;print1(n,", "));a+=1))
```

Como curiosidad podemos destacar:

$392^3 = (56-28)^4 + 56^4 + (56+28)^4$

Te invitamos a resolver el problema para potencias superiores. Ya tienes encauzados los cálculos y algoritmos.

NÚMEROS PRIMOS Y DIFERENCIA DE CUADRADOS

Muchas entradas de mi blog se inician en los cálculos sobre fechas que publico en Twitter. El día 28/4/18 presentaba la propiedad de que $28418=23^2+167^2=43^2+163^2$, es decir, que 28418 equivale a una suma de cuadrados de números primos de dos formas distintas. Si en esta igualdad de sumas transponemos cuadrados, se convierte en la igualdad de diferencias. Así, $167^2-163^2=43^2-23^2$, y $167^2-43^2=163^2-23^2$.

Estudiaremos en este capítulo qué números equivalen a la suma de cuadrados de números primos y separadamente, los que equivalen a diferencias, en ambos casos de dos o más formas distintas. Terminaremos el estudio con algunas relaciones entre ambos.

Así que las equivalencias entre sumas y las diferencias, como es evidente, están relacionadas. Esto excluye al número primo 2, por lo que en lo que sigue sólo intervendrán primos impares. Comenzamos con la suma de cuadrados.

Números equivalentes a dos sumas de cuadrados de primos

Estos números están publicados en
http://oeis.org/A226539

338, 410, 578, 650, 890, 1010, 1130, 1490, 1730, 1802, 1898, 1970, 2330, 2378, 2738, 3050, 3170, 3530, 3650, 3842, 3890, 4010, 4658, 4850, 5018, 5090, 5162, 5402, 5450, 5570, 5618, 5690, 5858, 6170, 6410, 6530, 6698, 7010, 7178, 7202, 7250, 7850, 7970, …

Como en este blog se usa la hoja de cálculo, se puede intentar reproducirlos con una función apropiada en el Basic de Excel o LibreOffice Calc. Puede ser la siguiente, en la que **n** es el número a analizar y **k** el número de sumas de cuadrados de primos que sean equivalentes. El resultado es el listado, en forma de cadena de texto, de los primos de cada par o la palabra **“NO”** si no existen soluciones.

public function sumaprimcuad$(n,k)
dim b, c,i,m
dim ca$

ca="" ‘Cadena vacía que recibirá las soluciones
m=0 ‘Contador de soluciones
b=sqr(n/2) ‘Tope para ensayar primos

for i=1 to b ‘La variable i recorre los valores de los primos
if esprimo(i) then
c=int(sqr(n-i^2+1e-5)) ‘Se investigará si el segundo sumando es primo
if esprimo(c) and i^2+c^2=n then m=m+1:
ca$=ca$+" "+ajusta(i)+" "+ajusta(c)+" & "
end if ‘Si hay solución se incrementa m y se copia en ca$
next i
if m=k then sumaprimcuad=ca else
sumaprimcuad="NO"
end function

Aplicando esta función a un bucle de búsqueda se obtienen las primeras soluciones para el caso k=2, que es el que nos interesa en este estudio. Cada solución viene acompañada de sus dos pares de primos:

338   7 17 & 13 13 &
410   7 19 & 11 17 &
578   7 23 & 17 17 &
650   11 23 & 17 19 &
890   7 29 & 19 23 &
1010 7 31 & 13 29 &
1130 13 31 & 17 29 &
1490 11 37 & 23 31 &
1730 7 41 & 19 37 &

1802 11 41 & 29 31 &
1898 7 43 & 23 37 &
1970 11 43 & 17 41 &
2330 11 47 & 31 37 &
2378 13 47 & 23 43 &
2738 23 47 & 37 37 &

Coinciden con los primeros publicados en OEIS. Llama la atención ver que alguna de las soluciones contiene primos repetidos, como la última, en la que se repite el 37.

La ventaja de disponer de una función es que la podemos aplicar a números grandes sin tener que recorrer los previos.

Factores primos de las soluciones

A la lista de los primeros números encontrados hemos añadido más abajo las dos sumas de cuadrados de primos y la descomposición factorial. Esta última es interesante porque de ella depende que existan dos o más descomposiciones en suma de cuadrados (sean o no de primos). En una entrada antigua de este blog reproducíamos la fórmula de Gauss para contar esas sumas.

http://hojaynumeros.blogspot.com/2010/10/en-cuantas-sumas-de-cuadrados-2-de-5.html

En ella se exigía que si figuran primos del tipo 4k+3, estos estuvieran elevados al cuadrado. En el listado de más abajo observamos que esto ocurre en 338, que contiene 13 al cuadrado, y en 578, con el cuadrado de 17:

338 7 17 & 13 13 & [2,1][13,2]
410 7 19 & 11 17 & [2,1][5,1][41,1]
578 7 23 & 17 17 & [2,1][17,2]
650 11 23 & 17 19 & [2,1][5,2][13,1]
890 7 29 & 19 23 & [2,1][5,1][89,1]
1010 7 31 & 13 29 & [2,1][5,1][101,1]
1130 13 31 & 17 29 & [2,1][5,1][113,1]
1490 11 37 & 23 31 & [2,1][5,1][149,1]
1730 7 41 & 19 37 & [2,1][5,1][173,1]
1802 11 41 & 29 31 & [2,1][17,1][53,1]
1898 7 43 & 23 37 & [2,1][13,1][73,1]
1970 11 43 & 17 41 & [2,1][5,1][197,1]
2330 11 47 & 31 37 & [2,1][5,1][233,1]
2378 13 47 & 23 43 & [2,1][29,1][41,1]
2738 23 47 & 37 37 & [2,1][37,2]
3050 29 47 & 37 41 & [2,1][5,2][61,1]
3170 19 53 & 31 47 & [2,1][5,1][317,1]
3530 7 59 & 41 43 & [2,1][5,1][353,1]
3650 13 59 & 29 53 & [2,1][5,2][73,1]

3842 11 61 & 19 59 & [2,1][17,1][113,1]
3890 13 61 & 41 47 & [2,1][5,1][389,1]
4010 17 61 & 23 59 & [2,1][5,1][401,1]
4658 13 67 & 43 53 & [2,1][17,1][137,1]

Se observa que aparte del factor 2, presente por ser números pares, el resto, suele tener otros dos factores, ya sean repetidos, como en $2738=2*37^2$, o bien distintos, como en el caso de $2378=2*29*41$. Hay otros, y eso los hace interesantes, que poseen tres factores más, como $3050=2*5^2*61$. En estos casos aparecerán nuevas sumas de cuadrados, pero ya no tienen que tener base prima.

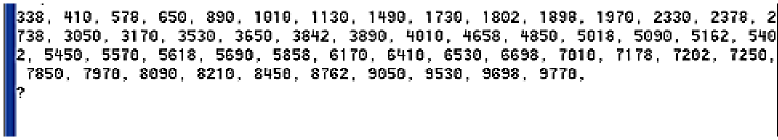
En efecto, $3050=29^2+47^2=37^2+41^2=5^2+55^2$

La última suma es claramente de bases no primas, que no intervienen en la cuestión que estamos estudiando. Podemos pasar esta función a PARI, y obtener así un listado más compacto de las soluciones:

```
for(n=2,10000,m=0;b=sqrt(n/2);for(i=2,b,if(isprime(i),
c=truncate(sqrt(n-i^2+1e-
5));if(isprime(c)&&(i^2+c^2==n),m+=1)));if(m==2,prin
t1(n,", ")))
```

Con este código se pueden obtener los números desde el 2 hasta el 10000 contenidos en

http://oeis.org/A226539


338, 410, 578, 650, 890, 1010, 1130, 1490, 1730, 1802, 1898, 1970, 2330, 2378, 2
738, 3050, 3170, 3530, 3650, 3842, 3890, 4010, 4658, 4850, 5018, 5090, 5162, 540
2, 5450, 5570, 5618, 5690, 5858, 6170, 6410, 6530, 6698, 7010, 7178, 7202, 7250,
 7850, 7970, 8090, 8210, 8450, 8762, 9050, 9530, 9698, 9770,
?

Números con tres descomposiciones

Si en la función dada hacemos k=3 obtendremos los números que admiten su descomposición en tres sumas de cuadrados de números primos. Puedes intentarlo con la herramienta referida. Los primeros casos son:

2210 19 43 & 23 41 & 29 37 &
3770 7 61 & 17 59 & 31 53 &
5330 17 71 & 29 67 & 43 59 &
6290 7 79 & 31 73 & 53 59 &

Están publicados en http://oeis.org/A226562

2210, 3770, 5330, 6290, 12818, 16490, 18122, 19370, 24050, 24650, 26690, 32810, 33410, 34970, 36530, 39650, 39770, 44642, 45050, 45890, 49010, 50690, 51578, 57770, 59450, 61610, 63050, 66170, 67490, 72410, 73610, 74210, 80330, 85202, 86210, 86330, 88010,...

Podríamos seguir con los que admiten cuatro descomposiciones o más, pero lo dejamos como ejercicio, que no es difícil disponiendo de la función que hemos presentado.

Diferencias de cuadrados

En el caso de buscar números que sean equivalentes a dos diferencias de cuadrados de números primos es más sencillo usar la diferencia k entre dos de esos primos. Incluimos un desarrollo algebraico que le da ese protagonismo a esa diferencia k.

Partimos de una suma por diferencia como equivalente a la diferencia de cuadrados. Si m=(a+b)(a-b). sustituyendo a por x+k y b por x, llamando k a la diferencia a-b, queda:

m=(x+k+x)(x+k-x)=(2x+k)k.

El valor mínimo de k es 2, ya que sería el caso de primos gemelos, luego k>=2 siempre será par, puesto que hemos excluido el número primo 2.

Por otra parte, 2x+k es un divisor propio de m, y también par, luego será menor o igual que m/2, y, a su vez, m será múltiplo de 4. Sólo los múltiplos de 4 pueden presentar la propiedad requerida.

2x+k=m/k<=m/2, luego x ha de ser menor o igual que m/4 y x+k<=m/4+k

Así queda el valor de x en función de k: x=(m/k-k)/2
Luego podemos construir el bucle de búsqueda con k entre los divisores pares de m, a fin de que sea entero m/(2*k).

Para cada valor de k, par, vemos si es divisor de m y entonces buscamos entre los impares, de x=3 hasta x=m/4 los que sean primos y también lo sea x+k

Estas consideraciones nos llevan a la siguiente función, en la que dados un número natural n y un número k de diferencias de cuadrados de primos, nos indica si ese número equivale a esas diferencias o no:

```
public function difeprimcuad$(n,k)
dim b, c,i,m,d
dim ca$

if n/4<>n\4 then difeprimcuad="NO":Exit function
'Ha de ser múltiplo de 4
ca="" 'Recogerá las soluciones en modo texto
m=0 'Contador de soluciones
```

b=int(sqr(n))+1 ‘Valor mínimo para el primer primo
d=int(n/4+2) ‘Valor máximo según los párrafos anteriores
for i=b to d
if esprimo(i) then ‘El minuendo de la diferencia ha de ser primo
c=int(sqr(i^2-n+1e-5)) ‘Posible sustraendo
if esprimo(c) and i^2=n+c^2 then m=m+1:
ca$=ca$+" "+ajusta(i)+" "+ajusta(c)+" & "
‘Hay una solución más. Se recoge en **ca$** y se incrementa el contador **m**
end if
next i
if m=k then difeprimcuad=ca else
difeprimcuad="NO" ‘Si hay k soluciones, se recogen.
end function

Con esta función y un bucle de búsqueda obtenemos las primeras soluciones, acompañadas de las diferencias de cuadrados de primos que admiten:

72	11 7 & 19 17 &
360	23 13 & 47 43 &
432	31 23 & 109 107 &
528	37 29 & 47 41 &
768	67 61 & 193 191 &
888	43 31 & 113 109 &
960	53 43 & 241 239 &

1032 89 83 & 131 127 &
1080 37 17 & 271 269 &
1128 53 41 & 283 281 &
1272 59 47 & 109 103 &
1392 41 17 & 349 347 &
1488 43 19 & 97 89 &
1512 41 13 & 61 47 &
1608 73 61 & 137 131 &
1632 41 7 & 59 43 &
1728 43 11 & 433 431 &
1920 47 17 & 163 157 &

Están publicadas en http://oeis.org/A090788
72, 360, 432, 528, 768, 888, 960, 1032, 1080, 1128, 1272, 1392, 1488, 1512, 1608, 1632, 1728, 1920, 2088, 2112, 2232, 2352, 2400, 2448, 2568, 2688, 2808, 3048, 3168, 3240, 3288, 3480, 3648, 3768, 4008, 4032, 4128, 4248, 4272, 4392, 4488, 4512, 4992.

Con este código PARI, inspirado en la función anterior, se reproduce el resultado.

i=4; while(i<=5000, k=0; m=2; while(m*m<=i, if(i%(2*m)==0, a=(i/m-m)/2; b=a+m; if(isprime(a)&&isprime(b), k+=1)); m+=2); if(k==2, print1(i, ", ")); i+=4)

```
72, 360, 432, 528, 768, 888, 960, 1032, 1080, 1128, 1272, 1392, 1488, 1512, 1608
, 1632, 1728, 1920, 2088, 2112, 2232, 2352, 2400, 2448, 2568, 2688, 2808, 3048,
3168, 3240, 3288, 3480, 3648, 3768, 4008, 4032, 4128, 4248, 4272, 4392, 4488, 45
12, 4992,
```

Por mera curiosidad, se incluyen a continuación los números que cumplen ser diferencia de cuadrados de primos de tres formas distintas. Basta sustituir k=2 en la función por k=3:

120 13 7 & 17 13 & 31 29 &
168 17 11 & 23 19 & 43 41 &
312 19 7 & 29 23 & 41 37 &
408 23 11 & 37 31 & 103 101 &
480 23 7 & 29 19 & 43 37 &
552 29 17 & 71 67 & 139 137 &
600 31 19 & 53 47 & 151 149 &
672 29 13 & 31 17 & 59 53 &
720 29 11 & 41 31 & 181 179 &
1008 37 19 & 43 29 & 67 59 &
1200 37 13 & 79 71 & 103 97 &
1800 43 7 & 59 41 & 227 223 &
2160 47 7 & 113 103 & 139 131 &
2472 109 97 & 311 307 & 619 617 &
2832 71 47 & 181 173 & 239 233 &
2880 61 29 & 89 71 & 149 139 &
3312 59 13 & 101 83 & 829 827 &
3672 61 7 & 71 37 & 461 457 &
4560 79 41 & 107 83 & 233 223 &

5040 73 17 & 83 43 & 149 131 &
5640 109 79 & 151 131 & 241 229 &
6120 79 11 & 103 67 & 107 73 &
6480 101 61 & 409 401 & 1621 1619 &
6528 83 19 & 113 79 & 547 541 &
7248 163 139 & 457 449 & 607 601 &
7320 137 107 & 193 173 & 613 607 &
7752 89 13 & 131 97 & 971 967 &
7872 89 7 & 139 107 & 659 653 &
8160 109 61 & 137 103 & 683 677 &
8352 101 43 & 241 223 & 2089 2087 &
8400 103 47 & 109 59 & 307 293 &

Puedes seguir con la cuestión para cuatro, cinco o seis diferencias. Basta cambiar la última condición k=2 en Basic o k==2 en PARI. En las siguientes sucesiones de OEIS tienes los listados:

http://oeis.org/A090782
http://oeis.org/A092000
http://oeis.org/A092001
http://oeis.org/A092002

Hay más, pero con estos ejemplos basta. Puedes indagar los casos de siete, ocho o más.

Correspondencias entre los que son suma y sus correspondientes diferencias:

Una cuestión curiosa es la extraer casos de la primera parte de este estudio, sumas de cuadrados de primos, con los de la segunda, de diferencias de primos. Lo vemos con un ejemplo concreto:

$410=19^2+7^2=17^2+11^2$

Al ser distintos los sumandos, transponiendo términos, surgen dos grupos de diferencias iguales: $19^2-17^2=11^2-7^2=72$

$19^2-11^2=17^2-7^2=240$

Así que del número 410, equivalente a dos sumas de primos distintos, obtenemos otros dos números, 72 y 240, que pertenecen a los casos de diferencias de cuadrados de primos. Ocurre también el hecho contrario, que de 72 o 240, transponiendo términos, podemos obtener un caso de suma de cuadrados de primos. La correspondencia es múltiple y no siempre recíproca, por lo que sólo podemos constatar qué números de un grupo se relacionan con el otro.

No se incluyen los listados que se han usado para establecer correspondencias entre un conjunto y otro. En este listado se pueden apreciar los casos de diferencias de cuadrados de primos que se extraen de los de sumas múltiples de cuadrados

Correspondencias entre los que son suma y sus correspondientes diferencias:

338 120 120
410 240 72
578 240 240
650 240 168
890 480 312
1010 792 120
1130 672 120
1490 840 408
1730 1320 312
1802 840 720
1898 1320 480

Por ejemplo, $1730=41^2+7^2=37^2+19^2$, y transponiendo términos:

$41^2-19^2=37^2-7^2=1320$

Y también

$41^2-37^2=19^2-7^2=312$

Podemos seguir las rutas opuestas, desde los que son diferencia de cuadrados a las correspondientes sumas. Por ejemplo, $72=11^2-7^2=19^2-17^2$ y transponiendo:

$11^2+17^2=7^2+19^2=410$, que pertenece a nuestro primer listado.

Aunque las correspondencias no son biunívocas, con paciencia se pueden construir cadenas. Lo dejamos ahí.

SIMULACIONES

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Iniciamos hoy una serie, que nos tomaremos con calma, sobre simulaciones elementales de variables aleatorias. Nos basaremos en las prácticas de nuestro curso de Estadística,

(http://www.hojamat.es/estadistica/iniestad.htm)

adaptándolas al formato de un blog. Usaremos nuestro Simulador implementado para hojas de cálculo, el cual puede sufrir cambios a lo largo de la serie, por lo que se aconseja su recarga en caso de duda.

Comenzaremos con la distribución uniforme. Si no tienes claro el concepto puedes acudir a la Teoría correspondiente (http://www.hojamat.es/estadistica/tema6/teoria/teoria6.pdf).

Por ahora te basta con la idea de que representa experimentos aleatorios en los que todos los elementos presentan una misma probabilidad de ocurrir, como tiradas de dados o las loterías. Se suele distinguir entre distribución uniforme discreta, cuando sólo existe un número finito de posibilidades (dados o monedas), o continua, cuando pueden aparecer infinitos sucesos, o al menos, tantos, que sea preferible tratarlos como infinitos.

Distribución uniforme discreta

En ella se trabaja sobre un conjunto finito de **n** elementos con la hipótesis de que todos ellos poseen la misma probabilidad de aparecer, que será, por tanto, **1/n**. Un ejemplo es el de una tirada de dados. La distribución uniforme más útil es aquella en la que el conjunto está formado por los números comprendidos entre **a** y **b** ambos inclusive. En los dados a=1 y b=6.

Puedes consultar en cualquier manual los valores de los principales estadísticos de esta distribución.

Media:

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Varianza:

$$var = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

En el caso de las tiradas de dados m=3,5 y var=35/12=2,92 y su desviación típica 1,7321.

Podemos comprobar estos valores mediante nuestro simulador, alojado en estas direcciones:

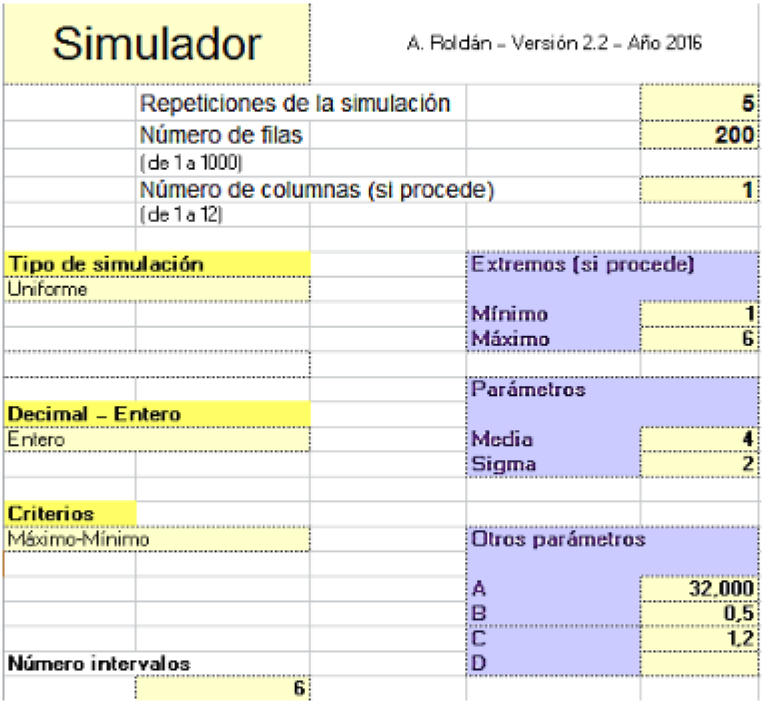
http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.ods (versión LibreOffice Calc)

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.xlsm (versión Excel)

Contiene dos hojas, la de *criterios y simulación* y la de los *estadísticos*.

La mejor forma de aprender su funcionamiento es proceder a la primera simulación.

Deseamos saber si con 1000 tiradas de dados su media y varianza se acercan suficientemente a la teoría. Para ello, en la primera página del simulador concretamos lo siguiente:



Cinco repeticiones de 200 filas y una columna, para que se acumulen 1000 tiradas, mínimo=1 y máximo=6. Como criterios, “Uniforme”, “Entero”, para que la distribución sea discreta, y “Máximo-Mínimo”.

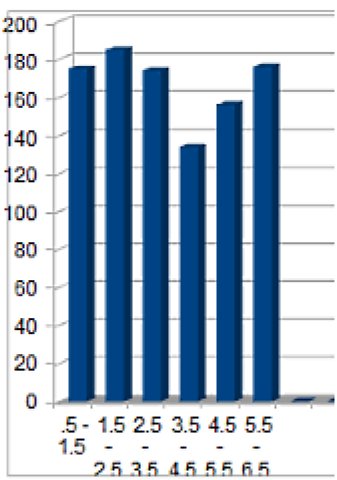
También es conveniente fijar, unas celdas más abajo, el número de intervalos en 6. El resto de parámetros se puede ignorar. Con ello, al dar al botón **Simulador** obtendrás los resultados en la siguiente hoja de Estadísticos. En nuestro caso serían:

Media	3,4390
Desviación típica	1,7419
Asimetría	0,0886
Curtosis	-1,3161

Valores teóricos	
Media	3,5000
Desviación típica	1,7078
Asimetría	0,0000
Kurtosis	-1,2686

Se ha obtenido una aproximación apreciable. La herramienta también nos proporciona la asimetría y la kurtosis, pero prescindimos de ellas en esta simulación. A la derecha puedes observar la tabla de frecuencias y el diagrama de barras, que presenta una uniformidad de alturas bastante aceptable para el número de simulaciones que hemos fijado:

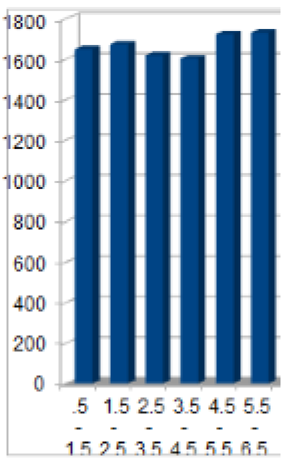
.5 - 1.5	175
1.5 - 2.5	185
2.5 - 3.5	174
3.5 - 4.5	134
4.5 - 5.5	156
5.5 - 6.5	176



Como ya sabrás, es probable que, si aumentamos el número de repeticiones, el ajuste mejore, pero no lo des por seguro, que sólo existe una probabilidad. Si aumentamos a 50 repeticiones obtenemos:

Media	**3,5270**
Desviación típica	**1,7196**
Asimetría	**-0,0189**
Curtosis	**-1,2910**
Valores teóricos	
Media	**3,5000**
Desviación típica	**1,7078**
Asimetría	**0,0000**
Kurtosis	**-1,2686**

.5 - 1.5	1650
1.5 - 2.5	1673
2.5 - 3.5	1619
3.5 - 4.5	1604
4.5 - 5.5	1723
5.5 - 6.5	1731

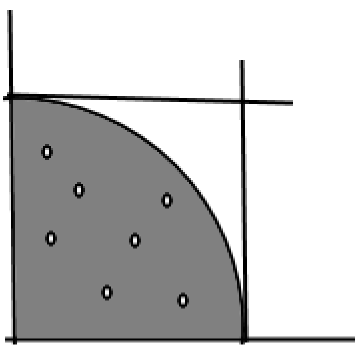


Ha mejorado bastante el ajuste. En general, las simulaciones comienzan a ser útiles si las repites miles de veces. Con unas pocas no son útiles.

Distribución uniforme continua

En esta modalidad los datos se distribuyen de forma continua (en la práctica, con todos los decimales que deseemos) entre dos extremos **a** y **b**. Prácticamente no hay ejemplos en la vida diaria de distribuciones uniformes, ya que son más frecuentes otras, como la normal. Suelen aparecer en experimentos diseñados o en instrumentos creados por nosotros, como puede ser el movimiento de las manecillas de un reloj, que recorre de manera uniforme toda la circunferencia.

Un ejemplo de distribución uniforme continua es el experimento de calcular π mediante simulación (método de Montecarlo). Consiste en simular dos coordenadas X e Y de manera uniforme entre 0 y 1 y contar aquellos pares en los que X^2+Y^2<1. De esa forma, su frecuencia relativa deberá ser π/4=0,7854 aproximadamente. En la imagen sería como contar todos los puntos que caen dentro de la zona sombreada.



Lo organizaremos así:

Planteamos los criterios contenidos en la imagen:

Simulador		A. Roldán – Versión 2.2 – Año 2016		
	Repeticiones de la simulación			1
	Número de filas			500
	(de 1 a 1000)			
	Número de columnas (si procede)			2
	(de 1 a 12)			
Tipo de simulación			**Extremos (si procede)**	
Uniforme				
			Mínimo	0
			Máximo	1
			Parámetros	
Decimal – Entero				
Decimal			**Media**	4
			Sigma	2
Criterios				
Máximo-Mínimo			**Otros parámetros**	

Tomamos 500 filas y dos columnas (que representarán X e Y). No planteamos repeticiones porque añadiremos una columna nueva a la simulación. Concretamos un mínimo de 0 y un máximo de 1. En los restantes criterios elegimos “Uniforme”, “Decimal” (por ser continua) y “Máximo-Mínimo”.

Con ello obtenemos dos columnas de 500 valores de X e Y. Ahora, en una columna paralela, por ejemplo comenzando en J5, escribimos =SI(G5^2+H5^2<1;1;0). Esto significa que obtendremos un 1 si el punto (X,Y) pertenece al sector circular sombreado, y 0 si está fuera. Extendemos esa fórmula hacia abajo hasta abarcar los 500 valores:

0,135988891	0,129352689	1
0,883682072	0,886273146	0
0,409658372	0,573923469	1
0,815548956	0,356251717	1
0,734143436	0,334889054	1
0,798231423	0,142625093	1
0,375023305	0,146670222	1
0,097308695	0,979814053	1
0,332297981	0,274846196	1
0,712780774	0,398977041	1
0,605967462	0,719416976	1
0,644647658	0,868955612	0
0,196031749	0,214803338	1
0,627330124	0,593012094	1
0,774594724	0,229846835	1
0,864090502	0,430201054	1
0,7318694	0,358022809	1
0,479562581	0,849364042	1
0,005538881	0,802593589	1
0,411429465	0,319342613	1

Ahora basta sumar esa columna nueva y deberemos obtener un valor próximo a 500π/4≈393. Esto no se suele obtener en una simulación con tan pocos datos. En nuestro caso se ha obtenido 389. Podemos repetir el trabajo (de forma manual) varias veces y encontrar la media de resultados. Aquí tienes un ejemplo, con 7 repeticiones o 3500 casos:

389, 408, 383, 389, 392, 386, 384

Sumo y obtengo 2731, divido entre 3500 (para encontrar la frecuencia relativa) y multiplico por 4 para aproximar a π: 2731/3500*4=3,1211. No es una extraordinaria aproximación a π, pero resulta aceptable si tenemos en cuenta las herramientas utilizadas.

Análisis de intervalos

En una de las actualizaciones del Simulador hemos añadido una simulación entre intervalos. En el caso de la distribución uniforme nos servirá para analizar la igualdad aproximada de las frecuencias en intervalos de igual longitud.

En la segunda hoja *Estadísticos* figura una tabla y un botón para obtener frecuencias **f** entre dos extremos **a** y **b**. Estos extremos se consideran alcanzables, por lo que en las distribuciones discretas estarán incluidos. En la última fila se calcula la frecuencia relativa **h**. Sólo se puede usar para tres columnas o menos. Basta fijar los extremos en cada columna, pulsar el botón *Intervalos* y comparar resultados.

La imagen corresponde a una simulación uniforme continua entre 10 y 20, con tres columnas. En cada una de ellas hemos fijado extremos con una diferencia de 4, con lo que las tres frecuencias relativas se acercan a 0,4.

Intervalos

a	10	11	12
b	14	15	16
f	407	417	432
h	0,407	0,417	0,432

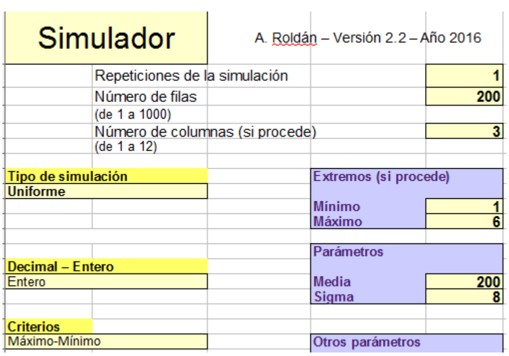
Otros ejemplos de distribución uniforme

El seis triple

En muchos juegos de mesa, sacar un 6 tres veces seguidas es un acontecimiento importante. Según la teoría, la probabilidad de que esto ocurra es de 1/(6*6*6)=1/216. Podemos esperar que de cada 216 tiradas triples que efectuemos, una de ellas presente 6-6-6. Podíamos simularlo para ver qué ocurre.

Para ello concretamos el Simulador:

- Distribución **uniforme entera** (es decir, discreta).
- Mínimo 1 y máximo 6
- 200 filas y 3 columnas (las filas son opcionales. Podrían ser 216 o el doble)
- Criterio **Máximo-mínimo**



Así, a simple vista percibiremos bien si resulta un 6 triple.

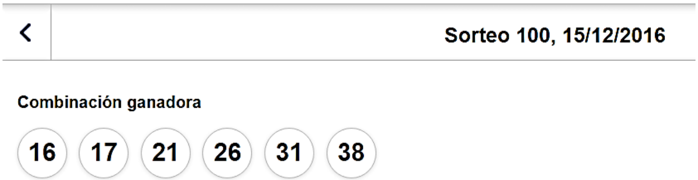
Nosotros hemos efectuado dos simulaciones sin obtener el seis triple, que sólo ha aparecido en el tercer intento:

[illegible]	1	6		
4	3	4		
6	6	6		1
2	5	3		
3	3	5		
5	5	1		

¿Por qué, entonces, creemos que es más fácil conseguirlo? Todo el que ha jugado recuerda haber enlazado tres 6 seguidos. Ocurre que recordamos mejor las jugadas favorables, y no las desfavorables, como cuando en el juego de la Oca nos toca la cárcel o la muerte, o las veces que necesitamos un cinco para salir en el parchís y no nos sale en muchas jugadas.

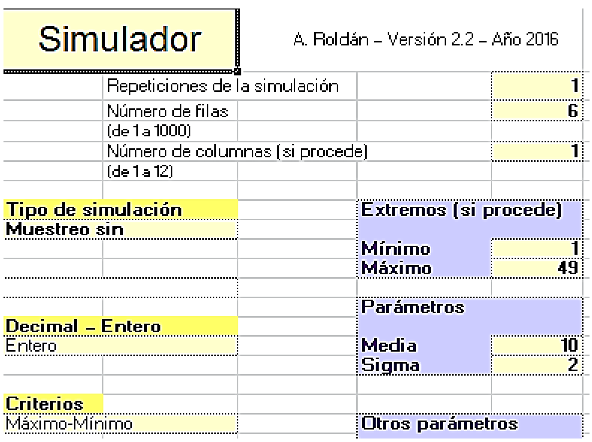
La lotería primitiva

En esta lotería española pueden salir los números del 1 al 49, y los apostadores eligen entre varios tipos de apuestas. Se puede tratar como distribución uniforme porque todos los resultados presentan la misma probabilidad (1/13983816), aunque tenemos que acudir a un muestro sin reemplazamiento, que refleja mejor el proceso. En el sorteo aparecerán seis números y se gana más o menos dinero según las coincidencias entre nuestra apuesta y el resultado del sorteo. Suponemos la apuesta más sencilla, compuesta de seis números.



Nuestro objetivo es el de comprobar la dificultad de acertar varios resultados, que suelen tenerse en cuenta entre tres o seis aciertos, cambiando la cuantía del premio según el número de aciertos.
Abrimos el ***Simulador.***

Le concretamos los siguientes datos:



- Máximo y mínimo, de 1 a 49, que son los números del sorteo
- Distribución **Muestreo sin** y con **enteros**

- Seis filas y una columna, para simular bien el sorteo
- Criterios **Máximo-Mínimo**

Es importante que actives exactamente lo que se ha sugerido. Al pulsar el botón **Simulación** aparecerán **seis números distintos** del 1 al 49. Si no lo logras, repasa bien todos los criterios necesarios.

Para hacer ver la dificultad de acertar, hemos adjuntado nuestra apuesta a la izquierda de la simulación:

Apuesta	Resultado
3	10
9	18
12	21
22	6
29	7
40	23

Ahora se trata de usar reiteradamente el botón de simulación y comprobar cuántos números hemos acertado. Nosotros hemos estado un buen rato jugando a simular y siempre hemos obtenido menos de tres aciertos. Valga esta experiencia para enseñarnos a jugar con prudencia.

Uso de la distribución uniforme para probabilidades dadas por una tabla

Con el Simulador y el uso de la distribución uniforme continua (con decimales) se pueden simular probabilidades dadas por una tabla. Por ejemplo, supongamos que disponemos de tres bolas rojas, dos verdes y dos amarillas para efectuar experimentos aleatorios. Lo normal sería introducirlas en una bolsa e ir sacando una a una con reposición. Esto, en las aulas, podría ser divertido y algo caótico. Una alternativa es simularlo con ordenador.

Partimos de la tabla de probabilidades

Roja	3/7
Verde	2/7
Amarilla	2/7

En primer lugar, la cambiamos a probabilidades acumuladas, es decir, que cada una sea la actual más todas las anteriores. Así:

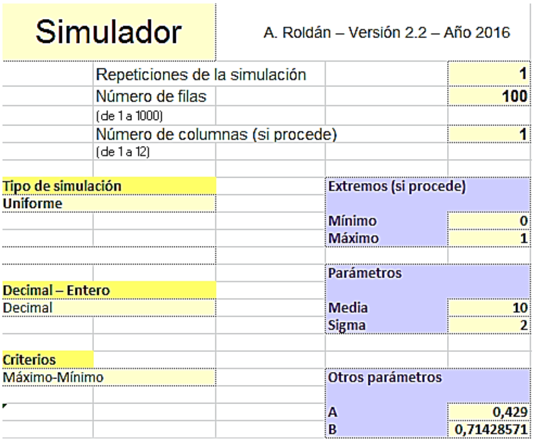
Roja	3/7
Verde	5/7
Amarilla	7/7

Esto es para organizar unas desigualdades más adelante.

El proceso es como sigue:

En el simulador organizamos una distribución uniforme **con decimales**, **mínimo 0 y máximo 1** (los 7/7). Como criterio le damos que use el **Máximo y mínimo**, y fijamos, por ejemplo, 100 filas y una columna. En el parámetro A se ha escrito 3/7 y en el B 5/7 (esto no es obligatorio).

Copiamos la imagen de la hoja:



Si iniciamos la simulación obtendremos una columna con 100 números entre 0 y 1 expresados con decimales:

0,01
0,18
0,34
0,64
0,9
0,83
0,35
0,52
0,95
0,04
0,74
0,68
0,7
0,49
0,65
0,14

Estos números (y esto no lo consigue la herramienta) debemos convertirlos en **Rojo, Verde y Amarillo**. Para eso añadimos una fórmula a la derecha de cada número, de forma que si este no llega a 3/7 (que hemos escrito en la celda E21) , es que se trata de la Roja, y en caso contrario, si tampoco llega a 5/7 (probabilidad acumulada escrita en E22), se trata de la Verde, y si no, es Amarilla. La primera vez que se organiza esto resulta complicado, pero hay que insistir y buscar otros ejemplos. Esta fórmula, en nuestro caso, es:

=SI(G5<E$21;"Roja";SI(G5<E$22;"Verde";"Amarilla"))
(hemos copiado la de G5)

En ella se ve claramente el mecanismo: Si el número contenido en G5 es menor que el parámetro A (3/7), se trata de Roja. Si no es Verde o Amarilla según quede menor o mayor que el otro parámetro. El resultado lo tienes en la imagen:

0,01		Roja				
0,18		Roja		38	0,38	0,43
0,34		Roja		33	0,33	0,29
0,64		Verde		29	0,29	0,29
0,9		Amarilla				
0,83		Amarilla		100		
0,35		Roja				
0,52		Verde				
0,95		Amarilla				
0,04		Roja				
0,74		Amarilla				
0,68		Verde				

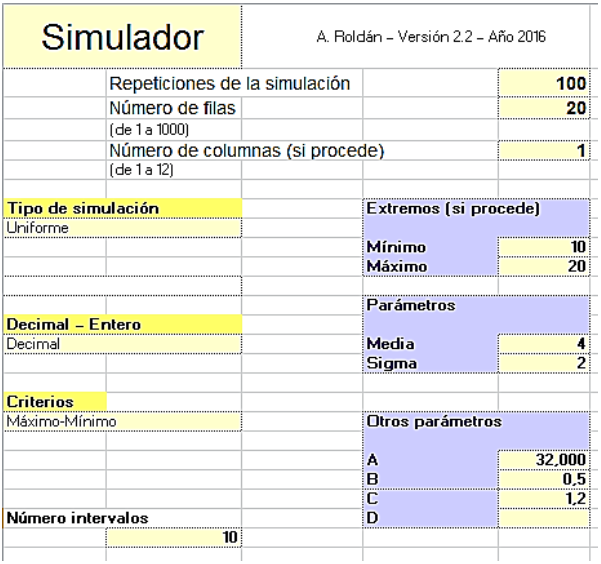
Los números que no llegan a 3/7 producen una roja, los siguientes hasta 5/7 la verde y el resto amarilla. Para ver si la simulación es razonable hemos contado los colores, resultando 38 rojas, 23 verdes y 29 amarillas. A la derecha ves la comparación con la teoría: las amarillas han resultado muy aproximadas y las otras con errores de centésimas, luego aceptamos el procedimiento.

Media y desviación típica

En teoría (no en una simulación concreta), si la distribución uniforme es continua entre los extremos a y b, su media es (a+b)/2 y su varianza (b-a)^2/12. Con el simulador podríamos aproximarnos a esos valores. Construimos un ejemplo:

Estimar la media y desviación típica de una distribución uniforme generada entre los extremos 10 y 20

Concretaremos distribución uniforme con decimales, **extremos 10 y 20**, y para obtener una buena aproximación, usaremos 100 repeticiones del experimento, con una sola columna y 20 filas (todo esto ha sido opcional. Puedes cambiarlo)



En este caso también concretaremos la opción de usar **máximo y mínimo** y fijaremos los intervalos en **10**:

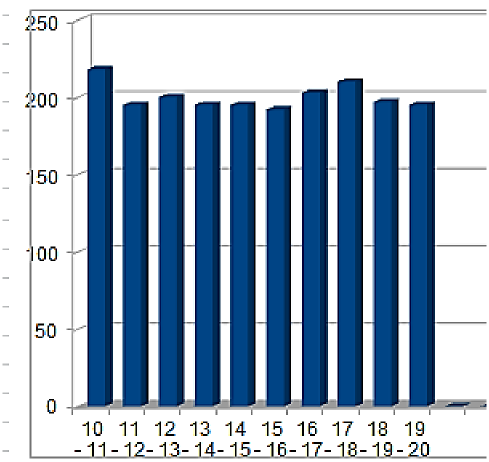
De esta forma generaremos 2000 datos uniformes entre 10 y 20. Su media debería ser (10+20)/2=15 y su varianza (20-10)^2/12=8,33. La desviación típica esperada será la raíz cuadrada de esta cantidad, 2,88.

Iniciamos la simulación y obtenemos:

Estadísticos de momentos	
Media	**14,9677**
Desviación típica	**2,9008**
Asimetría	**-0,0086**
Curtosis	**-1,2125**
Valores teóricos	
Media	**15,0000**
Desviación típica	**2,8868**
Asimetría	**0,0000**
Kurtosis	**-1,2000**

Ha resultado bastante aproximado: media 14,96 y desviación típica 2,9008. En el gráfico se percibe bastante bien la uniformidad:

Gráfico



Es buena práctica, en cursos elementales de Estadística, construir estas simulaciones, porque ayudan a fijar conceptos.

EXPERIMENTO DE BERNOUILLI

Todos tenemos la experiencia de encuestas de opinión que no aciertan, o pronósticos de lluvia que no se cumplen. Solemos exigir a la Teoría de la Probabilidad y a la Estadística resultados que no nos pueden dar. Con esta simulación intentaremos comprobar las propiedades ya sabidas de los experimentos aleatorios:

- Repetido un experimento aleatorio en las mismas condiciones, no tiene que dar los mismos resultados.
- Los resultados son imprevisibles.
- En general (no siempre), cada experimento suele ser independiente de los anteriores y no se ve influido por ellos.
- A pesar de lo afirmado, en largas series de repeticiones de un experimento aleatorio se observan unas ciertas regularidades.

Usaremos la hoja de cálculo **Simulador**, programada en LibreOffice Calc y Excel, que para la simulación que se propondrá funcionará perfectamente.

Está alojada en

Versión Excel:

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.xslm

Versión LibreOffice:

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.ods

y la puedes descargar para tu uso.

Para entender algo mejor la relación entre probabilidad y frecuencia simularemos una distribución de Bernouilli, que es la más sencilla de todas. Consiste en imaginar un suceso, por ejemplo tirar un dado y que resulte un 6, y construir una variable cuyo valor sea 1 si ocurre ese suceso y 0 si no ocurre. Así, el 1 tendrá probabilidad 1/6 de salir y el 0, suceso contrario, 5/6, es decir, mucho más probable. Suponemos que en una serie de intentos, el resultado de cada uno no se ve influido por los anteriores.

Primera simulación

Imagina que disponemos de una bola roja y dos blancas en una bolsa, y que extraemos varias veces una bola, la identificamos y la devolvemos a su sitio. Esperaremos que por cada vez que salga una roja aparecerán dos blancas, es decir, intuitivamente asignamos a la roja (que representaremos por el 1) una probabilidad de 1/3 y a las blancas una de 2/3. Si repetimos el experimento muchas veces tendremos la expectativa de que la frecuencia de las blancas será el doble que la de la roja. Observa estas tiradas que hemos conseguido con el simulador:

0	0	0	0	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	1	0	0	0

En ella han aparecido 39 ceros y 21 unos. Como contiene 60 tiradas, habríamos esperado 20 unos (rojas) y 40 ceros (blancas). Existe, pues una diferencia de una unidad, o expresado en porcentaje del 1,67%.

La primera idea que debes tener respecto a la relación entre probabilidad (tu expectativa previa) y la frecuencia observada después de un experimento es que presentan valores bastante aproximados, pero no exactos, salvo casualidades.

Si no se tiene en cuenta esto, dejaremos de creer en los sondeos de opinión o los pronósticos meteorológicos, porque creeremos que se equivocan. Se debe pensar siempre que estos experimentos miden nuestras expectativas, y no la realidad. ¿Se puede intentar disminuir la diferencia entre frecuencia y probabilidad? Pues sí y no. Seguimos hablando de expectativas: si aumentas el número de experimentos esperarás que el error en porcentaje disminuya, pero tampoco esto te da seguridad. Siempre medimos la esperanza y no la certeza. Inténtalo tú:

Abre el simulador y trabaja en su primera hoja *Simulación*. Sigue estos pasos:

Como tipo de simulación elige ***Bernouilli*** con el desplegable:

Tipo de simulación
Bernouilli

Como parámetro A, situado en el bloque *Otros parámetros*, y que contendrá la probabilidad, escribe esto: **=1/3**, y te dará un valor de 0,3333

Otros parámetros	
A	0,333
B	

En el ejemplo hemos simulado 60 repeticiones del experimento. Puedes aumentar a 30 filas por 9 columnas (o bien otro valores) para que nos resulten 270 intentos

Número de filas	30
(de 1 a 1000)	
Número de columnas (si procede)	9
(de 1 a 12)	

Señala como mínimo el 0 y como máximo el 1:

Extremos (si procede)	
Mínimo	0
Máximo	1

Para terminar, en la parte baja del cuadro concreta como criterio Máximo-Mínimo, y, más abajo, número de intervalos igual a 2. Capturamos el cuadro completo:

Simulador		A. Roldán - Versión 2.2 - Año 2016	
Repeticiones de la simulación			1
Número de filas			30
(de 1 a 1000)			
Número de columnas (si procede)			9
(de 1 a 12)			
Tipo de simulación		**Extremos (si procede)**	
Bernouilli			
		Mínimo	0
		Máximo	1
		Parámetros	
Decimal - Entero			
Entero		**Media**	4
		Sigma	2
Criterios			
Máximo-Mínimo		**Otros parámetros**	
		A	0,333
		Probabilidad	
		C	
Número intervalos		**D**	
	2		

Observa que hemos dejado la Media y la Sigma de una simulación anterior, porque no van a intervenir. Con esto tienes definido un nuevo experimento con más repeticiones. Según el carácter de los fenómenos aleatorios, esperaremos un error menor, **pero eso nunca es seguro**.

Pulsa el botón *Simulador*

Simulador

Te aparecerán muchos unos y ceros. A nosotros nos resultó esto:

0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0

No vas a contar todos esos ceros y unos. Pasa a la siguiente hoja, Estadísticos, y lee las frecuencias:

-0.5 - 0.5	184
0.5 - 1.5	86

En nuestro caso, en lugar de 180 y 90, que sería lo esperado, hemos obtenido 184 y 86, con un error de 4 unidades, 4,44% de error. **Luego el error ha aumentado. No te puedes fiar de los fenómenos aleatorios.**

Es muy probable que tú hayas obtenido mejor resultado. Lo hemos repetido y los errores obtenidos han sido 10, 1, 2, 5, 0, 8, 7, 6,…Como ves, muy variables y con poca fiabilidad. Es posible que tú también hayas obtenido resultados bastante dispares.

Si deseas introducirte en la Estadística debes aceptar este hecho. Sólo son seguros los resultados posteriores a un experimento, y no nuestras expectativas previas.

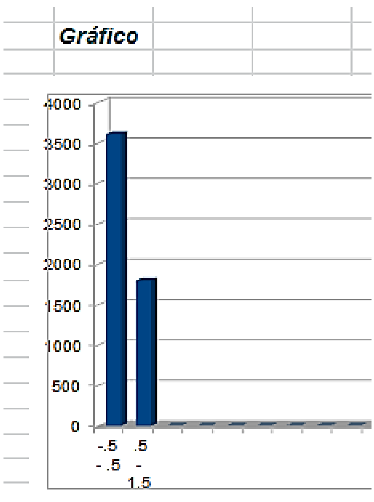
Seguimos insistiendo. Ese error hay que reducirlo. Para ello aumentaremos aún más el número de experimentos. Busca la casilla de Repeticiones de la simulación y marca 20 repeticiones, lo que equivale a 5400 experimentos.

Pulsa de nuevo en el botón Simulador y verás oscilar los datos 20 veces. Pasa a la hoja ***Estadísticos***. Lee las frecuencias. A nosotros nos han resultado 1738 bolas rojas y 3662 blancas, en lugar de las esperadas 1800 y 3600, con un error de 62 bolas, que representa un 1,1% de error. Es una mejora, pero no espectacular. Como regla empírica se suele tomar un 3% de error esperado en 1000 experimentos (esto tiene fundamentación teórica).

Si comparas los valores obtenidos en los estadísticos de la simulación en comparación con los teóricos, la impresión de buen ajuste mejora:

Estadísticos de momentos	
Media	0,3324
Desviación típica	0,4711
Asimetría	0,7115
Curtosis	-1,4937
Valores teóricos	
Media	0,3333
Desviación típica	0,4714
Asimetría	0,7071
Kurtosis	-1,5000

También parece que una columna es el doble de alta que la otra en el gráfico:



Hemos aprendido que cuando se realiza un experimento aleatorio el error que hay que medir es el relativo, el porcentaje, que calculas dividiendo el error absoluto (aquí 62 bolas) entre el total de experimentos (540) y pasarlo, si se desea, a porcentaje.

Hemos repetido el experimento de los 5400 intentos y nos han aparecido estos errores:

0,02%, 0,07%, 1,02%, 0,46%

En conjunto es más fiable que el primer experimento.

Si deseas simular experimentos en los que confíes que se dé una proximidad entre probabilidad y frecuencia, deberás aumentar el número de experimentos (con el consiguiente gasto. Por ello son populares los sondeos con 1000, 5000 o 10000 encuestados, pero no más)

En este ejemplo de Bernouilli conocemos la probabilidad, pero en un sondeo o una previsión meteorológica no lo sabemos y tendremos que manejarnos con cotas de error (ya lo irás viendo)

Por curiosidad, hemos aumentado el número de repeticiones a 200 (tarda un poco), es decir, 54000 experimentos, consiguiendo un error de 0,2%.

Si deseas afinar más tus resultados deberás aumentar el número de repeticiones, con el consiguiente gasto en tiempo y dinero.

NOTA: En estas simulaciones estamos juzgando la exactitud de la función ALEATORIO de las hojas de cálculo. Si esta no está bien programada sufriremos errores sistemáticos, pero como nuestro objetivo es aclarar conceptos, no parece muy grave.

Segunda simulación

Cuando se interviene en procesos aleatorios en la vida real llaman mucho la atención las rachas: tener cuatro varones seguidos, sacar un seis en el parchís tres veces o que veas en la calle varios coches aparcados de la misma marca. Simularemos experimentos de Bernouillli para descubrirlas. Como todo esto es aleatorio, nunca sabremos si aparecerán o no.

Tener cuatro varones seguidos

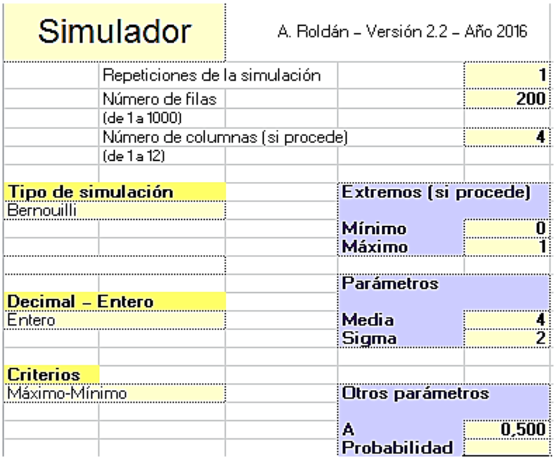
Ya sabes cómo se programa el simulador: como parámetro A escribiremos =1/2, que es la probabilidad aproximada de nacer varón. Luego concretaremos una sola columna para leer mejor y, por ejemplo, 200 filas. ¿Has obtenido una racha de cuatro unos (también valdría de ceros, pues tienen la misma posibilidad)?

En nuestro intento ha aparecido una racha de cuatro unos y otra de cinco muy cercana a la anterior:

1
0
1
1
1
1
0
0
0
1
1
1
1
1
0
0

Esto significa que no es un suceso tan raro. Aparecieron en 200 intentos más rachas de cuatro elementos (ceros o unos) e incluso una racha de ocho unos.

Otra forma de verlo es contar con cuatro columnas y ver si en alguna aparecen cuatro unos (con esto anticipamos la distribución binomial, que estudiaremos en su momento):



En el primer intento hemos conseguido 17 filas en las que aparecen cuatro varones. En la imagen tienes dos casos seguidos:

1	1	1	1		1
1	1	1	1		1

El último 1 de la fila resulta porque hemos añadido la función *producto* para contar mejor los 17 casos.

Podemos considerar que la probabilidad de que aparezcan cuatro varones es $0,5^4=0,0625$, que multiplicado por 200 nos da el valor teórico, 12,5, por lo que nuestra simulación, con 17, no era demasiado acertada.

Tercera simulación

Recordarás la Ley de Murphy en sus distintas variantes: “Si algo puede salir mal, probablemente saldrá mal”. En efecto, a veces falla todo lo que era susceptible de fallo. Por eso, en instalaciones en las que la seguridad es prioritaria se suelen duplicar o triplicar los equipos. Imagina que en un quirófano existen tres alimentadores de energía, cada uno con una fiabilidad del 90%. ¿Podrán fallar todos a la vez?

Simularemos Bernouilli con parámetro A igual a 0,1 (probabilidad de fallo) y planificaremos tres columnas, que representarán a los tres equipos, y 1000 filas. ¿Aparecerá un fallo triple? Lo sabremos si aparece una fila con tres unos. Lo hemos intentado y logrado al primer intento:

0	0	0
1	1	1
0	1	0
0	1	0

Los que entendéis la probabilidad habréis comprendido que se espera un fallo cada mil intentos, porque 0,1*0,1*0,1=0,001

Podéis plantearos otras simulaciones de sucesos cuya probabilidad podáis estimar y comprobar después si la simulación se acerca a las expectativas previas.

SIMULACIÓN NORMAL

En apartados anteriores vimos la distribución uniforme y la de Bernouilli. Hoy lo haremos con la normal.

Nos basaremos en esta también en las prácticas de nuestro curso de Estadística,

(http://www.hojamat.es/estadistica/iniestad.htm)

adaptándolas al formato de un blog. Usaremos nuestro Simulador implementado para hojas de cálculo, el cual puede sufrir cambios a lo largo de la serie, por lo que se aconseja su recarga en caso de duda.

Distribución normal

Si no recuerdas la distribución normal puedes acudir a la Teoría correspondiente

(http://www.hojamat.es/estadistica/tema6/teoria/teoria6.pdf).

Por ahora basta con saber que siguen esa distribución normal de forma aproximada muchos datos tomados de nuestra vida diaria:

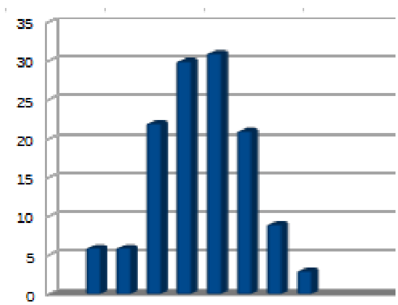
- Magnitudes que dependen de muchas causas independientes, cuyos efectos se suman y cualquiera de ellas aislada tenga efectos despreciables.

- Distribuciones de errores en las medidas.

- Medidas de tipo antropológico (estaturas, pesos, inteligencia...) y biológico (glucemia, nivel de colesterol...)

- Límite de otras distribuciones estadísticas cuando n aumenta.

Todas ellas producen gráficos con forma de campana de Gauss, más o menos aproximada.



Nuestro simulador puede producir datos aleatorios que sigan esta distribución normal.

Puedes descargarlo para Excel

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.xlsm

Y para LibreOffice Calc

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.ods

Esta herramienta está en desarrollo, por lo que debes ignorar las hojas no terminadas.

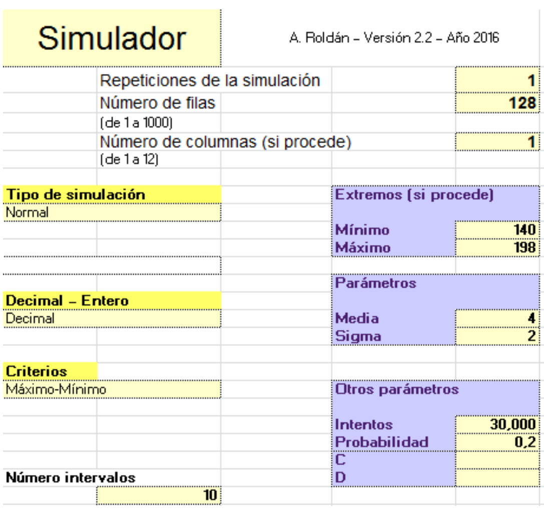
La forma más práctica de plantear una simulación de este tipo es la de dar el promedio de los datos y la desviación típica, pero también funciona conociendo el mínimo y el máximo esperados.

Lo vemos con algún ejemplo:

Los de más altura

En un Centro de Enseñanza se han tallado todos los alumnos y alumnas de un nivel, 128 en total y ha quedado como estatura mínima la de 140 cm, y como máxima, 198 cm. Si deseamos seleccionar a aquellas personas con estatura superior a 180 cm. ¿Cuántas esperaremos encontrar?

La teoría estadística puede responder a esta pregunta mediante las propiedades de la distribución normal. Aquí lo intentaremos con el Simulador:



Hemos concretado lo siguiente:

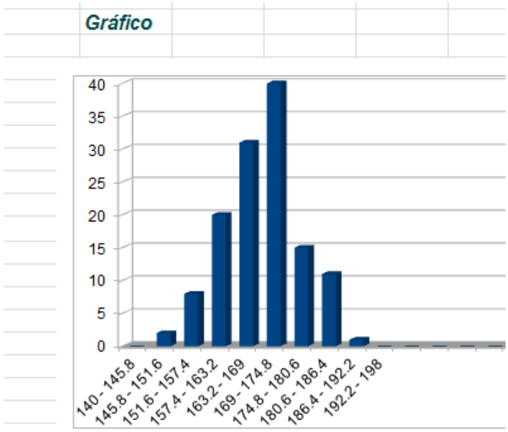
- Distribución normal con decimales (son estaturas) usando máximo y mínimo
- Mínimo 140 y máximo 198
- Una columna de 128 filas (número de alumnos y alumnas)
- Diez intervalos

Procura localizar bien todos esos datos en sus celdas correspondientes. Pulsa el botón "**Simulador**".

Con este planteamiento la simulación se aproximará bastante a las medidas reales. Si pasas a la segunda hoja advertirás la forma típica de campana de esta distribución, y que la estatura media es aproximadamente de 169 cm., y la desviación típica cercana a 8. No podemos pretender resultados idénticos a los previstos por la teoría, pero comparando los estadísticos de la simulación con los valores teóricos, vemos que existe una buena aproximación.

Estadísticos de momentos			*Tabla de frecuencias*	
Media	169,2434			
Desviación típica	8,0031		140 - 145.8	0
Asimetría	-0,0819		145.8 - 151.6	2
Curtosis	-0,2337		151.6 - 157.4	8
			157.4 - 163.2	20
			163.2 - 169	31
			169 - 174.8	40
Valores teóricos			174.8 - 180.6	15
Media	169,0000		180.6 - 186.4	11
Desviación típica	8,2857		186.4 - 192.2	1
Asimetría	0,0000		192.2 - 198	0
Kurtosis	0,0000			

La gráfica también tiene forma aproximada de campana, aunque con tan pocos elementos de simulación, nunca seguirá ese tipo teórico:



También, de paso, hemos descubierto que esperaremos unas 12 personas con más de 180 cm. Afinamos esto más. Busca el apartado de ***Intervalos*** en la hoja de resultados

	Intervalos		
a	180	180	12
b	198	200	16
f	14	417	432
h	0,109375	0,417	0,432

Con esta tabla podemos contar fácilmente resultados sin tener que recorrerlos. Tiene un funcionamiento simple, y es el de escribir en la columna correspondiente (en nuestro caso la primera, porque solo hay una) los extremos entre los que deseamos contar resultados. En nuestro caso serían 180 y 198, que es el máximo. Ahora basta con pulsar el botón

Intervalos y nos devolverá la frecuencia absoluta, 14, y la relativa, 0,11 aproximadamente, un 11%.

Repitiendo la simulación han resultado, en varios intentos, 15, 11, 8, 11 y 15, por lo que juzgamos que lo más probable es que nos encontremos con unos 11, lo que nos permitirá organizar un equipo de baloncesto, si ese era el objetivo.

Si conoces algo de la teoría de esta distribución, sabrás que existen funciones y tablas que te devuelven este dato de forma teórica, pero nuestro objetivo estaba en recoger los datos de una simulación, no en prever el resultado. En nuestro caso, y no seguiremos con el tema, la aproximación sería:

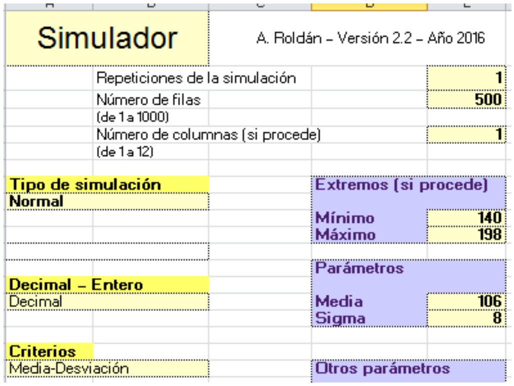
1-DISTR.NORM.N(180;169;8,2857;1)=0,092157044

Un poco menor que la obtenida del 11%, en este caso un 9,2%. Así funcionan los resultados en las simulaciones. Nunca esperes aproximaciones destacables.

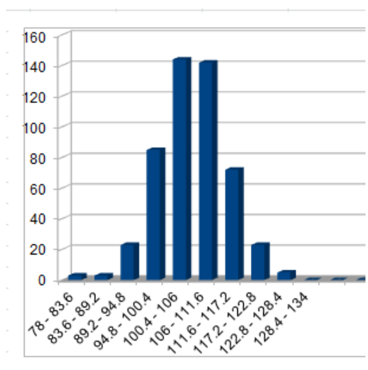
Un ejemplo con media y desviación típica

Una población de 500 personas con riesgo de diabetes en una ciudad ha presentado un promedio de 106 mg/100ml de nivel de glucosa en sangre y una desviación típica de 8 mg/100ml. Diseñar una simulación para encontrar a partir de qué nivel encontraremos las 50 personas con más riesgo.

Organizamos la simulación, pero usando ahora media y desviación típica:



Obtendremos una columna con 500 niveles de glucosa y una distribución en forma de campana de Gauss.



En nuestra simulación se obtuvieron media y desviación bastante cercanas a las teóricas:

Estadísticos de momentos	
Media	**105,6800**
Desviación típica	**7,2037**
Asimetría	**-0,0999**
Curtosis	**0,5016**
Valores teóricos	
Media	**106,0000**
Desviación típica	**8,0000**
Asimetría	**0,0000**
Kurtosis	**0,0000**

Si ahora deseamos obtener los cincuenta niveles más altos, nos bastará con ordenar la columna G de la primera hoja (de mayor a menor) y observar n qué nivel se encuentra el número 50:

116,74	48
116,71	49
116,4	50
116,31	51
116,26	

Vemos que hay que comenzar por el nivel 116,4 para así poder seleccionar los 50 posibles pacientes con más riesgo. Si repites la simulación varias veces podrás quedarte con una media más aproximada.

También podemos trabajar con los intervalos cambiando el mínimo hasta obtener un resultado aproximado de 50 personas. En otra simulación nos da un tope de un nivel de 114 o 115:

	Intervalos
a	114,5
b	300
f	51
h	0,102

Como en el caso anterior, se puede acudir a la teoría:

INV.NORM(0,9;106;8)=116,25

Hemos tomado de probabilidad 0,9 porque los 50 en una simulación de 500 representa un 10% superior y un 90% inferior. Nuestra simulación se queda un poco corta.

Medidas válidas

En una medición con mucho riesgo de errores se ha decidido rechazar aquellas medidas que se alejen de la media más de una desviación típica y media. Supongamos que en mediciones anteriores resultó una media de 65 y una desviación típica de 8. ¿Qué número aproximado de mediciones debemos efectuar para garantizarnos 200 medidas catalogadas como válidas, si la distribución en la población se puede considerar normal?

De nuevo acudimos a una simulación. Según los datos que nos dan, las medidas válidas estarán entre 65-3*8/2 y 65+3*8/2, es decir, entre 53 y 77. Comenzamos una simulación de 250 mediciones y concretamos 14 intervalos.

Observamos, de forma aproximada, que habría que desechar unas 10 medidas inferiores y unas 15 superiores, lo que nos daría 250-10-15=225 medidas válidas.

Tabla de frecuencias	
37 - 41	0
41 - 45	1
45 - 49	2
49 - 53	7
53 - 57	18
57 - 61	37
61 - 65	53
65 - 69	52
69 - 73	41
73 - 77	24
77 - 81	10
81 - 85	4
85 - 89	0
89 - 93	1

Esta observación se confirma también con intervalos:

	Intervalos
a	53
b	77
f	225
h	0,9

Probamos con 230 simulaciones, pare ver si nos acercamos a 200 válidas. Después de la simulación hay que desechar 16+18=34, con lo que nos quedamos cortos, 196. Subimos y bajamos el número de simulaciones y 230 parece quedar en la media, luego es aconsejable usar muestras de 230 medidas.

Esto ha sido una especie de juego. Si acudimos a la distribución normal teórica, descubriremos que el porcentaje esperado de medidas que se alejen más de 3/2 de desviación típica por un lado es de 0,066807201. Por los dos lados será 0,133614403, y restando de 1, el porcentaje de medidas válidas sería 0,866385597. Dividimos 200 entre ese porcentaje y obtenemos 230,844096. Nuestra simulación no estaba descaminada.

Con este experimento también hemos aprendido que los porcentajes no dependen de una media concreta sino de la medida tipificada Z, que en este caso valía Z=1,5.

Obtención de muestras

En el caso de la distribución normal es muy interesante el disponer de muestras de un colectivo del que sabemos algunos parámetros (generalmente media y desviación típica). Vemos algunos ejemplos:

Distribución de errores

75,6	78,0	77,8	77,5
75,2	79,0	76,8	78,0
76,5	76,8	76,6	77,2
77,3	78,4	76,6	76,6
77,1	77,6	77,3	76,1

Los datos anteriores simulan 20 repeticiones de una medida. A simple vista parece que la media es 77. En el Simulador se ha obtenido media 77,1 y desviación típica 0,9. Esta tabla puede servir para que el alumnado obtenga también la media, la desviación típica y la gráfica, para saber si se aproxima a la distribución normal. Con el Simulador se pueden preparar rápidamente distintas muestras para un trabajo por equipos. También puede aprenderse en clase el funcionamiento de esta herramienta y que los grupos simulen su propia muestra.

Colesterol en sangre

Esta muestra ha sido generada mediante el Simulador:

221,0205,9208,2224,8205,3209,7220,8229,7

202,8215,2203,6240,7215,8236,4234,6213,6

189,0212,7197,4203,2175,4218,4227,6222,4

246,2238,8211,5229,4206,4195,8179,4206,3

220,4234,2207,5184,7204,5224,4220,2199,3

Se puede intentar adivinar en clase qué media se ha usado, e investigar si estos datos entran en lo que es frecuente en la vida real.

Cociente intelectual

A la vista de esta tabla, se puede discutir qué media y desviación típica se usa y seguir investigando en Internet:

103	87	106	57	100
62	88	81	98	83
102	90	98	103	100

109	76	93	99	100
107	84	75	104	105
91	96	111	121	108
93	89	89	88	92
71	85	92	104	83
82	97	88	91	82
103	85	110	108	94
84	101	94	86	97
105	92	85	120	121

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Llegamos a la distribución binomial. Como en toda la serie, y ese es uno de sus objetivos, usaremos la hoja de cálculo *Simulador*. Aunque la hayas descargado en otra ocasión, es conveniente que lo vuelvas a hacer, pues se le han añadido nuevas prestaciones, como la imitación de la máquina de Galton con probabilidad prefijada.

Se encuentra en las direcciones

Versión Excel:

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.xslm

Versión LibreOffice:

http://www.hojamat.es/estadistica/tema1/open/simulador.ods
y la puedes descargar para tu uso.

Distribución binomial

Esta importante distribución se aplica a pruebas repetidas de la ley de Bernouilli (http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/12/simulaciones-experimento-de-bernouilli.html) con las siguientes condiciones:

a) Se realizan experimentos repetidos del tipo Bernouilli, **n** en total.

b) La probabilidad **p** permanece constante en todos ellos

c) Cada experimento es independiente del resultado anterior.

Llamamos a **n** el ***número de intentos***. Estamos interesados en estudiar el número de veces que aparece el suceso A (éxito). A su número de ocurrencias le llamaremos ***número de éxitos***.

Por tanto la ley binomial se aplicará cuando repetimos un experimento cumpliendo las condiciones a), b) y c) establecidas y deseamos estudiar el número de éxitos que obtendremos. Son de este tipo las tiradas múltiples de monedas, de dados, de ruleta, etc.

La probabilidad de obtener **r** éxitos en **n** intentos se demuestra que equivale a

$$B(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

En ella el paréntesis es el número combinatorio **n sobre r**. Del hecho de que esta fórmula sea muy similar a la del Binomio de Newton proviene el nombre de ***binomial***.

La media (esperanza matemática) de esta distribución viene dada por

$$E(r) = np$$

y su varianza por

$$V(r) = npq$$

Consecuencia de esta es una fórmula que nos será muy útil, y es la de su desviación típica, que viene dada por

$$DESV(r) = \sqrt{npq}$$

La distribución binomial de probabilidad **p** y número de intentos **n** se representa generalmente por ***B(n,p)***
Puedes completar su estudio en

https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_binomial

Uso de la hoja Simulador

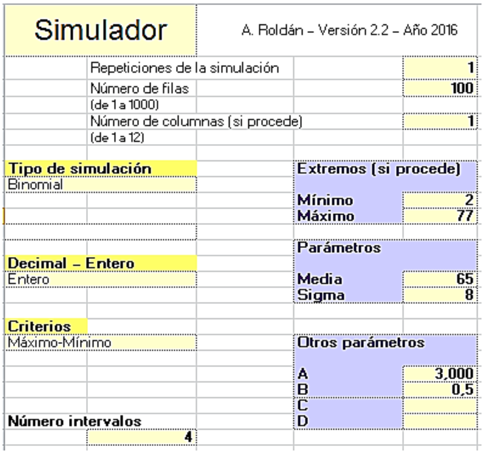
Comenzamos con un ejemplo, para estudiar la forma de plantear una simulación de este tipo. Habrá que concretar algunos parámetros, al igual que se hizo en simulaciones anteriores.

Tiramos 100 veces tres monedas. ¿En cuántas de ellas esperamos obtener tres caras?

La distribución binomial contiene decisiones automáticas en el *Simulador*, por lo que sólo hay que fijarle los siguientes parámetros:

- Número filas y columnas: 100 filas y una columna (en este caso)
- Tipo de simulación: Binomial (usa el desplegable)
- Número de intentos: Lo escribes como parámetro A. En este caso son 3.
- Probabilidad: Se escribe como parámetro B. Si deseas usar fracciones, escribe delante el signo =. Así, en el ejemplo escribiríamos =1/2.

El resto de parámetro lo rellena la hoja.
En la imagen observamos que ha fijado el número de intervalos en 4, para contar con el 0.



Los parámetros que no cambian se ignoran, como por ejemplo, 2 y 77.

Pulsamos sobre el botón “Simulación” y obtenemos los resultados de la simulación:

Número de veces en el que resultan tres caras:

Tabla de frecuencias	
0	9
1	42
2	38
3	11

Nos resultan 11 veces. Repetimos simulación y obtenemos 14, 16, 13, 14, 9, 17,…Esta variabilidad confirma lo peligroso de obtener conclusiones con solo 100 repeticiones. La simulación siempre es orientativa, pero se debe efectuar con más ensayos.

En este caso binomial también se pueden consultar los intervalos en la segunda hoja. Escribimos como extremos a y b el mismo número esperado de caras, 3, en la primera columna y nos devuelve el número de casos obtenido. En la imagen no aparece el 11, sino 16, porque corresponde a otra simulación:

Intervalos

a	3	2	12
b	3	3	16
f	16	417	432
h	0,16	0,417	0,432

Estudio con funciones de hoja de cálculo

Otra forma de responder a la cuestión es mediante las funciones estadísticas de Excel y Calc. Aquí estaría indicada ***DISTR.BINOM.N(X;N;P;Tipo)*** En ella escribimos los parámetros siguientes:

- **X** es el punto en el que deseamos consultar la distribución, el resultado que esperamos. En este caso sería x=3, porque esperamos tres caras.
- **N** es el número de intentos, que aquí también es 3.
- **P** representa la probabilidad, que en monedas es 0,5

- **Tipo** indica si la distribución es acumulada o no. Si su valor es 1, la distribución es acumulada y con 0 sin acumular. En el ejemplo deseamos no acumular. Sólo nos interesa el caso de 3 caras.
-

La escribimos en una celda y obtenemos: DISTR.BINOM.N(3;3;0,5;0)=0,125

Luego para 100 tiradas, el valor esperado sería 12,5. En la simulación obtuvimos 11, 14, 16, 13, 14, 9, 17,…Esto da idea de la variabilidad que presenta nuestra simulación.

Póquer con dados

En el juego familiar de póker con cinco dados, obtendremos póquer cuando cuatro de ellos marquen un mismo valor. Estudiaremos el caso en el que aparezcan en la primera tirada, sin comodín y sin acudir a otras tiradas, un póquer de reyes, por ejemplo. Se considera un suceso difícil. Lo simulamos:

- Tipo: Binomial
- Parámetro A: 5 dados
- Parámetro B: Probabilidad 1/6 (lo escribimos como =1/6 y obtendremos 0,1666…)
- Repeticiones: 500
-

	Número de filas			500
	(de 1 a 1000)			
	Número de columnas (si procede)			1
	(de 1 a 12)			
Tipo de simulación			Extremos (si procede)	
Binomial				
			Mínimo	2
			Máximo	12
			Parámetros	
Decimal – Entero				
Entero			Media	65
			Sigma	8
Criterios				
Máximo-Mínimo			Otros parámetros	
			A	5,000
			B	0,16667
			C	
Número intervalos			D	
	6			

Con ese número de repeticiones, no resultan en la simulación ni póquer de reyes ni repóquer:

Tabla de frecuencias	
0	180
1	226
2	78
3	16
4	0
5	0

Las frecuencias del 4 y el 5 son nulas, luego nuestra intuición de que son sucesos improbables no iba descaminada. Sobre el 500 escribimos un 2, para obligar a repetir la simulación dos veces.

Repeticiones de la simulación		2
Número de filas		500
(de 1 a 1000)		
Número de columnas (si procede)		1
(de 1 a 12)		

Esta vez, con 1000 intentos sí se ha conseguido un póquer de reyes en una de las tiradas:

Tabla de frecuencias	
0	423
1	383
2	164
3	29
4	1
5	0

Aquí hemos trabajado con un solo valor en el resultado (reyes), pero el póquer puede salir con cualquier valor, lo que, al ser sucesos disjuntos, multiplicaría por 6 la probabilidad, pero es tan pequeña, que la simulación vale para darnos una idea de su dificultad.

Un ejemplo con intervalos

En un bombo de lotería se han introducido 100 bolas, numeradas del 00 al 99, con lo que todas las decenas figuran con 10 elementos. La probabilidad de obtener a ciegas una bola cuyo número comience por 3, será de 10/100=0,1

Imaginemos que 200 personas van sacando 10 bolas con reposición y contando las veces en las que obtienen un 3 en las decenas. ¿Cuántas de ellas esperaríamos que obtengan entre 3 y 10 éxitos?

El planteo sería:

- Una repetición con 200 filas (200 personas)

- Número de intentos: 10
- Probabilidad: 1/10

	Repeticiones de la simulación		1
	Número de filas (de 1 a 1000)		200
	Número de columnas (si procede) (de 1 a 12)		1
Tipo de simulación		**Extremos (si procede)**	
Binomial			
		Mínimo	2
		Máximo	12
		Parámetros	
Decimal – Entero			
Entero		**Media**	65
		Sigma	8
Criterios			
Máximo-Mínimo		**Otros parámetros**	
		A	10,000
		B	0,1
		C	
Número intervalos		D	
	11		

Preparamos los intervalos de la segunda hoja para contar entre 3 y 10. Iniciamos la simulación y obtenemos:

Intervalos

a	3	2	12
b	10	3	16
f	9	417	432
h	0,045	0,417	0,432

Nos dan 9 casos, con una frecuencia relativa de 0,045. Fijamos ahora el experimento con 10 repeticiones (parte alta del cuadro de parámetros), pero en este caso el botón de intervalos no nos sirve, porque funciona sobre las filas de la simulación, pero no acumula. Mejor es leer las frecuencias de la tabla y sumar:

0	706
1	788
2	361
3	124
4	17
5	3
6	1
7	0
8	0
9	0
10	0

Entre 3 y 10 se han obtenido 124+17+3=144, que comparado con 2000 repeticiones nos da una frecuencia relativa de 144/2000=0,072, que parece más ajustada a la realidad que el 0,045 que obtuvimos con una sola tirada.

Podemos acudir a la función DISTR.BINOM.N(). En este caso restaremos la función acumulada en 10 de la acumulada en 2:

DISTR.BINOM.N(10;10;0,1;1)-
DISTR.BINOM.N(2;10;0,1;1)=0,07019

Se observa, como era de esperar, que la frecuencia en la simulación repetida (0,072) se acercaba más al valor teórico (0,07019).

Aproximación a la normal

Se sabe que la distribución binomial se acerca a la normal bajo ciertas condiciones. Puedes repasar esta cuestión en

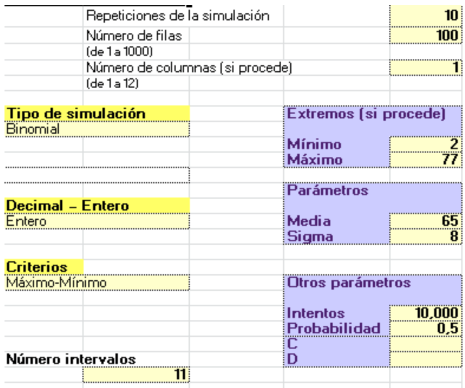
https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_distribution

Normalmente se piensa en la distribución normal cuando el valor de p es cercano a 1/2 y N tiende a infinito, aunque se suele obtener una buena aproximación práctica para N>30. Todo esto es un poco empírico, y se basa en el Teorema de Moivre, que puedes consultar en

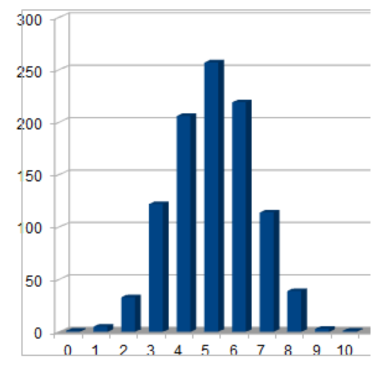
http://www.hojamat.es/estadistica/tema6/teoria/teoria6.pdf

Ahí también se incluyen otros consejos para poder usar esta aproximación. Sólo queda indicar que la distribución normal límite poseería la misma media y desviación típica que la binomial.

Para ilustrar este ajuste, elegimos una binomial de 10 intentos y probabilidad 0,5, la simularemos en 100 filas con 10 repeticiones:



Con estas condiciones la media es 5 y la desviación típica 1,5811. Procedemos a la simulación y obtenemos, efectivamente, un resultado que se aproxima a la distribución normal:

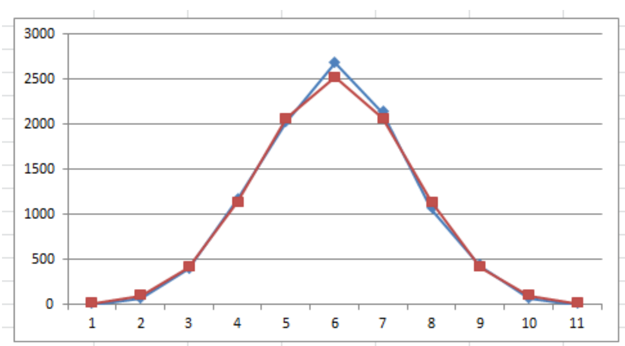


Podemos estudiar el ajuste mediante la función =DISTR.NORM.N(x;M;D;0), que da la frecuencia para un valor dado en la distribución normal de media M y desviación típica D. Hemos incrementado el número de elementos a 1000, dejando en 10 el de repeticiones. A la tabla de frecuencias le hemos añadido esta función de Excel, con el siguiente resultado:

	Simulación	Frec. Rel.	Normal
0		Plano posterior	7,00073
1	63	0,010285	102,8484
2	392	0,041707	417,071
3	1164	0,113372	1133,717
4	2020	0,206577	2065,766
5	2680	0,252313	2523,133
6	2130	0,206577	2065,766
7	1056	0,113372	1133,717
8	431	0,041707	417,071
9	61	0,010285	102,8484
10	0	0,0017	17,00073

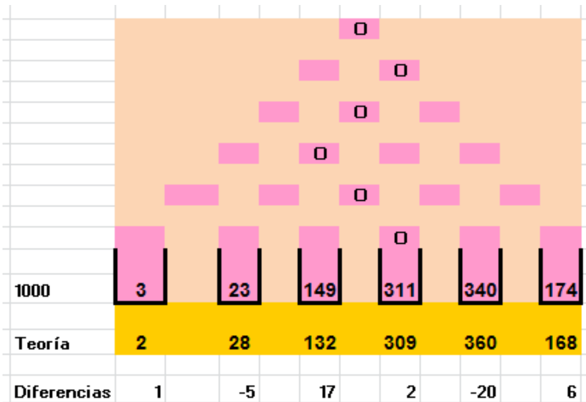
El buen ajuste se puede observar entre la columna de simulación y la de normal. La columna intermedia proviene de la función =DISTR.NORM.N(x;5;1.5811;0) y la última se ha creado multiplicando por N, que aquí es 10000.

Gráficamente se percibe mejor el buen ajuste:

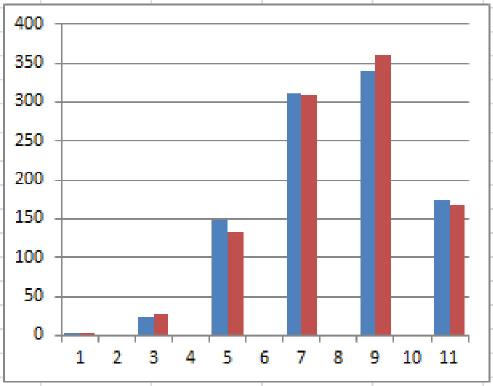


La máquina de Galton como una curiosidad

En la nueva versión del *Simulador* se ha añadido una hoja nueva con el experimento de Galton. Este modelo ya se ofrecía en nuestro curso de Estadística y en otros materiales, pero la nueva versión admite fijar una probabilidad que no tiene que ser necesariamente 1/2. De esta forma se puede visualizar una distribución binomial no centrada en la máquina. Lo puedes ver en esta imagen, correspondiente a p=0,7:



Observamos su sesgo hacia la derecha y su ajuste razonable a la distribución binomial teórica. En el gráfico se observa mejor el ajuste:



Con esto dejamos el tema de la simulación binomial. Se podía extender algo más, pero alargaría el texto.

SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS CIFRAS

INTRODUCCIÓN

En este amplio capítulo se estudia el tema de la suma de los cuadrados de las cifras de un número natural. El tema de las cifras, al depender de la base de numeración, no es el preferido en este documento, pero como sus resultados suelen ser atractivos, lo tocamos con cierta frecuencia.

Este estudio desarrollará tres tipos de propiedades o curiosidades

- Igualdades entre números que implican el cuadrado de las cifras.
- Propiedades y curiosidades, como la de los números felices.
- Iteraciones con recurrencias en las que interviene la suma citada.

CUADRADO DE UN NÚMERO MÁS LOS DE SUS CIFRAS

El tema de las cifras, al depender de la base de numeración, no es el preferido en este blog, pero como sus resultados suelen ser atractivos y muy apreciados por los seguidores, lo tocamos con cierta frecuencia.

La serie desarrollará tres tipos de propiedades o curiosidades

- Igualdades entre números que implican el cuadrado de las cifras.
- Propiedades y curiosidades clásicas, ya estudiadas, como los números felices.
- Iteraciones con recurrencias en las que interviene la suma citada.

Abordamos la primera cuestión:

En el mes de diciembre de 2017, a propósito de la fecha 9/12/17, publiqué en Twitter (Antonio Roldán, @Connumeros) la siguiente curiosidad: 91217 equivale al cuadrado de un número sumado con los cuadrados de sus cifras:

91217=302^2+3^2+0^2+2^2

Como siempre en estas ocasiones, esto me motivó a estudiar mejor la suma de los cuadrados de las cifras de un número, pero, al investigar lo ya publicado, me di cuenta de que esta suma bien merecía lo que en este blog llamo “unas vueltas”, pues son varias las cuestiones interesantes que surgen de la misma. Nos llevará varios apartados, constituyendo una serie, porque he visto que dicha suma da para muchas cuestiones distintas. Es probable que al final del curso 2018-19 se recojan en una publicación.

Comenzaremos con la propiedad que publiqué en Twitter: *¿qué números son equivalentes al cuadrado de otro, sumado con los cuadrados de sus cifras?* Para ello necesitaré una función que calcule esa suma. Ya tengo una en Basic de hoja de cálculo que está diseñada no sólo para los cuadrados, sino para cualquier potencia. La puedes usar en Excel o en LibreOffice Calc, por ejemplo. Es la siguiente:

Public Function sumacifras(n, k)
Dim h, i, s, m

h = n ‘Variable auxiliar
s = 0 ‘Recibirá la suma
While h > 9
i = Int(h / 10)

m = h - i * 10
h = i ‘Estas tres líneas extraen una cifra del número
s = s + m ^ k ‘La potencia se incorpora a la suma
Wend
s = s + h ^ k
sumacifras = s
End Function

Es evidente que en nuestro caso el valor de k siempre será 2, ya que usaremos cuadrados. Puedes eliminar la variable k y sustituirla por 2. Aquí no lo haremos por no perder generalidad en esta función.

En el caso de k=2, la función tiene en el lenguaje PARI una traducción muy simple. Basta pedir

norml2(digits(n)).

Listado de números con la propiedad pedida

Una vez tenemos la función que suma los cuadrados de las cifras de n bastará sumar el número con esa suma, es decir

n+sumacifras(n;2)

Con ello podemos construir un listado:

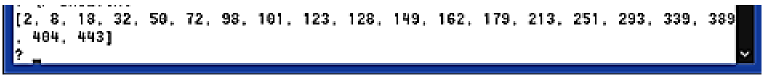
1		2
2		8
3		18
4		32
5		50
6		72
7		98
8		128
9		162
10		101
11		123
12		149
13		179
14		213
15		251
16		293
17		339
18		389
19		443
20		404

Por ejemplo, 162=9^2+9^2, 179=13^2+1^2+3^2, 293=16^2+1^2+6^2,…

Salen desordenados, por lo que hay que acudir a http://oeis.org/A209303, página de OEIS en la que se publican ordenados: 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 101, 123, 128, 149, 162, 179, 213, 251, 293, 339, 389, 404, 443, 446,…Podemos conseguir que se nos presenten ordenados (En Excel basta con el comando de ordenar) con el lenguaje PARI:

list(a)=my(v=List(), t); for(p=1, a, t=p^2+norml2(digits(p));listput(v, t)); vecsort(Vec(v));

print(list(20))



Como era de esperar, este listado sólo incluye números no muy grandes. En el caso de 91217 no hubiéramos descubierto la propiedad consultándolo. Necesitamos una función que nos indique de forma directa si un número posee esta propiedad o no, si es la suma de otro número más los cuadrados de sus cifras.

Función MASSUMACIF

Con la base de la función ***sumacifras*** podemos recorrer, para un número N, desde 1 hasta la raíz k-ésima de N, todos los números posibles, hasta ver si uno cumple la propiedad:

```
Function massumacif(n, k)
Dim i, r, ms

ms = 0
r = Int(n ^ (1 / k))
i = 1
While i <= r And ms = 0
If i ^ k + sumacifras(i, k) = n Then ms = i
i = i + 1
Wend
massumacif = ms
End Function
```

Esta función devolverá un cero si no posee la propiedad, y la base del cuadrado si la cumple. Con ella volvemos al inicio de la cuestión. Si la aplicamos al 91217, con el segundo parámetro igual a 2 (cuadrados) nos devuelve 302.

massumacif(91217;2)=302

Es muy simple la versión de esta función en el lenguaje PARI. El siguiente código produce el mismo listado, idéntico al que se consiguió ordenando la sucesión primitiva.

for(i=1,1000,ms=0;r=sqrt(i);j=1;while(j<=r&&ms==0,if (j^2+norml2(digits(j))==i,ms=j;print1(i,", "));j+=1))

```
? \r ini.txt
2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 101, 123, 128, 149, 162, 179, 213, 251, 293, 339, 389,
 404, 443, 446, 492, 542, 596, 654, 716, 782, 852, 909, 926, 971,
```

Tipos de números

No hemos encontrado cuadrados ni números triangulares en esta sucesión, al menos menores que 70000. Sí figuran primos. Los primeros son:

2, 101, 149, 179, 251, 293, 389, 443, 971, 1181, 1259, 1427, 2843, 2957, 3323, 5237, 5387,…

Sólo hemos identificado tres potencias no cuadrados, 2, 32 y 128, que corresponden a potencias de 2 de una sola cifra, 2, 4 y 8.

Como curiosidad última, sí existen capicúas en la sucesión. Los primeros son 101, 404, 909, 10001, 29292, 40004,…

Los que poseen cifra 0 se justifican fácilmente, como 404, que coincide con 20^2+2^2+0^2. Más difícil es 29292, que sin ordenador hubiera sido difícil obtener que

29292=171^2+1^2+7^2+1^2

Variantes de esta operación

En la suma del cuadrado de un número con la suma de cuadrados de sus cifras podíamos eliminar el que el número se eleve al cuadrado. Simplemente le sumamos el cuadrado de sus cifras. En A258881 tienes publicadas de forma desordenada esas sumas:

0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101, 24, 26, 30, 36, 44, 54, 66, 80, 96, 114, 39, 41, 45, 51, 59, 69, 81, 95, 111, 129, 56, 58, 62, 68, 76, 86, 98, 112, 128, 146, 75, 77, 81, 87, 95, 105, 117, 131, 147, 165, 96,…

Te invitamos a que uses la función MASSUMACIF, debidamente corregida (basta sustituir **i^2** por **i** y eliminar la variable r, siendo sustituida por **i**) para obtener un listado ordenado en Excel:

2
6
11
12
13
17
20
23
24
26
30
31
36

El listado de MASSUMACIF0 puede ser

Function massumacif0(n, k)
Dim i, r, ms

ms = 0
i = 1
While i <= n ‘Se suprime la raíz de n
If i + sumacifras(i, k) = n Then ms = ms + 1 ‘Se acumula la variable ms
i = i + 1
Wend

massumacif0 = ms ‘El resultado es el número de repeticiones

End Function

En PARI podemos efectuar una corrección similar y resultará

for(i=1,100,ms=0;j=1;while(j<=i&&ms==0,if(j+norml2(digits(j))==i,ms=j;print1(i,", "));j+=1))

Su resultado coincide con el de Excel:

```
2, 6, 11, 12, 13, 17, 20, 23, 24, 26, 30, 31, 36, 39, 41, 42, 44, 45, 51, 53, 54
, 56, 58, 59, 62, 66, 67, 68, 69, 72, 75, 76, 77, 80, 81, 83, 86, 87, 90, 95, 96
, 98,
?
```

Números con soluciones múltiples

En http://oeis.org/A225049 están publicados los números de la anterior sucesión que presentan varias soluciones:

30, 41, 56, 81, 95, 96, 98, 101, 112, 114, 121, 125, 131, 142, 146, 152, 157, 168, 173, 177, 182, 186, 191, 196, 197, 199, 206, 209, 213, 215, 216, 217, 227, 230, 232, 234, 240, 243, 245, 247, 248, 257, 260, 262, 266, 272, 276, 284, 285, 287, 292, 299, 300

Por ejemplo 131 = 57+5^2+7^2 = 73+7^2+3^2 = 105+1^2+5^2 = 122 + 1^2+4^2+4^2.

Con el uso de massumacif0(i), si exigimos que su valor sea mayor que 1, obtenemos el mismo listado:

30
41
56
81
95
96
98
101

VARIANTE DE LA CUESTIÓN

Un cuadrado menos los de sus cifras

Podíamos sustituir en la propiedad estudiada anteriormente la suma por la diferencia, es decir, que en lugar de sumar al cuadrado de un número los de sus cifras, se restaran estas para lograr un resultado dado.

Un ejemplo: $2675=52^2-5^2-2^2$

Es fácil obtener un listado de los primeros números que presentan esta propiedad. Basta recorrer los números naturales y restar a cada uno los cuadrados de sus cifras. Estos son los primeros resultados no nulos (lo serían los provenientes de números de una cifra):

99, 119, 139, 159, 179, 199, 219, 239, 259, 279, 396, 436, 476, 516, 556, 596, 636, 676, 716, 756, 891, 951, 1011, 1071, 1131, 1191, 1251, 1311, 1371, 1431, 1584, 1664, 1744,…

Todos cumplen ser equivalentes a un cuadrado menos los cuadrados de sus cifras. Por ejemplo, el último, 1744, cumple: $1744=42^2-4^2-2^2$

Llama la atención el hecho de que la última cifra se mantenga en cada periodo de diez términos, pero es lógico, ya que al ir cambiando las unidades de un número, las de su cuadrado se compensan con el cuadrado de esas unidades.

Supongamos la siguiente distribución de cifras en base de numeración 10:

N=abcd…p y **N+1=abcd…(p+1)**

Tendrían todas su cifras iguales menos la última, es decir

N=10k+p, **N+1=10k+p+1**

Si aplicamos a ambos números la resta de los cuadrados de sus cifras, los primeros sumados serán idénticos, cambiando tan solo p con p+1. Llamemos A y B a esas diferencias:

$\mathbf{A=N^2\text{-sumacuad(abcd..)}-p^2}$

$\mathbf{B=(N+1)^2\text{-sumacuad(abcd…)}-(p+1)^2}$

Resto: $\mathbf{B-A=(N+1)^2-N^2+p^2-(p+1)^2=100k^2+(p+1)^2+20k(p+1)-100k^2-p^2-20kp+p^2-(p+1)^2=20k}$

Esto demuestra que dos números consecutivos restados con los cuadrados de sus cifras forman una progresión aritmética si todas las cifras son idénticas salvo la última. Como esta puede tomar valores entre 0 y 9, cada progresión tendrá 10 términos. Además, hemos demostrado que la diferencia entre ambos es **20k**, siendo k el número formado por las primeras cifras iguales.

$\mathbf{C\text{-}p+1)^2+p^2=(p+1)^2-p^2+20k-(p+1)^2+p^2=20k}$

Si dos números consecutivos coinciden en sus primeras cifras, que forman un múltiplo de 10, 10k, la diferencia en la sucesión es 20k

Tomemos, por ejemplo, 124 y 125

$124^2-1^2-2^2-4^2=15355$

$125^2-1^2-2^2-5^2=15595$

La diferencia 15595-15355=240, que coincide con 20*12, en el que 12 es el número formado por las primeras cifras de 124 y 125.

Función menossumacifras

Para determinar si un número posee esta propiedad, bastará modificar la función MASSUMACIF por otra MENOSSUMACIF que reste los cuadrados de las cifras en lugar de sumarlas. El problema radica en el rango de búsqueda. Si en la anterior se buscaba entre 1 y la raíz cuadrada del número, ahora se efectuará entre esa raíz y otra que garantice que se puedan restar los cuadrados de las cifras. Para ello añadimos al número dado tantas potencias de la cifra 9 como cifras tenga más uno. Quedaría así:

Function menossumacif(n, k)
Dim i, r, t, ms

ms = 0
r = Int(n ^ (1 / k))
t = numcifras(n) + 1 ‘Se toma el número de cifras más 1
t = t * 9 ^ k ‘Se cuentan potencias de 9
t = (n + t) ^ (1 / k) ‘Tope de búsqueda
i = r ‘Inicio de búsqueda
While i <= t And ms = 0
If i ^ k - sumacifras(i, k) = n Then ms = i
i = i + 1
Wend
menossumacif = ms
End Function

Si aplicamos esta función a uno de los términos de la sucesión obtenida deberá obtenerse la solución y un cero para los números que no pertenecen a la misma.

MENOSSUMACIF(11799;2)=109, y se cumple que $109^2-1^2-0^2-9^2=11799$

MENOSSUMACIF(11801)=0, porque no tiene esa propiedad.

Uso de PARI

list(a)=my(v=List(), t); for(p=1, a, t=p^2-norml2(digits(p));listput(v, t)); vecsort(Vec(v));

print(list(100))

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 99, 119, 139, 159, 179, 199, 219, 239, 259, 279, 396, 436, 476, 516, 556, 596, 636, 676, 716, 756, 891, 951, 1011, 1071, 1131, 1191, 1251, 1311, 1371, 1431, 1584, 1664, 1744, 1824, 1904, 1984, 2064, 2144, 2224, 2304, 2475, 2575, 2675, 2775, 2875, 2975, 3075, 3175, 3275, 3375, 3564, 3684, 3804, 3924, 4044, 4164, 4284, 4404, 4524, 4644, 4851, 4991, 5131, 5271, 5411, 5551, 5691, 5831, 5971, 6111, 6336, 6496, 6656, 6816, 6976, 7136, 7296, 7456, 7616, 7776, 8019, 8199, 8379, 8559, 8739, 8919, 9099, 9279, 9459, 9639, 9999

Se puede observar la constancia de la última cifra en ciertos conjuntos de diez elementos.

NATURALEZA DE LA SUMA DE LOS CUADRADOS

Suma de cuadrados de cifras que es a su vez cuadrada

Con la suma de los cuadrados de las cifras podemos construir otro cuadrado, ya bien sea con las cifras solas o sumándolas al número total. También si sumamos las cifras sin elevar al cuadrado o si acumulamos también el número original. Busquemos, pues, cuadrados.

Suma de cuadrados de cifras que es cuadrada

Esta cuestión tiene algo de trivial, pero nos permitirá repasar algunos conocimientos. Es fácil ver que la posibilidad de que la suma de los cuadrados de las cifras sea cuadrada depende de su número

Una cifra

Todos los números de una sola cifra cumplirán lo exigido. Teniendo en cuenta el cero tendríamos 10 soluciones.

Dos cifras

Para que la suma de cuadrados de cifras sea cuadrada, una de ellas ha de valer cero, o las dos han de pertenecer a una terna pitagórica, pero solo existen dos casos: {3, 4} y {6, 8}. En el primer caso tendremos 9 posibilidades: 10, 20, 30,…90, y en el segundo 4: 34, 43, 68 y 86.

Así que de dos cifras sólo obtendremos 13 resultados.

Hemos efectuado una búsqueda con la función MASSUMACIF y el listado confirma estos cálculos, como era de esperar:

N	SUMA CUAD. CIF.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	1
20	4
30	9
34	25
40	16
43	25
50	25

60	36
68	100
70	49
80	64
86	100
90	81

Tres cifras

Este caso es más interesante, pues permite repasar las ternas pitagóricas en tres dimensiones. Con una cifra cada una resultan ser estas:

{1, 2, 2}, {1, 4, 8}, {2, 3, 6}, {2, 4, 4}, {2, 6, 9}, {3, 6, 6}, {4, 4, 7}, {4, 8, 8}, {6, 6, 7}

Puedes comprobar mentalmente que la suma de cuadrados de cada una es otro cuadrado.

Uso de Cartesius

Con nuestra herramienta para producir productos cartesianos condicionados, Cartesius, alojada en

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius) podemos ver las combinaciones de tres cifras que producen un cuadrado con sus cuadrados sin olvidar ninguna.

El planteo sería:

xtotal=3
xt=1..9
xt=suc(n^2)
suma:cuadrado
creciente

Es fácil de interpretar: se combinan tres conjuntos de cifras del 1 al 9, se elevan al cuadrado y se exige que la suma sea cuadrada. Para abreviar, solo se presentarán las soluciones en orden creciente.

El resultado es:

1	2	2	9
1	4	8	81
2	3	6	49
2	4	4	36
2	6	9	121
3	6	6	81
4	4	7	81
4	8	8	144
6	6	7	121

Con esta tabla los podemos contar sumando variaciones: 3+6+6+3+6+3+3+3+3=36, y saldrán sólo los que no contienen la cifra 0.

Esto nos da el siguiente recuento para tres cifras:

(1) Números cuyas cifras pertenecen a estas ternas

Habrá que contar los distintos órdenes de cada una: 3+6+6+3+6+3+3+3+3=36

(2) Provenientes de los casos de dos cifras pitagóricas intercalando un cero, como en 304 o 430. Resultarían 4*2=8 casos.

(3) Los terminados en dos ceros, que serían 9 más.

En total obtendríamos 36+8+9=53

En este listado tienes la comprobación, pues resultan 53:

100, 122, 148, 184, 200, 212, 221, 236, 244, 263, 269, 296, 300, 304, 326, 340, 362, 366, 400, 403, 418, 424, 430, 442, 447, 474, 481, 488, 500, 600, 608, 623, 629, 632, 636, 663, 667, 676, 680, 692, 700, 744, 766, 800, 806, 814, 841, 848, 860, 884, 900, 926, 962

Si pasamos a cuatro cifras, cambiando *xtotal* a cuatro, resultan 26 combinaciones distintas salvo el orden y 203 con él.

1	1	1	1
1	1	3	5
1	1	7	7
1	2	2	4
1	3	3	9
1	4	4	4
1	5	5	7
2	2	2	2
2	2	3	8
2	2	4	5
2	2	7	8
2	4	4	8
2	4	5	6
2	8	8	8
3	3	3	3
3	5	9	9
4	4	4	4
4	4	5	8
4	5	8	8
4	6	6	9
4	8	8	9
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

Destacan las soluciones formadas por cuatro cifras iguales, que pertenecen al conjunto porque la suma equivale a multiplicar por 4, lo que las convierte en un nuevo cuadrado.

Todos estos casos se pueden unificar con el uso de la función sumacifras(n;k) que estudiamos al principio de este. Basta exigir que esa suma de cifras, para k=2, sea cuadrada.

Aquí tienes un listado de los números que cumplen la propiedad desde 100 hasta 300. Junto a ellos figura la suma de cuadrados de sus cifras:

100	1
122	9
148	81
184	81
200	4
212	9
221	9
236	49
244	36
263	49
269	121
296	121
300	9

Se puede comprobar que las tres cifras de cada elemento constituyen una terna pitagórica, como se vio más arriba.

El listado completo lo tienes en http://oeis.org/A175396

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 34, 40, 43, 50, 60, 68, 70, 80, 86, 90, 100, 122, 148, 184, 200, 212, 221, 236, 244, 263, 269, 296, 300, 304, 326, 340, 362, 366, 400, 403, 418, 424, 430, 442, 447, 474, 481, 488, 500, 600, 608, 623, 629, 632, 636, 663,…

Números consecutivos con suma de cuadrados de cifras cuadrada en ambos

Una cuestión curiosa es el descubrimiento de dos números consecutivos en los que ambos presenten sumas de cuadrados de cifras que también son cuadradas. Por ejemplo, 137209 y 137210 lo cumplen:

1^2+3^2+7^2+2^2+0^2+9^2=144=12^2

1^2+3^2+7^2+2^2+1^2+0^2=64=8^2

Usando la función SUMACIFRAS es fácil detectar estos pares de consecutivos, recorriendo todos y aplicando la suma de cuadrados de cifras a sus consecutivos. Así obtenemos la sucesión siguiente, formada por los elementos menores de cada par:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9999, 22449, 24249, 42249, 48889, 84889, 88489, 115609, 116509, 123709, 127309, 132709, 137209, 151609, 156109, 161509, 165109, 172309, 173209, 202449, 204249, 213709, 217309, 220449, 224049, 231709, 235509, 237109, 240249, 242049, 253509, 255309, 271309, 273109, 312709, 317209, 321709, 325509, 327109, 333609, 336309, 352509, 355209, 361999, 363309, 369969, 371209, 372109, 396969, 399669, 402249, 408889, …

Entre ellos están los de una cifra, que cumplen la condición trivialmente, y todos los demás terminan en 9.

Se puede razonar esa terminación en 9 para números de más de una cifra. La clave está en que la diferencia entre dos cuadrados es mayor o igual que 2N+1 si N es el menor del par. Si las unidades tuvieran otro valor, por ejemplo el 6, al incrementar esa cifra al 7 la diferencia de cuadrados sería de 2*6+1=13. La máxima diferencia entre los cuadrados de dos cifras consecutivas es de 2*9+1=19, pero eso no convertiría la suma total cuadrada en otra cuadrada mayor, pues al sumar los cuadrados de las cifras restantes se formaría un cuadrado mayor que el de la última cifra, que presentaría una diferencia mayor que la de la última cifra.

Ejemplos:

148 y 149 forman las sumas de cuadrados 1+16+64=81, 1+16+81=98. La diferencia es la prevista, 2*8+1=17, pero hemos elegido la primera para que forme el cuadrado 81, y su siguiente es 100, con una diferencia superior a 17.

Tomemos otro ejemplo, 488. La suma de cuadrados de cifras es 4^2+8^2+8^2=144. Si incrementamos el 8 al 9, la suma sería ahora de 4^2+8^2+9^2=161, con un incremento de 2*8+1=17, pero para pasar de 144 al siguiente cuadrado necesitamos 2*12+1=25, y nos faltan unidades.

Por tanto, la única cifra posible es 9, porque con ella se disminuye el cuadrado en lugar de aumentar, lo que no es posible, según hemos razonado.

Todos los elementos menores de estos pares terminarán en 9 si poseen varias cifras.

Si pasamos de un número terminado en 9 al siguiente, que lo hace en 0, se pierden 81 unidades en la suma de cuadrados de cifras (excluimos de este razonamiento el 9999, que es un caso especial). Esta pérdida se compensará con la ganancia que se produzca en las decenas. Sabemos que equivale a 2*k+1, luego la ganancia puede ser de 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 o 19, (según sean las decenas 0, 1, 2, 3,…,9), con lo que la pérdida equivaldrá a 80, 78, 76, 74, 72, 70,… Habría que investigar qué cuadrados presentan esa diferencia (no necesariamente consecutivos).

Se sabe que una diferencia de cuadrados, si es par, ha de ser múltiplo de 4, luego las únicas diferencias válidas serían 80, 76, 72, 68 o 64, que se corresponden con las decenas 0, 2, 4, 6 y 8. Estas diferencias producen las siguientes diferencias de cuadrados (lo hemos calculado con una función adecuada):

80	# 19, 21# 8,	12# 1, 9
76	# 18, 20	
72	# 17, 19# 7,	11# 3, 9
68	# 16, 18	
64	# 15, 17# 6,	10# 0, 8

Terminado en 09

La diferencia es 80 que equivale a tres diferencias de cuadrados, 9^2-1^2, 12^2-8^2 y 21^2-19^2

La primera sólo se da en el número 9, por razones evidentes

La diferencia entre 8^2 y 12^2 es la que más veces se presenta, como en 115609, 115610, en los que 1+1+25+36+0+81=144=12^2, 1+1+25+36+1=64=8^2

El par 19, 21 no aparece hasta números de siete cifras, así ocurre con 6999909 y 6999910:

36+81+81+81+81+0+81=441=21^2 y 36+81+81+81+81+0+1=361=19^2

Terminado en 29

Diferencia 76 que sólo se da en 20^2-18^2. Hay muy pocos casos. El primer ejemplo que hemos encontrado es 5889929 y 5889930.

25+64+64+81+81+4+81=400=20^2,
25+64+64+81+81+9+0=324=18^2

Otros ejemplos: 5898929, 5899829, 5988929, 5989829, 5998829 y 6699929

Terminado en 49

La diferencia es 72, que se da en 11^2-7^2 y 19^2-17^2

Se dan las dos diferencias:

7 y 11: 10231349 y 10231350, ya que 1+0+4+9+1+9+16+81=121=11^2, 1+0+4+9+1+9+25+0=49=7^2

19 y 17: 11689949 y 11689950: 1+1+36+64+81+81+16+81=361=19^2, 1+1+36+64+81+81+25+0=289=17^2

Terminado en 69

69 – Diferencia 68. Se da el 16,18, como era de esperar:

Uno de los primeros ejemplos es 396969 y 396970, con

9+81+36+81+36+81=324=18^2 y 9+81+36+81+49+0=256=16^2

Terminado en 89

La única diferencia es 64, en 17^2-15^2. No se da en los primeros ejemplos. Hay que buscar hasta más de un millón. El primero es 1156989 con 1156990, pues

1+1+25+36+81+64+81=289=17^2 y 1+1+25+36+81+81+0=225=15^2

Aunque la búsqueda ha resultado muy laboriosa, podemos afirmar que se dan todas las terminaciones posibles, 09, 29, 49, 69 y 89 y que los cuadrados resultantes tienen como valor máximo 400=20^2. Esto tiene un valor teórico importante, y es que las sucesión de números que estamos estudiando **no tiene carácter infinito**, pues está acotada por un número de 401 cifras, en el que todas las cifras fueran distintas de cero, por ejemplo,1111…(401…1111.

Si deseas experimentar por tu cuenta, puedes inspirarte en este código PARI, que está pensado para buscar terminaciones en 89 entre 1000000 y 3000000:

*for(p=**1000000, 3000000**, a=norml2(digits(p)); b=norml2(digits(p+1)); if(issquare(a)&&issquare(b)&&p%100==**89**, print(p,", ",a,", ",b)))*

Se han destacado en negrita los elementos que tendrías que cambiar.

SUMA DE CIFRAS QUE ES CUADRADA

Esta cuestión es bastante simple, no se refiere a la suma de los cuadrados de las cifras, sino a su suma normal, por lo que no perderemos mucho tiempo con ella. Se incluye para completar posibilidades.

Para encontrar soluciones basta establecer una búsqueda exigiendo que **sumacifras(n;1)** sea un cuadrado. Estas son las primeras soluciones:

1, 4, 9, 10, 13, 18, 22, 27, 31, 36, 40, 45, 54, 63, 72, 79, 81, 88, 90, 97, 100, 103, 108, 112, 117, 121, 126, 130, 135, 144, 153, 162, 169, 171, 178, 180, 187, 196, 202, 207, 211, 216, 220, 225,…

(Están publicadas en http://oeis.org/A028839)

En esta dirección puedes comprobar la sencillez de la búsqueda con el lenguaje PARI:

isok(n) = issquare(sumdigits(n)); \\ Michel Marcus, Oct 30 2014

Es muy sencillo encontrar el máximo cuadrado que se puede obtener según el número de cifras. Bastará considerar los números formados sólo por nueves: 999…99. De esa forma, si k es el número de cifras, deberemos resolver $9k>n^2$ y buscar el máximo valor de n. Así tendremos 9 como máximo para una cifra, 16 para dos (ya que 2*9>16), 25 para tres (3*9>25), y así podríamos seguir.

Propiedades de estos números

En A028839 se incluyen dos propiedades interesantes:

Difference between two consecutive terms is never equal to 8. - Carmine Suriano, Mar 31 2014

*In this sequence, there is no number of the form 3*k-1. In other words, if a(n) is not divisible by 9, it must be of the form 3*k+1. - Altug Alkan, Apr 08 2016.*

Ambas están relacionadas, por lo que demostraremos la segunda y de ella se derivará la primera.

Todos los cuadrados son del tipo 9k o 3k+1. En efecto, si n=3k,$n^2=9k^2$, múltiplo de 9. Si n=3k+1, su cuadrado será $n^2=9k^2+6k+1=3q+1$, y si n=3k-1, $n^2=9k^2-6k+1=3q+1$. Si N es de uno de estos tipos, la suma de sus cifras también. Lo razonaremos con tres cifras, pero es fácilmente extensible a otros casos.

De aquí se deduce la primera propiedad:

Restamos dos consecutivos. Si ambos son múltiplos de 9, su diferencia será:

9q-9p=9(q-p), que es múltiplo de 9 y por tanto no puede valer 8.

Si ninguno es múltiplo de 9, tendríamos:

3p+1-3q-1=3(p-q), no puede ser 8

Si uno es múltiplo de 9 y otro no, la diferencia será (o en orden contrario)

9p-(3q+1)

En ella podemos suponer que q no es múltiplo de 3, pues si no, sustituiríamos q por 3q. Desarrollamos:

9k-(3q+1)=8=3*3-1 llevaría a 9k-3q-1=3*3-1, luego 9k-3q=3*3, 3(3k-q)=3*3, 3k-q=3, luego q es múltiplo de 3, y en su definición no lo es, pues se simplificaría entre 3.

Por tanto, las diferencias nunca pueden valer 8.

Casos particulares

Suma cuadrada

Ya vimos los casos en los que la suma de cuadrados de las cifras es también cuadrada.

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/12/suma-de-cuadrados-de-cifras-3-suma-de.html

A continuación desarrollaremos algunos casos particulares de esta propiedad. Todas las sucesiones estudiadas serán partes de la general

http://oeis.org/A175396

Cuadrados

Comenzamos con el caso más natural, y es que el número con suma cuadrada sea a su vez cuadrado. Estos números están publicados en

http://oeis.org/A061090

Con nuestra función ***sumacifras(n;k)*** , que puedes consultar en el primer apartado de este capítulo, (http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/11/suma-de-cuadrados-de-cifras-1-un.html) es fácil crear una búsqueda en la que tanto el número buscado como la suma de los cuadrados de sus cifras sean también cuadrados. Podría ser algo así:

```
For i = 1 to 100
a=i*i
b = sumacifras(a; 2)
If escuad(b) Then msgbox(a)
Next i
```

Con una rutina de búsqueda más elaborada hemos obtenido fácilmente el listado, que coincide con el publicado en A061090.

N	Sum_cuad_cifras
1	1
4	16
9	81
100	1
400	16
676	121
841	81
900	81
1444	49
4225	49
10000	1
24025	49
40000	16

Listado publicado

1, 4, 9, 100, 400, 676, 841, 900, 1444, 4225, 10000, 24025, 40000, 42025, 42436, 43264, 66049, 67600, 84100, 90000, 109561, 119716, 144400, 155236, 239121, 244036, 248004, 252004, 335241, 355216, 362404, 373321, 422500, 643204, 664225

Como bien señala Charles R Greathouse IV, si un número pertenece a esta sucesión, también estará si lo multiplicamos por 100, ya que las cifras significativas no cambian.

El código PARI incluido en esta publicación resulta oscuro y no aprovecha mejoras habidas en este lenguaje, Proponemos otro:

for(p=1, 1000, b=p*p; a=norml2(digits(b));
if(issquare(a), print1(b,", ")))

Se comprende su funcionamiento con solo leerlo atentamente. Su resultado es

```
1, 4, 9, 100, 400, 676, 841, 900, 1444, 4225, 10000, 24025, 40000, 42025, 42436,
 43264, 66049, 67600, 84100, 90000, 109561, 119716, 144400, 155236, 239121, 2440
36, 248004, 252004, 335241, 355216, 362404, 373321, 422500, 643204, 664225, 7039
21, 717409, 751689, 790321, 802816, 840889, 850084, 851929, 1000000,
?
```

Primos

También están publicados los números primos con suma de cuadrados de cifras también cuadrada. Son estos:

2, 3, 5, 7, 43, 263, 269, 1153, 1531, 1933, 2063, 2069, 2287, 2609, 3319, 3391, 3511, 3931, 4003, 4441, 4801, 4889, 5113, 5399, 5939, 6029, 6067, 6203, 6469, 6607, 8849, 9133, 9539, 10111, 10177, 10513, 10531, 10771, 11149, 11213, 11273, 11321, 11491, 11503,…

(http://oeis.org/A223035)

Los de una cifra pertenecen todos, como es evidente, y el siguiente, 43, corresponde a la terna pitagórica $4^2 + 3^2 = 5^2 = 25$

Puedes reproducirlos con la función *sumacifras(n;k):*

Primos	Suma cuadrada
2	4
3	9
5	25
7	49
43	25
263	49
269	121
1153	36
1531	36
1933	100
2063	49
2069	121
2287	121
2609	121

También nos valdría este programa en PARI:

forprime(p=2, 10000, a=norml2(digits(p)); if(issquare(a), print1(p,", ")))

El uso de *forprime* simplifica mucho el código.

Triangulares

Este caso estaba inédito y lo hemos publicado en https://oeis.org/A320432 (pendiente de revisión). Tenemos predilección por los números triangulares, por lo que lo incluimos aquí.

Para descubrir si un número N es triangular, basta ver que 8*N+1 sea cuadrado. Es una forma muy cómoda de descubrirlos. También podemos seguir la serie natural 1, 2, 3, 4,…y aplicarles la fórmula N(N+1)/2.

Aquí usaremos otro método, que es partir de 1 e ir añadiendo de forma recursiva, 2, 3, 4,…

1=1, 1+2=3, 3+3=6, 5+4=10, 10+5=15,…

Esta forma de generar números triangulares suele ser bastante rápida, y es la que usaremos en PARI:

p=1; q=2; while(p<=500000, a=norml2(digits(p)); if(issquare(a), print1(p,", ")); p+=q; q+=1)

A la variable p se le va añadiendo q, que a su vez crece de 1 en 1. Así se generan los triangulares y después se suman los cuadrados de sus cifras y se investiga si la suma es cuadrada. El resultado es

0, 1, 3, 6, 10, 300, 2278, 6670, 10153, 27028, 28203, 33411, 35778, 40470, 44850, 58311, 62481, 66066, 105570, 113050, 143916, 144991, 151525, 155961, 181503, 198765, 199396, 204480, 213531, 220780, 239778, 241860, 248160, 271953, 279378, 333336, 348195, 381501, 392055, 431985, 461280, 479710,…(en la versión publicada se ha incorporado el cero, pues en OEIS se considera triangular, ya que 0=0*1/2)

Aquí también figuran, como ocurrió con los cuadrados, los triangulares de una cifra. Cualquier número de la sucesión será triangular y cuadrada la suma de sus cifras al cuadrado. Por ejemplo:

33411 es triangular, porque 33411=258*259/2, y la suma de los cuadrados de sus cifras es 9+9+16+1+1=36, un cuadrado.

Suma prima

El caso general está publicado en
http://oeis.org/A108662

11, 12, 14, 16, 21, 23, 25, 27, 32, 38, 41, 45, 49, 52, 54, 56, 58, 61, 65, 72, 78, 83, 85, 87, 94, 101, 102, 104, 106, 110, 111, 113, 119, 120, 126, 131, 133, 137, 140, 146, 159, 160, 162, 164, 166, 168, 173, 179, 186, 191, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 210

Como suele ocurrir en las sucesiones que estamos estudiando, si N está en la sucesión, todos los números cuyas cifras formen anagrama de las de N, también pertenecerán a la sucesión, Igual se puede afirmar de N*10^k. Así, si 38 pertenece a la sucesión, también estarán en ella 83, 380, 830, 3800, 8300,…Por tanto, esta sucesión es infinita.

Vemos algunos casos particulares.

Primos con suma prima

Están ya publicados en http://oeis.org/A052034

11, 23, 41, 61, 83, 101, 113, 131, 137, 173, 179, 191, 197, 199, 223, 229, 311, 313, 317, 331, 337, 353, 373, 379, 397, 401, 409, 443, 449, 461, 463, 467, 601, 641, 643, 647, 661, 683, 719, 733, 739, 773, 797, 829, 863, 883, 911, 919, 937, 971, 977, 991, 997, 1013

Observa que los anagramáticos de un término, también pertenecen si son primos, como 113, 131 y 311.

Un ejemplo: 397 es primo, y 3^2+9^2+7^2=139, que es primo.

Podemos reproducir esta sucesión mediante el lenguaje PARI:

forprime(p=2, 10000, a=norml2(digits(p)); if(isprime(a), print1(p,", ")))

Triangulares con suma prima

Ya destacamos en la anterior cuestión que tenemos predilección por los números triangulares. Estos son los que presentan suma de cuadrados de cifras que es prima:

21, 45, 78, 120, 210, 276, 595, 780, 861, 1275, 1653, 2016, 2485, 2775, 3240, 3321, 3570, 3916, 4005, 4656, 6328, 7260, 7503, 9316, 9453, 9730, 10011, 11476, 12246, 12561, 13203, 15225, 15753, 16471, 16653, 17205, 17955, 18145, 19306, 19900, 20100, 20706, 21321, 21945, 22155, 22366, 22791, 23653, 23871, 24090, 24753

Vemos un ejemplo:

17205 es triangular, porque 17205=185*186/2, y 1^2+7^2+2^2+0^2+5^2=79 es primo.

Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en https://oeis.org/A320433 (pendiente de revisión).

El código PARI aprovecha la generación de triangulares como suma de los primeros números naturales:

(PARI) p=1; q=2; while(p<=25000, a=norml2(digits(p)); if(isprime(a), print1(p,", ")); p+=q; q+=1)

Cuadrados con suma prima

Sorprendentemente, esta sucesión estaba inédita, a pesar de la sencillez de su definición. La inversa, primos con suma cuadrada sí está publicada en http://oeis.org/A223035

Los primeros números que cumplen esta condición son

16, 25, 49, 289, 324, 1369, 1521, 1600, 1936, 2209, 2304, 2500, 2601, 2809, 4900, 5929, 7569, 8649, 8836, 11025, 11881, 12321, 13225, 13689, 19881, 22201, 22801, 27556, 28900, 29929, 32400, 33489, 34596, 34969, 37636, 39601, 42849, 45369, 46656, 49284, 54756, 55225, 56169, 62001, 65536, 66564, 71289

for(p=1, 270, b=p*p; a=norml2(digits(b)); if(isprime(a), print1(b,", ")))

La hemos publicado en https://oeis.org/A323495 (pendiente de revisión).

Suma triangular

Hay poco publicado, y tampoco parece que interese mucho, por lo que nos limitaremos a presentar los casos con algún comentario o código:

Los primeros números cuya suma de cuadrados es triangular son los siguientes

0,1, 6, 10, 13, 31, 36, 60, 63, 100, 103, 111, 112, 118, 121, 124, 130, 139, 142, 147, 174, 181, 193, 211, 214, 241, 244, 245, 254, 257, 275, 301, 306, 310, 319, 360, 391, 399, 412, 417, 421, 424, 425, 442, 452, 455, 458, 471, 485, 524, 527, 542, 545, 548, 554, 572, 584, 588, 600, 603, 630, 668, 669, 686, 696, 714, 725, 741

Se pueden generar mediante PARI:

for(p=0, 750, a=norml2(digits(p)); if(issquare(8*a+1), print1(p,", ")))

Dentro de ellos se pueden distinguir varios casos.

Triangulares con suma triangular

Los primeros son estos:

0, 1, 6, 10, 36, 630, 741, 1081, 2211, 7140, 10011, 10153, 13366, 15576, 17766, 23220, 24531, 25651, 28920, 33411, 42486, 47586, 52326, 59685, 61776, 69006, 112575, 113050, 121771, 125751, 128778, 129286, 146611, 156520, 163306, 165025, 167331, 185136, 202566, 207046, 211575, 219453, 221445, 222111, 231540, 235641, 237705, 243951

Ya están publicados en https://oeis.org/A094890

Por ejemplo, 741 es triangular (741=38*39/2) y la suma de cuadrados de cifras es 7^2+4^2+1^2=66, que también es triangular.

Puedes usar este código PARI

p=0; q=1; while(p<=250000, a=norml2(digits(p)); if(issquare(8*a+1), print1(p,", ")); p+=q; q+=1)

Primos con suma triangular

Los primeros son:

13, 31, 103, 139, 181, 193, 211, 241, 257, 421, 811, 1021, 1039, 1093, 1123, 1151, 1153, 1201, 1213, 1217, 1231, 1283, 1321, 1511, 1531, 1721, 1801, 1823, 1889, 2011, 2113, 2131, 2237, 2273, 2311, 2347, 2381, 2437, 2467, 2473, 2551, 2621, 2647, 2687, 2711, 2861, 3001, 3019, 3109, 3121, 3163, 3313, 3331, 3361, 3511, 3613, 3631, 3821

Su código:

forprime(p=2, 4000, a=norml2(digits(p)); if(issquare(8*a+1), print1(p,", ")))

Cuadrados con suma triangular

1, 36, 100, 121, 1024, 2401, 3136, 3600, 3844, 6724, 10000, 10201, 12100, 12769, 14161, 15376, 15625, 17689, 18769, 24649, 24964, 29584, 47089, 49729, 51529, 54289, 61504, 73441, 76176, 78961, 81796, 93636, 96721, 97344, 102400, 105625, 113569, 116964, 118336, 156025

Intenta construir un programa en PARI para ellos.

Aquí dejamos el recorrido de casos particulares en la suma de los cuadrados de las cifras. Como siempre, se ha preferido no abordar todos los casos a cansar a los seguidores con cálculos excesivamente parecidos.

Números divisibles entre la suma de los cuadrados de sus cifras

Con nuestra función ***sumacifras***, para encontrar estos números basta exigir que

RESIDUO(N;SUMACIFRAS(N;2))=0,

ya que si el resto de dividir ambos es nulo, se da la divisibilidad. Hemos procedido de esta forma, con el resultado:

Número	Suma cuadrados cifras	Cociente
1	1	1
10	1	10
20	4	5
50	25	2
100	1	100
110	2	55
111	3	37
120	5	24
130	10	13
133	19	7
200	4	50
210	5	42
240	20	12
267	89	3
298	149	2
310	10	31

Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A034087

A034087 Numbers divisible by the sum of the squares of their digits.

1, 10, 20, 50, 100, 110, 111, 120, 130, 133, 200, 210, 240, 267, 298, 310, 315, 360, 372, 376, 400, 420, 480, *500, 532, 550, 630, 803, 917, 973, 1000, 1010, 1011, 1020, 1030, 1071, 1100, 1101, 1110, 1134, 1148, 1200, 1211, 1222, 1290, 1300, 1302, 1316*

Como es lógico, aparecen muchos números terminados en cero, porque esto facilita la divisibilidad.

Puedes reproducirlos usando PARI:

for(p=1,2000, a=norml2(digits(p)); if(p%a==0, print1(p,", ")))

Aquí el signo % equivale al resto o RESIDUO, y ves que le exigimos que valga cero.

Como en casos anteriores, si N pertenece a la sucesión, $N*10^k$, también, porque la suma de cuadrados será la misma y N queda multiplicado, luego seguirá siendo divisible.

Como curiosidad, estos son los primeros cuyo cociente cumple una condición:

Cociente cuadrado

Aquí, a la condición de que RESIDUO(N;SUMACIFRAS(N;2))=0 añadimos que el cociente sea cuadrado.

Obtenemos:

1, 100, 315, 376, 400, 2511, 2575, 2688, 3312, 4114, 4416, 8256, 10000, 21250, 22869, 24624, 24832, 31500, 32634, 35584, 37600, 40000, 43639, 47232, 56250, 60164, 62208, 68229, 71344, 74360, 80625, 97336,…

Por ejemplo, $4114/(4^2+1^2+1^2+4^2) = 11^2$

Lo puedes reproducir con PARI:

for(p=1,100000, a=norml2(digits(p)); if(p%a==0&&issquare(p\a), print1(p,", ")))

Otro ejemplo: $97336/(9^2+7^2+3^2+3^2+6^2) = 529 = 23^2$

Cociente primo

De la misma forma, exigiendo que el cociente sea primo resultan:

20, 50, 111, 130, 133, 267, 298, 310, 550, 803, 917, 973, 1011, 1030, 1101, 1211, 1431, 1547, 2444, 2669, 2958, 3053, 3906, 5050, 6179, 7303, 8083, 8938, 10094, 10142, 10341, 11043, 11176, 11426, 12142, 12215, 12382, 12431, 12814, 13222, 13317, 13731, 13797, 14102,…

Por ejemplo, $298/(2^2+9^2+8^2)=2$, que es número primo.

Y su código

for(p=1,20000, a=norml2(digits(p)); if(p%a==0&&isprime(p\a), write1("final.txt",p,", ")))

El ejemplo anterior nos sugiere investigar casos sencillos de cocientes, como 1, 2, 3 o 4.

Comenzamos con el cociente 1. Sólo el número 1 coincide con la suma de los cuadrados de sus cifras.

Con el cociente 2 sólo aparecen 50 y 298, ya visto en el anterior apartado, al menos entre números menores que $2*10^6$.

Con el cociente 3 sólo nos aparece el 267, en el que $267/(2^2+6^2+7^2)=3$. Con el 4, 376, y con el 5, 20. No seguimos. Son fáciles de encontrar, pero no dan más de sí.

Números colombianos cuadráticos

Se llaman *números colombianos* a aquellos que no pueden ser expresados como la suma de un número y la suma de sus cifras. En el contexto de este capítulo, podemos considerar los de tipo cuadrático, que no pueden ser expresados como la suma de otro número más la suma de los cuadrados de sus cifras. Uno de ellos, por ejemplo, es el 21, porque desarrollando para números menores ninguno da un resultado de 21, como puedes ver en la tabla:

N	N+SUMACIFRAS(N;2)
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	11
11	13
12	17
13	23
14	31
15	41
16	53
17	67
18	83
19	101
20	24

Como la distribución de cifras es algo imprevisible, nos vemos obligados a usar todos los casos entre 1 y N-1 para saber si un número es colombiano de tipo cuadrático. Esto retrasa el proceso, pero podemos usar esta función:

```
Public Function escolombiano(n)
Dim m
Dim es As Boolean

m = 1
es = True
While m < n And es
If m + sumacifras(m, 2) = n Then es = False
m = m + 1
```

Wend
escolombiano = es
End Function

Así resultan los primeros:

1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 55, 57, 60, 61, 63, 64, 65, 70, 71, 73, 74, 78, 79, 82, 84, 85, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 97, 99, 100, 104, 106, 109, 110, 115, 120, 122,…

Observamos que son muy abundantes, que la excepción es que la igualdad se cumpla, como en el 2, en el que $2=1+1^2$, o el 12, que cumple $12=3+3^2$. En los elementos de la lista esta equivalencia no es posible para ningún número menor que ellos.

Los tienes publicados en https://oeis.org/A225048

Números que son primos con la suma de los cuadrados de sus dígitos (en base 10)

Muchos números naturales son primos con la suma de los cuadrados de sus dígitos. Esto tiene su lógica, pues ambos números pertenecen a ámbitos distintos. La suma de cuadrados de cifras depende además de la base de numeración, en este caso 10.

Si usamos nuestra función ***sumacifras*** es fácil programar una búsqueda de los números que nos interesan. Resultan ser estos:

N	Suma cuadrados cifras
1	1
10	1
11	2
12	5
13	10
14	17
15	26
16	37
17	50
18	65
19	82
21	5
23	13
25	29
27	53
29	85
31	10
32	13
34	25
35	34
37	58
38	73
41	17

En formato de lista:

1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 61, 65, 67, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 92, 94, 95, 97, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 113, 115, 119, 121, 122,…

Podemos generarla también con el lenguaje PARI:

for(p=1,300, a=norml2(digits(p)); if(gcd(p,a)==1, print1(p,", ")))

Son tantos los ejemplos, que merece la pena obtener sus complementarios, aquellos que no son coprimos con la suma de cuadrados de sus cifras. Los primeros son estos:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 33, 36, 39, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 55, 60, 62, 63, 64, 66, 68, 69, 70, 77, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 93, 96, 99, 110, 111, 112, 114, 116, 117, 118, 120, 125, 129, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 138, 141, 143, 144, 147, 150, 152, 154, 156, 158, 170, 171, …

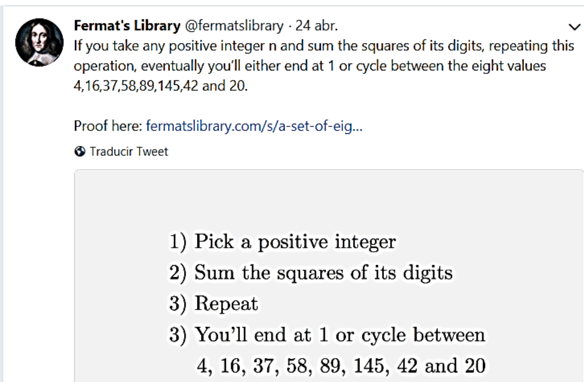
Se obtienen como los anteriores, cambiando **==** por **>>** en PARI:

for(p=1,300, a=norml2(digits(p)); if(gcd(p,a)>>1, print1(p,", ")))

SUMA DE CUADRADOS DE CIFRAS

NÚMERO MÁS CIFRAS AL CUADRADO

En este apartado de la serie de "vueltas" sobre los cuadrados de las cifras de un número, reproduciremos una curiosidad publicada por Fermat's Library en Twitter el día 24 de abril de 2018:



Consiste la curiosidad en que si a un número cualquiera le sumas los cuadrados de sus cifras y reiteras la operación, terminarás en el valor 1, que sería invariante (y terminaría el proceso), o bien entraríamos en el ciclo {4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20}

No se trata de una conjetura. La demostración se encuentra en

http://fermatslibrary.com/s/a-set-of-eight-numbers#email-newsletter

Puedes visitar estas direcciones para encontrar más referencias a estas iteraciones:

https://www.youtube.com/watch?v=Cmbr5z3WhUI

https://www.gaussianos.com/suma-reiterada-de-los-cuadrados-de-los-digitos/

Como la cuestión está resuelta, salvo mejorar la demostración, aquí sólo nos queda construir una herramienta de hoja de cálculo para recorrer el proceso explicado. Es una tarea sencilla, por lo que la completaremos con el cálculo del número de iteraciones necesarias para llegar al 1 o al ciclo y también por qué número se entra en ese ciclo. En la imagen vemos que el número 2398 entra en el ciclo a través del número 37 y lo consigue en la sexta iteración.

2398
158
90
81
65
61
37
58
89
145
42
20
4
16

En este otro ejemplo, el 79 llega al 1 en la tercera iteración:

79
130
10
1
1
1

Podríamos construir una función que nos devolviera el número de iteraciones y el valor de entrada al ciclo (o el 1). El problema radica en que sería una función con dos resultados, el número de iteraciones y el elemento por el que entra al ciclo. La definición de funciones tipo array en hoja de cálculo no es trivial, por lo que concatenaremos ambos números mediante una cadena de caracteres.

Como en otras muchos estudios que tratan de cifras, es conveniente eliminar el espacio en blanco que Excel y Calc añaden a los números positivos. Para ello usaremos la función AJUSTA, ya usada en este blog varias veces. Convierte el número en una cadena de caracteres sin espacios en blanco.

```
Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a)
While Left$(d$, 1) = " "
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1)
Wend
ajusta$ = d$
End Function
```

Con ella podemos construir la función deseada. Hay que estudiar su listado con atención:

Public Function ciclocuad$(n)
Dim a$, c$, s$
Dim k, m, i, j
Dim final As Boolean

m = n ‘Se recoge la variable **n** en otra **m** para su manipulación
a$ = " 1 4 16 37 58 89 145 42 20 " ‘Conjunto formado por el 1 y los ocho números del ciclo
c$ = “ “+ajusta(m)+” “ ‘Las tres líneas siguientes detectan si **m** pertenece al ciclo
i = InStr(a$, c$)
If i > 0 Then ciclocuad = "$0#0$": Exit Function ‘Si pertenece, devolvemos dos ceros
final = False
j = 0
While Not final
m = sumacifras(m, 2) ‘Se sustituye el número **m** por la suma de cuadrados de sus cifras
j = j + 1
c$ = " " + ajusta(m) + " " ‘Se rodea el número de espacios en blanco para buscar en c$
i = InStr(a$, c$) ‘Si pertenece al conjunto, la variable **i** será mayor que 0
If i > 0 Then
final = True ‘Fin de la iteración
s$ = "$" + ajusta(j) + "#" + ajusta(m) + "$" ‘Los valores se rodean con # y $

End If
Wend
ciclocuad = s$
End Function

Para cada número aparecerá un resultado del tipo **$6#58$**, en el que 6 sería el número de iteraciones y 58 la entrada al ciclo. Se ha construido así para facilitar búsquedas posteriores.

Por ejemplo, para buscar los primeros números que entran en el ciclo a través del número 58 bastará buscar en el resultado de ciclocuad$ el trozo de cadena **#58$**, y para encontrar los que necesitan tres iteraciones buscaremos **$3#**. Esto explica que se hayan insertado esos caracteres.

Aquí tienes los primeros números que entran en el ciclo a través del 58:

37		$1#58$
38		$2#58$
73		$1#58$
83		$2#58$
116		$3#58$
119		$3#58$
161		$3#58$
166		$2#58$
191		$3#58$
235		$3#58$
253		$3#58$
299		$3#58$
307		$1#58$
308		$2#58$

Y estos los que necesitan tres iteraciones:

15		$3#16$
18		$3#37$
23		$3#1$
25		$3#89$
28		$3#1$
32		$3#1$
47		$3#37$
51		$3#16$
52		$3#89$
74		$3#37$
79		$3#1$
81		$3#37$
82		$3#1$
97		$3#1$
105		$3#16$
108		$3#37$

Según lo estudiado, los números se clasificarán en nueve clases de equivalencia según la entrada que tengan en el ciclo. Aquí tienes los primeros:

Entrada	Ciclo														
1	1	7	10	13	19	23	28	31	32	44	49	68	70	79	82
4	20	2	11	78	87	101	110	113	131	168	179	186	197	200	249
16	4	15	26	40	51	62	69	88	96	105	117	128	134	143	150
37	16	3	9	18	30	33	39	47	56	57	59	61	65	74	75
58	37	38	73	83	116	119	161	166	191	235	253	299	307	308	325
89	58	5	6	8	12	14	17	21	22	25	27	29	34	35	36
145	89	77	98	149	194	238	283	289	298	328	358	382	385	419	456
42	145	154	389	398	415	451	514	541	839	893	938	983	1045	1054	1126
20	42	24	204	224	240	242	402	420	422	1133	1313	1331	2004	2024	2040

Puedes comprobar que todos los números pequeños pertenecen a una de las nueve clases de equivalencia. Dentro de la misma clase figurarán los números formados con las mismas cifras. Así, 145, 154, 415, 514, comparten la clase 42.

Se observa que con entrada en 37 y 89 hay muchos más, ya que el nuestro listado termina en 75 y 36 respectivamente. La más escasa se ve que es la correspondiente a 20.

Podemos, con un poco de paciencia, contar, por ejemplo, los que hay de cada clase del 1 al 2000:

Entrada	
1	298
4	125
16	210
37	403
58	93
89	760
145	66
42	33
20	12
Total	**2000**

Se percibe claramente el desequilibrio en las frecuencias.

NÚMEROS FELICES

En la iteración del apartado anterior de esta serie, los números que desembocan en la unidad reciben el nombre de "números felices". Por ejemplo, el 129, que en la iteración de sumar los cuadrados de sus cifras recorre la siguiente órbita:

129
86
100
1
1
1
1
1

Como era de esperar, el 1 es un punto fijo, y 129 se considera “número feliz”.

Estos números son populares en las distintas divulgaciones de temas de números. La lista de los primeros está contenida en http://oeis.org/A007770

1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193, 203, 208, 219, 226, 230, 236, 239, 262, 263, 280,…

Esta sucesión se corresponde con la primera de las nueves clases de equivalencia que estudiamos nteriormente.:

Entrada	Ciclo														
1	1	7	10	13	19	23	28	31	32	44	49	68	70	79	82

En la página OEIS citada puedes leer consideraciones muy sencillas sobre estos números. Hemos adaptado tres:

1. Las potencias de 10 son números felices, pues desembocan en 1 con una sola iteración. Esta propiedad garantiza la infinitud de la sucesión de números felices. De igual forma, los números del tipo 2*10^k producen un 4 en la primera iteración, con lo que entran en ciclo. Por ello los números no felices también son infinitos.

2. Si **n** es un número feliz, también lo son los obtenidos a partir de él insertando ceros entre sus cifras, o alterando el orden de estas.
3. Si **n** es feliz, el número formado por **n** unos, 111..1111 también lo es, porque en la primera iteración produce **n**.

Función para detectar números felices

La función ***ciclocuad*** que se usó para clasificar los números en esta iteración se puede adaptar fácilmente al caso en el que el final esperado sea un 1. Bastará iterar sobre el número mientras sea mayor que 6. Si desemboca en 2, 3, 4, 5 o 6, no es feliz (ver las clases de equivalencia construidas más arriba), pero si lo hace en 1, ya sabremos que lo es:

Public Function esfeliz(n) As Boolean
Dim m
m = n 'Recogemos la variable n para su manipulación
If m = 1 Then esfeliz = True: Exit Function ‘Si es 1, es feliz
While m > 6 ‘Todos los felices salvo el 1 son mayores que 6
m = sumacifras(m, 2) ‘Iteramos sobre m hasta que sea menor que 6 (será 4 o 1)

If m = 1 Then esfeliz = True Else esfeliz = False 'Si el final es un 1, es que n es feliz
Wend
End Function

Con esta función podemos determinar si un número es feliz o no. Aquí tienes los resultados para los primeros números de tres cifras:

100	VERDADERO
101	FALSO
102	FALSO
103	VERDADERO
104	FALSO
105	FALSO
106	FALSO
107	FALSO
108	FALSO
109	VERDADERO
110	FALSO
111	FALSO
112	FALSO

Coincide con el listado, en el que figuran 100, 103 y 109

Podemos construir un pequeño esquema que nos indique si un número es feliz o no:

En la imagen hemos aplicado la función a 4599, con resultado afirmativo:

¿Es feliz?	4599
Respuesta	VERDADERO

En efecto, la iteración desemboca en un 1:

4599
203
13
10
1
1

Podemos modificar la función ***esfeliz*** para que nos devuelva un cero si el número no es feliz, o el número de iteraciones si lo es. Quedaría así:

Public Function orbitafeliz(n)
Dim m, k
m = n ‘La variable m recoge el valor de n
k = 0 ‘Contador de iteraciones
If m = 1 Then orbitafeliz = 0: Exit Function ‘Si m=1, no necesita iteración
While m > 6
m = sumacifras(m, 2)
k = k + 1
Wend
If m = 1 Then orbitafeliz = k Else orbitafeliz = 0
End Function

Aplicada esta función a los números del 100 al 110 nos confirma que los únicos felices son 100, 103 y 109, con longitudes de órbita respectivas de 1, 2 y 4:

100	1
101	0
102	0
103	2
104	0
105	0
106	0
107	0
108	0
109	4
110	0
111	0
112	0

La longitud de la órbita no suele ser muy grande. El primer número con 6 iteraciones es el 356 y con 7 iteraciones el 78999.

Felices consecutivos

Con la función ***esfeliz*** se puede organizar con hoja de cálculo una búsqueda de felices consecutivos. Aquí tienes los primeros pares:

31	32
129	130
192	193
262	263
301	302
319	320
367	368
391	392
565	566
622	623
637	638
655	656
912	913
931	932
1029	1030
1092	1093

Los números menores de cada par están publicados en http://oeis.org/A035502

Feliz doble de otro

Podemos seguir jugando con la idea de número feliz. En esta tabla figuran números felices en los que uno es el doble del otro:

94	188
188	376
193	386
239	478
319	638
368	736
392	784
409	818
556	1112
637	1274
644	1288
665	1330
683	1366
709	1418
736	1472
739	1478
818	1636
833	1666

Dentro de esta sucesión existen números en los que n, 2n y 4n son felices:

n	2n	4n
94	188	376
368	736	1472
409	818	1636
556	1112	2224
637	1274	2548
833	1666	3332
904	1808	3616
940	1880	3760
1733	3466	6932

Entre ellos algunos incluyen 8n como feliz:

2528	5056	10112	20224
2771	5542	11084	22168

Puedes buscar casos parecidos, que con la función ESFELIZ propuesta no son difíciles de encontrar.

Feliz cuadrado de otro

En estos pares el segundo feliz es el cuadrado del otro:

1	1
7	49
10	100
28	784
70	4900
91	8281
100	10000
167	27889
236	55696
280	78400
329	108241
379	143641
397	157609
638	407044
655	429025

Estos están publicados en http://oeis.org/A280966

Primos felices

Si unimos las funciones ***esprimo*** y ***esfeliz*** obtendremos la sucesión de primos felices:

7, 13, 19, 23, 31, 79, 97, 103, 109, 139, 167, 193, 239, 263, 293, 313, 331, 367, 379, 383, 397, 409, 487, 563, 617, 653, 673, 683, 709, 739, 761, 863, 881, 907, 937, 1009,… También están publicados en OEIS

(http://oeis.org/A035497)

No se sabe si existen infinitos primos felices.

OTRAS ITERACIONES

Diferencias con la suma de cifras al cuadrado

Las iteraciones estudiadas más arriba las podemos completar con otras similares ideadas por mí, que no parecen haber sido estudiadas hasta ahora. Si conoces algún antecedente te ruego me lo hagas saber.

La iteración propuesta consiste que, en lugar de transformar un número en la suma con los cuadrados de sus cifras, lo hagamos con la diferencia, en valor absoluto, entre el número y esa suma de cifras al cuadrado. El uso del valor absoluto se justifica porque algunos números son mayores que la suma de esos cuadrados, como 21>2^2+1^2 y otros menores, como 2>2^2. De esa forma nos aseguramos que el resultado sea positivo y también que sea siempre menor (salvo el caso trivial de 0) que la suma de cifras al cuadrado estudiada anteriormente.

Todo el contenido de la demostración enlazada en esa entrada

(http://fermatslibrary.com/s/a-set-of-eight-numbers#email-newsletter) se puede adaptar a esta nueva iteración, en el sentido, que ya veremos, de terminar en ciclos similares a los que se producen iterando sólo con los cuadrados.

Necesitamos la función SUMACIFRAS(n;2), ya estudiada, con el parámetro 2 para que se sumen los cuadrados, sólo que ahora usaremos ABS(SUMACIFRAS(N;2)-N) en la iteraciones. Por ejemplo:

34 se convierte en abs(3^2+4^2-34)=9

9, a su vez en 81-9=72, y así podemos proseguir:

34
9
72
19
63
18
47
18
47
18
47
18
47

Observamos que entramos en el ciclo 18, 47, 18, 47,…En otros ejemplos se llega al ciclo 21, 16, 21, 16,…

Otras iteraciones terminan en 0, como la siguiente:

1002
997
786
637
543
493
387
265
200
196
78
35
1
0
0

Por último, otras terminan en 2 como invariante (2=abs(2-2^2))

Hemos probado muchos números y en ellos sólo existen cuatro finales posibles en los ciclos {0}, {2}, {16,21} y {18, 47}. Lo dejamos como conjetura, pero es seguro que existe una demostración similar a la de las anteriores iteraciones.

Con la función ESCICLODIFCUAD también hemos explorado los posibles ciclos. Su objetivo es descubrir si un número N es comienzo de ciclo. Su listado es:

Public Function esciclodifcuad(n)
Dim p, q, r
Dim es As Boolean

p = n: r = 0: es = False
While r < 100 And Not es
q = Abs(p - sumacifras(p, 2)) ‘Efectúa la iteración

If q = n Then es = True ‘Si se repite el valor de ***n***, es inicio de ciclo
p = q
r = r + 1 ‘Cuenta las iteraciones
Wend
If es Then esciclodifcuad = r Else esciclodifcuad = 0
End Function

Con ella hemos comprobado, con una cierta seguridad (no total) que los únicos números inicio de ciclo son los presentados:

Inicio	Longitud ciclo
0	1
2	1
16	2
18	2
21	2
47	2

Como curiosidad señalaremos que en números mayores que 10000 las iteraciones presentan mucho más recorrido, una órbita más larga hasta llegar al ciclo.

Variante

Podemos restar el doble de la suma de cuadrados de las cifras, que convergerá más rápidamente que la anterior. Encontraríamos entonces que se llega al ciclo {78, 148, 14, 20, 12, 2, 6, 66}, o al ciclo {7, 91, 73, 43} o a los invariantes 0 y 1.

Por ejemplo, en el primer ciclo se daría:

Abs(78-2*(49+64))=2*113-78=226-78=148

Abs(148-2*(1+16+64))=162-148=14,

Y así seguimos hasta

Abs(6-2*36)=72-6=66

Abs(66-2*(36+36))=144-66=78

Y esto completa el ciclo.

Usando un "buscador de ciclos" similar al de la iteración anterior, lo comprobamos:

Inicio	Longitud del ciclo
0	1
1	1
2	8
6	8
7	4
12	8
14	8
20	8
43	4
66	8
73	4
78	8
91	4
148	8

SUMAR Y RESTAR O DIVIDIR

Estudiamos ahora una iteración que es una composición de dos ya. Consiste en sumar a cada término la suma de los cuadrados de sus cifras y después restar al resultado ese cuadrado aplicado a sus propias cifras. Por ejemplo, si a(n)=234, haremos b=234+2^2+3^2+4^2=263, y restaremos a b el cuadrado de sus cifras para obtener el siguiente término, a(n+1)=263-2^2-6^2-3^2=214.

En esta operación habrá números, como el anterior, que disminuirán su valor, otros lo aumentarán y algunos lo conservarán, como 3114, que al aplicarle la iteración resulta: b=3114+9+1+1+16=3141, y este se convierte en 3141-9-1-16-1=3114. En estos casos la suma de cuadrados es la misma en a(n) y en a(n+1)

Podíamos llamar "exceso cuadrático" a la diferencia entre la suma de cuadrados de las cifras de un número y el resultado de aplicar la misma operación a la suma del número con los cuadrados de sus cifras. Suponemos que calculamos la diferencia el segundo resultado menos el primero.

Así, 234, tendría un exceso cuadrático de 2^2+6^2+3^2-2^2-3^2-4^2=20. Por eso, en la iteración disminuye de 234 a 234-20=214. Los números con exceso cuadrático positivo se hacen menores en la iteración.

3114 tendría exceso cuadrático 0, por lo que es invariante.

129 tendría exceso negativo, ya que 129+1+4+81=215 y 2^2+1^2+5^2=30, es menor que 1^2+2^2+9^2=86.

Por eso, 129 aumenta en la iteración, pues se convertiría en 129+86-30=185

Existen muchos más números que disminuyen, por lo que esta iteración converge o entra en un ciclo, al igual que la anteriores.

Las iteraciones van terminando en los invariantes (ver listado más abajo) o en ciclos de dos, como 752 con 757, de tres, como 9125, 9106, 9119. Necesitamos una función que nos diga en qué ciclo se termina.

Detector de ciclos (solo hasta 100)

```
Public Function esciclosumacuad(n)
Dim p, q, r, p1
Dim es As Boolean

p = n: r = 0: es = False
While r < 100 And Not es
p1 = p + sumacifras(p, 2)
q = p1 - sumacifras(p1, 2)
If q = n Then es = True
p = q
r = r + 1
Wend
If es Then esciclosumacuad = r Else esciclosumacuad = 0
End Function
```

Con ella descubrimos los ciclos de longitud 1, invariantes

Los primeros invariantes son:

0, 9, 205, 212, 217, 366, 457, 663, 1314, 1315, 1348, 1672, 1742, 1792, 1797, 2005, 2012, 2017, 2129, 2201, 2208, 2213, 2216, 2305, 2404, 2405, 2465, 2564, 2565, 2671, 2741, 2748, 2789, 2829, 3114, 3115, 3205, 3303, 3306, 3394, 3436, 3475, 3696, 3819, 4204, 4205, 4245, 4347, 4475, 4542, 4629, 4647, 4688

Los puedes reproducir también con PARI:

for(i = 0 , 5000 , a = i + norml2(digits(i)) ; b = a - norml2(digits(a)) ; if(i == b , print1(i , ", ")))

Los primeros ciclos de 2 los tienes en la tabla. Cada término de la primera columna forma ciclo con la cuarta:

Inicio	Longitud del ciclo	Auxiliar	El otro término
184	2	265	200
200	2	204	184
559	2	690	573
573	2	656	559
656	2	753	670
670	2	755	656
752	2	830	757
757	2	880	752
819	2	965	823
823	2	900	819

Existen ciclos de 3, 4 o 5 elementos, e incluso 12, 18 o 19. Es mucha variedad, lo que le quita interés. Para números comprendidos entre 0 y 50000 la longitud máxima que he encontrado es 24.

Cocientes

Podemos dividir cada número entre la suma de sus cifras al cuadrado, pero al llegar al elemento 0, obtendríamos divisiones imposibles. Por eso añadiremos una unidad, con lo que resulta otra iteración que desemboca en un ciclo.

Usaremos, pues la fórmula (en hoja de cálculo):

A(n+1)=ENTERO(A(n)/SUMACIFRAS(A(n);2))

Esta iteración presenta un desarrollo muy simple, pues en pocos pasos desembocamos en el ciclo {1, 2}, ya que 1+ENTERO(1/1^2)=2 y 1+ENTERO(2/2^2)=1

Existe la iteración con el cociente invertido:

A(n+1)=1+ENTERO(SUMACIFRAS(A(n);2)/A(n))

Esta es muy curiosa, pues recorre el ciclo formado por los diez primeros números naturales.

En efecto, si se entra en el 1, 2,…10 en cualquier paso de la iteración, ya no se abandona el ciclo. Lo vemos:

1+ENTERO(1^2/1)=2, 1+ENTERO(2^2/2)=3 y
1+ENTERO(a^2/a)=a+1, siendo a<10, y, por último,
1+ENTERO((1^2+0^2)/10)=1

Aquí tienes un volcado de pantalla en el que se comprueba. Contiene los primeros pasos en la iteración en varios números consecutivos:

87	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
88	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
89	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
90	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
91	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
92	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
93	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
94	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
95	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
96	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
97	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
98	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
99	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
100	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
101	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
102	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Los números de cuatro o más cifras son mayores que la suma de cuadrados de sus cifras, luego en ellos el ciclo aparecerá en el primer paso:

2204	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2205	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2206	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2207	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2208	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2209	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2210	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2211	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2212	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2213	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2214	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2215	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2216	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10