Números y hoja de cálculo X

Curso 2017-18

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Esta publicación recoge el resumen de lo publicado en mi blog “Números y hoja de cálculo” (http://hojaynumeros.blogspot.com/) durante el curso 2017-18.

Los temas más importantes estudiados en el mismo han sido, por una parte, los de números figurados, a los que se han añadido en esta ocasión los poligonales centrados y los piramidales. Estos últimos ocupan bastantes páginas, y quizás se publiquen en un documento temático aparte. Su estudio se desarrolla de forma bastante completa, pero no exhaustiva, para evitar el cansancio.

Se han seguido incorporando temas de Combinatoria resueltos con la herramienta “Cartesius”. En esta ocasión se han repasado las particiones, tema que podrá completarse en otros cursos.

Los estudios han estado en este curso menos dispersos, pudiendo agruparse fundamentalmente en Propiedades numéricas y Combinatoria. Es un detalle casual, ya que en ningún año se planifican los contenidos, fruto, muchos de ellos de la actualidad

CONTENIDO

NUEVAS PROPIEDADES NUMÉRICAS

SUMANDOS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En el transcurso de mis publicaciones en Twitter apenas he encontrado sumandos del mismo tipo en progresión aritmética que engendren números determinados (en mi caso, números de fechas en @Connumeros). Esto me ha animado a investigar el tema en el caso de tres sumandos.

Si un número coincide con una suma en progresión aritmética, el total de los tres sumandos ha de ser el triple del central, lo que puede facilitar la búsqueda, estudiando sólo aquellos números que sean triple de uno del tipo dado. Así, el 63, que es suma de tres triangulares en progresión aritmética, es el triple del triangular 21, y cumple 63=6+21+36, los tres triangulares con diferencia mutua 15.

Con números primos

Navegando por OEIS (http://oeis.org/) encontré el caso de números primos. Comenzaremos, pues, por este. Estos son los primeros con la propiedad dada:

15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93, 111, 123, 129, 141, 159, 177, 183, 201, 213, 219, 237, 249, 267, 291, 303,…

Están calificados como semiprimos, lo que es normal, por el razonamiento de los párrafos anteriores, ya que todos se descompondrán en el primo 3 multiplicado por otro primo. Así, 87=3*29, y es suma de 17+29+41, con 41-29=29-17=12

Si se dispone de la función "esprimo", que determina si un número es primo o no, no es difícil encontrar estos números. La puedes copiar, por ejemplo, desde

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/03/primos-reversibles-primo-omirp.html

Hemos creado una función que determina si un número es suma o no de tres primos en progresión aritmética. Es esta:

```
Public Function essumaprog(n)
Dim es As Boolean
Dim a, k

es = False
If n / 3 = n \ 3 Then  'Sólo sigue si es múltiplo de 3
a = n / 3
```

If esprimo(a) Then ‘Exige que el cociente n/3 sea primo

K=1

While k<a and not es ‘Va restando y sumando unidades hasta descubrir dos sumandos primos

If esprimo(a - k) And esprimo(a + k) Then es = True ‘Encontrados dos primos, luego vale

K=k+1

wend

End If

End If

essumaprog = es

End Function

Con ella es fácil buscar los números suma de primos en progresión aritmética:

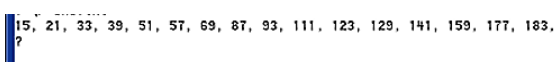
15
21
33
39
51
57
69
87
93
111
123
129

Se ha conjeturado que todos los números triple de primos, a partir del 15, pertenecen a esta lista. Esta conjetura está relacionada con la de Goldbach. Con nuestra función podemos comprobar que todo semiprimo del tipo 3*p con p>3 es suma de tres primos en progresión aritmética. Elegimos, por ejemplo 3*211=633. Le aplicamos la función y nos resulta VERDADERO, ya que 633=199+211+223, los tres primos y con 211-199=223-211=12

Para una mayor velocidad de cálculo se puede programar la búsqueda en el lenguaje PARI. Si lo conoces, puedes experimentar con este código:

```
for(n=1,200,if(n/3==n\3,a=n/3;if(isprime(a),e=0;k=1;while(k<a&&e==0,if(isprime(a-k)&&isprime(a+k),e=1;print1(n,", "));k+=1))))
```

En la imagen tienes el listado


15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93, 111, 123, 129, 141, 159, 177, 183,
?

Con triangulares

El caso de una suma de triangulares (tipo n(n+1)/2) en progresión aritmética se presta a alguna variante que nos será útil en otros cálculos próximos.

Para saber si un número es triangular, basta multiplicarlo por 8 y añadir una unidad. Si el resultado es cuadrado, el número es triangular.

La búsqueda de triangulares en progresión aritmética se puede abordar con dos funciones:

```
Public Function escuad(n) As Boolean
'Determina si n es un cuadrado
If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End Function

Function estriangular(n) As Boolean
Dim a
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function
```

Con estas dos funciones, para saber si un número es suma de triangulares en progresión, lo dividimos entre 3, y si el resultado es triangular, seguimos el algoritmo.

En ese caso vamos sumando y restando el mismo número, y si suma y resta son ambos triangulares, hemos descubierto la progresión aritmética. Este proceso se puede concretar en la siguiente función:

Public Function essumaprog(n) 'Con triangulares
Dim es As Boolean
Dim a, k

es = False
If n / 3 = n \ 3 Then ‘Se verifica que es múltiplo de 3
a = n / 3
If estriangular(a) Then ‘Si el cociente es triangular, se sigue
For k = 1 To a – 1 ‘Se suma y resta para buscar un par de triangulares
If estriangular(a - k) And estriangular(a + k) Then es = True ‘Si se encuentra, devuelve TRUE
Next k
End If
End If
essumaprog = es ‘Devuelve verdadero o falso
End Function

Con esta función se puede construir un bucle de búsqueda, que nos dará los primeros números con esa propiedad:

63
84
108
234
459
513
570
630
759
975

Podemos acudir a un planteamiento más rápido. Sabemos que los triangulares se forman sumando 1+2+3+4+…+n. Si a un número triangular de orden n le restamos n, la diferencia será también con seguridad triangular, con lo que sólo tenemos que comprobar que el número dado sumado con n también es triangular. Si no lo es, restamos ahora n-1 y volvemos a intentarlo, y así hasta llegar al 1. Por otra parte, en este proceso podemos ir generando los triangulares mediante 1+2+3+4+…, lo que acelera el cálculo. Quedaría así:

Sub listasumprog()
Dim i, k, t, v, m
Dim e As Boolean

t = 3 ‘Primer triangular

```
k = 2 ‘Primera diferencia
While t < 600
i = k ‘Recorrerá las diferencias de k hasta 1
e = False ‘Variable que recoge si hay solución o no
v = t + i ‘Sumamos la primera diferencia
While i > 1 And Not e
If estriangular(v) Then m = 3 * t: e = True: MsgBox (m) ‘Si es triangular, hemos terminado
i = i – 1 ‘Siguiente diferencia
v = v + i
Wend
k = k + 1 ‘Estas dos líneas generan nuevos triangulares
t = t + k
Wend
End Sub
```

Los primeros encontrados con este algoritmo son:

9, 63, 84, 108, 234, 315, 459, 513, 570, 630, 759, 975, 1053, 1134, 1395, 1584, 1998, 2109, 2709, 2838, 2970, 3105, 3384, 3528, 3825, 4134, 4455, 4620, 4788, 4959, 5133, 5310, 5673, 5859, 6834, 7038, 7668, 7884, 8325, 8778, 9009, 9243, 9480, 10209, 10710, 11223, 11484, 12285, 12558, 12834, 13113, 13968, 14259, 14553, 15453, 15759, 17334, 17985, 18315, 18984, 19665, Esta sucesión estaba inédita, y la hemos publicado en https://oeis.org/A292309.

En PARI quedaría este código, algo más complicado de entender, aunque es un reto poder interpretarlo:

t=3;k=2;while(t<=600,i=k;e=0;v=t+i;while(i>1&&e==0, if(issquare(8*v+1),m=3*t;e=1;print1(m,", "));i+=-1;v+=i);k+=1;t+=k)

Estos números, dada su definición, pertenecerán a la sucesión de números triples de triangulares, http://oeis.org/A045943

Propiedad de Claudio Meller

Nuestro amigo Claudio Meller caracterizó estos números triple de triangulares mediante esta propiedad: *Estos números son los menores que se pueden escribir como suma de n-1 números consecutivos y también como suma de n números consecutivos.*

Es tan interesante que merece la pena demostrarla. Sea k el inicio de la suma de n consecutivos y h el inicio de la otra suma de n-1. Ambas sumas son iguales, y podemos plantear:

k+k+1+k+2+…k+n-1=h+h+1+h+2+…h+n-2

kn+n(n-1)/2=h(n-1)+(n-1)(n-2)/2

$h(n-1)-kn=(n-1)/2(n-n+2)=n-1$

$h-kn/(n-1)=1$

k ha de ser, pues, múltiplo de n-1, y si es el mínimo, valdrá n-1 y h es n+1. Así queda:

$n(n-1)+n(n-1)/2=(n+1)(n-1)+(n-1)(n-2)/2$

$(n-1)(n+n/2)=3n(n-1)/2$

$(n-1)(n+1+(n-2)/2)=(n-1)(2n+2+n-2)/2=\mathbf{3n(n-1)/2}$

Con esto queda demostrada.

Por ejemplo, en el 63, n=7, k=6, h=8, y resulta:

6+7+8+9+10+11+12=63

8+9+10+11+12+13=63

Propiedad de Ivan Hurt

También esta es interesante: *El triple del triangular de orden n es suma de los números comprendidos entre n y 2n.*

Es fácil de comprobar:

$n+n+1+n+2+\ldots+n+n=n*(n+1)+n(n-1)/2=n(n+1+(n-1)/2)=n(3n-2-1)/2=\mathbf{3n(n-1)/2}$

Terceras partes

3, 21, 28, 36, 78, 105, 153, 171, 190, 210, 253, 325, 351, 378, 465, 528, 666, 703, 903, 946, 990, 1035, 1128, 1176, 1275, 1378, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1891, 1953, 2278, 2346, 2556,…

Las terceras partes de los números que estamos estudiando no han sido publicadas, por lo que las hemos incorporado a

https://oeis.org/A292310.

Los podemos definir como números triangulares que son equidistantes de otros dos triangulares. Así 666 es el triangular número 36, y es promedio entre 6, triangular tercero, y 1326, que es número 51.

Con cuadrados

El mismo planteamiento que con triangulares se puede seguir con cuadrados. Deseamos saber qué números son suma de cuadrados en progresión aritmética. El mismo planteamiento inicial, cambiando la función *estriangular* por la de *escuad* nos dará los primeros términos, que resultan ser los siguientes, hasta 1000:

75, 300, 507, 675, 867, 1200, 1875, 2028, 2523, 2700, 3468, 3675, 4107, 4563, 4800, 5043, 6075, 7500, 7803, 8112, 8427, 9075,…

Por ejemplo, 675 es suma de tres cuadrados

675=3^2+15^2+21^2=9+225+441, con 441-225=225-9=216, por lo que están en progresión aritmética.

Es evidente que los números de esta sucesión son triple de cuadrados, por lo que constituyen una subsucesión de http://oeis.org/A033428

Como ocurría con los triangulares, si recordamos que los cuadrados se forman sumando impares, 1+3+5+7+9+…podíamos intentar ir sumando al cuadrado n^2 las diferencias 2n-1, que será simétrica de (n-1)^2, 2n-3, que llegará hasta (n-2)^2. Y así sucesivamente hasta llegar a diferencia 1. Como el número obtenido restando **será cuadrado con seguridad**, bastará analizar su simétrico en el cálculo. También, al igual que con los triangulares, se puede ir generando cuadrados simultáneamente. La rutina *listasumprog* de arriba quedaría ahora así:

Sub listasumprog()
Dim i, k, t, v, m
Dim e As Boolean

t = 4: k = 3 ‘Primer cuadrado y primera diferencia 2n-1
While t < 5000
i = k: e = False: v = t + i ‘el valor de v es simétrico de un cuadrado, y ha de ser también cuadrado.
While i > 1 And Not e
If escuad(v) Then m = 3 * t: e = True: MsgBox (m) ‘si v es cuadrado, hay progresión aritmética
i = i – 2 ‘siguiente diferencia impar
v = v + i ‘incrementamos v
Wend
k = k + 2 ‘Estas dos líneas engendran los cuadrados centrales
t = t + k
Wend
End Sub

El resultado es:

75, 300, 507, 675, 867, 1200, 1875, 2028, 2523, 2700, 3468, 3675, 4107, 4563, 4800, 5043, 6075, 7500, 7803, 8112, 8427, 9075, 10092, 10800, 11163, 12675, 13872, 14700, 15987, 16428, 16875, 18252, 19200, 20172, 21675, 22707, 23763, 24300, 24843, 27075, 28227, 30000, 30603, 31212, 32448, 33075, 33708, 35643, 36300, 36963, 38307, 39675, 40368, 41067, 42483, 43200, 44652, 45387, 46875,

También esta sucesión estaba inédita, y la hemos publicado en https://oeis.org/A292313

Puedes reproducirlos con este código en lenguaje PARI:

```
t=4;k=3;while(t<=3000,i=k;e=0;v=t+i;while(i>1&&e==0,if(issquare(v),m=3*t;e=1;print1(m,", "));i+=-2;v+=i);k+=2;t+=k)
```

De igual forma se podría construir una función para detectar si un número es suma o no de cuadrados en progresión. Por no alargar lo dejamos como tarea de los lectores. Basta tomar la función *essumaprog(n)* del apartado anterior sobre triangulares y sustituir *estriangular* por *escuad*.

Diferencias h y k

Si llamamos **k** a la diferencia del cuadrado central con el mayor de la terna y **h** a su diferencia con el menor (h será mayor que k), el hecho de ser progresión aritmética nos exige:

$m^2-(m-h)^2=(m+k)^2-m^2$

Simplificando:

$2mh-h^2=2mk+k^2$

Despejamos m:

$m=(k^2+h^2)/(2(h-k))$, con $h>k$

Por ejemplo, para el caso de 3m=75 tendríamos:

$75=3*25$; $1+25+49=75$; $5=(4^2+2^2)/2/2=20/4=5$

h y k deben ser ambos pares. Lo razonamos: m+k y m-h han de tener la misma paridad, pues su suma es 2m. Por tanto, h y k serán ambos pares o impares, lo que lleva a que h-k será par y contendrá el factor 2. Esto obliga a que h y k sean pares, pues en el denominador del cociente $(k^2+h^2)/(2(h-k))$ tendríamos dos factores 2, por lo que k^2+h^2 ha de ser múltiplo de 4, y si fueran ambos impares, sería múltiplo de 2, pero no de 4. Así que k y h son pares. Lo puedes comprobar con hoja de cálculo.

m es un número pitagórico, es decir $m^2=u^2+v^2$ para ciertos u,v

Como m-h y m+k tienen la misma paridad, los podemos interpretar como una suma y una diferencia, v-u y v+u, con lo que quedaría $(v-u)^2$ y $(v+u)^2$, siendo

$v=(m+k+m-h)/2$ y $u=(m+k-m+h)/2$, o bien $v=m+(k-h)/2$ y $u=(k+h)/2$

Su promedio ha de ser m^2, luego:

$$((v-u)^2+(v+u)^2)/2=(2v^2+2u^2)/2=v^2+u^2=m^2$$

Hemos comprobado que m^2 es suma de dos cuadrados v^2+u^2.

Lo bueno de estas equivalencias es que son reversibles, por lo que todo número que sea suma de cuadrados distintos puede dar lugar a una progresión aritmética de cuadrados.

Lo vemos:

Propiedad directa: 1200 es suma de tres cuadrados en progresión aritmética:4^2+20^2+28^2, con lo que h=20-4=16 y k=28-20=8. Si definimos u=(28-4)/2=12 y v=(28+4)/2=16 tendremos que

16^2+12^2=256+144=400=1200/3=m^2,

luego m es pitagórico.

Propiedad recíproca: Tomamos un número pitagórico, por ejemplo 29^2=20^2+21^2. En él u=20 v=21. Se tiene que u+v=41 y v-u=1, luego los cuadrados de 1, 29 y 41 debería formar progresión aritmética: 29^2-

1^2=841-1=840 y 41^2-29^2=1681-841=840, luego coinciden las diferencias y es progresión aritmética.

Otros casos

Completamos el tema con un breve repaso a otros casos.

Números oblongos

Está también inédita la sucesión de números que son suma de tres oblongos en progresión aritmética. Puedes buscarlos si sustituyes función *estriangular* por *esoblongo*, en la que se sustituye 8*n+1 por 4*n+1, o en el código PARI 8*v+1 por 4*v+1. Así:

```
t=2;k=2;while(t<=10^4,i=k;e=0;v=t+i;while(i>2&&e==0,if(issquare(4*v+1),m=3*t;e=1;print1(m,", "));i+=-2;v+=i);k+=2;t+=k)
```

Obtenemos la sucesión

18, 126, 168, 216, 468, 918, 1026, 1140, 1260, 1518, 1950, 2106, 2268, 2790, 3168, 3996, 4218, 5418, 5676, 5940, 6210, 6768, 7056, 7650, 8268, 8910, 9240, 9576, 9918, 10266, 10620, 11346, 11718, 13668, 14076, 15336, 15768, 16650, 17556, 126, 168, 216, 468, 918, 1026, 1140, 1260, 1518, 1950, 2106,…

La hemos publicado en https://oeis.org/A292314

Es subsecuencia de http://oeis.org/A028896

Sus terceras partes se caracterizan por ser números oblongos equidistantes de otros dos oblongos. Los primeros son:

6, 42, 56, 72, 156, 306, 342, 380, 420, 506, 650, 702, 756, 930, 1056, 1332, 1406, 1806, 1892,…

Vamos, por ejemplo el 342=18*19. Basta ir recorriendo oblongos menores y mayores que él para encontrar 132=11*12 y 552=23*24 tales que 552-342=210=342-132, con lo que formas progresión aritmética.

También estaban inéditos y los hemos publicado en

https://oeis.org/A292316

Con semiprimos

Los primeros números que son suma de tres semiprimos en progresión aritmética son:

27, 30, 42, 45, 63, 66, 75, 78, 99, 102, 105, 114, 117, 138, 147, 153, 165, 171, 174, 186, 195, 207, …

Y sus terceras partes:

9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58

Lo curioso de estas sucesiones es que parecen **estar en ellas todos los semiprimos mayores que 8**. Esto se basa en un resultado de Meng. Probamos con un semiprimo cualquiera, como 721=7*103. Como en anteriores ocasiones, buscamos semiprimos cercanos, y encontramos 697=17*41 y 745=5*149, dos semiprimos tales que 745-721=721-697=24.

Con términos de la sucesión de Fibonacci

Ocurre como en el caso anterior, que todos los términos son media aritmética de otros dos, en concreto F(n)=(F(n-2)+F(n+1))/2, ya que F(n-2)+F(n+1)=F(n-2)+F(n-1)+F(n)=2F(n).

Esto convierte nuestra cuestión en algo trivial: todos los números de la forma 3*F(n) la cumplen.

SUMA Y DIFERENCIA DE NÚMEROS DEL MISMO TIPO

Con triangulares

Hace unos meses publiqué en Twitter esta propiedad del número de fecha 28617. Consistía en que ese número era suma y también diferencia entre dos triangulares.

28617=161*162/2+176*177/2

28617=4772*4773/2-4766*4767/2

Podríamos buscar otros números N que presentaran la misma propiedad. Para ver que un número es suma de triangulares basta un bucle de búsqueda, recordando que los triangulares se generan sumando 1, 2, 3,… al precedente: 1=0+1, 3=1+2, 6=3+3, 10=6+4. Después basta restar N con el triangular dado, y si es también triangular, ya lo hemos encontrado: N sería suma de dos triangulares.

Lo podemos organizar en el Basic de las hojas de cálculo. Definimos una función tipo texto que devuelva "NO" si el número no es suma de triangulares, o bien los dos sumandos en el caso de que existan. Podría ser esta:

Public Function sumatriang$(n)
Dim x, i
Dim resul$

x = 1: i = 2: resul = "NO" 'Inicia i, x para que engendren triangulares
While x <= n / 2 And resul = "NO" 'Busca hasta la mitad de N

If estriangular(n - x) Then ‘Si la diferencia es triangular, lo tenemos
resul = Str$(x) + ", " + Str$(n - x) ‘Se construye el resultado
End If
x = x + i ‘Estas líneas son importantes. Engendran los distintos triangulares
i = i + 1 ‘Así x será siempre triangular
Wend
sumatriang = resul
End Function

La función ***estriangular*** tiene este código, que se basa en que ocho triangulares iguales más una unidad equivale a un cuadrado:

Function estriangular(n) As Boolean
Dim a
If escuad(8 * n + 1) Then estriangular = True Else estriangular = False
End Function

Si organizamos un bucle de búsqueda con la función ***sumatriang*** obtenemos los números que son suma de dos triangulares:

Número	Sumandos triangulares
2	1, 1
4	1, 3
6	3, 3
7	1, 6
9	3, 6
11	1, 10
12	6, 6
13	3, 10
16	1, 15
18	3, 15
20	10, 10
21	6, 15
22	1, 21
24	3, 21
25	10, 15

Están contenidos en http://oeis.org/A051533

Un caso interesante es aquel en el que el número dado es también triangular. Los tienes en

https://oeis.org/A089982:

6, 21, 36, 55, 66, 91, 120, 136, 171, 210, 231, 276, 351, 378, 406, 496, 561, 666, 703, 741, 820, 861, 946, 990, 1035, 1081, 1176, 1225, 1326, 1378, 1431, 1485, 1540, 1596, 1653,…

Puedes conseguirlos añadiendo la condición de que sea triangular **n** en la función ***sumatriang***.

Diferencia de triangulares

Esta cuestión es más complicada para organizar un algoritmo, pues no sabemos hasta dónde llegar en la búsqueda del minuendo triangular. Es preferible acudir a esta consideración:

Sean los triangulares p(p+1)/2 y q(q+1)/2. Si su diferencia es N, será p(p+1)/2-q(q+1)/2=N; p^2+p-q^2-q=2N; (p-q)(1+p+q)=2N, luego p-q divide a 2N. Si p-q=1, bastará con que 1+p+q=2N, pero esto se cumple siempre, ya que p y q tienen distinta paridad, luego 1+p+q puede ser par.

Si p=q+1, la cuestión se reduce a (q+1)^2+q+1-q^2-q=2q+1+1=2N; q+1=N y q=N-1.

Así tendremos que N(N+1)/2-(N-1)N/2=N

Todo número natural es diferencia de dos triangulares

La segunda parte de la cuestión ha resultado banal, luego en lugar de buscar suma y diferencia de triangulares, habría bastado con la primera parte, la de la suma, que ya está estudiada.

Pasamos a otro tipo.

Con cuadrados

La cuestión de la descomposición de un número en suma de cuadrados ya está resuelta desde Fermat y Gauss. Lo estudiamos en

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/10/en-cuantas-sumas-de-cuadrados-2-de-5.html

El criterio más práctico es: **sólo se pueden descomponer en cuadrados los números en los que los factores primos del tipo 4n+3 figuren en su descomposición con exponente par**.

No viene mal obtener un listado de esos números. Se puede acudir a la descomposición en factores primos o reproducir para cuadrados la función ***sumatriang***. Lo haremos de esta segunda forma. Basta adaptar esa función para cuadrados. El cambio mayor consiste en que la variable ***i*** no crece según los números naturales, sino mediante los impares. Quedaría así la nueva función:

```
Public Function sumacuadrados$(n)
Dim x, i
Dim resul$

x = 1: i = 3: resul = "NO"
While x <= n / 2 And resul = "NO"
If escuad(n - x) Then
```

```
resul = Str$(x) + ", " + Str$(n - x)
End If
x = x + i
i = i + 2
Wend
sumacuadrados = resul
End Function
```

Con ella obtenemos un listado de los números que se descomponen en dos cuadrados, junto con sus factores primos:

Número	Suma cuadrados	Factores primos
2	1, 1	[2,1]
5	1, 4	[5,1]
8	4, 4	[2,3]
10	1, 9	[2,1][5,1]
13	4, 9	[13,1]
17	1, 16	[17,1]
18	9, 9	[2,1][3,2]
20	4, 16	[2,2][5,1]
25	9, 16	[5,2]
26	1, 25	[2,1][13,1]
29	4, 25	[29,1]
32	16, 16	[2,5]
34	9, 25	[2,1][17,1]
37	1, 36	[37,1]
40	4, 36	[2,3][5,1]
41	16, 25	[41,1]
45	9, 36	[3,2][5,1]
50	1, 49	[2,1][5,2]

Observamos que los factores primos son del tipo 4k+1 o bien, como en el caso del 18 o el 45, del tipo 4k+3 con exponente par.

Un listado más completo lo puedes estudiar en http://oeis.org/A000404:

2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 162, 164, 169,…

Esto resuelve la primera parte de la cuestión. Pasamos a la diferencia:

Diferencia de cuadrados

Si $N=p^2-q^2$, tendremos $N=(p+q)(p-q)$, luego p+q y p-q son divisores de N. Si p-q=1, p+q=N, por lo que podemos afirmar (y es bien conocido) que N es impar e igual a la diferencia $(K+1)^2-K^2$, siendo $K=(N-1)/2$, o lo que es lo mismo, $N=((N+1)/2)^2-((N-1)/2)^2$. Así, por ejemplo, $13=7^2-6^2$

Si N es par, p-q puede valer 2, con lo que p=q+2 y N=(2q+2)*2, lo que implica que N es múltiplo de 4. También es conocido que los números múltiplos de 2 pero no de 4 no equivalen a una diferencia de cuadrados.

Un estudio completo de la situación lo tienes en http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/01/numero-de-descomposiciones-en.html

Así que en el listado anterior habría que suprimir todos los pares no múltiplos de 4. Con esta operación obtenemos el siguiente listado definitivo de los números que son a la vez suma y diferencia de cuadrados:

5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 32, 37, 40, 41, 45, 52, 53, 61, 65, 68, 72, 73, 80, 85, 89, 97, 100, 101, 104, 109, 113, 116, 117, 125, 128, 136, 137, 145, 148, 149, 153, 157, 160, 164, 169, 173, 180, 181, 185, 193, 197, 200, 205, 208, 212, 221, 225, 229, 232, 233,…

http://oeis.org/A097268

Podríamos completar el algoritmo de la función ***sumacuadrados***, pero es preferible el estudio teórico que hemos desarrollado. Lo dejamos como ejercicio.

Con primos

Suma de dos primos

Si el número N es par mayor que 2, como sólo estudiaremos números no muy grandes, se cumplirá en él la conjetura de Goldbach y será suma de dos primos. Si es impar, la única solución es que N-2 sea primo. Esos son los dos casos en los que N es suma de dos primos. Podemos resumirlo en una función:

```
Public Function essumaprimos(n)
If n / 2 = n \ 2 And n > 2 Or esprimo(n - 2) Then essumaprimos = True Else essumaprimos = False
End Function
```

Con ella obtendríamos el listado contenido en http://oeis.org/A014091

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 88, 90,…

Diferencia de primos

Se ha conjeturado que todo número par es diferencia entre dos primos, y se cumple para números no muy grandes. Si el número es impar, deberá ser N+2 primo. Así que eliminaremos del listado anterior aquellos impares como el 7 tales que al sumarles dos unidades se obtenga un compuesto.

Quedaría así:

4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 69, 70, 72, 74, 76,…

Los únicos impares N del listado son aquellos en los que N-2 y N+2 son ambos primos, como el 69, para el que 67 y 71 son ambos primos.

Observamos que, al final, no supone una gran novedad el hecho de ser suma y también diferencia de dos números del mismo tipo en los casos triangular, cuadrado o primo, que son los más populares. Los demás pueden tener dificultades con la cota del minuendo.

Suma de oblongos

Recordemos que son oblongos los números doble de un triangular, o que se generan con la expresión N(N+1)

Para desechar casos triviales eliminaremos el cero como oblongo, aunque cumple la definición de ser del tipo n(n+1), ya que 0=0(0+1)

Los primeros números que son suma de dos oblongos mayores que cero son:

4	2, 2
8	2, 6
12	6, 6
14	2, 12
18	6, 12
22	2, 20
24	12, 12
26	6, 20
32	2, 30
36	6, 30
40	20, 20
42	12, 30
44	2, 42
48	6, 42
50	20, 30
54	12, 42
58	2, 56
60	30, 30
62	6, 56
68	12, 56
72	30, 42
74	2, 72

En forma de listado:

4, 8, 12, 14, 18, 22, 24, 26, 32, 36, 40, 42, 44, 48, 50, 54, 58, 60, 62, 68, 72, 74, 76, 78, 84, 86, 92, 96, 98, 102, 110, 112, 114, 116, 120, 122, 128, 130, 132, 134, 138, 140, 144, 146, 152, 158, 162, 166, 168, 174, 176, 180, 182, 184, 186, 188, 194, 198, 200, 202, 204, 212, 216, 220, 222, 224, 228, 230, 238, 240,…

Para obtenerlos basta pensar en que un oblongo es el doble de un triangular, luego serán oblongos los números cuya mitad sea triangular. En esa idea se basa la siguiente función:

Public Function sumaoblongos$(n)

```
Dim x, i
Dim resul$

x = 2: i = 4: resul = "NO"
While x <= n / 2 And resul = "NO"
If estriangular((n - x) / 2) Then
resul = Str$(x) + ", " + Str$(n - x)
End If
x = x + i
i = i + 2
Wend
sumaoblongos = resul
End Function
```

En ella la **x** y la **i** crecen como en los cuadrados, salvo que los oblongos comienzan con el 2 y crecen de dos en dos y los cuadrados comienzan en 1. Así, a los oblongos los genera la sucesión de pares y a los cuadrados la de impares.

Con PARI podemos usar este código:

```
for(t=1, 400, i=2; j=2; e=0; while(2*i<=t&e==0, if(issquare(4*(t-i)+1), e=1; print1(t, ", ")); j+=2; i+=j))
```

Es interesante considerar el caso en el que N también sea oblongo. Basta elegir en el listado anterior aquellos términos que sean oblongos.

12	6, 6
42	12, 30
72	30, 42
110	20, 90
132	42, 90
182	72, 110
240	30, 210
272	90, 182
342	132, 210
420	210, 210
462	42, 420
552	90, 462
702	240, 462
756	156, 600
812	56, 756
992	342, 650
1122	420, 702
1332	72, 1260
1406	650, 756
1482	552, 930
1640	380, 1260
1722	240, 1482
1892	702, 1190
1980	420, 1560
2070	90, 1980

12, 42, 72, 110, 132, 182, 240, 272, 342, 420, 462, 552, 702, 756, 812, 992, 1122, 1332, 1406, 1482, 1640, 1722, 1892, 1980, 2070, 2162, 2352, 2450, 2652, 2756, 2862, 2970, 3080, 3192, 3306, 3422, 3540, 3782, 3906, 4032, 4160, 4422, 4556, 4692, 5112, 5402, 5550, 5700, 5852, 6006, 6162, 6480, 6642, 6972, 7482, 7832, 8010, 8372, 8556, 8742, 8930, 9120, 9312, 9702,

Código PARI

Puedes obtener el listado con este código, en el que generamos oblongos con k*(k+1) y después el primer sumando oblongo tal como hicimos en ***sumaoblongos***. La prueba para el segundo sumando es que 4*(t-i)+1 sea cuadrado.

```
for(k=1, 100, t=k*(k+1); i=2; j=2; e=0;
while(2*i<=t&e==0, if(issquare(4*(t-i)+1), e=1;
print1(t, ", ")); j+=2; i+=j))
```

Número de sumas de oblongos distintas

Terminamos con unas curiosidades. Podemos evaluar en cuántas sumas distintas de oblongos se puede descomponer un número. Usamos la función

```
Public Function numsumaoblongos(n)
Dim x, i, s

x = 2: i = 4: s = 0
While x <= n / 2
If estriangular((n - x) / 2) Then s = s + 1
x = x + i
i = i + 2
Wend
numsumaoblongos = s
```

End Function

Es similar a **sumaoblongos**, pero cuenta sumas en lugar de presentarlas.

Estos son los que admiten dos o más sumas:

32		2
62		2
84		2
92		2
102		2
112		2
144		2
152		2
162		3
188		2
212		3
222		2
242		2
246		2
252		2
266		2
282		2
292		2
312		3
314		2
344		2
348		2
362		3
372		2
382		2

Estos otros cuatro o más

942		4
1062		4
1202		4
1232		4
1572		4
1742		4
1812		4
1982		4
2112		5
2252		4
2312		4
2372		4
2562		4
2592		4
2682		4
2762		6
2892		4
2972		4
3102		4
3152		4
3204		4
3282		4

Comprobamos el 2762 con nuestra hoja ***Cartesius,*** descargable desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Planteamos

xtotal=2
xt=1..55
xt=suc(n*(n+1))
suma=2762
creciente

Viene a expresar que 2762 se descompone en dos sumandos del tipo n(n+1), ordenados en orden creciente para evitar repeticiones. Resultan seis, como era de esperar:

X1	X2
6	2756
110	2652
506	2256
600	2162
870	1892
1122	1640

Diferencia de oblongos

p(p+1)-q(q+1)=N significa que p^2+p-q^2-q=(p-q)(p+q+1)=N

Es fácil ver que este producto es par en todos los casos, y es lógico, por ser diferencia de oblongos. Por tanto, todos los números pares 2k serán diferencia de dos oblongos, que pueden ser (k+1)k y k(k-1), ya que su diferencia sería 2k. Así:

16=9*8-8*7=72-56

Por tanto, también en este caso el tema de la diferencia es trivial.

OPERANDOS SIMÉTRICOS

En las redes sociales es posible encontrar la publicación de operaciones en las que el resultado de las mismas no cambia si cada operando se sustituye por su simétrico en base 10, es decir, con las cifras en orden inverso. Por ejemplo 12*42=504 y si invertimos, 21*24=504 también. Otro ejemplo sería 12*63=756 y 21*36=756. Podemos estudiar diversos aspectos sobre esta casualidad. Nos limitaremos al caso de dos cifras, que es el más interesante. Dejamos los demás casos a otro momento en el que aumente la motivación.

Operación producto

El caso en el que la operación sea un producto ha sido ya bien estudiado. Los posibles resultados están publicados. Los primeros son estos:

504, 756, 806, 1008, 1148, 1209, 1472, 1512, 2016, 2208, 2418, 2772, 2924, 3024, 4416, 4433, 5544, 6314, 8096, 8316, 8415, 8866, 10736,

11088,...(http://oeis.org/A228164)

Todos esos números proceden de dos productos simétricos. El primero, 504, ya lo hemos desarrollado.

La siguiente tabla la hemos construido en hoja de cálculo para destacar los factores correspondientes a los términos de la sucesión anterior. Las dos primeras columnas representan los factores y la tercera el producto. Es fácil buscar en ella resultados iguales y pares simétricos:

12	42	504
12	63	756
12	84	1008
13	62	806
13	93	1209
14	82	1148
21	24	504
21	36	756
21	48	1008
23	64	1472
23	96	2208
24	63	1512
24	84	2016
26	31	806
26	93	2418
28	41	1148
31	39	1209
32	46	1472
32	69	2208
34	86	2924

36	42	1512
36	84	3024
39	62	2418
42	48	2016
43	68	2924
46	96	4416
48	63	3024
64	69	4416

Resultan 28 resultados. Más adelante justificaremos este número. Es evidente que en esta cuestión se excluyen los capicúas. Para construir una tabla similar necesitaremos una función para descubrir si un número es capicúa y otra para invertir las cifras de un número entero.

Disponemos de la función ESCAPICUA, que devuelve VERDADERO si lo es, y la función CIFRAINVER, que invierte las cifras de un número. El código de ambas lo tienes en el Anexo.

Una vez preparadas estas dos funciones, basta un bucle doble para detectar si un par de números cumple la propiedad citada. Para facilitar las búsquedas introducimos la función EQUISIM, que devuelve VERDADERO si al invertir las cifras en un producto el resultado no cambia. Puede ser la siguiente:

```
function equisim(m,n)
dim a,b,c

a=cifrainver(m) ‘Invertimos las cifras
b=cifrainver(n)
c=m*n ‘Calculamos el producto
if c=a*b then equisim=c else equisim=0 ‘Si coinciden se devuelve el producto y si no, un cero
end function
```

Con esta función y un doble bucle podemos encontrar las soluciones de la tabla de arriba

```
For i = p To q
for a=i to q

c=equisim(i,a)
If c>0 and not escapicua(i) and not escapicua(a) and a<>cifrainver(i) Then
Msgbox(i)
Msgbox(a)
Msgbox(c)
End if
Next a
Next i
```

Relación entre las cifras

Una pregunta natural es si las cifras de estas soluciones están relacionadas de alguna forma. Con un poco de Álgebra lo descubriremos en el caso de dos cifras. Sean los números (10*a+b) y (10*m+n). Planteamos que su producto coincida con el que resulta de invertir cifras:

(10*a+b)(10*m+n)=(10*b+a)(10*n+m)

Operamos con simplificación y queda

99am=99bn

am=bn

Luego la relación entre cifras es que el producto de las decenas coincida con el de las unidades. Compruébalo con los ejemplos de la tabla. Por ejemplo, 46 y 96 cumplen 4*9=6*6 y también que 46*96=64*69=4416

Esta es otra forma de ver el problema. Para buscar soluciones recorreremos los números que se puedan expresar de dos formas distintas como producto de dos factores de un dígito. Por ejemplo, 18=3*6=2*9, luego unas soluciones son {32, 69} {39, 62} {23, 96} y {26, 93}.

Sería buena idea recorrer todos los números enteros que se pueden descomponer en dos pares de factores de una cifra distintos. Es fácil ver que son:

4=1*4=2*2
6=1*6=2*3
8=1*8=2*4
9=1*9=3*3
12=2*6=3*4
16=2*8=4*4
18=2*9=3*6
24=3*8=4*6
36=4*9=6*6

De ellos hay cinco con todas las cifras distintas, que según un razonamiento anterior, darán lugar a cuatro soluciones cada uno, lo que suma 20 soluciones. Con dos cifras repetidas hay cuatro, que a dos soluciones cada uno, formarán 8 soluciones. Sumamos y obtenemos las 28 que forman la tabla de soluciones.

Si quieres asegurarte de que ya no hay más, puedes usar esta función, que te devuelve “NO” si no es un número válido, o bien el conjunto de factores menores que 10.

Su código puede ser este:

```
Function cuatrodigi$(n)
Dim a, i, j, k
Dim s$

s = ""   'Recibirá las soluciones o un "NO"
k = 0    'Contador de pares
For i = 1 To 8
For j = i To 9
If n = i * j Then 'Vemos si es producto de dos dígitos
k = k + 1            'Si lo es, incrementamos el contador y recogemos soluciones en s$
s$ = s$ + Str$(i) + Str$(j)
End If
Next j
Next i
If k > 1 Then cuatrodigi$ = s$ Else cuatrodigi = "NO" 'Recogemos soluciones si son cuatro o más
End Function
```

Hemos usado esta función en una rutina de búsqueda y nos han resultado las nueve soluciones ya analizadas:

4		1 4 2 2
6		1 6 2 3
8		1 8 2 4
9		1 9 3 3
12		2 6 3 4
16		2 8 4 4
18		2 9 3 6
24		3 8 4 6
36		4 9 6 6

ANEXO

```
Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$

auxi = Right(auxi, Len(auxi) - 1)
c = True
i = 1
k = Int(l / 2)
While i <= k And c
 If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c =
False
 i = i + 1
 Wend
End If
escapicua = c
```

```
End Function


Public Function cifrainver(n)
Dim l, i
Dim c
Dim auxi$, auxi2$, ci$
If n < 10 Then cifrainver = n: Exit Function
auxi = auxi = Right(auxi, Len(auxi) - 1)
auxi2$ = ""
l = Len(auxi)
For i = l To 1 Step -1
ci$ = Mid(auxi, i, 1)
auxi2 = auxi2 + ci$
Next i
c = Val(auxi2$)
cifrainver = c
End Function
```

Otras operaciones

En el anterior apartado estudiamos los pares de números de dos cifras cuyo producto no cambia si se invierten las mismas, como 48*63=84*36=3024. Abordaremos hoy la misma cuestión sustituyendo la operación de producto por otras. Comenzamos con la suma de cuadrados, que también presenta la misma propiedad en algunos casos, como 14^2+87^2=41^2+78^2=7765. Seguiremos los mismos pasos de estudio que recorrimos con el producto, pero más simplificados.

Operación Suma de cuadrados

Estos son los números menores de 100 que conservan el resultado de la suma de sus cuadrados aunque se altere el orden de las cifras. La tabla contiene los dos números y el resultado de la operación:

14	87	7765
15	75	5850
17	84	7345
26	97	10085
27	96	9945
30	45	2925
35	40	2825
41	78	7765
48	71	7345
51	57	5850
62	79	10085
69	72	9945

Para encontrarlos basta modificar ligeramente la función EQUISIM (ver párrafos anteriores). La podemos codificar así:

Function equisim(m, n)
Dim a, b, c

a = cifrainver(m) 'Invertimos las cifras
b = cifrainver(n)
c = m ^ 2 + n ^ 2 'Calculamos la suma de cuadrados
If c = a ^ 2 + b ^ 2 Then equisim = c Else equisim = 0
'Si coinciden se devuelve el producto y si no, un cero
End Function

Hemos aplicado esta función a todos los pares de números de dos cifras distintos y nos ha resultado la tabla de arriba.

Relación entre las cifras

Al igual que en el producto encontramos una relación sencilla entre las cifras que se invierten, en este caso obtenemos otra muy similar. Como en el caso anterior, basta un poco de Álgebra:

(10*a+b)^2+(10*m+n)^2=(10*b+a)^2+(10*n+m)^2

Desarrollamos y simplificamos y queda:

$99(a^2-b^2)=99(n^2-m^2)$

$\mathbf{a^2-b^2=n^2-m^2}$

Lo comprobamos en algún ejemplo: $51^2+57^2=15^2+75^2$ y se cumple que $5^2-1^2 = 7^2-5^2 = 24$ y con 27 y 96 se cumple que $7^2-2^2=49-4=45$ y $9^2-6^2=81-36=45$

Hemos resumido la situación creando una tabla con todas las diferencia de cuadrados que son posibles entre cifras. Están destacados en rojo los pares repetidos, que son los que nos valen para este caso:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1		0	3	8	15	24	35	48	63	80
2			0	5	12	21	32	45	60	77
3				0	7	16	27	40	55	72
4					0	9	20	33	48	65
5						0	11	24	39	56
6							0	13	28	45
7								0	15	32
8									0	17
9										0

Cualquier par de diferencias equivalentes generará ejemplos de la tabla. Faltarán {03, 54} y {04, 53} por haber reducido la búsqueda al caso de dos cifras.

Operación $a^2+a*b+b^2$

Otra operación simétrica que nos ha producido resultados es $\mathbf{a^2+a*b+b^2}$, o lo que es equivalente,

$(a^3-b^3)/(a-b)$. Con las mismas técnicas, que no repetiremos, se pueden obtener los números de dos cifras que presentan simetría en las mismas para esta operación.

Son estos:

15	96	10881
16	95	10801
30	57	5859
37	50	5719
51	69	10881
59	61	10801

Hemos publicado en Twitter un ejemplo bastante atractivo:

$$\frac{96^3-15^3}{96-15}=\frac{69^3-51^3}{69-51}=10881$$

También podemos emprender un estudio algebraico, para ver la relación entre cifras (nos limitamos al caso de dos)

(10*a+b)^2+(10*a+b)*(10*m+n)+(10*m+n)^2=(10*b+a)^2+(10*b+a)*(10*n+m)+(10*n+m)^2

Desarrollamos con simplificación y nos resulta, como era previsible:

$a^2+am+m^2=b^2+n^2+bn$

También aquí se ha efectuado la comprobación con una tabla de doble entrada:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1		3	7	13	21	31	43	57	73	91
2			12	19	28	39	52	67	84	103
3				27	37	49	63	79	97	117
4					48	61	76	93	112	133
5						75	91	109	129	151
6							108	127	148	171
7								147	169	193
8									192	217
9										243

Con diferencias de cuadrados

Al igual que en las anteriores operaciones, basta adaptar la función EQUISIM. Nos han resultado bastantes pares:

14	78	5888
15	57	3024
17	48	2015
26	79	5565
27	69	4032
30	54	2016
40	53	1209
41	87	5888

51	75	3024
62	97	5565
71	84	2015
72	96	4032

Ejemplos:

$69^2-27^2=96^2-72^2=4032$

$87^2-41^2=78^2-14^2=5888$

$75^2-51^2=57^2-15^2=3024$

Puedes relacionar este caso con el del producto, que ya vimos anteriormente. Podemos aprovechar que la diferencia de cuadrados equivale a suma por diferencia. Lo hemos iniciado, pero la condición de que ambos factores tengan la misma paridad impide una correspondencia clara entre ambas operaciones.

Con suma simétrica $a^2+b^2+a^2$

Terminamos este catálogo de operaciones con sumas simétricas, como

$13^2+53^2+13^2=31^2+35^2+31^2=3147$

Sin dar detalles, que puedes reproducir fácilmente, he aquí la tabla de resultados simétricos equivalentes.

Basta hacer corresponder los pares que producen un mismo resultado:

20	13	969
13	40	1938
13	53	3147
31	35	3147
24	51	3753
42	15	3753
40	26	3876
15	71	5491
51	17	5491
35	62	6294
53	26	6294
24	75	6777
42	57	6777
15	84	7506
51	48	7506
26	80	7752
60	39	8721
40	79	9441
46	73	9561
64	37	9561
37	91	11019
73	19	11019
57	71	11539
75	17	11539

35	97	11859
53	79	11859
57	84	13554
75	48	13554
68	95	18273
86	59	18273
79	80	18882

CUADRADOS DEL TIPO N(N+K)

En enero de 2018 se publicaron en Twitter varios resultados sobre una propuesta de Republic of Math @republicofmath, uno de los cuales insertamos a continuación:

> **Republic of Math** @republicofmath · 8 ene.
> Is n = 508032? the unique positive integer for which n(n+2018) is a perfect square?
>
> Ref bit.ly/2COH7MF

En este blog acudimos con frecuencia a la técnica de “dar vueltas” a una cuestión de la que tengamos noticia. En este caso concreto estudiaremos de forma algebraica y algorítmica la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Por ejemplo, si k=16, existen dos números, 2 y 9, que producen un cuadrado mediante dicha expresión. En efecto:

$2(2+16)=2*18=36=6^2$; $9(9+16)=9*25=225=15^2$

Para encontrar soluciones correspondientes a un valor de **k** acudiremos a búsqueda en hoja de cálculo y PARI para después abordar un estudio teórico. Es una metodología muy frecuente en este blog: comenzar con una búsqueda sin apoyo teórico y después ir buscando regularidades o fundamentaciones algebraicas.

Estudio con hoja de cálculo

Es fácil programar una función que nos indique si un número **n** produce un cuadrado en la expresión **n(n+k)** para un **k** dado. La que insertamos a continuación nos servirá para valores de **k** pequeños. En otros casos los errores de truncamiento de los cálculos nos pueden llevar a conclusiones falsas. Por eso es interesante acudir a un lenguaje de más exactitud como PARI y dar una vuelta de Álgebra a esta cuestión.

La función más simple que podemos proponer es esta:

Function escuadprod(n, k) As Boolean

‘Depende de dos variables y devuelve VERDADERO o FALSO
Dim a
a = n * (n + k) ‘Construimos el producto pedido
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then escuadprod = True Else escuadprod = False
‘Si **a** equivale al cuadrado de la parte entera de su raíz cuadrada, vale
End Function

Con ella y un bucle de búsqueda se pueden encontrar las soluciones para un valor de **k** dado. En la imagen figuran las correspondientes a k=21, que son 4, 7, 27 y 100.

21	5000	1
4		21
7		21
27		21
100		21

Las comprobamos:

$4(4+21)=4*25=100=10^2$
$7(7+21)=7*28=196=14^2$
$27(27+21)=27*48=1296=36^2$
$100(100+21)=100*121=12100=110^2$

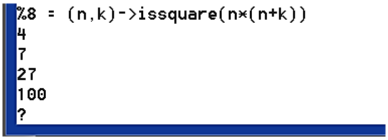
¿Se podrán encontrar más? Lo veremos en el estudio algebraico.

Para mayor velocidad y exactitud trasladamos vuestra función a PARI (lo puedes realizar fácilmente con otro lenguaje). Este sería el listado para k=21.

escp(n,k)=issquare(n*(n+k))
k=21;for(i=1,10000,if(escp(i,k),print(i)))

Hemos acotado la búsqueda en 10000, pero para valores de k superiores deberíamos ampliar la búsqueda. Ya trataremos esto más adelante.

El resultado es:



Coinciden las soluciones 4, 7, 27 y 100.

Estudio algebraico

Llamemos m^2 al cuadrado que debe producir el producto n(n+k).

En ese caso se cumplirá: $n(n+k)=m^2$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$n^2 + kn - m^2 = 0$$

$$n = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4m^2}}{2}$$

El radicando ha de ser un cuadrado perfecto, llamémosle p^2, lo que nos lleva a que

$p^2 - 4m^2 = k^2$

$(p+2m)(p-2m)=k^2$

Si encontramos dos valores enteros para p y m, sustituyendo en la resolución de la ecuación:

$$n = \frac{p - k}{2}$$

Bastará entonces descomponer k^2 en dos factores, sean A y B, e igualar:

Resultará **p+2m=A, p-2m=B, p=(A+B)/2, m=(A-B)/4**

Deberemos buscar entonces A y B de forma que **su diferencia sea múltiplo de 4** y distinto de cero, para evitar la solución cero.

Veamos el caso de 21. Su cuadrado 441 admite estas descomposiciones en productos:

441*1=147*3=63*7=49*9=21*21

Los cuatro primeros se diferencian en un múltiplo de 4, y nos queda:

441*1: m=(441-1)/4=110; p=(441+1)/2=221; n=(p-k)/2=(221-21)/2=100

147*3: m=(147-3)/4=36; p=(147+3)/2=75; n=(75-21)/2=27

63*7: m=(63-7)/4=14; p=(63+7)/2=35; n=(35-21)/2=7

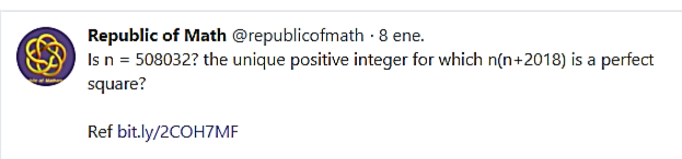
49*9: m=(49-9)/4=10; p=(49+9)/2=29; n=(29-21)/2=4

Obtenemos las soluciones sabidas 100, 27, 7 y 4. Hemos desechado la solución cero, que se obtendría de 21*21.

Hemos deducido que el valor de p equivale a p=(A+B)/2, siendo A y B factores de k^2, luego p<=k^2/2, y, por tanto, el valor buscado n=(p-k)/2, tendrá como amplia cota k^2/4:

$$n \leq \frac{k^2}{4}$$

Podíamos ajustar más, pero no es necesario. Por ejemplo, para el caso k=2018, PARI nos da la solución (por cierto, única) de n=508032, ya publicada en Twitter


Republic of Math @republicofmath · 8 ene.
Is n = 508032? the unique positive integer for which n(n+2018) is a perfect square?

Ref bit.ly/2COH7MF

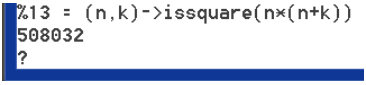
Esta solución cumple 508032<2018^2/4=1018081

Por tanto, en PARI deberíamos buscar hasta esa cantidad:

escp(n,k)=issquare(n*(n+k))

k=2018;for(i=1,1018081,if(escp(i,k),print(i)))

Obtendríamos la misma solución única:



¿Por qué es única?

Seguimos el proceso algebraico:

2018^2=4072324=4072324*1=2036162*2=1018081*4= 4036*1009=2018*2018

El único par válido es 2036162*2, luego p=(2036162+2)/2=1018082 y n=(1018082-2018)/2=508032

Es única la solución 508032

Terminamos con una consideración:

Si n convierte n(n+k) en un cuadrado, es decir, es solución para un k dado, el número *rn* será solución para *rk*.

Es una propiedad muy importante, que se justifica en estas simples igualdades:

Si $n(n+k)=m^2$, entonces $rn(rn+rk)=(rm)^2$

Número de soluciones para cuadrados del tipo n(n+k)

En el anterior apartado comenzamos a "dar vueltas" a la cuestión de qué números **n** cumplen que **n(n+k) es un cuadrado** para un número **k** dado. Ya presentamos la función **escuadprod(n,k)** para averiguar si un número **n** forma cuadrado mediante **n(n+k)**. Después se tradujo a PARI y se desarrolló un procedimiento algebraico para encontrar las soluciones del problema planteado.

Comenzaremos por contar las soluciones que presenta cada valor de **k**, para pasar luego a algunos casos interesantes.

Función para contar soluciones

Mediante procedimientos similares a los desarrollados en los anteriores apartados, podemos crear la función ***numcuadprod(k)*** que cuente las soluciones para un valor concreto de **k**. El siguiente código para VBA de Excel resuelve la cuestión.

```
Function numcuadprod(k)
Dim a, i, r, c

c = 0 'Contador de soluciones
r = k ^ 2 / 4 'Cota de búsqueda
For i = 1 To r
a = i * (i + k)
If a = Int(Sqr(a)) ^ 2 Then c = c + 1 'Si se cumple, se incrementa el contador
Next i
numcuadprod = c
End Function
```

Si prefieres la exactitud del lenguaje PARI, puedes usar este código:

```
numcp(k)={local(c=0,
a=0,r=k^2/4,i=0);for(i=1,r,a=i*(i+k);if(issquare(a),c+=1
)); c}
print(numcp(960))
```

Lo hemos particularizado para k=960

Aquí tienes el resultado en Excel

Valor de k	960
Número soluciones	40

Y aquí en PARI

```
%1 = (k)->local(c=0,a=0,r=k^

40
?
```

Con la función ***escuadprod(n,k)*** que estudiamos anteriormente podemos buscar esas 40 soluciones. Son:

En Excel:

1	216	1000	4332
8	250	1156	5290
12	320	1352	5929
20	363	1470	6728
40	392	1849	9126
54	484	1944	11045
64	540	2420	13924
98	722	2738	18723
120	768	3136	28322
196	845	3375	57121

Y en PARI

```
%5 = (n,k)->issquare(n*(n+k))
1, 8, 12, 20, 40, 54, 64, 98, 120, 196, 216, 250, 320, 363, 392, 484, 540, 722,
768, 845, 1000, 1156, 1352, 1470, 1849, 1944, 2420, 2738, 3136, 3375, 4332, 5290
, 5929, 6728, 9126, 11045, 13924, 18723, 28322, 57121,
?
```

Casos particulares

Estudiaremos a continuación algunos casos particulares en los que no es complicado contar soluciones.

Múltiplos de 3

Todos tienen al menos una solución. Si k=3m, una solución para n es m, ya que $m(m+3m)=4m^2=(2m)^2$

Un razonamiento similar valdría para múltiplos de 8, ya que $m(m+8m)=(3m)^2$

Por tanto los múltiplos de un número anterior a un cuadrado presentarán la misma situación.

Números que no presentan soluciones

Los números 1, 2 y 4 no admiten soluciones, porque sus cuadrados no se pueden descomponer en dos factores A y B cuya diferencia sea múltiplo de 4.

Números primos mayores que 2

Si k es primo, $A=k^2$ y B=1. Todos los cuadrados de primos mayores que 2 son de la forma 4m+1, ya que $(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$, $(2k+3)^2=4(k^2+3k+2)+1$, y por tanto

A-B será múltiplo de 4. En este caso tendremos que $p=(k^2+1)/2$ y $n=((k^2+1)/2-k)/2=(k^2-2k+1)/4=(k-1)^2/4$, o bien:

$$n = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Así lo comunica @republicofmath

> **Republic of Math** @republicofmath · 9 ene.
> Unique n such that n(n+p) is a perfect square, where p > 2 is prime, is n=[(p-1)/2]^2

Aquí añadimos que esta solución también es válida **para todos los impares**, aunque sólo tiene que ser única para los primos (recuérdese el 21).

En el caso de 21, n=(21-1)^2/4=400/4=100, pero existen otras.

Podemos listar las soluciones para los primeros primos y comprobar esa fórmula:

k	n
3	1
5	4
7	9
11	25
13	36
17	64
19	81
23	121
29	196

Potencias de 2 mayores que 4

Si **$k=2^r$**, con r>2, el número de soluciones será **r-2**

En efecto, k^2 en ese caso se podría descomponer de la forma $A=2^a$, $B=2^b$, con la condición de que a+b=2r a>b y que la diferencia A-B sea múltiplo de 4, para lo que b ha de ser mayor que 1, ya que

$A-B=2^a-2^b=(2^{a-b}-1)*2^b$

En esa diferencia el paréntesis es impar, luego sólo será múltiplo de 4 si lo es 2^b, es decir, con b>1

Esto reduce los valores de b a **2, 3, 4,…r-1**, ya que el valor **r** produciría la igualdad A=B. Contamos casos, y, efectivamente, son **r-2**

Lo vemos para el 16:

S k=16, r=4, 2r=8, y los valores posibles de b, 2 y 3

Si b=2, B=4, A=64, p=(A+B)/2=34, n=(34-16)/2=9, y se cumple $9(9+16)=225=15^2$

Si b=3, B=8, A=32, p=(A+B)/2=20, n=(20-16)/2=2, y tenemos $2(2+16)=36=6^2$

Con la función ***numcuadprod(n)*** podemos comprobar estos resultados:

r	k	numcuadprod	r-2
3	8	1	1
4	16	2	2
5	32	3	3
6	64	4	4
7	128	5	5
8	256	6	6
9	512	7	7

Se observa la coincidencia de valores en los resultados de la función ***numcuadprod*** y la expresión **r-2**

Semiprimos pares mayores que 4

Estos números presentan una sola solución, ya que si k=2h, k^2=4h^2, con h primo impar y la única forma de descomponer k en dos factores adecuados es A=2h^2, B=2, con lo que su diferencia será 2*(h^2-1). El paréntesis será múltiplo de 4, ya que h^2 es de la forma 4m+1. Así que las soluciones se formarán así: p=(2h^2+2)/2=h^2+1 y de ahí, n=(p-k)/2=(h^2+1-2h)/2=

(h-1)^2/2=(k-2)^2/8

En resumen

$$n = \frac{(k-2)^2}{8}$$

Lo puedes comprobar con la tabla de los primeros semiprimos pares:

k	n
6	2
10	8
14	18
22	50
26	72
34	128
38	162
46	242
58	392
62	450
74	648
82	800
86	882
94	1058

Estos razonamientos confirman lo visto con anterioridad, cuando se afirmaba que 2018 (semiprimo par) sólo presentaba una solución, 508032.

Números de la forma $k=2^m*p$, con $m>1$ y p primo mayor que 2

En este caso $\mathbf{k^2=2^{2m}*p^2}$

Al descomponer $\mathbf{k^2}$ en factores, el primo **p** puede pertenecer a ambos, o bien $\mathbf{p^2}$ pertenecerá a uno de ellos y al otro no.

Primer caso

Si el primo figura en ambos factores, sean $\mathbf{A=2^rp}$ y $\mathbf{B=2^sp}$, aparecerán tantos factores como indique 2^m, ya que p no añadirá ninguno más. Como vimos en el apartado de potencias de 2, se producirán **m-2** soluciones válidas.

Segundo caso

Si p^2 figura en un factor y en otro no, ambos factores han de ser múltiplos de 4, luego de todas las potencias de 2 que dividen a 2m, sean 2^1, 2^2, 2^3,… 2^{2m-2}, 2^{2m-1}, 2^{2m}, habrá que eliminar la primera, que no es múltiplo de 4, y las dos últimas, que impedirían que fuera múltiplo de 4 el otro factor, luego sólo nos quedan **2m-3** posibilidades.

Sumamos y resultan **3m-5** el número de soluciones que admite **$k=2^m*p$.**

Lo comprobamos con un ejemplo. Sea $k=80=2^4*5$. Según la fórmula, deben aparecer 2*4-5=7 soluciones. Lo desarrollamos:

$K^2=6400$

Descomponemos en productos válidos.

Primer caso

Debe entrar el 5 en ambos factores. Las posibilidades son: 320*20 y 160*40, en total 4-2 soluciones, que serían:

A=320, B=20, p=(320+20)/2=170, n=(170-80)/2=45. Compruebo: $45(45+80)=75^2$

A=160 B=40, p=(160+40)/2=100, n=(100-80)/2=10. Se cumple: $10(10+80)=900=30^2$

Segundo caso

El primo 5 sólo figura en un factor. Nos quedarían los productos válidos 1600*4, 800*8, 400*16, 200*32, 100*64, que darían lugar (omitimos los cálculos) a las soluciones 361, 162, 64, 18 y 1. Serían 5 soluciones, es decir 2*4-3, según la fórmula.

Resumimos ambos casos y resultan las siete soluciones (3*4-5) que podemos obtener con la función *escuadprod*:

Soluciones k=80	n(n+k)	Raíz cuadrada
1	81	9
10	900	30
18	1764	42
45	5625	75
64	9216	96
162	39204	198
361	159201	399

Números impares

En el caso de los impares el cálculo se simplifica. Sólo necesitamos conocer su descomposición factorial, en la que todos los números primos serán impares. Todos ellos serán del tipo 4k+1 o 4k+3, pero sus cuadrados, cuartas o sextas potencias serán todos del tipo 4k+1 y sus diferencias múltiplos de 4. Si en el emparejamiento un primo del tipo 4k+3 se toma una vez, el otro factor también lo contendrá, y se compensa el 3 al restar, resultando también un múltiplo de 4.

En este caso k^2 tendrá la forma $k^2=p^{2t}q^{2u}r^{2v}s^{2w}$…, con p, q, r, s primos y t, u, v y w sus exponentes primitivos. Se sabe que entonces su número de divisores será

(1+2t)(1+2u)(1+2v)…Este producto es la función TAU, la que cuenta divisores.

Todos esos factores se deberán emparejar, ya que sus diferencias siempre serán múltiplos de 4. Un par tendrá dos factores iguales, y se deberá eliminar, con lo que nos quedan **(TAU(k^2)-1)/2** productos posibles, y soluciones para k.

Ejemplo

Si k=165=3*5*11, según la función numcuadprod, se deberán esperar 13 soluciones, número que coincide con la fórmula que acabamos de obtener: =(TAU(165^2)-1)/2=(3^3-1)/2=26/2=13. En efecto, al sacar los divisores de 165^2 podemos obtener trece pares válidos. Reproducimos los cálculos habituales para sacar todas las soluciones para k=165:

A	B	p	n
27225	1	13613	6724
9075	3	4539	2187
5445	5	2725	1280
3025	9	1517	676
2475	11	1243	539
1815	15	915	375
1089	25	557	196
825	33	429	132
605	45	325	80
495	55	275	55
363	75	219	27
275	99	187	11
225	121	173	4
165	165	No válido	

El último par se desecha por tener los factores idénticos, y nos quedan 13 soluciones en la última columna. Coinciden con las obtenidas mediante búsqueda ordenada con la función ***escuadprod*** ya vista anteriormente:

4
11
27
55
80
132
196
375
539
676
1280
2187
6724

Un ejemplo con k conteniendo potencias:

Sea $k=3^3*5^2*7=4725$. Su cuadrado tendrá de exponentes 6, 4 y 2. Calculamos TAU=(1+6)(1+4)(1+2)=7*5*3=105

El número de soluciones será (TAU-1)/2=(105-1)/2=52, que coincide con el que nos devuelve *numcuadprod*:

k	numcuadprod(k)
4725	52

Caso general

Ya hemos acumulado experiencia para abordar el caso general, que resume en cierto modo lo descubierto hasta ahora. Mediante búsqueda empírica y razonamiento posterior, creemos que podemos acudir a este procedimiento:

(1) Encontramos **la valuación** del número **k** respecto a 2, es decir, el exponente máximo del 2 contenido en el número dado, llamémosle **m**. Esto quiere decir que el número k se descompone en parte par, 2^m, y parte impar. Entonces:

$k^2=2^{2m}*v$, siendo v la parte impar.

(2) Hallamos la función TAU de la parte impar v, y aplicamos la fórmula vista en párrafos anteriores **(TAU(k^2)-1)/2** , y al resultado le llamaremos **t**.

(3) En ese caso, el número de soluciones para nuestra condición de que sea cuadrado n(n+k) vendrá dada por

N=t*(2m-3)+m-2 si m>2. Si no, lo tratamos como impar.

El primer sumando proviene de combinar todas las soluciones de la parte impar (la TAU t) con todas las de 2^m (vimos que con un solo primo resultaban 2m-3) y el segundo de la partición que se desechó en la parte impar por tener dos factores iguales (k*k).

Esto hay que tomarlo como una explicación, no como demostración, que requeriría un conteo más sistemático de todos los casos. Lo vemos, por ejemplo, con $336=2^4*3*7$. En este caso m=4 y la parte impar es $441=3^2*7^2$, cuya TAU vale (1+2)(1+2)=9 y t=(9-1)/2=4. Por tanto, según la expresión que hemos presentado, n=4*(2*4-3)+4-2=4*5+2=22

En efecto, la función ***numcuadprod*** nos devuelve 22:

n	336
numcuadprod(n)	22

Según el razonamiento de más arriba, el segundo sumando, 4-2=2 proviene de tomar en la parte impar de 21^2 el par 21*21. Y así es en este ejemplo, ya que se corresponderían a los productos 1344*84=21*64*21*4=336*336 y a

672*168=21*32*21*8=336*336

Los restantes 20 productos válidos se corresponderán con todas las combinaciones válidas de los productos de la parte par con los de la parte par. Por curiosidad, los copiamos aquí. Ninguno de ellos presenta el factor común 21 en ambos factores:

28224*4, 14112*8, 9408*12, 7056*16, 4704*24, 4032*28, 3528*32, 3136*36, 2352*48, 2016*56, 1764*64, 1568*72, 1344*84, 1176*96, 1008*112, 784*144, 672*168, 576*196, 504*224 y 448*252.

Las 22 soluciones para n respecto al valor de k=336 las podemos obtener, ordenadas de menor a mayor, con la función ***escuadprod***:

2
7
14
25
27
42
64
112
150
189
242
289
350
432
625
722
847
1014
1600
2187
3362
6889

Tomemos una al azar, como 847: $847*(847+336)=1002001=1001^2$. Resulta un cuadrado, luego es una solución válida.

Hemos construido la función ***numcuadprod2*** recogiendo el algoritmo propuesto. Con ella se puede verificar la coincidencia de los dos métodos que podemos utilizar, el de la búsqueda simple (*numcuadprod)* y el basado en las consideraciones desarrolladas en este apartado (*numcuadprod2*)

En esta tabla de datos tomados al azar se observa la equivalencia:

Número	numcuadprod	numcuadprod2
4	0	0
32	3	3
6	1	1
24	4	4
32	3	3
77	4	4
220	4	4
480	31	31
500	3	3

Casos publicados

Analizamos ahora los casos que se publicaron en

> **Republic of Math** @republicofmath · 7 ene.
> There are (at least) 4 positive integers n for which n(n+2019) is a perfect square: n = 673, 112225, 338688, 1018081

Twitter en enero de 2018:

Según nuestro procedimiento, como es impar, buscamos la función TAU de su cuadrado:

2019=3*673, luego TAU(2019^2)=(1+2)(1+2)=9, y el número de soluciones será (9-1)/2=4

Estas cuatro soluciones provendrán de los productos válidos del cuadrado de 2019:

A	4076361	1358787	452929	6057
B	1	3	9	673
p	2038181	679395	226469	3365
n	1018081	338688	112225	673

Hemos seguido lo sugerido en párrafos anteriores:

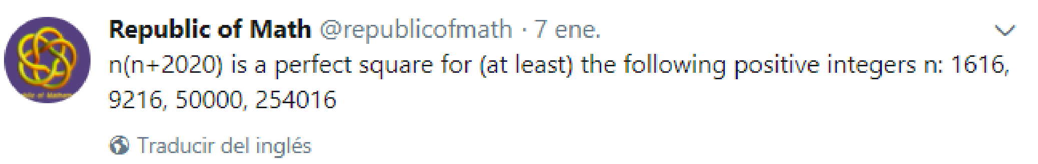
- Buscar productos cuya diferencia sea múltiplo de 4

– Llamar A y B a los factores

– Encontrar su promedio p

– Aplicar la fórmula n=(p-k)/2.

Podemos observar la coincidencia entre nuestro cálculo y el publicado.


Republic of Math @republicofmath · 7 ene.
n(n+2020) is a perfect square for (at least) the following positive integers n: 1616, 9216, 50000, 254016

Traducir del inglés

Aquí $2020=2^2*5*101$. Es el caso en el que el exponente de 2 es 2, luego el número de casos será 4, pues la parte impar sólo presenta dos factores y el cuadrado de 2 no incrementa ese número.

Los productos válidos de 2020^2 son:

A	1020100	204020	40804	10100
B	4	20	100	404
p	510052	102020	20452	5252
n	254016	50000	9216	1616

Republic of Math @republicofmath · 8 ene.
2310 = 2*3*5*7*11. There are at least 40 n s.t. n(n+2310) is a perfect square: 2,56,66,120,154,250,352,378,440,578,770,864,1120,1408,1690,1848,1922,2744,2970,3456,4418,5250,5632,7546,7776,9464,11000,12482,13690,17920,19074,25538,30618,43320,59488,72962,94136,132250,221184,665858

Para 2310=2*3*5*7*11 bastará calcular el número de casos de la parte impar de su cuadrado. Es fácil ver que TAU(2310^2)=3*3*3*3=81, luego el número de casos será (81-1)/2=40, tal como se afirma en la publicación que analizamos.

Reproducir los cuarenta casos es muy pesado. Deberíamos factorizar el cuadrado de 2310, 5336100 y buscarle todos los divisores:

5336100 2668050 1778700 1334025 … 10 9 7 6 5 4 3 2 1

Después formaríamos pares con ellos y nos quedaríamos con los que presentan una diferencia múltiplo de 4. No lo haremos con todos, sólo con los primeros:

A	2668050	889350	533610	381150
B	2	6	10	14
p	1334026	444678	266810	190582
n	665858	221184	132250	94136

Si siguiéramos el procedimiento con todos los pares de factores coincidiríamos con lo publicado de forma total.

Problema inverso

Hasta ahora hemos buscado el valor de **n** que consigue que **n(n+k)** sea un cuadrado. Si planteamos el problema inverso, si dado un **n** ver si existe un **k** que cumpla la misma condición, con lo visto en párrafos anteriores tenemos la respuesta, pues vimos **que n(n+3n) es un cuadrado, luego existe solución para todo n**.

También vimos más arriba que 8n, 15n, 24n,…son todas soluciones para k, luego existen infinitas. La más pequeña suele ser 3n, pero con muchas excepciones, como puedes ver en la siguiente tabla, en la que las hemos marcado en rojo:

n	k
1	3
2	6
3	9
4	**5**
5	15
6	18
7	21
8	**10**
9	**7**
10	30
11	33
12	**15**
13	39
14	42
15	45
16	**9**
17	51
18	**14**
19	57
24	**30**

Esos casos se producen en los números que contienen cuadrados. Analizamos la situación:

(a) Si n es libre de cuadrados, será producto de varios primos, todos elevados a exponente 1. Por tanto, el cuadrado resultante de n(n+k) ha de ser múltiplo de los cuadrados de esos primos, luego el paréntesis también lo será, lo que obliga a que k sea múltiplo de n. De ahí que la solución mínima sea 3n.

(b) Si n contiene un cuadrado mayor que 1, será, por ejemplo, $n=r^2*s$, lo que nos lleva a la situación de que $r^2*s*(r^2*s+k)$ sea un cuadrado. Esto se consigue dando un valor a k que convierta el paréntesis en otro cuadrado. Para ello se puede convertir r^2 en $(r+1)^2$. Sabemos que la diferencia entre esos dos cuadrados es 2r+1, luego el valor de k que nos conviene es (2r+1)*s, ya que $r^2*s*(r^2*s+(2r+1)*s)= r^2*s*(r+1)^2*s= r^2*s^2*(r+1)^2$, luego hemos conseguido el cuadrado. Lo vemos con algún ejemplo:

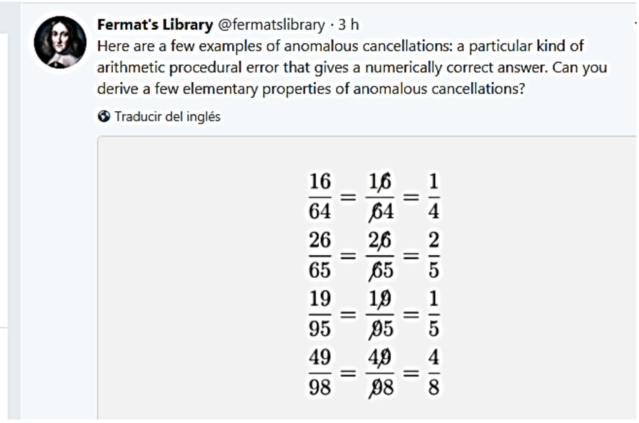
$N=20=2^2*5$. Hacemos k=(2*2+1)*5=25 y queda $20(20+25)=20*45=900=30^2$

$N=24=2^2*6$. Si k=(2*2+1)*6=30, tenemos $24(24+30)=1296=36^2$

No hemos analizado si existe en el caso de números que contienen cuadrados alguna solución menor que la presentada. Lo importante es que todos los valores de **n** admiten infinitas soluciones para **k**.

Cancelaciones con dos cifras

En este blog partimos a menudo de publicaciones en Twitter que nos llamen la atención. El día 29/3/18, *Fermat's Library* publicó las cancelaciones incorrectas en cuatro fracciones, pero que sus resultados sí son válidos. Ya conocíamos esta curiosidad, pero ante la invitación del texto del tweet, procedemos a pequeños desarrollos sobre el tema.



Fermat's Library @fermatslibrary · 3 h

Here are a few examples of anomalous cancellations: a particular kind of arithmetic procedural error that gives a numerically correct answer. Can you derive a few elementary properties of anomalous cancellations?

Traducir del inglés

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{49}{98} = \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$$

Siguiendo una metodología frecuente en este blog, comenzaremos por reproducir esta lista mediante VisualBasic para Excel o Calc, para después seguir con reflexiones teóricas y extensión a más cifras.

Función CANCELA

Comenzamos con la simple reproducción de estas cuatro fracciones mediante una búsqueda ordenada, restringiendo el estudio a números de dos cifras. En este caso, es claro que la solución es única para cada denominador, pero en nuestro planteamiento no lo tendremos en cuenta.

Nos basamos en las funciones CIFRA, NUMCIFRA y TROZOCIFRA ya diseñadas en este blog, y cuyo código se reproduce en el Apéndice.

CIFRA: extrae una cifra determinada de un número natural

NUMCIFRA: Cuenta las cifras de un número natural

TROZOCIFRA: Extrae del número unas cifras consecutivas determinadas.

Las condiciones de falsa cancelación son, por una parte, que la primera cifra de uno de los números sea idéntica a la segunda del otro, y que las cifras restantes representen fracciones equivalentes, lo que representaremos mediante la igualdad de productos cruzados. Quedará así, en forma de función:

Public Function cancela$(n) ‘Tiene forma de string para albergar varios números.
Dim i, m, p, q, x, y
Dim s$

m = numcifras(n) ‘Cuenta las cifras, y en esta fase sólo serán dos.
s$ = "" ‘La función comienza con una cadena vacía, por si no hay soluciones.
For i = 10 To n – 1 ‘Compara el número con todos sus anteriores.
p = numcifras(i)
If p = 2 And m = 2 Then ‘Restringe a números de dos cifras
x = cifra(i, 1)
y = cifra(n, 2)
If x = y And n * cifra(i, 2) = i * cifra(n, 1) Then s$ = s$ + Str(n) + ", " + Str$(i)
‘Unas cifras han de ser iguales, y las otras dar productos cruzados equivalentes.
End If
Next i
cancela = s ‘El resultado es el conjunto de soluciones para ese número
End Function

Con esta función y una búsqueda ordenada hemos obtenido las cuatro soluciones de dos cifras:

64, 16
65, 26
95, 19
98, 49

Estudio algebraico para dos cifras

Tienes un desarrollo similar en https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous_cancellation y la presentación del problema en http://mathworld.wolfram.com/AnomalousCancellation.html

Aquí nos limitaremos a la base de numeración 10.

Si dos cifras han de ser iguales para poderse cancelar, los números se podrán representar en base 10 como ab(10 y ca(10, o lo que es igual, p=10a+b y q=10c+a. Si las cancelaciones han de funcionar como verdaderas, serán equivalentes los productos cruzados: p*c=q*b, o bien

(10a+b)*c=(10c+a)*b

10ac+bc=10bc+ab

De esta igualdad básica podemos extraer otras. En Wikipedia se llega, para cualquier base p, a esta:

$$\frac{ap+b}{cp+a}=\frac{b}{c} \implies (a-b)cp=b(a-c)$$

Particularizada a base 10 quedaría como

10c(a-b)=b(a-c)

También podemos despejar **a**, la cifra que se cancela:

$$a=\frac{9bc}{(10c-b)}$$

Ya que este blog va de hojas de cálculo, nos podemos ahorrar más razonamientos y formar una tabla de doble entrada para **c** y **b**, destacando después los resultados enteros de ese cociente. Hemos situado la variable **c** en columnas, la **b** en filas y el posible valor de **a** en el interior de la tabla.

		c								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	1	0,95	0,93	0,92	0,92	0,92	0,91	0,91	0,91
	2	2,25	2	1,93	1,89	1,88	1,86	1,85	1,85	1,84
	3	3,86	3,18	3	2,92	2,87	2,84	2,82	2,81	2,79
	4	6	4,5	4,15	4	3,91	3,86	3,82	3,79	3,77
	5	9	6	5,4	5,14	5	4,91	4,85	4,8	4,76
	6	13,5	7,71	6,75	6,35	6,14	6	5,91	5,84	5,79
	7	21	9,69	8,22	7,64	7,33	7,13	7	6,9	6,83
	8	36	12	9,82	9	8,57	8,31	8,13	8	7,9
	9	81	14,7	11,6	10,5	9,88	9,53	9,3	9,13	9

Salvo los casos triviales en los que b=c, obtenemos (destacados en rojo) las cuatro posibilidades válidas:

a=6, b=4, c=1
a=6, b=5, c=2
a=9, b=5, c=1
a=9, b=8, c=4
Coinciden con las cuatro soluciones obtenidas

	64, 16
	65, 26
	95, 19
	98, 49

Podemos prescindir de la hoja de cálculo con otro tipo de razonamiento, observando los valores que hacen enteras las fracciones.

10c(a-b)=b(a-c)

10 divide a **b(a-c)**, lo que obliga **a que b sea par y a-c=5, o bien, que b=5 y a-c par** (son cifras, por lo que todos son iguales o menores que 9)

(1) Si b=5 queda a=45c/(10c-5)=9c/(2c-1)

Para que sea entero, 2c-1 ha de ser 1 o divisor de 9.

Si es 1, queda a=9 y la solución {95,19}. Si 2c-1 fuera divisor de 9, podría ser c igual a 2 o a 5.

Si c=2, a=(9*2)/3=6, lo que nos da la solución {65, 26}

Si c=5, a=(9*5)/(9)=5, lo que llevaría a una trivialidad: 55/55

(2) Si b es par y a-c=5 nos queda

10c(c+5-b)=5b

b=10c(c+5)/(10c+5)

Los valores que hacen entera esta fracción son:

c=1, b=60/15=4 y a=9*1*4/(10*1-4)=36/6=6, lo que nos lleva a la solución {64,16}

c=4, b=10*4*9/(10*4+5)=360/45=8, a=9*4*8/(10*4-8)=9, que conduce a {98, 49}

Ningún otro valor de c hace entera la fracción, luego se han agotado las posibilidades.

Hasta aquí el caso en el que numerador y denominador son ambos de dos cifras en base 10. Existen otros casos de más cifras, de los que algunos se presentan en el enlace a la página de Mathworld de más arriba, de la que ofrecemos un recorte (c.f. Boas 1979). The first few 3-digit anomalous cancelling numbers are

$$\frac{106}{265} = \frac{10}{25}$$
$$\frac{116}{464} = \frac{11}{44},$$

and the first few with four digits are

$$\frac{1016}{4064} = \frac{101}{404}$$
$$\frac{1019}{5095} = \frac{11}{55}.$$

Apéndice

```
Public Function cifra(m, n)
'Extrae la cifra n del número m si es natural.En caso contrario devuelve -1. También devuelve -1 si excede del número de cifras
Dim a, b
If m>0 and m=Int(m) Then
If n > numcifras(m) Then
  cifra = -1
  Else
  a = 10 ^ (n - 1)
  b = Int(m / a) - 10 * Int(m / a / 10)
  cifra = b
  End If
Else
cifra = -1
```

```
End If
End Function

Public Function numcifras(n)
Dim nn, a
'Calcula el número de cifras enteras de un número natural. Si no lo es, devuelve un cero

If n>0 and n=Int(n) Then
a = 1: nn = 0
While a <= n
a = a * 10: nn = nn + 1
Wend
numcifras = nn
Else
numcifras = 0
End If
End Function

Public Function trozocifras(m, n, p)
'Extrae un trozo desde la cifra n hasta la p

Dim a, b, c, d

If m>0 and m=Int(m) Then
```

```
c = numcifras(m)
If n > c Or p > c Then
  trozocifras = -1
  Else
  a = 10 ^ p
  d = 10 ^ (n - 1)
  b = m - Int(m / a) * a
  b = Int(b / d)
  trozocifras = b
  End If
Else
trozocifras = -1
End If
End Function
```

Cancelaciones de tres cifras

Continuamos con las cancelaciones anómalas. Pasamos ahora al caso en el que tengan tres, siempre en base 10. Distinguimos algunos casos:

(1) Cancelación de la primera del numerador con la tercera del denominador.

Una vez hemos resuelto el problema con dos cifras mediante la función ***cancela***, bastará cambiar algunas líneas de código para poder cancelar la primera del numerador con la tercera del denominador. Como existen tres cifras, en la identidad de productos cruzados, en lugar de usar la función CIFRA usaremos TROZOCIFRAS, para abarcar las dos cifras restantes después de cancelar. Tendríamos que cambiar estas líneas:

p = numcifras(i)
If p = 3 And m = 3 Then ‘Ahora exigimos que ambos sean de tres cifras
x = cifra(i, 1) ‘Del numerador elegimos la primera cifra
y = cifra(n, 3) ‘Del denominador, la tercera
If x = y And n * trozocifras(i, 2, 3) = i * trozocifras(n, 1, 2) Then s$ = Str(n) + ", " + Str$(i)
‘Los productos cruzados serán de una cifra en un factor y de dos cifras en el otro
End If

Con estos cambios encontramos varios ejemplos. Reproducimos el resultado de nuestra operación de búsqueda. La primera columna son los denominadores y la segunda los numeradores.

664 166
665 266
775 217
995 199

996   249
998   499

Son fáciles de comprobar. Lo vemos en la siguiente tabla:

Den. 1	Num. 1	Valor	Den. 2	Num. 2	Valor
664	166	0,250	**64**	**16**	0,250
665	266	0,400	**65**	**26**	0,400
775	217	0,280	75	21	0,280
995	199	0,200	**95**	**19**	0,200
996	249	0,250	96	24	0,250
998	499	0,500	**98**	**49**	0,500

En las dos primeras columnas figuran las soluciones obtenidas y el valor decimal de sus fracciones (en rojo). En las siguientes las resultantes de cancelar primera con tercera cifra, y al final, los valores coincidentes con los primeros.

Hemos destacado en color azul y negrita las fracciones ya "simplificadas" que coinciden con las soluciones obtenidas con dos cifras. La explicación de que figuren ahí es la igualdad de cifras que existente en cuatro de las seis soluciones. Ha sido un resultado no buscado.

(2) Cancelación de la segunda del numerador con la tercera del denominador.

Con un método similar podemos encontrar las cancelaciones anómalas en las que se "simplifica" la primera cifra del numerador con la tercera del denominador.

Las soluciones son estas:

Den.	Num.
220	121
325	130
330	231
335	134
340	238
345	138
440	341
550	451
640	160
644	161
648	162
650	260
652	163
655	262
656	164
660	561
664	166
665	266
668	167
670	469

672	168
676	169
756	270
770	671
880	781
950	190
955	191
960	192
965	193
970	291
975	390
980	490
982	491
984	492
985	591
986	493
988	494
990	891
992	496
994	497
995	796
996	498
998	499

Los cambios en el código han sido

If p = 3 And m = 3 Then
x = cifra(i, 2)
y = cifra(n, 3)
If x = y And x <> 0 And n * (cifra(i, 3) * 10 + cifra(i, 1)) = i * trozocifras(n, 1, 2) Then s$ = Str(n) + ", " + Str$(i)

Vemos que al eliminar la segunda cifra del numerador hemos tenido que combinar la tercera con la primera, porque TROZOCIFRAS no nos servía en este caso.

Aparecen muchas más soluciones que en el caso anterior.

(3) Cancelación de la primera con la segunda

Sólo se publican las soluciones, dejando el desarrollo como ejercicio:

Den.	Num.
265	106
298	149
365	146
398	199

464	116
465	186
498	249
532	133
565	226
595	119
596	149
597	199
598	299
664	166
665	266
695	139
698	349
732	183
765	306
775	217
795	159
796	199
798	399
854	305
864	216
865	346
894	149
895	179
897	299
898	449

931	133
932	233
965	386
976	427
995	199
996	249
998	499

(4) Otras cancelaciones

Sólo desarrollaremos la de dos cifras en el numerador y tres en el denominador.

(4.1) Si cancelamos la primera cifra del numerador con la segunda del denominador se producen muchos casos triviales. Hemos eliminado aquellos en los que el numerador es múltiplo de 11 y los que se producen cuando el denominador termina en 0. Nos hemos quedado con estos:

Den. 1	Num. 1	Valor	Den. 2	Num. 2	Valor
195	39	0,200	15	3	0,200
196	49	0,250	16	4	0,250
294	49	0,167	24	4	0,167
295	59	0,200	25	5	0,200
332	83	0,250	32	8	0,250
392	49	0,125	32	4	0,125
395	79	0,200	35	7	0,200

(4.2) La cancelación de primera cifra con tercera produce estos tres resultados (eliminando también los triviales):

Den. 1	Num. 1	Valor	Den. 2	Num. 2	Valor
332	83	0,250	32	8	0,250
756	27	0,036	56	2	0,036
975	39	0,040	75	3	0,040

Siguiendo nuestra norma de no cansar en los temas, remitimos a los casos publicados en OEIS (http://oeis.org/?language=spanish) Bastar plantear la búsqueda de *"anomalous cancellation"* y obtendrás dos páginas de resultados diversos. No están clasificados por el número de cifras, pero sirven de ayuda por si intentas otras búsquedas con las técnicas que hemos desarrollado.

DIFERENCIAS MÍNIMAS ENTRE DIVISORES

Si ordenamos en orden creciente (o decreciente) los divisores de un número compuesto, las diferencias entre dos consecutivos son siempre menores que las existentes entre dos más alejados, como es fácil de razonar, ya que todas las del segundo tipo son sumas de las consecutivas. La cuestión que nos planteamos es saber qué diferencia entre divisores es la mínima y cuántas veces se repite. Luego particularizaremos a la diferencia 1, que daría lugar a divisores que son números consecutivos. Para la primera parte de este estudio no consideraremos el divisor 1, porque así obtendremos propiedades más interesantes.

Por ejemplo, si escribimos ordenados los divisores de 135 mayores que 1, obtendremos:

135 45 27 15 9 5 3

Vemos que la diferencia mínima entre los consecutivos es 2 (entre 3 y 5), y que es menor que todas las demás diferencias, sean o no entre consecutivos. Esta diferencia mínima se puede repetir en la sucesión de divisores. Tenemos, por ejemplo el caso del 540:

540 270 180 135 108 90 60 54 45 36 30 27 20 18 15 12 10 9 6 5 4 3 2

En él se repite cinco veces la diferencia mínima 1:

1=3-2=4-3=5-4=6-5=10-9

Es fácil ver que ocurre esto por ser múltiplo de un factorial.

Esta cuestión da lugar a varios cálculos distintos. Los vemos uno a uno.

Búsqueda de la diferencia mínima

La primera cuestión, dado un número concreto, es averiguar cuál es la diferencia mínima entre divisores.

La siguiente función en VBasic resuelve la cuestión utilizando tan sólo las funciones predefinidas de Excel o Calc. Recorre los divisores del número tomando nota de las diferencias entre consecutivos y almacenando la menor que se encuentre:

Public Function mindifdivi(n)
Dim i, p, p1, a1, a2, es

p = n - 1: p1 = p: a1 = 1: a2 = n: es = 0 ‘Variables iniciales
For i = 2 To n / 2 ‘Recorre desde 2 hasta la mitad del número
If n / i = n \ i Then ‘Comprueba si es divisor
a1 = i: es = 1 ‘Guarda memoria del divisor
p1 = Abs(a2 - a1) ‘Calcula la diferencia con el divisor anterior
If p1 < p Then p = p1 ‘Si es más pequeña que la almacenada, la sustituye
a2 = a1 ‘Recuerda el anterior divisor
End If
Next i

Número	Dif. Mínima
1	0
2	0
3	0
4	2
5	0
6	1
7	0
8	2
9	6
10	3
11	0
12	1
13	0
14	5
15	2
16	2
17	0
18	1
19	0
20	1

If es = 0 Then mindifdivi = 0 Else mindifdivi = p ‘Si no es primo, devuelve la diferencia mínima
End function

Como la gran mayoría de números es múltiplo de los primeros primos, 2, 3, 5 o 7, abundan los resultados 0 (los primos), 1 y 2, como podemos ver en los valores de 1 a 20:

Las mayores diferencias suelen presentarse en los números semiprimos, como el 14, o potencias de primos, que sería el caso del 9. Es lógico que sea así. Por ejemplo el año 2018 es semiprimo con los factores muy alejados (2018=2*1009), por lo que su mínima diferencia es 1007.

Las mínimas diferencias se dan entre los múltiplos de 2 y 3 o de 3 y 5 (o 5 y 7, por ejemplo), que tienen el valor de 1 o 2. Esto puede ser engañoso. Las diferencias entre factores primos pueden no ser las mínimas. En el caso de 2450 sus factores primos son 7, 5 y 2, lo que haría esperar una diferencia mínima de 2, pero en realidad es 1, diferencia entre 49 y 50, consecutivos en la lista de divisores:

2450 1225 490 350 245 175 98 70 50 49 35 25 14 10 7 5 2 1

¿Cuántas veces se repite una diferencia mínima?

Una vez que hemos encontrado la diferencia mínima, con una función similar a la anterior podemos contar las veces en las que aparece. Recordamos de nuevo que se excluye el divisor 1.

Su código puede ser el siguiente:

Public Function nummindifdivi(n)
Dim i, p, p1, aa, a1

p = mindifdivi(n): p1 = 0 ‘Se calcula la diferencia mínima p y se pone el contador p1 a cero.
If p = 0 Then nummindifdivi = 0: Exit Function ‘Caso en el que n sea primo
For i = 2 To n / 2 ‘Recorremos los divisores propios
aa = n / i
If aa = Int(aa) Then ‘Si es un divisor, seguimos
a1 = aa + p ‘Incrementamos el divisor en la diferencia mínima
If n / a1 = Int(n / a1) Then p1 = p1 + 1 ‘Si resulta otro divisor, incrementamos el contador
End If
Next i

nummindifdivi = p1 ‘El resultado es el contador
End Function

A continuación reproducimos la tabla anterior adjuntando una columna con el número de ocurrencias de la diferencia mínima y la lista de divisores propios:

Número	Dif. Mínima	Veces	Divisores
1	0	0	1
2	0	0	2 1
3	0	0	3 1
4	2	1	4 2 1
5	0	0	5 1
6	1	1	6 3 2 1
7	0	0	7 1
8	2	1	8 4 2 1
9	6	1	9 3 1
10	3	1	10 5 2 1
11	0	0	11 1
12	1	2	12 6 4 3 2 1
13	0	0	13 1
14	5	1	14 7 2 1
15	2	1	15 5 3 1
16	2	1	16 8 4 2 1
17	0	0	17 1
18	1	1	18 9 6 3 2 1
19	0	0	19 1
20	1	1	20 10 5 4 2 1

Así vemos, por ejemplo, que la diferencia mínima en el 12 es 1, y que se presenta dos veces, entre el 2 y el 3 y entre el 3 y el 4. En el caso del 14, la mínima es 5, y sólo aparece una vez, entre 2 y 7.

Con esta función podemos determinar los números con mayor número de ocurrencias de la diferencia mínima.

Ejemplos:

Números con más de cuatro diferencias mínimas

Los primeros son

180	1	5	180 90 60 45 36 30 20 18 15 12 10 9 6 5 4 3 2 1
240	1	5	240 120 80 60 48 40 30 24 20 16 15 12 10 8 6 5 4 3 2 1
360	1	6	360 180 120 90 72 60 45 40 36 30 24 20 18 15 12 10 9 8 6 5 4 3 2 1
420	1	7	420 210 140 105 84 70 60 42 35 30 28 21 20 15 14 12 10 7 6 5 4 3 2 1
480	1	5	480 240 160 120 96 80 60 48 40 32 30 24 20 16 15 12 10 8 6 5 4 3 2 1

Vemos que, por ejemplo, 420 presenta 7 diferencias mínimas iguales a 1:

2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 14-15 y 20-21.

Números con diferencia 2 y varias repeticiones

Los números 3465 y 4095 son los primeros que presentan cinco diferencias mínimas con valor 2. La razón es que todos sus factores primos son impares y esto facilita la repetición del 2. Así, 3465=3*3*5*7*11, y presenta diferencia 2 en

3-5, 5-7, 7-9, 9-11, 33-35

Las primeras diferencias son previsibles, restando los factores primos, pero otras es difícil encontrarlas por razonamiento, como 33-35.

Caso en el que diferencia mínima es 1 (consecutivos)

Este caso es el más interesante, por lo que merece una función especial para él. Aquí sí vamos a incluir el divisor 1, por la siguiente razón:

El número de pares de divisores consecutivos coincide con el de divisores oblongos, del tipo n(n+1). Es claro que todo número divisible por n y n+1 también lo es entre n(n+1), e igual ocurre a la inversa. Si no tenemos en cuenta el 1, perderíamos el oblongo 1*2=2.

Otro detalle que nos facilita la búsqueda es que los oblongos comienzan en 2 y luego sus diferencias van siendo 4, 6, 8, 12,…los pares consecutivos, lo que facilita el recorrido entre oblongos.

Según estas consideraciones, se puede diseñar la siguiente función ***numconsec*** que cuente los divisores consecutivos.

Public Function numconsec(n)
Dim i, m, p

m = 0: i = 2: p = 2 ‘Inicios de números oblongos
While i <= n
If n / i = n \ i Then m = m + 1 ‘Si es un divisor oblongo, se incrementa el contador
p = p + 2: i = i + p ‘Se genera el siguiente oblongo
Wend
numconsec = m
End Function

En http://oeis.org/A088723 están publicados los números que al menos poseen dos divisores consecutivos (sin contar el 1):

6, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 72, 78, 80, 84, 90, 96, 100, 102, 108, 110, 112, 114, 120, 126, 132, 138, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 168, 174, 180, 182, 186, 192, 198, 200, 204, 210, 216, 220, 222, 224, 228, 234, 240, 246, 252, 258, 260…

Tomamos uno de ellos, por ejemplo el 222. Le buscamos todos los divisores y resultan ser:

222 111 74 37 6 3 2 1, con consecutivos 2-3

Con nuestra función resultarían dos, ya que contamos 1-2 y 2-3, para que así coincida con oblongos, que en este caso serían 2 y 6.

Es claro que todos los múltiplos de 6 pertenecen al listado, pero hay otros, como el 110, no múltiplo de 6 pero es oblongo y sus divisores consecutivos son 10 y 11.

Estos son los que presentan más de dos pares de consecutivos:

12, 24, 30, 36, 42, 48, 60, 72, 84, 90, 96, 105, 108, 120, 126, 130, 132, 144,…

Casi todos son múltiplos de 6 o incluso de 12.

Con más de tres consecutivos aparecen:

60, 72, 84, 90, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 210, 216, 240,…

Es fácil ver que al aumentar el número de consecutivos iremos obteniendo entre ellos múltiplos de 60, pues nos garantizamos los consecutivos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Un caso especial vemos que es el 132=2*2*3*11, cuyos consecutivos son 1-2, 2-3, 3-4 y 11-12.

Al llegar aquí podemos pensar en los factoriales, que tienen garantizados n-1 consecutivos. Veamos si aparecen muchos más pares:

n	Factorial(n)	Numconsec
1	1	0
2	2	1
3	6	2
4	24	3
5	120	5
6	720	8
7	5040	13
8	40320	14
9	362880	16

Hasta el 4 resultan los previstos. Después van apareciendo más casos, como en el 6!, que podemos recorrer 8: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 8-9, 9-10 y 15-16.

Números “record”

En el párrafo anterior podíamos sospechar que el incremento del número de pares de divisores consecutivos no seguía una sucesión creciente. Hemos programado la búsqueda de los números en los que el número de pares se incrementa en una unidad, y hemos obtenido estos:

Record	Numconsec
2	1
6	2
12	3
72	4
60	5
180	6
360	7
420	8
840	9
1260	10
3780	11
2520	12
5040	13
13860	14
36960	15
41580	16
27720	17
55440	18
83160	19
166320	20

Vemos que el orden natural se rompe entre 72 y 60, ya que este segundo presenta más pares que el 72. Como era de esperar, no figuran apenas factoriales, que serían los mejores candidatos para poseer más pares de números consecutivos.

El resto de soluciones, salvo el ya conocido desfase en la primera, lo tienes en http://oeis.org/A088726

A088726: Smallest numbers having exactly n divisors d>1 such that also d+1 is a divisor.

1, 6, 12, 72, 60, 180, 360, 420, 840, 1260, 3780, 2520, 5040, 13860, 36960, 41580, 27720, 55440, 83160, 166320, 277200, 491400, 471240, 360360, 1113840, 720720, 1081080, 3341520, 2162160, 2827440, 5405400, 4324320, 12972960, 6126120,…

Se vuelve a romper el orden en otros casos, como 3780 y 2520.

NÚMEROS Y CIFRAS DE SUS DIVISORES

No es infrecuente que un número expresado en un sistema de numeración (nos limitaremos a la base decimal) contenga las cifras bien ordenadas de alguno o de todos sus divisores. Por ejemplo, 1734 contiene a sus divisores 17 y 34 como subconjuntos ordenados de cifras. Existen publicadas muchas listas, de las que veremos algunas, especialmente con números primos. Para efectuar búsquedas sería conveniente disponer de alguna función que nos devolviera si un número contiene las cifras (siempre consecutivas) de algún divisor o, mejor aún, que indicara esos divisores.

Funciones necesarias

El criterio de si las cifras de un número están contenidas dentro de otro es fundamental en esta cuestión, pero existen dos inconvenientes:

- Los números deberán convertirse en cadenas de texto
- El formato de hoja de cálculo puede añadir espacios en blanco delante de los números positivos.

Estos dos problemas los resuelve la función AJUSTA$, como podemos observar en su listado:

Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a) ‘Convierte el número en String
While Left$(d$, 1) = " "
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1) ‘Le suprime los espacios en blanco
Wend
ajusta$ = d$ ‘El resultado es una cadena de caracteres

End Function

Con esta función es fácil construir otra, DENTROCIFRAS, que indique si las cifras de un número contienen a las de otro de forma consecutiva, es decir que el segundo sea una subcadena del primero.

Public Function dentrocifras(a, b) As Boolean 'Ve si las cifras de b están en a
Dim aa$, bb$
aa$ = ajusta(a) ‘Ajusta ambos números
bb$ = ajusta(b) ‘después, con función InStr averigua si está contenido
If InStr(aa$, bb$) > 0 Then dentrocifras = True Else dentrocifras = False
End Function

Es una función tipo *boolean*, que devuelve VERDADERO (True) o FALSO (False). Puedes probarla: DENTROCIFRAS(2431;43) debe dar VERDADERO y DENTROCIFRAS(818;88), FALSO, porque las cifras han de ser consecutivas.

Función CONTIENEDIV

Con esta función ya estamos preparados para saber si las cifras de un número contienen las de un divisor determinado, como ocurre con 725 y 25. Bastará hacernos las preguntas de si es divisor y después de si sus cifras están contenidas. Podemos organizarlo así:

Public Function contienediv(a, b) As Boolean
contienediv = a / b = a \ b And dentrocifras(a, b)
End Function

En primer lugar determina si es divisor, mediante a/b=a\b, que significa que al dividirlos resulta el mismo cociente que en la división entera \ (no aparece resto, por lo que se puede usar también la expresión a MOD b = 0) y después, con *dentrocifras*, si está contenido. Así, contienediv(912;12)=VERDADERO, porque 12 es divisor y sus cifras están contenidas en 912. Por el contrario, contienediv(324;24) da FALSO, porque 24 está contenido pero no es divisor.

Están publicadas las listas de aquellos números múltiplos de alguno de los veinte primeros que contienen sus cifras. Por ejemplo, la de múltiplos de 17 es

17, 170, 1173, 1700, 1717, 1734, 1751, 1768, 1785, 2176, 3179, 3417, 5117, 6171, 6817, 7174, 8177, 8517, 10217, 11713,…

Todos contienen un 17 y son múltiplos de él. Los tienes publicados en http://oeis.org/A121037

Con las funciones que hemos presentado puedes emprender otras búsquedas. Aquí tienes los primeros que contienen 23 como divisor entre sus cifras:

23, 230, 2231, 2300, 2323, 2346, 2369, 2392, 4232, 4623,…

Aunque es algo complicado, se adjunta a continuación el código PARI correspondiente. En la última línea el resultado sería cero, ya que hemos visto que es falso que 324 contenga a 24 como divisor. Hay que recordar que en PARI el valor VERDADERO se codifica como 1 y el FALSO como 0.

```
indigit(a, b)={
local(u,v,indi=0,la,lb,i,d,x);u=Vec(Str(a));
v=Vec(Str(b)); la=#u; lb=#v; i=1; while(i<=la-lb+1&&indi==0, d=0; for(x=1, lb, if(v[x]==u[i+x-1], d+=1)); indi=(d==lb) ; i+=1); indi}
indigitdiv(a,b)=(a%b==0)&&indigit(a,b)
print(indigitdiv(324,24))
```

Números que contienen todos sus factores primos

En la propuesta anterior fijábamos el valor del divisor que debería estar contenido en las cifras del número, pero ese dato no tenemos por qué saberlo. Podíamos introducir una función que recorriera los factores primos del número y fuera probando uno a uno para ver si están contenidos o no como subcadena.

El problema está en esa extracción de factores primos. Si deseas profundizar lee la entrada de este blog

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/09/tus-funciones-disponibles-en-todas-las.html

En ella se explica la rutina *sacaprimos* y la función *factores*. Si las usamos, los factores primos se guardarán en la matriz primo(n), y es esta la que vamos a usar ahora. Crearemos la función CONTIENEDIVPRIM(A,TIPO). Ella recorrerá los factores primos de A, comprobará con CONTIENEDIV si las cifras de estos están contenidas en el total y las irá acumulando en un string, al que añadirá la expresión del número de primos contenidos localizado. Así,

CONTIENEDIVPRIM (432;0)=2 3 y k= 2

Significa que contiene los factores 2 y 3 y que se han encontrado 2.

El parámetro TIPO nos sirve para, si vale 0, exigir que aparezcan todos los factores primos del número, como en el ejemplo anterior, y si es distinto de 0, fijará el número de factores que deseemos.

```
Public Function contienedivprim(a, tipo) As String
Dim n, i, k
Dim c$

c$ = ""
n = sacaprimos(a)
k = 0
For i = 1 To n
If contienediv(a, primo(i)) Then c$ = c$ + Str$(primo(i)) + " ": k = k + 1
Next i
c$ = c$ + "y k=" + Str$(k)
If tipo = 0 Then
If k = n Then contienedivprim = c Else contienedivprim = ""
Else
If k >= tipo Then contienedivprim = c Else contienedivprim = ""
End If
```

End Function

Con el TIPO=0 podemos confeccionar un listado de aquellos números compuestos que contienen a todos sus factores (el caso primo carece de interés):

25, 32, 125, 128, 135, 175, 243, 250, 256, 324, 375, 432, 512, 625, 735, 875, 1024,…

http://oeis.org/A050694

Números que contienen algunos factores primos

Con la función CONTIENEDIVPRIM, modificando el TIPO desde 1 hasta el tope que deseemos, se obtendrán los números que al menos coinciden con tantos factores primos como indique el valor de TIPO. Así, para dos factores obtenemos:

132		2 3 y k= 2
135		3 5 y k= 2
175		5 7 y k= 2
230		2 23 y k= 2
234		2 3 y k= 2
250		2 5 y k= 2
273		3 7 y k= 2
290		2 29 y k= 2
312		2 3 y k= 2
315		3 5 y k= 2
324		2 3 y k= 2
342		2 3 y k= 2
345		3 5 y k= 2
357		3 7 y k= 2
372		2 3 y k= 2
375		3 5 y k= 2
378		3 7 y k= 2

Figuran en la tabla los números con al menos dos coincidencias, los factores con los que coinciden y el número k de ellos. Si prolongamos la lista, aparecerá algún número que coincida con tres factores o más. El primero, que figurará en la siguiente lista, será el 735, que contiene los factores 3, 5 y 7.

Con tres coincidencias o más, haciendo TIPO=3, obtenemos

735, 1326, 1365, 1785, 2346, 2510, 2570, 2730, 3162, 3192, 3276, 3570, 3675, 3792

735		3 5 7
1326		2 3 13
1365		3 5 13
1785		5 7 17
2346		2 3 23
2510		2 5 251
2570		2 5 257
2730		2 3 7
3162		2 3 31
3192		2 3 19
3276		2 3 7
3570		3 5 7
3675		3 5 7
3792		2 3 79

Estos son los primeros que contienen cuatro primos:

21372, que contiene a 2, 3, 13 y 137

37296, respecto a los divisores 2, 3, 7 y 37

Y con cinco

271362, con divisores 2, 3, 7, 13 y 71

527310, con 2, 3, 5, 7 y 31

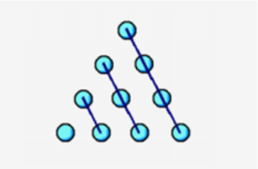
Por último, si hacemos TIPO=0, aparecerán los compuestos que contienen a todos sus factores primos (está publicada en http://oeis.org/A050694)

25, 32, 125, 128, 135, 175, 243, 250, 256, 324, 375, 432, 512, 625, 735, 875, 1024, 1250, 1352, 1372, 1593, 1675, 1715, 1792, 2048, 2176, 2304, 2500, 2510, 2560, 2570, 2744, 3072, 3087, 3125, 3375, 3645, 3675, 3792, 4232, 4375, 5120, 5210, 5230, 5832…

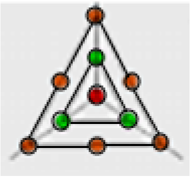
OTROS NÚMEROS FIGURADOS

POLIGONALES CENTRADOS

Los números poligonales ordinarios se engendran acumulando distintos polígonos a partir de un vértice, como podemos ver en la figura



Los poligonales centrados son similares, pero los polígonos se acumulan alrededor de un centro, con sus lados paralelos



Todos los poligonales de esta clase se pueden pues generar mediante sumas de números naturales que representen los contornos de los polígonos. En el caso de los triángulos serían 1+3+6+9+12+…

Efectuando sumas parciales obtendríamos la sucesión 1, 4, 10, 19, 31,.., a la que nombraremos como “números triangulares centrados”.

En el caso de cuadrados se formaría la suma 1+4+8+12+16+…, y las sumas formarían la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números “cuadrados centrados”.

Con el mismo método resultarían los “pentagonales centrados”, a partir de la suma 1+5+10+15+20…, que serían 1, 6, 16, 31, 51,…

En general, los polígonos de orden n y lado k, al sumarse formarían:

$$1+n+2n+3n+4n+...+kn=1+n*(1+2+3+4+5+...+k)=1+n*k*(k+1)/2$$

Si contamos el 1 como primer elemento, la suma del paréntesis tendría un elemento menos, y daría la expresión, si llamamos POLC al poligonal centrado:

$$POLC(n,k)=1+n*k*(k-1)/2=(n*k^2-n*k+2)/2$$

Es decir:

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

En ella n representa el tipo de poligonal y k el lado.

Así, POLC(5,4)=(5*16-5*4+2)/2=62/2=31, tal como vimos en el listado de pentagonales.

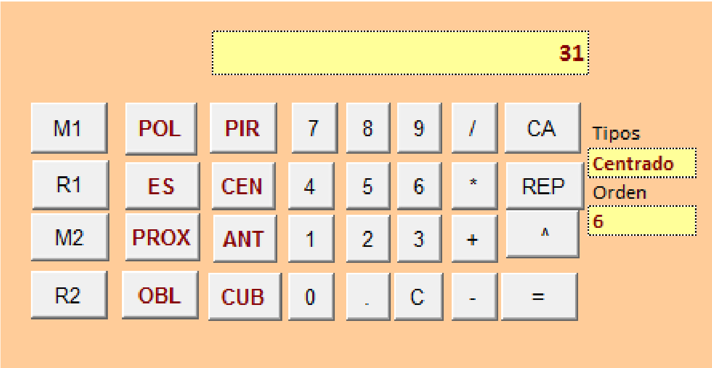
POLC(3,5)=(3*25-3*5+2)/2=62/2=31, que sería el quinto triangular que obtuvimos más arriba.

Calculadora CALCUPOL

Estos cálculos se pueden evitar con nuestra calculadora de números figurados, “Calcupol”. Esta calculadora Se descarga desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Con la tecla CEN (de centrado) y la secuencia de teclas **3 CEN 5 =** obtendríamos el triangular centrado de lado 5, que ya sabemos vale 31.



Usaremos esta calculadora varias veces en este tema.

Relación con los poligonales ordinarios

Si recordamos la fórmula de los números poligonales

$k((n-2)*k-(n-4))/2$

y la comparamos con la de los centrados

$(n*k^2-n*k+2)/2$

resulta:

$(n*k^2-n*k+2)/2-(k^2*(n-2)-k*(n-4)/2 =$

$=(n*k^2-n*k+2-n*k^2+2k^2+n*k-4k)/2 =$

$= (2+2k^2-4k)/2=(k-1)^2$

Así que si conocemos un poligonal ordinario, bastará sumarle **el cuadrado del lado después de restarle una unidad**. Lo vemos con Calcupol. El número poligonal de orden 7 (heptagonal) de lado 10 tiene un valor de 235 (secuencia de teclas **7 POL 10 =**) y si le añadimos $(10-1)^2$, obtenemos 235+81=316, que es el poligonal centrado del mismo orden y lado. Puedes comprobarlo con la secuencia **7 CEN 10** =

Relación con los triangulares ordinarios

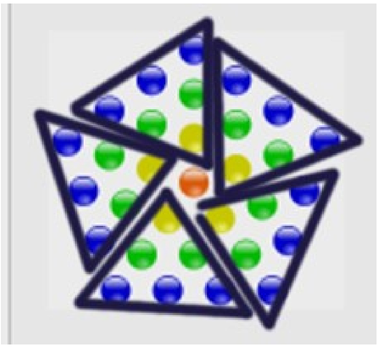
La expresión

$$POLC(n,k) = \frac{nk^2 - nk + 2}{2}$$

Se puede escribir así:

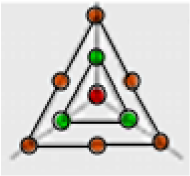
$$POLC(n,k) = n\frac{k(k-1)}{2} + 1 = nT(k-1) + 1$$

Esto nos indica que un poligonal centrado se forma añadiendo a 1 n números triangulares de lado n-1. En el caso, por ejemplo, del pentagonal de lado 4, se podrá descomponer en cinco triángulos de lado 3 y una unidad. La siguiente imagen, adaptación de otra de la Wikipedia, nos muestra claramente los triángulos:



Números triangulares centrados

Comenzamos el estudio particularizado para cada orden, siendo n=3 el caso de menos lados. Ya se comentó más arriba que los triangulares centrados se forman mediante triángulos concéntricos como los de la imagen:



Se considera la unidad como primer triángulo.

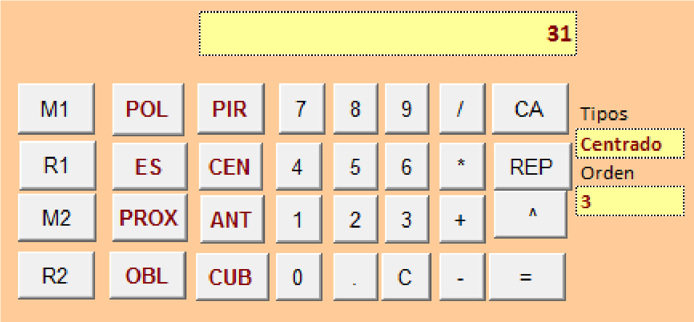
Ya se vio que se forman mediante la suma 1+3+6+9+12+...+3k, que da lugar a la expresión 1+3*k(k-1)/2, con lo que los primeros triangulares centrados serán; 1, 1+3, 1+3+6, 1+3+6+9,….es decir: 1, 4, 10, 19,…

Completamos la sucesión con más términos:

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, 235, 274, 316, 361, 409, 460, 514, 571, 631, 694, 760, 829, 901,… Están publicados en http://oeis.org/A005448

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno.

Fijas en la parte derecha **“Centrado” y orden 3**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1. Después, cada vez que pulses **PROX**, aparecerán los siguientes términos: 4, 10, 19, 31,...



Es interesante deducir la expresión del término general, que ya conocemos, mediante nuestro interpolador lineal para números naturales

(lo puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton)

Si la aplicamos a los números 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64 descubrimos que sus diferencias de tercer orden son nulas, y que esto los convierte en valores de un polinomio de segundo grado.

1	2	3	4	5	6	7
1	4	10	19	31	46	64
	3	6	9	12	15	18
		3	3	3	3	3
			0	0	0	0
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	0	3	3	1
720	120	24	6	2	1	1

La herramienta de interpolación nos proporciona también los coeficientes en las filas inferiores.

Si conoces la interpolación de Newton entenderás que el polinomio buscado es

1/1+3/1(x-1)+3/2(x-1)(x-2)=1+3x(x-1)/2

Esto comprueba lo indicado más arriba.

Propiedades

(1) A partir del 10, todos los triangulares centrados son suma de tres triangulares consecutivos.

TC(n)=T(n)+T(n-1)+T(n-2)

Es una cuestión de Álgebra:

T(x-2)+T(x-1)+T(x)=(x-2)(x-1)/2+(x-1)x/2+x(x+1)/2=(x^2-3x+2+x^2-x+x^2+x)/2=($3x^2$-3x+2)/2=1+3x(x-1)/2= TC(x)

Por inducción

Se cumple para TC(4)=10=1+3+6=T(1)+T(2)+T(3)

Si se cumple para x, será TC(x)=T(x-2)+T(x-1)+T(x). Si añadimos 3x, se convertirá en TC(x+1), y bastará demostrar que T(x-2) se convierte en T(x+1)

En efecto:

$(x-2)(x-1)/2+3x=(x^2-3x+2+6x)/2=(x^2+3x+2)/2=T(x+1)$

Piénsalo bien, sólo hay que convertir T(x-2) en T(x+1)

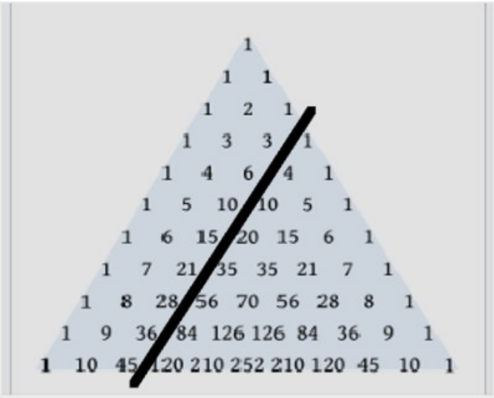
(2) Relación con números combinatorios

TC(n+1) = C(n+3, 3)-C(n, 3)

Otra cuestión de Álgebra:

C(n+3, 3)-C(n, 3)=((n+3)(n+2)(n+1)-n(n-1)(n-2))/6

$(n^3+6n^2+11n+6-n^3+3n^2-2n)/6=(9n^2+9n+6)/6=1+3n(n+1)/2=TC(n+1)$



Puedes ir restando números

combinatorios situados debajo de la línea continua, con un salto de tres lugares, e irán resultando los triangulares centrados:

20-1=19; 35-4=31; 56-10=46; 84-20=64; 120-35=85…

(3) Triangulares centrados primos

Entre los triangulares de este tipo existen algunos que son primos. Sólo es una curiosidad. Los primeros son:

19, 31, 109, 199, 409, … https://oeis.org/A125602

(4) Recurrencia

Todas las sucesiones de números figurados admiten recurrencias, por ser fórmulas polinómicas. Los triangulares centrados también poseen una generación por recurrencia, además de la contenida en la definición, de añadir 3n al término anterior:

Elegimos esta:

TC(n) = 3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3), TC(1)=1, TC(2)=4, TC(3)=10.

Se cumple para el 19=3*10-3*4+1=30-12+1=19

Otro término lo cumplirá por simples cálculos algebraicos.

3*TC(n-1) - 3*TC(n-2) + TC(n-3)=3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Si no te apetece simplificar acude a cualquier CAS. Nosotros hemos usado Wolfram Alpha

WolframAlpha computational knowledge engine

3*(1+3(n-1)(n-2)/2)-3*(1+3(n-2)(n-3)/2)+1+3(n-3)(n-4)/2

Hemos obtenido la expresión

Expanded form:

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$$

que coincide con 1+3n(n-1)/2, expresión de TC(n)

Existen otras recurrencias, que puedes intentar demostrar:

a(n) = a(n-1) + 3*n-3. - (Vincenzo Librandi)

a(n) = 2*a(n-1) - a(n-2) + 3. - (Ant King)

Cuadrados centrados

Vimos en los primeros párrafos que la suma 1+4+8+12+16+…, que se forma añadiendo 4 unidades a cada sumando, forma, con sus sumas parciales, la sucesión 1, 5, 13, 25, 41,…, que serían los números "cuadrados centrados".

Los primeros términos son:

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381,...y están publicados en http://oeis.org/A001844

Con nuestra calculadora Calcupol puedes recorrerlos uno a uno. La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Fijas en la parte derecha **"Centrado" y orden 4**. Borras la pantalla con **CA** y escribes 1

Como en el caso de los triangulares, con cada pulsación de la tecla PROX irás obteniendo los siguientes cuadrados centrados: 5, 13, 25,...

Si en la expresión de los poligonales centrados

$$POLC(n,k)=\frac{nk^2-nk+2}{2}$$

sustituimos n por 4 nos resultará la expresión de los cuadrados centrados:

$$CC(k)=2k^2-2k+1$$

Por ejemplo CC(4)=2*16-2*4-1=32-8+1=25

Esta fórmula presenta una interpretación sencilla, pues equivale **a la suma de dos cuadrados consecutivos**. Así, 25=16+9, o 13=9+4. Si recordamos que los cuadrados son sumas de impares, con esta propiedad podemos engendrar los cuadrados centrados como una suma creciente y decreciente de impares. Lo vemos con el 61:

61=1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1

Con un poco de Álgebra es fácil ver que es válida también esta otra expresión:

$$CC(k)=\frac{(2k-1)^2+1}{2}$$

Así, el término 5 equivaldrá a (81+1)/2=41, como puedes comprobar en el listado. También 41 es suma de cuadrados: 41=26+16

Lo podemos expresar también como que el **doble de un cuadrangular menos una unidad es un cuadrado**

perfecto. Esto convierte a un cuadrado centrado N en **la hipotenusa de un triangulo rectángulo** con un cateto igual a N-1. En efecto, $N^2-(N-1)^2 =2N-1$ es un cuadrado. Por ejemplo:

$41^2 - 40^2 = 1681 – 1600 = 81 = 9^2$

Pentagonales centrados

Al igual que en los casos anteriores, partimos de la sucesión formada por el 1 y los múltiplos de 5, ya que en un pentagonal centrado se van añadiendo polígonos de cinco lados aumentando una unidad en cada caso: 1+5+10+15+20. Las sumas parciales formarán los pentagonales centrados (PC(n)):

1, 6, 16, 31, 51,…

Los primeros pentagonales centrados son:

1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, 276, 331, 391, 456, 526, 601, 681, 766, 856, 951, 1051, 1156, 1266, 1381, 1501, 1626, 1756, 1891, 2031, 2176, 2326, 2481, 2641, 2806, 2976,…

Están publicados en http://oeis.org/A005891

Para conseguir su expresión podemos acudir a la interpolación polinómica. Como ya la hemos usado en casos anteriores, sólo insertaremos una captura de pantalla:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	6	16	31	51	76	106
Dif1		5	10	15	20	25	30
Dif2			5	5	5	5	5
Dif3				0	0	0	0
Dif4					0	0	0
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	0	0	5	5	1
	720	120	24	6	2	1	1

Vemos que dará lugar a un polinomio de segundo grado. Leemos los coeficientes:

P(x)=1+5*(x-1)+5/2*(x-1)(x-2)=(5n^2+5n+2)/2

Así que

$$PC(n)=\frac{5n^2+5n+2}{2}$$

Basta observar la fórmula para darse cuenta de que todos estos números son congruentes con la unidad módulo 5. Así 16=5*3+1, 76=5*15+1,...Ya sabemos que sus diferencias son múltiplos de 5.

También es sencillo comprobar que los coeficientes del 5 en la anterior expresión son todos números triangulares, ya que PC(n)=5n(n+1)/2+1.

Hexagonales centrados

La definición de estos números coincide con la de los anteriores, pero añadiendo a cada uno de ellos un hexágono nuevo (o múltiplo de 6)

Dejamos como ejercicio comprobar que su expresión es

$HC(n)=(n+1)^3-n^3$

Con ella podemos desarrollar la sucesión de hexagonales centrados:

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2611, 2791, 2977, 3169, 3367, 3571, 3781, 3997

(http://oeis.org/A003215)

La expresión obtenida equivale claramente a una diferencia de cubos consecutivos. En efecto, $7=2^3-1^3$, $19=3^3-2^3=27-8$, $37=4^3-3^3=64-27$

Propiedad combinatoria

Sumas iguales a cero

Benoit Cloitre propone en la página OEIS citada que los números de la sucesión se corresponden con el número de tripletes ordenados de enteros (a,b,c),con -n <= a,b,c <= n, tales que a+b+c=0. Esta propiedad está expresada si el primer índice de la sucesión es cero, por lo que debemos aplicarla a n-1.

Por ejemplo, en el caso de n=3, HC(3)=19 coincidirá con el número de sumas de tres sumandos comprendidos entre -2 y 2 cuya suma sea 0.

Podemos comprobar esta propiedad con nuestra hoja Cartesius

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

El planteo sería muy simple:

xtotal=3
Xt=-2..2
Suma=0

Aunque no hayas usado nunca esta hoja Cartesius, entenderás que se fija un número de sumandos igual a 3, comprendidos entre -2 y 2 y cuya suma sea 0.

Introducimos este planteo en la hoja

Escribe a partir de la siguiente fila.
(no dejes filas en blanco)
xtotal=3
Xt=-2..2
Suma=0

Pulsamos el botón **Iniciar** y obtenemos las 19 sumas esperadas:

B	C	D
-2	0	2
-2	1	1
-2	2	0
-1	-1	2
-1	0	1
-1	1	0
-1	2	-1
0	-2	2
0	-1	1
0	0	0
0	1	-1
0	2	-2
1	-2	1
1	-1	0
1	0	-1
1	1	-2
2	-2	0
2	-1	-1
2	0	-2

Esta propiedad se puede demostrar por inducción. Ya hemos comprobado para n=3. Para n=2 basta con que recorras el listado de sumas y te quedes con las que tienen máximo 1. Las contamos y resultan 7, y es trivial que para el caso n=1 sólo obtenemos un caso. Con esto se comprueba para los casos 1, 2 y 3.

Para el caso n, podemos pasar al caso n+1, con lo que hay que añadir los elementos -(n+1) y n+1. Las nuevas sumas pueden ser de tres clases:

Si contienen -(n+1) y n+1, el tercer sumando será 0, y reordenando nos resultan 6 sumas nuevas.

Si sólo contiene el sumando -(n+1), deberá estar acompañado por todos los sumandos positivos entre 1 y n que sumen n+1. Existen n sumas ordenadas de ese tipo, y el sumando -(n+1) se puede situar en 3 posiciones, luego aparecerán 3n sumas nuevas.

El tercer caso también abarcará 3n sumas. Reunimos los tres casos y nos resulta 3n+3n+6=6(n+1), luego efectivamente, se añadirá un múltiplo de 6 al término anterior, lo que lo convierte en el siguiente hexagonal centrado.

Una propiedad aritmética

Las medias parciales de los k primeros términos coinciden con k^2.

Está basada en un inicio para n=0, por lo que usaremos n en lugar de n+1 en la demostración.

Esta propiedad se verifica en los primeros términos:

$(1+7)/2 = 4 = 2^2$

$(1+7+19)/3 = 9 = 3^2$

Si lo suponemos cierto para n, deberemos demostrar que la siguiente media coincide con $(n+1)^2$. Usaremos la expresión general aplicada al término n.

$M(n+1)=S(n+1)/(n+1)=(S(n)+3n^2+3n+1)/(n+1)=(n*n^2+3n^2+3n+1)/(n+1) = (n+1)^3/(n+1) = (n+1)^2$.

Es evidente que hemos demostrado de paso que las sumas parciales coinciden con n^3

Aquí dejamos los poligonales centrados.

NÚMEROS FIGURADOS E INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

Los desarrollos sobre números piramidales estudiados hasta ahora contenían siempre una fórmula polinómica para expresar cada término de la sucesión. Por ello parece conveniente presentar un método general para la obtención de esas fórmulas. Disponemos para ello de la teoría de la interpolación polinómica, en la que elegiremos el método de Newton, y una hoja de cálculo que nos facilitará las cosas.

Teoría

Los conceptos y métodos de la interpolación polinómica los puedes encontrar en cualquier texto del primer ciclo de estudios universitarios. Todos se basan en el cálculo con diferencias sucesivas. En nuestro caso nos limitaremos a la suma de **funciones enteras definidas sobre los primeros números naturales**, lo que simplifica mucho los cálculos.

Por ejemplo, imaginemos que deseamos sumar los primeros números oblongos: 1*2, 2*3, 3*4, 4*5, 5*6,…o bien, 2, 6, 12, 20, 30,…Queremos obtener una expresión para 2+6+12+20+30+…

En las técnicas de interpolación que usaremos, la primera operación es la obtención de las diferencias sucesivas, es decir, diferencias entre los elementos, diferencias entre las diferencias, y así sucesivamente hasta (en el caso polinómico) que sean todas iguales. Lo intentamos con el ejemplo. En primer lugar encontramos las sumas parciales de oblongos: 2, 2+6=8, 2+6+12=20,…que serían 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, 240,…

Lo puedes organizar con una hoja de cálculo:

N	1	2	3	4	5	6	7	8
Oblongo	2	6	12	20	30	42	56	72
Suma parcial	2	8	20	40	70	112	168	240

La siguiente imagen, tomada de nuestra hoja ***newton.xls***, puedes entender muy bien el concepto de ***diferencias sucesivas***. En primer lugar hemos escrito nuestra sucesión: 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168,…Después hemos ido restando cada elemento con el siguiente: 6, 12, 20, 30, 42, 56,…(resultan ser los oblongos). A continuación hemos restado esas diferencias: 6, 8, 10, 12, 14,…entre sí, y al final en otra resta, hemos llegado a 2, 2, 2,…Esa es la señal de que esos números siguen una expresión polinómica, el que las diferencias se hagan iguales y las siguientes nulas.

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	168
Dif1		6	12	20	30	42	56
Dif2			6	8	10	12	14
Dif3				2	2	2	2
Dif4					0	0	0

Como aquí las diferencias constantes se alcanzan en tres pasos, la fórmula que buscamos será un polinomio de tercer grado. Lo repasamos en teoría:

Fórmula de interpolación de Newton

Cuando en un proceso se llega a diferencias constantes, sabemos que es posible expresar la sucesión dada mediante un polinomio dependiente del número de orden. La fórmula hallada por Newton es algo compleja en el caso general, en el que hay que usar diferencias divididas, pero se simplifica bastante en el caso de un polinomio aplicado al conjunto 1, 2, 3, 4,…Sería esta:

$$P(x) = a_0 + d_1(x-1) + \frac{d_2(x-1)(x-2)}{2!} + \frac{d_3(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} + \dots$$

En ella a_0 es el primer término, d_1 la primera diferencia, d_2 la primera de las segundas diferencias, y así sucesivamente. En nuestro caso sería:

P(x)=2+6(x-1)+6(x-1)(x-2)/2!+2(x-1)(x-2)(x-3)/3!

Reduciendo a común denominador y simplificando:

$$P(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 4x}{6} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3}$$

Lo hemos comprobado con la hoja de cálculo. Observa la coincidencia de los valores en rojo:

N	1	2	3	4	5	6	7	8
Oblongo	2	6	12	20	30	42	56	72
Suma parcial	2	8	20	40	70	112	168	240
P(x)	2	8	20	40	70	112	168	240

Como ves, lo que es más complicado es la simplificación, pero el método es simple: encontrar diferencias sucesivas hasta que se estabilicen, y aplicar la fórmula de interpolación simplificada para los puntos de apoyo 1, 2, 3, 4,…

Todo esto puedes reproducirlo con nuestra hoja de cálculo ***newton***, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Recuerda que sólo te vale para **sumas definidas sobre los primeros naturales**. Basta escribir los valores de la sucesión en la segunda fila

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	168

y leer los coeficientes (en forma de fracción) más abajo:

Coeficientes (en forma de fracción)							
	0	0	0	2	6	6	2
	720	120	24	6	2	1	1
1	X	X	X	X	X	X	X
(X-1)	X	X	X	X	X	X	
(X-2)	X	X	X	X	X		
(X-3)	X	X	X	X			
(X-4)	X	X	X				
(X-5)	X	X					
(X-6)	X						

Es fácil de interpretar (de derecha a izquierda): 2/1 es el coeficiente de 1, 6/1 el de (x-1), 6/2 para (x-1)(x-2) y, finalmente, 2/6 para (x-1)(x-2)(x-3). Después vendría la simplificación, pero si quieres ahorrártela, la hoja dispone del cálculo para un valor concreto. Por ejemplo, ¿cuánto suman los diez primeros oblongos? Para ello dispones de las celdas adecuadas

¿En qué valor de N interpolamos?	
N=	10
P(N)=	440

La respuesta es 440. Hay que advertir que puede producir pequeños errores para índices grandes, por lo que se aconseja comprobar.

Si deseas evitarte la simplificación puedes acudir a un CAS. Nosotros hemos usado ***wxMaxima*** para obtener el resultado previsto:

```
--> 2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/3
(%i3) ratsimp(2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/3);
```

(%o3) $$\frac{x^3+3\,x^2+2\,x}{3}$$

Otro paso sería el intentar, si es posible, buscar una interpretación al resultado obtenido. En nuestro caso es fácil ver que, para x mayor o igual a 3, se reduce a

$$P(x) = 2\binom{n}{3}$$

Este proceso se puede repetir para números poligonales, piramidales o poligonales centrados (y otros similares que nos inventemos), porque todos se basan en sus definiciones en la acumulación de sumas, lo que garantiza que la fórmula buscada es de tipo poligonal.

Otro ejemplo

Sabemos que los números piramidales triangulares se construyen sumando los triangulares, y estos, a su vez, acumulando los naturales. Con un sencillo esquema los identificamos:

N	1	2	3	4	5	6	7
T(n)	1	3	6	10	15	21	28
PIR3(n)	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**

Luego los primeros piramidales son 1, 4, 10, 20,….Los volcamos en la hoja newton para descubrir sus diferencias y los coeficientes de interpolación:

1	4	10	20	35	56	84
	3	6	10	15	21	28
		3	4	5	6	7
			1	1	1	1
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	1	3	3	1
720	120	24	6	2	1	1

Las diferencias son 1, 3, 3 y 1, y con ellas se construyen los coeficientes 1/1, 3/1, 3/2 y 1/6. Rellenamos la fórmula de interpolación y queda:

P(x)=1+3(x-1)+3/2(x-1)(x-2)+1/6(x-1)(x-2)(x-3)

Simplificamos con wxMaxima:

```
ratsimp(1+3*(x-1)+3/2*(x-1)*(x-2)+(x-1)*(x-2)*(x-3)/6)
```

$$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$$

Coincide con la que se obtuvo para los números tetragonales (o piramidales triangulares)

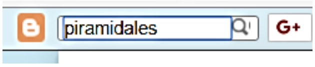
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html

$$TET(n) = PIR(n,3) = \frac{3n^2+n^3+2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Con lo aprendid estamos preparados para saltar a la cuarta o quinta dimensión, y sumar números piramidales consecutivos.

NÚMEROS PIRAMIDALES DE CUATRO DIMENSIONES

Si has seguido los desarrollos anteriores sobre números piramidales (escribe "piramidales" en la casilla de búsqueda) sabrás que estos números se generan mediante sumas parciales en una sucesión de dimensión inferior.



Así, los tetraedros se generan sumando números triangulares. Estos, a su vez, mediante números lineales. Las pirámides cuadradas se obtienen sumando cuadrados, y los de tipo poligonal sumando los de dos dimensiones del mismo número de lados.

Si sumamos números piramidales, obtendremos piramidales de cuatro dimensiones. Por ejemplo, los piramidales cuadrados son 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-piramidales-3-cuadrados.html)

Formamos con ellos sumas parciales: 1, 1+5, 1+5+14, 1+5+14+30,… y obtenemos:

1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540,…

Estos será, pues, los piramidales cuadrados de cuatro dimensiones.

http://oeis.org/A002415

A partir de ahora iremos recorriendo los piramidales de cuatro dimensiones según su número de lados. En todos ellos comenzaremos con sumas parciales en piramidales de tres dimensiones, obtendremos su fórmula polinomial y terminaremos con curiosidades y equivalencias. Comenzamos con triangulares:

Tetraedros de cuatro dimensiones

Estudiamos anteriormentelos tetraedros de tres dimensiones.

Vimos que la sucesión de los mismos comienza con

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220,…

Si procedemos a formar sumas parciales, obtendremos los tetraedros de cuatro dimensiones:

1, 1+4, 1+4+10, 1+4+10+20, 1+4+10+20+35,…. Es decir, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210,…

Los primeros términos de la sucesión de números de este tipo son:

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, 715, 1001, 1365, 1820, 2380, 3060, 3876, 4845, 5985, 7315, 8855,…, y están recogidos en http://oeis.org/A000332 con otra definición, coincidente, como veremos, salvo algunos ceros.

Los nombraremos como **PIR3_4(n)**, donde 3 es el número de lados, 4 la dimensión y n el número de orden. Así 210=PIR3_4(7).

Obtención de la fórmula polinomial

Ya estudiamos este procedimiento en una anteriormente

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/09/numeros-figurados-e-interpolacion.html

Consiste en usar la fórmula de interpolación de Newton aplicada a los primeros números. Remitimos a la entrada enlazada para seguir el procedimiento. En primer lugar escribimos los primeros términos 1, 5, 15, 35, 70,… y obtenemos sus diferencias sucesivas:

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	5	15	35	70	126	210
Dif1		4	10	20	35	56	84
Dif2			6	10	15	21	28
Dif3				4	5	6	7
Dif4					1	1	1
Dif5						0	0
Dif6							0

Observamos que son nulas las diferencias de orden 5, luego el polinomio que buscamos es de cuarto grado. Sus coeficientes los leemos más abajo:

0	0	1	4	6	4	1
720	120	24	6	2	1	1

Por tanto, el polinomio buscado será

1+4(x-1)+3(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3)/3+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)/24

Podemos acudir a wxMaxima para simplificar:

```
(%i2) ratsimp(1+4*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+2*(x-1)*(x-2)*(x-3)/3+(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)/24);
```

$$(\%o2)\quad \frac{x^4+6\,x^3+11\,x^2+6\,x}{24}$$

O bien con la web https://www.wolframalpha.com, obtenemos el mismo polinomio:

Expanded form:

$$\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{4}+\frac{11\,x^2}{24}+\frac{x}{4}$$

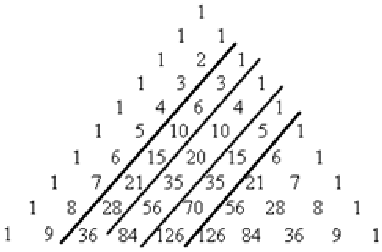
Con el comando ***factor*** de wxMaxima factorizamos:

$$\frac{x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}{24}$$

Esta es la fórmula más práctica para obtener los tetraedros de cuatro dimensiones, que, es fácil verlo, coincide con:

$$PIR3\_4(n)=\binom{n+3}{4}$$

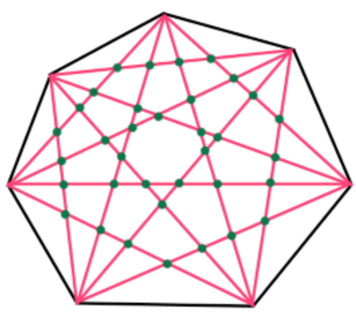
En toda esta serie nos aparecen números combinatorios, y es porque se pueden localizar los piramidales en el triángulo de Pascal



En la imagen están destacados los triangulares, los tetraedros de tres dimensiones y los de cuatro, que son suma de los anteriores.

Interpretaciones

Los tetraedros de cuatro dimensiones coinciden con las intersecciones de las diagonales de un polígono convexo, siempre que no concurran más de dos diagonales en el mismo punto. Por eso debemos elegir polígonos no regulares, como el de la figura



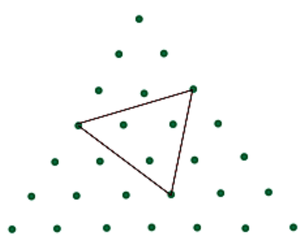
En él está representado el número 35, como las intersecciones (en color verde) en un heptágono. El 35 es el cuarto tetraedro de cuatro dimensiones, y le corresponde el polígono de tres lados más. Esto es por el n+3 que figura en la fórmula general.

He encontrado una explicación muy sencilla debida a Ignacio Larrosa @ilarrosac: Si el polígono es irregular, cada cuatro vértices formarán un cuadrilátero convexo distinto, y sus diagonales producen un único punto de intersección. Por tanto, el número de ellos coincidirá con el de combinaciones de n+3 lados tomados de 4 en 4. Muy elegante.

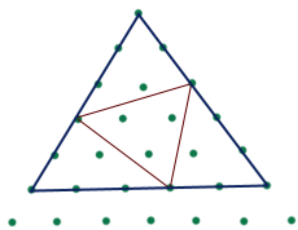
También se debe a Ignacio Larrosa la siguiente interpretación:

El número piramidal triangular de cuatro dimensiones de orden n coincide con todos los triángulos equiláteros que se pueden dibujar uniendo tres puntos de una matriz que rellena otro triángulo equilátero de lado n+1.

En la figura puedes ver uno de esos triángulos.



La idea de Ignacio Larrosa consiste en que cada triángulo tiene sus vértices en los lados de otro mayor que sigue la orientación de la matriz triangular, y que basta contar estos últimos y también todos los triángulos de cualquier orientación que se inscriben en ellos.



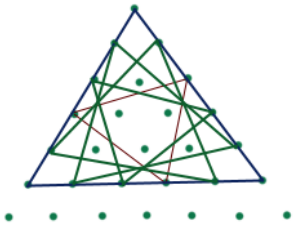
En la imagen hemos destacado en azul el equilátero orientado que contiene al elegido en primer lugar. Nos dedicamos a contar:

Número de triángulos orientados de lado k

Es un problema muy estudiado. En la imagen, el número de triángulos similares al dibujado es 1+2=3. Si tuviera una celda menos de lado su número sería 1+2+3=6, y así hasta los de lado 1, cuyo número sería 1+2+3+4+5+6=21, todos números triangulares. En general, el número de triángulos orientados de lado k en una matriz de lado n sería T(n-k+1), siendo T el triangular de ese orden.

Número de triángulos contenidos en un orientado

Basta deslizar el primer vértice (por ejemplo el que cae a la izquierda) a lo largo de su lado, y los demás se situarán en un punto fijado sin ambigüedad. En el ejemplo se podrían inscribir cuatro.



Es fácil ver que, en general, se pueden inscribir k-1 triángulos.

Con estos dos datos se pueden contar todos los equiláteros posibles mediante una suma de productos. Para n=6, caso del ejemplo sería:

S=1*5+3*4+6*3+10*2+15*1=5+12+18+20+15=70, que es el piramidal de orden 5.

Para un estudio general puedes consultar

http://people.missouristate.edu/lesreid/sol03_01.html

Recurrencia

Es fácil ver, según la fórmula general, que

PIR3_4(N)=PIR3_4(N-1)*(N+3)/(N-1)

En efecto:

$$PIR3\_4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

$$PIR3\_4(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}$$

Luego basta multiplicar por n+3 y dividir entre n-1 para pasar de uno a otro.

Por ejemplo: 70*9/5=14*9=126

PIRÁMIDES CUADRANGULARES EN 4-D

Pirámides cuadrangulares

De la misma forma, si tomamos la sucesión de números piramidales cuadrados de tres dimensiones

(ver
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-

piramidales-3-cuadrados.html), podemos ir obteniendo sus sumas parciales.

Estos son los números piramidales cuadrados:

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525, 6201, 6930, 7714, 8555, 9455,…

Formamos sus sumas parciales:

1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825, 1210, 1716, 2366, 3185, 4200, 5440, 6936, 8721, 10830, 13300, 16170, 19481, 23276, 27600,…

Se obtienen así: 1=1, 1+5=6, 1+5+14=20, 1+5+14+30=50,…

Esta será la sucesión de números piramidales cuadrados de cuatro dimensiones. Los nombraremos como PIR4_4(n)

Los tienes publicados en http://oeis.org/A002415

Obtención de la fórmula polinomial

Ya estudiamos este procedimiento anteriormente en

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/09/numeros-figurados-e-interpolacion.html

Consiste en usar la fórmula de interpolación de Newton aplicada a los primeros números naturales. Remitimos a la entrada enlazada para seguir el procedimiento. En primer lugar escribimos los primeros términos 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336,… y obtenemos sus diferencias sucesivas de forma automática:

	1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540						
Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	6	20	50	105	196	336
Dif1		5	14	30	55	91	140
Dif2			9	16	25	36	49
Dif3				7	9	11	13
Dif4					2	2	2
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	2	7	9	5	1
	720	120	24	6	2	1	1

Como las quintas diferencias son nulas, el polinomio interpolador será de cuarto grado. Los coeficientes los tienes en la parte baja en forma de fracción. Así quedaría:

1+5(x-1)+9/2(x-1)(x-2)+7/6(x-1)(x-2)(x-3)+2/24(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)

Lo podemos simplificar con wxMaxima:

```
(%i1) factor(ratsimp(1+5*(x-1)+9/2*(x-1)*(x-2)+7/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+2/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)));
```

(%o1) $\frac{x\,(x+1)^2\,(x+2)}{12}$

O en la web de Wolfram Alpha, obteniendo el mismo resultado:

$$\frac{1}{12} x (x+1)^2 (x+2)$$

Hay que tener en cuenta que esta expresión es válida si se comienza la sucesión en 1. Podrás encontrar otras distintas cuando el inicio contenga ceros.

La comprobamos, por ejemplo para n=5 y n=6:

PIR4_4(5)=5*6^2*7/12=105

PIR4_4(6)=6*7^2*8/12=4*49=196

Expresión con números combinatorios:

Todos los números figurados se pueden expresar mediante números combinatorios de una forma más o menos compleja. En este caso disponemos de dos expresiones

$$PIR4_{4(n)} = 2\binom{n+3}{4} - \binom{n+2}{3}$$

(n+3)(n+2)(n+1)n/12-(n+2)(n+1)n/6=(n+2)(n+1)n((n+3)/12-1/6)=n(n+2)(n+1)^2/12, que coincide con la fórmula obtenida más arriba. Podemos comprobarlo también con la función COMBINAT de las hojas de cálculo:

Para n=6 tendríamos =2*COMBINAT(9;4)-COMBINAT(8;3)=196

Coincide con el resultado obtenido anteriormente.

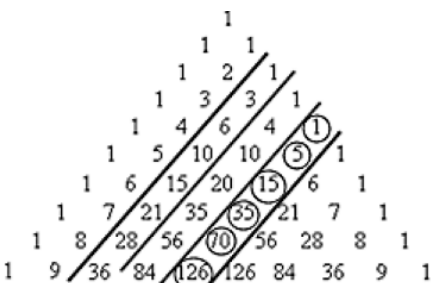
Puedes probar también con esta otra:

$$PIR4_{4(n)} = \binom{n+3}{4} + \binom{n+2}{4}$$

Así,
PIR4_4(7)=COMBINAT(10;4)+COMBINAT(9;4)=336, que es su valor correcto.

No es difícil comprobar la equivalencia de ambas expresiones combinatorias.

En la siguiente imagen del triángulo de Pascal hemos rodeado de círculos estos números combinatorios que sirven de sumandos:

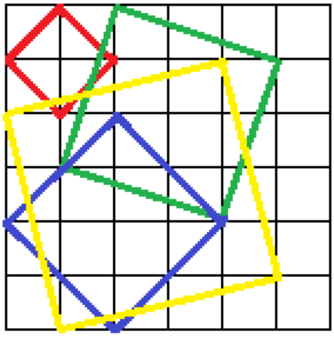


Podemos sumar cada uno con el siguiente y resultarán piramidales cuadrados de 4 dimensiones:

1+5=6; 5+15=20; 15+35=50; 35+70=105;

Interpretación geométrica

Al igual que ocurría con las pirámides triangulares y los triángulos, estos números pueden representar el número de cuadrados que se pueden dibujar en una rejilla cuadrada de n vértices, si sus lados no son paralelos a los de la rejilla. En la imagen hemos representado cuatro de ellos.



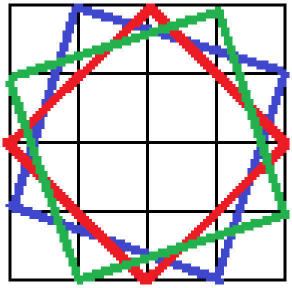
Podemos razonar de un modo similar al que usamos con triángulos.

En primer lugar contaremos los cuadrados que se pueden dibujar si sus lados han de ser paralelos a las líneas de la rejilla. Por ejemplo, en la imagen se pueden dibujar 36 cuadrados de lado 1, 25 de lado 2, 16 de 3, y así hasta el cuadrado total que sería uno solo. Por tanto, el número de cuadrados de lados paralelos sería 1+4+9+16+25+36=91.

Resulta ser equivalente a un número piramidal cuadrado de índice 6. En efecto, puedes repasar la definición y fórmulas en

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/05/numeros-piramidales-3-cuadrados.html

Dentro de cada cuadrado de lado k en posición paralela se pueden dibujar k-1 cuadrados de los que nos interesan



En el caso del lado seis, podemos acumular los cuadrados según el número de lados, y obtendríamos:

36*0+25*1+16*2+9*3+4*4+1*5=105=PIR4_4(5)

Con cinco lados obtendríamos un resultado similar:

25*0+16*1+9*2+4*3+1*4=50=PIR4_4(4)

La demostración general supone mucho cálculo algebraico que nos da pereza abordar.

OTROS NÚMEROS PIRAMIDALES EN 4-D

Generación directa

Partimos de los piramidales pentagonales de tres dimensiones:

1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, 726, 936, 1183, 1470, 1800, 2176, 2601, 3078, 3610, 4200, 4851, 5566, 6348, 7200, 8125,…

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/06/numeros-piramidales-4-pentagonos.html

Como en casos anteriores, construimos las sumas parciales: 1, 1+6=7, 1+6+18=25, 1+6+18+40=65,…y obtenemos:

1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, 750, 1155, 1705, 2431, 3367, 4550, 6020, 7820, 9996, 12597, 15675, 19285, 23485, 28336, 33902,…

Estos serán, pues los piramidales pentagonales de cuatro dimensiones. Los puedes estudiar en

http://oeis.org/A001296

Expresión algebraica

Lo que sigue lo hemos aplicado en bastantes números figurados, por lo que simplificaremos las explicaciones.

En primer lugar, abrimos nuestro interpolador para números naturales

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Escribimos en él los primeros términos de la sucesión que hemos formado.

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	7	25	65	140	266	462
Dif1		6	18	40	75	126	196
Dif2			12	22	35	51	70
Dif3				10	13	16	19
Dif4					3	3	3
Dif5						0	0
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	0	3	10	12	6	1
	720	120	24	6	2	1	1

Leemos los coeficientes de (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3),…y formamos el polinomio interpolador, que según la anulación de diferencias quintas, será de cuarto grado:

1+6*(x-1)+6*(x-1)*(x-2)+10/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+3/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)

Lo simplificamos en la página de WolframAlpha y obtenemos

$$\frac{1}{24}x(3x+1)(x+1)(x+2)$$

Expresión que coincide con una de las contenidas en https://oeis.org/A001296

Son números de Stirling

Los pentagonales que estamos estudiando son un caso particular de los números de Stirling de segunda clase para los índices (n+2,n), como puedes ver en los elementos subrayados de nuestra tabla

1	1	2				
1	3	1	5			
1	7	6	1	15		
1	15	25	10	1	52	
1	31	90	65	15	1	203
1	63	301	350	140	21	1
1	127	966	1701	1050	266	28
1	255	3025	7770	6951	2646	462
1	511	9330	34105	42525	22827	5880
1	1023	28501	145750	246730	179487	63987
1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396
1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5715424

(La tienes alojada en http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#nume)

Si deseas conocer mejor estos números puedes acudir a

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_de_Stirling_de_segunda_especie

Relación con números triangulares

En https://oeis.org/A001296 figura una propiedad interesante, debida a Jon Perry, y es que cada número piramidal pentagonal de cuatro dimensiones es suma de números triangulares multiplicado cada uno por su número de orden, es decir:

$$PIR5\_4(n) = \sum_{j=1}^{n} j \times T(j)$$

Esto se cumple para los primeros términos. Si tomamos los triangulares 1, 3, 6, 10, 15,…y formamos las sumas 1*1=1, 1*1+2*3=7, 1*1+2*3+3*6=25, 1*1+2*3+3*6+4*10=65,…y comprobamos que se cumple para los primeros términos. Acudimos a la inducción completa.

Bastará demostrar que PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n) = (n+1)*T(n+1). En efecto, es cuestión de Álgebra:

PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n)=((n+1)(n+2)(n+3)(3(n+1)+1)-n(n+1)(n+2)(3n+1))/24

Simplificamos y queda:

PIR5_4(n+1)-PIR5_4(n)=(n+1)(n+2)(12n+12)/24=(n+1)(n+1)(n+2)/2=(n+1)T(n+1)

Luego la propiedad es extensible a todos los términos.

En la misma página de OEIS, J. M. Bergot interpreta esta propiedad como la suma de todos los productos de dos elementos del conjunto {1, 2, …, n} tomados de todas las formas posibles, sin tener en cuenta el orden). Por ejemplo, 1*1 + 1*2 + 1*3 + 2*2 + 2*3 + 3*3 = 25.

Es sencillo de comprender, ya que si desarrollamos la suma de cada triangular por su número de orden, basta recordar que cada triangular es suma de números consecutivos, luego la suma queda:

1*T(1)+2*T(2)+3*T(3)+4*T(4) = 1*1+2(1+2)+3*(1+2+3)+4*(1+2+3+4)+…

Se ve que en la suma están contenidos todos los productos de cada número natural por sus precedentes, tal como afirma J. M. Bergot.

Es un buen ejercicio de hoja de cálculo construir una tabla que refleje este resultado. Hay que manejar bien las referencias absolutas y relativas. Un buen ejercicio de aprendizaje.

En la tabla que hemos construido se destaca el conjunto de sumandos que forman el piramidal pentagonal 140:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4	6	8	10	12	14	16	18	20
3			9	12	15	18	21	24	27	30
4				16	20	24	28	32	36	40
5					25	30	35	40	45	50
6						36	42	48	54	60
7							49	56	63	70
8								64	72	80
9									81	90
10										100
	1	7	25	65	**140**	266	462	750	1155	1705

Piramidales hexagonales

Según nuestra política de no cansar con los temas, a los piramidales hexagonales les dedicaremos menos espacio y con ellos terminaremos el recorrido por los que tienen cuatro dimensiones.

Las operaciones que hay que realizar son:

(1) Acumulación de piramidales hexagonales de tres dimensiones

Partimos de los piramidales hexagonales de tres dimensiones:

1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525, 715, 946, 1222, 1547, 1925, 2360, 2856, 3417, 4047, 4750, 5530, 6391, 7337, 8372,…

(Ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/07/numeros-piramidales-5-hexagonos.html)

Los acumulamos en sumas parciales:

1, 1+7=8, 1+7+22=30, 1+7+22+50=80,…

Nos resultarán así los números piramidales hexagonales de cuatro dimensiones:

1, 8, 30, 80, 175, 336, 588, 960, 1485, 2200, 3146, 4368, 5915, 7840, 10200, 13056, 16473, 20520, 25270, 30800,…

Los tienes publicados en http://oeis.org/A002417

(2) Obtención de la fórmula algebraica

También para estos números usamos nuestro interpolador

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Como ya lo hemos desarrollado para otros tipos de números, sólo insertaremos el volcado de pantalla:

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	8	30	80	175	336	588
Dif1		7	22	50	95	161	252
Dif2			15	28	45	66	91
Dif3				13	17	21	25
Dif4					4	4	4
Dif5						0	0
Dif6							0
ntes (en fracción)	0	0	4	13	15	7	1
	720	120	24	6	2	1	1

Como en otras ocasiones, observamos la anulación de las diferencias quintas y copiamos los coeficientes del polinomio en la parte inferior.

1+7*(x-1)+15/2*(x-1)*(x-2)+13/6*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4/24*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)

Simplificamos la expresión en la página de WolframAlpha y nos devuelve cuatro variantes:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6}x^2(x+2)(x+1)$$

$$\frac{1}{6}x^2(x^2+3x+2)$$

$$x^2\left(\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{3}\right)$$

Expanded form:

$$\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{3}$$

Aunque la cuarta es la más sintética a efectos de cálculo, nos quedamos con la primera, porque se puede interpretar en términos de número combinatorio:

$$PIR6_4(n) = n\binom{n+2}{3}$$

Una curiosa propiedad

Según un comentario de Floor van Lamoen en la página OEIS donde vienen publicados, se cumple que PIR6_4(n) es la suma de todos los números que **no pueden** expresarse de la forma t*(n+1) + u*(n+2) con t, u enteros no negativos. Desconocemos la demostración de este hecho, pero nos va a servir para repasar unos conceptos que desarrollamos en una entrada de este blog http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html

Según el vocabulario introducido en esa entrada, lo que afirma Floor van Lamoen es que los números que estamos estudiando son **suma de aquellos que no son representables respecto al conjunto {n+1,n+2}**. En la entrada citada llamábamos número de Frobenius al máximo número no representable para un conjunto. En el caso de dos números coprimos a y b, ese número equivale a **a*b-a-b**. Esto nos garantiza que la suma de no representables es finita, y que, por tanto, puede coincidir con un número de nuestra lista.

En este caso particular, el número de Frobenius para {n+1,n+2} será

$(n+1)*(n+2)-(n+1)-(n+2)=n^2+n-1$

En el caso de n=7, ese número será igual a 7^2+7-1=55. Quiere decir que los números no representables respecto al conjunto {8,9} serán no mayores que 55. En efecto, los hemos buscado con hoja de cálculo y resultan ser

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 46, 47, 55

Su suma es 588, que coincide con PIR6_4(7), como puedes comprobar en la lista de arriba.

Podemos repetir esta comprobación para cualquier otro valor. Para ello necesitamos una función que nos devuelva VERDADERO si un número n es representable respecto al conjunto {a,b}. Puede ser esta:

Function sumamult(n, a, b) As Boolean *‘Investiga si n=t*a+u*t*

Dim i, p, q

Dim es As Boolean

es = False

i = 0 ‘Recorrerá los posibles múltiplos de a

While i <= n And Not es

p = i / a: q = (n - i) / b ‘Encuentra los posibles valores de **t** y **u**

If p = Int(p) And q = Int(q) Then ‘Si ambos **t** y **u** son enteros, es representable

es = True

End If

i = i + 1

Wend

sumamult = es

End Function

Con esta función no es difícil sumar los no representables para un número dado:

Function suma_no_repr(n)
Dim i, s
s = 0
For i = 1 To n * n + n – 1 ‘Busca hasta el número de Frobenius
If Not sumamult(i, n + 1, n + 2) Then s = s + i ‘Si no es representable, lo suma
Next i
suma_no_repr = s
End Function

Efectivamente, con ella se reproduce la lista de los piramidales hexagonales de cuatro dimensiones:

N	PIR6_4(N)
1	1
2	8
3	30
4	80
5	175
6	336
7	588
8	960
9	1485
10	2200
11	3146
12	4368

Esto ocurre a menudo en las pequeñas investigaciones matemáticas, que aparecen conexiones inesperadas, como nos ha ocurrido aquí. Era difícil imaginar una conexión de números piramidales con el número de Frobenius.

Otros números piramidales de cuatro dimensiones

Dejamos aquí el estudio pormenorizado de este tipo de números. Si deseas avanzar en el número de lados puedes usar este polinomio que los genera, en el que **n** es la longitud (en número de puntos) de cada lado y **k** el número de lados de la base:

$$PIRK_4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)((k-2)n+(6-k))}{24}$$

Si vas particularizando este polinomio para los valores de k 3, 4, 5 y 6 resultarán las expresiones que hemos estudiado ya. Por ejemplo, para los que acabamos de estudiar:

K=5: n(n+1)(n+2)(3n+1)/24, tal como hemos obtenido en párrafos anteriores

K=6: n(n+1)(n+2)(4n)/24, que al simplificar coincide con la que se presentó más arriba.

También podemos expresar la fórmula general así:

$$PIRK_4(n) = \binom{n+2}{3}\frac{(k-2)n+(6-n)}{4}$$

Veamos algunos ejemplos:

K=7

Resultan los piramidales heptagonales de cuatro dimensiones:

1, 9, 35, 95, 210, 406, 714, 1170, 1815,… http://oeis.org/A002418

K=8

1, 10, 40, 110, 245, 476, 840, 1380, 2145,… http://oeis.org/A002419

K=9

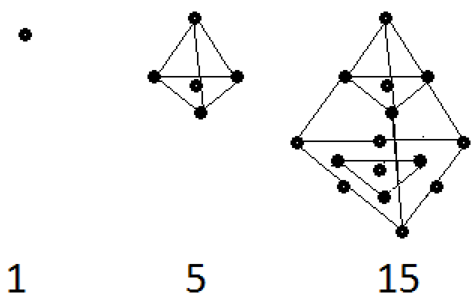
1, 11, 45, 125, 280, 546, 966, 1590, 2475,… http://oeis.org/A051740

De esta forma podemos ir aumentando el número de lados, pero cada vez serán menos interesantes.

NÚMEROS PIRAMIDALES CENTRADOS

En este capítulo generaremos números piramidales a partir de los poligonales centrados.

Al igual que los números poligonales centrados se formaban acumulando contornos de polígonos o de múltiplos de un número, podríamos también acumular estos números poligonales centrados mediante sus sumas parciales. Estas sumas se pueden representar como niveles dentro de una pirámide centrada. Lo vemos en la imagen, que representa las pirámides centradas de tres lados que estudiaremos a continuación:



Son pirámides que contienen en el interior de sus bases los polígonos anteriores.

Pirámides triangulares centradas

Siguiendo un proceso similar al de casos anteriores, partimos de los números triangulares centrados

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, 235, 274, 316, 361, 409, 460, 514, 571, 631, 694, 760, 829, 901,…, ya estudiados en las entradas referidas y en http://oeis.org/A005448

Los acumulamos mediante sumas parciales:

1, 1+4=5, 1+4+10=15, 1+4+10+19=34,… y así hasta completar. De esta forma se generarán los piramidales triangulares centrados

1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505, 671, 870, 1105, 1379, 1695, 2056, 2465, 2925, 3439, 4010, 4641, 5335, 6095, 6924, 7825, 8801, 9855, 10990, 12209, 13515, 14911, 16400, 17985, 19669,…

http://oeis.org/A006003

Los tres primeros se corresponden con la imagen del primer párrafo.

En este caso también podemos usar el interpolador de Newton para los primeros números naturales, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

Rellenamos los valores de la función con los primeros términos 1, 5, 15, 34, 65, 111, 175 y leemos los coeficientes en la parte inferior:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	5	15	34	65	111	175
Dif1		4	10	19	31	46	64
Dif2			6	9	12	15	18
Dif3				3	3	3	3
Dif4					0	0	0
Dif5						0	0
Dif6							0
ntes (en	0	0	0	3	6	4	1
fracción)	720	120	24	6	2	1	1

El polinomio interpolador será

1+4(x-1)+3(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-3)/2

Simplificamos mediante la web de Wolfram|Alpha y obtenemos

Alternate forms:

$$\frac{1}{2}x(x^2+1)$$

$$PIRC_3(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Este es un caso particular de la fórmula contenida en el libro Figurate Numbers, de Elena Deza y Michel Deza, que sólo incluimos como comprobación, ya que nos interesa la generación de cada caso particular. Es esta:

$$PIRC_m(n) = \frac{mn^3 + (6-m)n}{6}$$

Particularizando para m=3 resulta la que hemos obtenido.

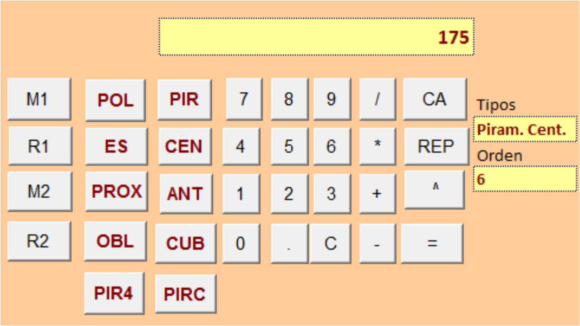
Por ejemplo, PIRC3(9)=9*82/2=369, que es el noveno término de nuestra lista de más arriba.

La expresión que hemos obtenido coincide con la que figura en http://oeis.org/A006003

Uso de Calcupol

Pasamos a usar nuestra calculadora Calcupol, (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados) cuyas prestaciones hemos ampliado con la inserción de una nueva tecla que gestiona estas pirámides centradas

Su funcionamiento es similar a las dedicadas a números poligonales y otros piramidales: escribimos el orden **m** (que en este caso valdría 3), después pulsamos la tecla **PIRC** con el ratón, escribimos el valor de **n**, por ejemplo 7, y terminamos con la tecla **=**. Nos resultaría, en este caso del 7, el valor de 175, que coincide con el séptimo término de la sucesión que estamos estudiando:



Propiedades

Desarrollamos a continuación algunas propiedades de estos números. Comenzamos con una de Felice Russo incluida en http://oeis.org/A006003

Se expresa así:

Si escribimos los números naturales en grupos de longitud progresiva desde el 1, es decir, formamos: 1;

2,3; 4,5,6; 7,8,9,10;… y sumamos cada grupo, obtenemos los piramidales que estamos estudiando:

1=1

2+3=5

4+5+6=15

7+8+9+10=34

11+12+13+14+15=65

…

No es difícil justificarlo. Basta observar que la suma de enteros consecutivos desde 1 hasta k es el número triangular k(k+1)/2, luego los grupos formados tendrán como suma la diferencia entre el triangular correspondiente al último término y el del anterior grupo. Así, 7+8+9+10=T(10)-T(6)=10*11/2-6*7/2=55-21=34, como era de esperar.

Sólo hay que advertir que los índices de esos triangulares son a su vez triangulares también, 10=4*5/2 y 6=3*4/2, y además consecutivos. Esto nos permite plantearlo con la variable x:

S(x)=T(x(x+1)/2)-T(x(x-1)/2) = (x(x+1)/2)*(x(x+1)/2+1)/2-(x(x-1)/2)*(x(x-1)/2+1)/2

Acudimos de nuevo a Wolfram|Alpha para simplificar y comprobamos:

$$\frac{1}{2}\,x\,(x^2+1)$$

$$\frac{1}{2}\,(x^3+x)$$

$$x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

Nos resulta la fórmula esperada de estos piramidales centrados, luego la propiedad es cierta.

Propiedad combinatoria

Los piramidales centrados que estamos estudiando son suma de tres números combinatorios a partir del 15:

$$a(k) = \binom{n}{3} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}$$

Basta desarrollar:

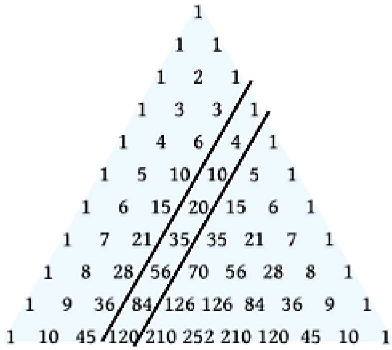
((n)(n-1)(n-2)+(n+1)(n)(n-1)+(n+2)(n+1)(n))/6=

=n/6*(n^2-3n+2+n^2-1+n^2+3n+2)

=n/6*(3n^2+3)=**(n^3+n)/2**

Significa que si recorremos la cuarta diagonal del triángulo aritmético y sumamos de tres en tres, resultarán los números que estamos estudiando:

En una imagen tomada de la Wikipedia hemos señalado los números que debemos sumar:



Así, 1+4+10=15, 4+10+20=34, 10+20+35=65,…

Relación con los triangulares

$$PIRC_3(n) = T(n) + nT(n-1)$$

(Bruno Berselli, Jun 07 2013)

Es claro su significado: Si a un número triangular le sumamos el anterior multiplicado por el número de orden del primero, resulta un piramidal triangular centrado.

Así 3+2*1=5, 6+3*3=15, 10+4*6=34…

En forma de tabla:

n	T(n)	T(n)+n*T(n-1)
1	1	
2	3	5
3	6	15
4	10	34
5	15	65
6	21	111
7	28	175
8	36	260

Se ha destacado en rojo el cálculo: multiplicar el anterior por el número de orden y sumar el actual triangular.

Se demuestra con un simple desarrollo:

$T(n)+nT(n-1)=n(n+1)/2+n*(n-1)*(n)/2=n/2*(n+1+n^2-n)=n/2(n^2+1)=\mathbf{(n^3+n)/2}$

Llegamos a la misma expresión ya conocida.

Piramidales centrados de cuatro lados

Como procedimos con los triangulares, partiremos de los números poligonales cuadrangulares centrados:

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, 313, 365, 421, 481, 545, 613, 685, 761, 841, 925, 1013, 1105, 1201, 1301, 1405, 1513, 1625, 1741, 1861, 1985, 2113, 2245, 2381…http://oeis.org/A001844

Los puedes repasar en la siguiente entrada de este blog:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html

Realizamos la acostumbrada construcción de sumas parciales:

1, 1+5=6. 1+5+13=19, 1+5+13+25=44,…

Así conseguimos los números piramidales cuadrangulares centrados:

1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344, 489, 670, 891, 1156, 1469, 1834, 2255, 2736, 3281, 3894, 4579, 5340, 6181,… http://oeis.org/A005900

Como el uso del interpolador lineal ha sido ya explicado, sólo insertamos el esquema de cálculo:

1	2	3	4	5	6	7
1	6	19	44	85	146	231
	5	13	25	41	61	85
		8	12	16	20	24
			4	4	4	4
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	4	8	5	1
720	120	24	6	2	1	1

Resulta el polinomio

1+5(x-1)+4(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3)/3

Se simplifica mediante la web de Wolfram|Alpha y obtenemos:

Alternate forms:

$$\frac{1}{3}x(2x^2+1)$$

Es decir:

$$PIRC_4(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

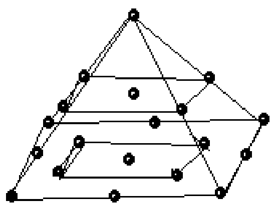
Podíamos haberlo deducido de la fórmula general de Elena Deza y Michel Deza:

$$PIRC_m(n) = \frac{mn^3+(6-m)n}{6}$$

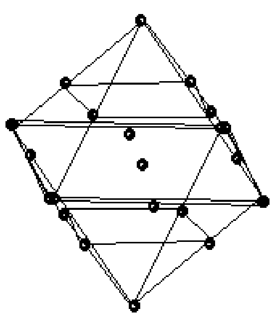
Para m=4 queda

$$PIRC_4(n) = \frac{4n^3+(6-4)n}{6} = \frac{2n^3+n}{3}$$

Estos números coinciden con los *octaédricos*, como puedes comprobar en http://oeis.org/A005900. Por tanto, las propiedades que siguen las comparten ambos tipos de números. Puedes encontrar la causa si comparas las dos figuras siguientes. La primera corresponde al número piramidal cuadrangular centrado de orden 3. Por tanto, estará formado por las capas 1+(1+4)+(1+4+8)=19, tal como vimos en la sucesión general.



En la segunda figura hemos desplazado capas hacia abajo, y colocado el centro en la mayor:



Así vemos perfectamente formado el octaedro, que se puede generar con la suma 1^2+2^2+3^2+2^2+1^2=19, como cabía esperar.

Este resultado se puede generalizar sin problemas al término n, lo que nos da la primera propiedad de estos números.

Propiedades

Suma de cuadrados

Los términos de la sucesión que estamos estudiando se pueden calcular mediante la expresión:

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Este desarrollo los identifica con los números octaédricos, como ya hemos visto.

Tomamos algún ejemplo:

85=1+4+9+16+25+16+9+4+1

231=1+4+9+16+25+36+49+36+25+16+9+4+1

Productos de sumandos impares

A continuación vemos una interesante propiedad debida a Jon Perry

*PIRC4(n) coincide con la suma de todos los productos posibles p*q con p y q impares tales que p+q=2n*

Es una consecuencia directa de la primera propiedad:

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Si recordamos que un cuadrado es suma de impares consecutivos, obtendremos sumas repetidas que se podrán agrupar en productos:

PIRC4(3)=19=1+1+3+1+3+5+1+3+1=1*5+3*3+5*1

PIRC4(4)=44=1+1+3+1+3+5+1+3+5+7+1+3+5+1+3+1=
1*7+3*5+5*3+7*1

Para el caso general no sería difícil ir agrupando los impares.

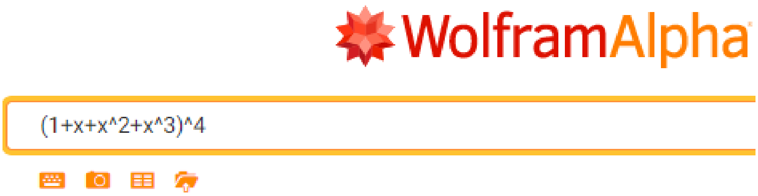
Como coeficiente de una potencia

Esta propiedad sólo la comprobaremos en algún caso concreto. Pues supone pesados cálculos algebraicos que no hay por qué abordar ahora. Lo dejamos para quién se atreva.

Estos números coinciden con el máximo coeficiente del desarrollo de (1+x+x^2+x^3+…x^k)^4

Lo comprobamos para el 44:

Escribimos (1+x+x^2+x^3)^4 en la página de WolframAlpha:



Leemos su desarrollo más abajo:

Expanded form:

$$x^{12}+4x^{11}+10x^{10}+20x^9+31x^8+40x^7+44x^6+40x^5+31x^4+20x^3+10x^2+4x+1$$

Comprobamos que el mayor coeficiente es 44.

A continuación insertamos un recorte de pantalla de wxMaxima en el que se comprueba la propiedad para exponente 5:

```
(%i2) ratsimp(1+x+x^2+x^3+x^4)^4;
(%o2) (x^4+x^3+x^2+x+1)^4
(%i3) ratsimp(%);
(%o3) x^16+4 x^15+10 x^14+20 x^13+35 x^12+52 x^11+68 x^10+80 x^9+85 x^8+80 x^7
```

También aquí el mayor coeficiente es 85, el siguiente elemento de la lista.

Propiedad combinatoria

El número piramidal cuadrangular centrado de orden n equivale al número de conjuntos ordenados (w,x,y,z) con todos sus términos en {1,...,n} tales que w+x=y+z. (Clark Kimberling, Jun 02 2012)

No es difícil razonarlo. Las posibles sumas w+x son 2, 3,…,2n. Sus posibilidades van creciendo al principio y disminuyendo al final. Así:

Suma 2 o suma 2n: w, x tiene 1 posibilidad , (1+1 o n+n); y+z otra: luego sale 1=1^2

Suma 3 o suma 2n-1: w, x tiene 2 posibilidades, (1+2, 2+1 o n-1+n. n+n-1); y+z otras 2, luego al combinar ambas posibilidades quedan 4= 2^2

Suma 4 o suma 2n-2: con un razonamiento similar llegaríamos a 3^2

Así seguiríamos, con lo que volvemos a la propiedad básica, y es que el total sería igual a

$$PIRC_4(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

Como no hay prisa por resolver las cuestiones, comprobamos esta propiedad con nuestra hoja Cartesius:

Con Cartesius

Descargamos la hoja desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Comprobamos la propiedad para el caso 6. Para ello planteamos:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
xtotal=4	
xt=1..6	
es x1+x2=x3+x4	

Estamos pidiendo que se combinen cuatro elementos (corresponden a w, x, y, z de la propiedad), que deberán estar contenidos en el rango 1..6 y que la suma de los dos primeros x1+x2 coincida con la de los segundos x3+x4.

Desarrollamos el planteo con el botón Iniciar y, efectivamente, resultan 146 casos

Total
146

Aunque no nos cabe en este documento, podemos, con la función **SI** seleccionar los resultados cuyos dos primeros elementos sumen, por ejemplo, 5. En el recorte de la imagen asignamos un 1 a los casos en los que w+x=5

1	3	1	3		0
1	3	2	2		0
1	3	3	1		0
1	4	1	4		1
1	4	2	3		1
1	4	3	2		1
1	4	4	1		1
1	5	1	5		0
1	5	2	4		0

Después bastaría contar los unos y nos resultarían 16=4^2, tal como razonamos más arriba.

Piramidales pentagonales centrados

Formación

Lo explicamos de forma esquemática, pues es un procedimiento que hemos desarrollado anteriormente. Insertamos enlaces para una mejor comprensión. Procederemos de la misma forma en los siguientes tipos.

Tomamos los números poligonales pentagonales centrados:

1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, 276, 331, 391, 456, 526, 601, 681, 766, 856, 951, 1051, 1156, 1266, 1381, 1501, 1626, 1756, 1891, 2031, 2176, 2326, 2481, 2641, 2806, 2976,… http://oeis.org/A005891

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html

Sobre ellos acumulamos sumas parciales

1, 1+6=7, 1+6+16=23, 1+6+16+31=54,…

Y nos queda

1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835, 1111, 1442, 1833, 2289, 2815, 3416, 4097, 4863, 5719, 6670, 7721, 8877, 10143,…http://oeis.org/A004068

Extraemos la expresión genera con nuestro interpolador:

1	2	3	4	5	6	7
1	7	23	54	105	181	287
	6	16	31	51	76	106
		10	15	20	25	30
			5	5	5	5
				0	0	0
					0	0
						0
0	0	0	5	10	6	1
720	120	24	6	2	1	1

Copiamos los coeficientes de abajo para obtener el polinomio interpolador, y resulta:

P(x)=1+6(x-1)+5(x-1)(x-2)+5(x-1)(x-2)(x-3)/6

Simplificamos en la página de WolframAlpha:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6}x(5x^2+1)$$

O bien

Expanded form:

$$\frac{5x^3}{6} + \frac{x}{6}$$

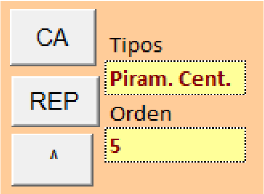
Es decir:

$$PIRC_5(n) = \frac{n(5n^2+1)}{6}$$

A partir de la fórmula de Deza también se obtiene:

$$PIRC_5(n) = \frac{5n^3+(6-5)n}{6} = \frac{5n^3+n}{6}$$

Puedes ir engendrando así los términos de la sucesión o usar nuestra calculadora Calcupol. Ahora cambiamos el método. Ábrela y concreta en su parte derecha que deseas usar piramidales centrados y marca 5 como orden:



Después escribe un 1 en pantalla y ve usando la tecla **PROX** paso a paso, y obtendrás la sucesión 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287,…Después, con la tecla **ANT** los puedes recorrer descendiendo hasta el 1. También puedes encontrar un término más alejado. Por ejemplo, con la secuencia de teclas **5 PIRC 30 =** obtendrás el término 30, que resulta ser 22505. Si ahora usas PROX y ANT puedes descubrir los términos más cercanos a él.

Propiedades de estos números

Si los piramidales cuadrados centrados los interpretamos como octaedros, estos pentagonales los podemos convertir en decaedros, es decir en poliedros de diez caras. Así lo interpreta la sucesión de OEIS A004068, como ves en su inicio:

A004068 Number of atoms in a decahedron with n shells.

0, 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835, 1111, 1442, 1833, 2289, 2815, 3416, 4097, 4863, 5719, 6670, 7721, 8877, 10143, 11524, 13025, 14651, 16407, *18298, 20329, 22505, 24831, 27312, 29953, 32759, 35735, 38886, 42217, 45733, 49439,…*

Como es una cuestión geométrica y el sentido de la palabra decaedro es ambiguo, dejamos esta interpretación en este punto.

Otra interpretación de la fórmula

La expresión general del valor de estos números se puede escribir de otra forma:

$$PIRC_5(n) = \frac{5n^3+n}{6} = n^3 - \frac{n^3-n}{6}$$
$$= n^3 - \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Esta, a su vez equivale a

$$PIRC_5(n) = n^3 - \binom{n+1}{3}$$

Llegamos a algo interesante, y es que la fórmula se reduce a un cubo y a un número combinatorio.

Relación con la Combinatoria

La última expresión de la fórmula se puede interpretar como *una diferencia entre combinaciones con repetición de n elementos tomados de 3 en 3 y las combinaciones de n+1 elementos también de 3 en 3.*

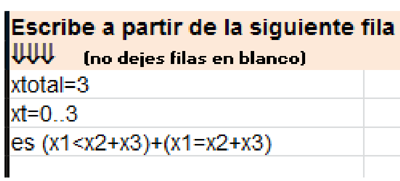
Esta consideración nos lleva a una interpretación combinatoria similar a otra que descubrimos para los piramidales centrados de 4 lados.

a(n+1) equivale al número de tripletas (w,x,y) con términos comprendidos en {0,...,n} y tales que x+y>=w. Esta propiedad también es debida a Clark Kimberling.

Antes de razonar nada, lo desarrollaremos mediante nuestra herramienta Cartesius, que construye productos cartesianos condicionados

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Usaremos este planteo para el caso n=3:



En la primera línea pedimos un producto de tres factores. Después, que pertenezcan al intervalo (0,..3) y, finalmente, que el primero sea menor o igual que la suma de los otros dos.

El resultado es igual a 54 casos, que es el cuarto término de la sucesión. Veamos en detalle los valores de x1:

El valor x1=0 aparece sin restricciones, ya que es menor o igual que cualquier otro elemento. En total 16 veces:

0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	0	3
0	1	0
0	1	1
0	1	2
0	1	3
0	2	0
0	2	1
0	2	2
0	2	3
0	3	0
0	3	1
0	3	2
0	3	3

El valor x1=1 ya tiene una restricción, que es (1, 0, 0), luego se presentará 16-1 veces:

1	0	1
1	0	2
1	0	3
1	1	0
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	0
1	2	1
1	2	2
1	2	3
1	3	0
1	3	1
1	3	2
1	3	3

De igual forma, x1=2 aparece 16-3=13 veces, donde 3 son las combinaciones que forman las excepciones: (2,0,0), (2,1,0) y (2,0,1)

2	0	2
2	0	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
2	2	0
2	2	1
2	2	2
2	2	3
2	3	0
2	3	1
2	3	2
2	3	3

Por último, el 3 sólo aparecerá en 16-6=10 casos

3	0	3
3	1	2
3	1	3
3	2	1
3	2	2
3	2	3
3	3	0
3	3	1
3	3	2
3	3	3

Se ve, y se puede generalizar fácilmente, que lo que se le va restando a cada 16 un número triangular:

16+16-1+16-3+16-6=64-1-3-6=54

Para n=4 obtendríamos:

5^3=125, luego la expresión que acabamos de obtener se convertiría en

25+25-1+25-3+25-6+25-10=125-(1+3+6+10)=105, como era de esperar. Los números triangulares representan las combinaciones de dos en dos que representan a las excepciones.

La suma de triangulares equivale al número piramidal triangular o tetraedro, tal como puedes comprobar en nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html

En ella vemos que equivale a un número combinatorio

$$TET(n) = \binom{n+2}{3}$$

Ajustando índices nos queda la expresión ya vista para los piramidales que estamos estudiando:

$$PIRC_5(n) = n^3 - \binom{n+1}{3}$$

Así que la propiedad es cierta.

Todo este estudio nos da otra interpretación geométrica para estos piramidales centrados de orden 5, y es que son la diferencia entre un número cúbico e lado n y un tetraedro de lado n-1.

Suma de valores de un polinomio

Traducimos una propuesta de Reinhard Zumkeller, Nov 11 2012:

Otra expresión para estos números es

$$PIRC_5(n) = \sum_{k=1}^{n} n^2 - nk + k^2$$

En efecto, si sumamos estos términos, obtenemos los piramidales centrados pentagonales:

1	1						
7	3	4					
23	7	7	9				
54	13	12	13	16			
105	21	19	19	21	25		
181	31	28	27	28	31	36	

Para demostrarlo recordemos que la suma de n naturales es n(n+1)/2 y la de sus cuadrados n(n+1)(2n+1)/6. Por tanto, al sumar n^2+nk+k^2 obtendremos:

PIRC(5,n)=n(n+1)(2n+1)/6-n*n*(n+1)/2+n*n^2

Lo simplificamos en la página de WolframAlpha y nos queda comprobado:

Alternate forms:

$$\frac{1}{6} n (5 n^2 + 1)$$

Volvemos a la expresión inicial.

Otros números piramidales centrados

Hexagonales

Con estos números, como veremos, el inicio del estudio seguirá un camino más simple:

Partimos de los poligonales hexagonales centrados:

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107, 2269, 2437, 2611, 2791, 2977, 3169, 3367, 3571, 3781, 3997

(http://oeis.org/A003215

Y

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2018/01/poligonales-centrados-2.html)

En esta entrada nuestra incluimos su expresión, que es una diferencia de cubos consecutivos

$$HC(n)=(n+1)^3-n^3$$

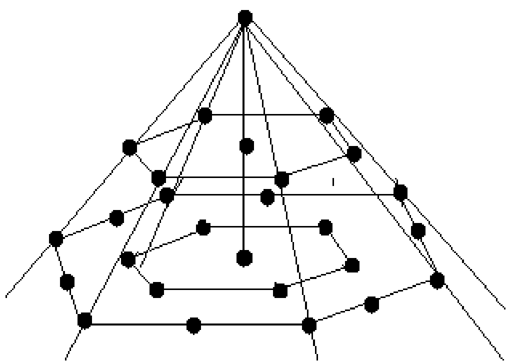
Por tanto, si para construir los piramidales debemos ir formando las sumas parciales, resultarán cubos. En efecto:

1, 1+7=8, 1+7+19=27, 1+7+19+37=64

Luego la sucesión será:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167,…

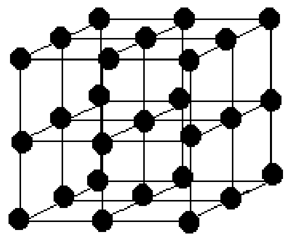
En el boceto siguiente está representado el número 27, que a su vez contiene el 7 y el 1, en sus tres capas, luego 27=1+1+6+1+6+12



Los términos de la sucesión claramente son cubos. No hay que usar interpolador para verlo. Si también acudimos a la fórmula de Deza lo comprobaremos, para n=6

$$PIRC_6(n) = \frac{6n^3 + (6-6)n}{6} = \frac{6n^3 + 0}{6} = n^3$$

Así que estos números, además de ser piramidales centrados, representarán una figura cúbica. Aclara mucho la equivalencia si vas tomando grupos de tres unidades en la imagen anterior y te los imaginas alineados en una trama cúbica:



Al coincidir estos números con los cubos, todas sus propiedades se desprenderán de ese carácter, lo que les quita interés.

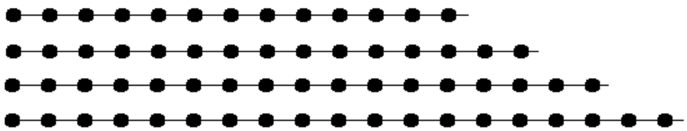
Suma de grupos de impares consecutivos

Añadimos esta propiedad porque se puede interpretar como un número trapezoidal. Cada número heptagonal centrado equivale a la suma de uno de estos grupos:

{1}, {3, 5},{7, 9, 11}, {13, 15, 17, 19},…

1=1
8=3+5
27=7+9+11
64=13+15+17+19

Las sumas se pueden representar mediante trapecios. Por ejemplo, la última formaría esta imagen:



Para comprobarlo algebraicamente, usaremos, como en casos anteriores, los números triangulares. Sabemos que la suma de impares equivale al cuadrado de su número, pero estos grupos se han ido eligiendo siguiendo los triangulares, por lo que su valor coincidirá con la diferencia de cuadrados de dos triangulares consecutivos. Así:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^3$$

Heptagonales

Partimos de los poligonales centrados de siete lados

1, 8, 22, 43, 71, 106, 148, 197,…

http://oeis.org/A069099

Acumulamos:

1, 1+8=9, 9+22=31, 31+43=74,…y obtenemos:

1, 9, 31, 74, 145, 251, 399,…

Están publicados en http://oeis.org/A004126

Su expresión es fácil de obtener con la fórmula de Deza:

$$PIRC_7(n) = \frac{7n^3 + (6-7)n}{6} = \frac{7n^3 - n}{6}$$

Propiedades

Como suma de triangulares

Casi todos los números figurados presentan relaciones sencillas con los números triangulares. En este caso es:

El piramidal heptagonal centrado de orden n equivale a la suma de n triangulares comenzando por T(n)

Por ejemplo:

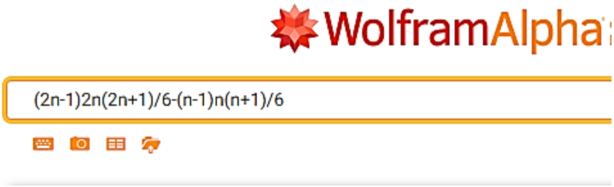
31=6+10+15

74=10+15+21+28

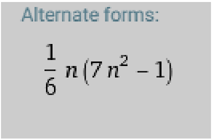
Para el caso n basta recordar que la suma de los primeros números triangulares equivale a n(n+1)(n+2)/6, luego la suma de sólo cuatro será la diferencia entre la suma de los 2n-1 primeros menos la suma de los n-1 primeros. Lo desarrollamos:

(2n-1)2n(2n+1)/6-(n-1)n(n+1)/6

Simplificando en Wolfran-Alpha:



Obtenemos:



Coincide con la expresión obtenida más arriba, luego la propiedad es verdadera.

Fórmula combinatoria

La propiedad anterior se puede expresar así:

$$PIRC_7(N) = \binom{2n-1}{3} - \binom{n-1}{3}$$

Octogonales

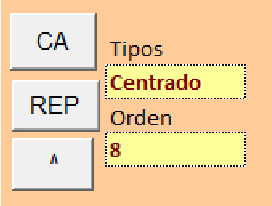
Los poligonales octogonales centrados, que no llegamos a estudiarlos en este blog, equivalen a los cuadrados de los números impares, como puedes ver en OEIS:

A016754 Odd squares: a(n) = (2n+1)^2. Also centered octagonal numbers.

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, 625, 729, 841, 961, 1089, 1225, 1369, 1521, 1681, 1849, 2025, 2209, 2401, 2601, 2809, 3025, 3249, 3481, 3721, 3969, 4225, 4489, 4761, 5041, 5329, 5625, 5929, 6241, 6561, 6889, 7225, 7569 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

También los puedes recorrer con nuestra calculadora Calcupol (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados)

Eliges el tipo *Centrado de orden 8*



Escribes un 1 en pantalla y vas pulsando la tecla PROX, con lo que aparecerán en pantalla los cuadrados de los impares.

Acumulamos esos cuadrados mediante sumas parciales

1+9=10
1+9+25=35
1+9+25+49=84

Obtendremos la sucesión

1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330, 1771, 2300, 2925, 3654, 4495, 5456, 6545, 7770, 9139, 10660, 12341,…(http://oeis.org/A000447)

Estos serán los piramidales octogonales centrados.

De la fórmula de Deza se deduce:

$$PIRC_8(n) = \frac{8n^3 + (6-8)n}{6} = \frac{8n^3 - 2n}{6} = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

También se puede escribir como

$$PIRC_8(n) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Se puede comprobar:

PIRC8(3)=3*5*7/3=35; PIRC8(4)=4*7*9/3=84

Coincidencia con tetraedros

Si aplicamos la fórmula obtenida a los números impares nos resultará:

$$PIRC_8(2n-1) = \frac{(2n-1)(4n-1)(4n-3)}{3} = \binom{4n-3}{3}$$

Los números combinatorios de orden 3 coinciden con los piramidales triangulares o tetraedros.

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/04/numeros-piramidales-2-tetraedros.html

Así que estos estos octogonales que estamos estudiando coinciden con los tetraedros en los lugares impares:

Piramidales octogonales centrados:

1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330, 1771, 2300, 2925, 3654, 4495, 5456, 6545, 7770,…

Piramidales triangulares:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, 1140, 1330, 1540, 1771, 2024, 2300, 2600, 2925,…

Cada dos de estos coinciden con los de arriba.

Este tema se ha alargado mucho. Es el momento de cortar y dejar el resto para investigar.

1, 10, 35, 84, 165

SUMAS DEL TIPO M+N+MN

Como en otras ocasiones, cualquier comentario o reto aparecido en las redes sociales nos sirve de excusa para emprender un estudio. Hoy nos dedicaremos al número de descomposiciones del tipo **k=m+n+mn** (m>0 y n>0) que puede presentar un número k. A efectos prácticos podemos suponer que n es mayor o igual a m.

El número 99, por ejemplo, admite cuatro descomposiciones:

99=3+24+3*24
99=4+19+4*19
99=9+9+9*9
99=1+49+1*49

Otros números tan populares como el 30 no admiten ninguna descomposición de este tipo.

¿De cuántas formas se puede descomponer un número determinado? Como en ocasiones similares, comenzaremos con procedimientos de “fuerza bruta”, para ir después refinando el estudio hasta llegar al planteamiento teórico.

Con el Basic de Excel y Calc

En primer lugar debemos considerar que el valor mínimo para m y n es 1, luego el valor máximo será:

Si k=m+n+mn y damos a m el valor 1, despejando n resulta:

K=1+n+n, luego n<=(k-1)/2 y este valor sería la cota para m y n. Por otra parte, al despejar n en general, n=(k-m)/(m+1), este valor ha de ser entero y mayor que m (si queremos evitar repeticiones). Con esto ya podemos construir un algoritmo para contar el número de descomposiciones de este tipo que presenta un número dado.

Public Function numsumamn(k)
Dim m, n, p

p = 0 ‘Contador de éxitos
For m = 1 To (k - 1) / 2 ‘m recorre el rango desde 1 hasta la cota
n = (k - m) / (m + 1) ‘El valor de **n** se despeja respecto a **m**

If n >= m And n = Int(n) Then p = p + 1 ‘Si es entero y mayor o igual a **m**, vale
Next m
numsumamn = p
End Function

Con este algoritmo podemos confeccionar tablas para esta función. La siguiente corresponde a los 20 primeros números:

Número k	Descomposiciones
1	0
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	1
9	1
10	0
11	2
12	0
13	1
14	1
15	2
16	0
17	2
18	0
19	2
20	1

Vemos que, por ejemplo, el 15 debe descomponerse de dos formas. Aquí las tienes:

1+7+1*7=15; 3+3+3*3=15

Algoritmo con el lenguaje PARI

Este algoritmo se traduce con facilidad al lenguaje PARI:

```
numsumamn(k)=local(p=0);for(m=1,(k-1)/2,n=(k-m)/(m+1);if(n==truncate(n)&&n>=m,p+=1));p
```

Con él y una estructura repetitiva puedes encontrar un listado de enteros con un número de descomposiciones fijado. El siguiente código nos devuelve los primeros números que admiten tres descomposiciones:

```
numsumamn(k)=local(p=0);for(m=1,(k-1)/2,n=(k-m)/(m+1);if(n==truncate(n)&&n>=m,p+=1));p
for(i=1,200,if(numsumamn(i)==3,print1(i,", ")))
```

```
23, 29, 39, 41, 53, 55, 63, 65, 69, 77, 87, 101, 103, 104, 109, 113, 127, 129, 1
34, 135, 137, 151, 153, 164, 169, 173, 181, 183, 185, 188, 189, 194,
?
```

Veamos el caso del 55:

1+27+1*27=3+13+3*13=7+6+7*6=55

Se obtienen las tres descomposiciones previstas.

Puedes experimentar con estos algoritmos, aunque al final del tema aprenderás un método mucho más eficiente.

Comprobación con Cartesius

Nuestra hoja de cálculo Cartesius

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius),

que desarrolla productos cartesianos condicionados, nos puede servir para comprobar los valores de la función ***numsumamn***. Como sabemos que la cota para m y n es (k-1)/2, (o k/2 para simplificar), bastará combinar los distintos valores de ambos y destacar tan solo aquellos en los que m+n+mn=k. Quedaría así en el caso de k=71:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ **(no dejes filas en blanco)**
xtotal=2
xt=1..36
es x1+x2+x1*x2=71
creciente

En primer lugar se fijan 2 elementos (serían m y n). Después se hacen recorrer el rango 1..36, que es la cota aproximada por exceso. La parte importante es la de exigir es x1+x2+x1*x2=71, según la cuestión que estamos resolviendo, y, por último, pedimos arreglos crecientes para eliminar duplicidades. Nos deberían dar 5 soluciones, según el valor de ***numsumamn(71)***, y, en efecto, los resultados son:

X1	X2
1	35
2	23
3	17
5	11
7	8

Lo podemos calcular: 1+35+1*35=36+35=71; 2+23+2*23=25+46=71; 3+17+3*17=20+51=71;

5+11+5*11=16+55=71; 7+8+7*8=15+56=71.

Puedes comprobar así cualquier valor de numsumamn(k)

Estudio teórico

Todo lo anterior se basa en un estudio "ingenuo", en el que no se analiza la cuestión y sólo se pretende obtener resultados. Ahora veremos que los mismos tienen un fundamento teórico muy simple, que nos llevará a una fórmula para el número de descomposiciones del tipo m+n+mn=k

Basta darse cuenta de que la expresión estudiada equivale a (m+1)(n+1)-1.

Por ejemplo, 2+35+2*35=37+70=107 es igual a (2+1)(35+1)-1=3*36-1=108-1=107.

Esto nos aclara la situación, porque el número de descomposiciones del tipo m+n+mn para un número k coincide con el de **los pares de divisores cuyo producto es k+1**. Así, las cuatro descomposiciones del número 99 (3+24+3*24, 4+19+4*19, 9+9+9*9, 1+49+1*49) coinciden con todos los pares de divisores (m+1)(n+1) del número k+1, en este caso 100. En efecto, los pares son: 2*50, que da lugar a 1+49+1*49, 4*25, que produce 3+24+3*24, 5*20 para 4+19+4*19 y 10*10, que se empareja con 9+9+9*9

El número de descomposiciones de k en expresiones m+n+mn coincide con el del número de pares de productos p*q=k+1 con p>1 y q>1.

El número de pares de este tipo está relacionado con la función TAU de k+1, que cuenta el número de divisores que posee k+1, y que tiene la expresión

$$D(N)=(1+a_1)*(1+a_2)\ldots(1+a_k)$$

En ella los valores de a_1, a_2, a_3,…son **los exponentes de los factores primos de k+1**. Si el valor de esa función es par, el número de productos p*q=k+1 será la mitad, y si es impar, la mitad más 1. A ese resultado habrá que restarle 1, porque el par 1*(k+1) no nos sirve. Así que quedaría:

$$N = INT\left(\frac{TAU(k+1)+1}{2}\right) - 1$$

Podemos comprobarlo con ejemplos concretos:

K=23; $24=2^3*3$; TAU(24)=(1+3)(1+1)=8; 8/2-1=3. Los pares válidos de divisores serán 2*12, 3*8, 4*6. Así que 23 debe admitir tres descomposiciones. Es fácil ver que son estas: 1+11+1*11, 2+7+2*7 y 3+5+3*5. Aquí tienes la comprobación con Cartesius:

X1	X2
1	11
2	7
3	5

En el caso de k+1=144, cuadrado perfecto, su función TAU es impar, lo que da sentido al hecho de que usemos la parte entera. Lo vemos:

K=143; k+1=144; $144=2^4*3^2$; TAU(144)=(1+4)(1+2)=15; INT((15+1)/2)=8; 8-1=7.

Deberán aparecer 7 soluciones para los productos de divisores:2*72, 3*48, 4*36, 6*24, 8*18, 9*16, 12*12. Existirán, pues, 7 soluciones para nuestro problema. Las conseguimos con Cartesius:

X1	X2
1	71
2	47
3	35
5	23
7	17
8	15
11	11

Puedes irlas comprobando: 1+71+1*71=72+71=143; 2+47+2*47=49+94=143,…

Casos particulares

K+1 primo

Según lo anterior, los valores de k tales que k+1 sea primo, no admitirán la descomposición en m+n+mn.

Recuerda que entre los primeros 20 números tenemos (ver tabla de arriba) que 1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, y 18 no admiten descomposiciones m+n+mn. Súmales una unidad y te resultarán los primeros primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13,…

K+1 semiprimo

Los semiprimos poseen sólo dos factores primos, luego en ellos TAU=(1+1)(1+1)=4, y como 4/2-1=1, resultará que k sólo admitirá una descomposición. Es el caso de

3, 5, 8, 9,…en los que k+1 es semiprimo: 4=2*2, 6=2*3, 9=3*3, 10=2*5.

La propiedad contraria no es cierta, ya que 7 sólo admite la descomposición 1+3+1*3 y 8 no es semiprimo.

K+1 cuadrado

Si k+1 es cuadrado, k presentará una suma en la que m=n, como es fácil ver. Si k+1=p*p, k será igual a p-1+p-1+(p-1)(p-1). Es el caso, por ejemplo de 48, ya que 49=7*7 y 48=6+6+6*6.

Lo dejamos aquí. Este tipo de cuestiones elementales que dan lugar a experimentaciones sencillas se pueden abordar en las clases de Matemáticas de la Enseñanza Media. Sería divertido lanzar la idea en un trabajo por grupos y ver cada uno qué caminos emprende en sus búsquedas. No sería extraño que alguno diera con el truco del k+1.

SUMA DE CUADRADO Y CAPICÚA

Hoy comenzamos con una cuestión sencilla que nos va a permitir algún desarrollo:

¿De cuantas formas se le puede restar a N un cuadrado y que la diferencia sea capicúa?

Operaremos con capicúas de al menos dos cifras, pues el conjunto de 0 a 9, aunque se consideran capicúas, produce resultados sin interés. Con nuestra herramienta Cartesius

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

el estudio es muy simple. Basta usar las condiciones siguientes, que hemos particularizado para el número 892:

xtotal=2
xt=1..1000
X1=filtro(cuadrado)
x2=filtro(capicua)
suma=892

En ellas se suman dos números del 1 al 1000 filtrando el primero como cuadrado y el segundo como capicúa. El resultado es

X1	X2	X3
4	888	
64	828	
196	696	
256	636	
529	363	

Como vemos, se obtienen cinco soluciones.

Número de descomposiciones

Con Cartesius se presenta el proceso de forma clara, pero para contar soluciones es preferible otra herramienta. Comenzaremos con el BASIC de las hojas de cálculo. Se puede definir fácilmente una función que cuente las sumas que se producen. Necesitaremos la función ESCAPICUA y con ella organizar un bucle de búsqueda. Dispones de su código al final de este apartado. La función requerida para encontrar esas sumas puede ser la siguiente:

Public Function numcuadcapi(n)
Dim x, p

p = 0 ‘ Contador de soluciones
For x = 1 To Sqr(n) ‘Llegamos hasta la raíz cuadrada de N
If escapicua(n - x ^ 2) Then p = p + 1 ‘Si es capicúa la diferencia, se incrementa el contador
Next x

```
numcuadcapi = p
End Function
```

Hay que tener en cuenta que ESCAPICUA no considera números de una cifra.

La probamos con el 892 y resultan cinco soluciones.

Si deseáramos leer esas soluciones, convertiríamos la función en una variable tipo texto para que las recogiera. Usaríamos esta variante:

```
Public Function numcuadcapi2$(n)
Dim x, a, b
Dim nc$

nc$ = ""
For x = 1 To Sqr(n)
a = x ^ 2
b = n - a
If escapicua(b) Then nc$ = nc$ + " CUAD " + Str$(a)
+ " CAP " + Str$(b)
Next x
numcuadcapi2 = nc$
End Function
```

Vemos en la imagen los dos tipos de resultados:

892
5
CUAD 4 CAP 888 CUAD 64 CAP 828 CUAD 196 CAP 696 CUAD 256 CAP 636 CUAD 529 CAP 363

El segundo coincide con el obtenido en Cartesius.

La primera función nos permite obtener un listado de los números que admiten al menos una descomposición de este tipo:

12, 15, 20, 23, 26, 27, 31, 34, 36, 37, 38, 42, 45, 47, 48, 49, 53, 56, 58, 59, 60, 64, 67, 69, 70, 71, 75, 78, 80, 81, 82, 86, 89, 91, 92, 93, 97, 100, 102, 103, 104, 105, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 119, 120,…

Con el lenguaje PARI se consigue la misma lista:

```
ispal(n)={n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))&&n>=10}
numsumsqpal(n)={p=0;for(i=1,sqrt(n),if(ispal(n-i^2),p+=1));p}
for(x=1,100,q=numsumsqpal(x);if(q>=1,print1(x,", ")))
```

12, 15, 20, 23, 26, 27, 31, 34, 36, 37, 38, 42, 45, 47, 48, 49, 53, 56, 58, 59, 60, 64, 67, 69, 70, 71, 75, 78, 80, 81, 82, 86, 89, 91, 92, 93, 97, 100, 102, 103, 104, 105, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 119, 120, 122, 124, 125, 126, 127, 130, 132, 133, 135, …

Entre los menores de 1000 el record lo tiene 817, con siete descomposiciones

X1	X2	X3
9	808	
100	717	
121	696	
484	333	
676	141	
729	88	
784	33	

Cuadrados con base capicúa

Podemos repetir el estudio pero exigiendo que la base del cuadrado sea también capicúa. Modificaremos los códigos para exigirlo. Con Cartesius habrá que modificar las condiciones:

xtotal=2
x1=1..32
x2=10..1000
xt=filtro(capicua)
es x1*x1+x2=892

Recorremos con X1 hasta la raíz de 892, con X2 hasta 1000, y exigimos que x1*x1+x2=892

Como era de esperar, no se obtiene ninguna solución, pero sí la tienen números cercanos a 892: 898 presenta dos soluciones, 11^2+777 y 22^2+414. Igual ocurre con 908, que es igual 11^2+787 y a 22^2+424.

El resto de número próximos no presenta esta propiedad.

Con BASIC y PARI, añadiendo la condición de que la base sea capicúa mayor que 10, obtenemos un listado de los números que equivalen a este tipo de suma al menos de una forma:

132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 220, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 302, 312, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393, 403, 413, 424, 434, 444, 454, 464, 474,…

El código PARI adecuado sería:

ispal(n)={n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))&&n>=10}
numsumsqpal(n)={p=0;for(i=1,sqrt(n),if(ispal(i),if(ispal(n-i^2),p+=1)));p}
for(x=10,1000,q=numsumsqpal(x);if(q>=1,print1(x,", ")))

Devuelve el listado

132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 220, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 302, 312, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393, 403, 413, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494, 495, 504, 506, 514, 517, 525, 528, 535, 539, 545, 550, 555, 561, 565, 572, 575, 583, …

Se distinguen en la lista muchos números que son capicúas. Los extraemos:

ispal(n)={n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))&&n>=10}
numsumsqpal(n)={p=0;if(ispal(n),for(i=1,sqrt(n),if(ispal(i),if(ispal(n-i^2),p+=1))));p}
for(x=10,1000,q=numsumsqpal(x);if(q>=1,write1("final.txt",x,", ")))

222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595, 626, 636, 646, 656, 666, 676, 686, 696, 727, 737, 747, 757, 767, 777, 787, 797, 828, 838, 848, 858, 868, 878, 888, 898, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989, 999,…

Están todos los capicúas de tres cifras salvo los que tienen las decenas con valor 0 o 1. Es porque los capicúas al cuadrado solo pueden ser 11^2=121 y 22^2=484. Todo capicúa con la segunda cifra mayor que 1 y las otras no nulas produce al restarle 121 otro capicúa, pero en caso contrario, si las decenas son 0 o 1, la cifra de arrastre impide un resultado capicúa. Igual ocurre con el 484, que exige un 8 o 8n 9 en las decenas.

Hemos experimentado con sumas de triangular y capicúa, o con primos, pero aparecen muchos resultados que trivializan la cuestión.

Anexo

Código de la función ESCAPICUA

Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$,nn$

'Convierte el número en texto para lograr más rapidez. Devuelve VERDADERO si es capicúa
nn$ =Str$(n)
auxi= Right(nn$, Len(nn$) - 1)
l = Len(auxi)
If l < 2 Then
escapicua = False
Else
c = True
i = 1
k = Int(l / 2)
While i <= k And c

```
 If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c = False
 i = i + 1
 Wend
End If
escapicua = c
End Function
```

PRODUCTOS DE TRES DIVISORES

En el año 2009, dentro de este blog ***Números y hoja de cálculo***, proponía como investigación en el aula la descomposición de un número natural en producto de tres factores también naturales de todas las formas posibles. No daba pistas para conseguirlo, pues deseaba que el alumnado discutiera posibles métodos empíricos para resolver la cuestión.

Incluyo el enlace a esa entrada:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/07/descomponer-un-numero-en-tres-factores.html

En la siguiente entrada proponía una herramienta más general para comprobaciones, pero ya totalmente diseñada, y sugería su funcionamiento:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/07/descomponer-un-numero-en-tres-factores_05.html

Por otra parte, el día 4/2/18 propuse una propiedad del número 4218 sobre descomposiciones similares, en tres factores.

4218 se puede descomponer en dos productos de tres factores con la misma suma de dos formas diferentes:

4218=1×57×74=2×19×111, con
1+57+74=2+19+111=132
4218=2×37×57=3×19×74, con 2+37+57=3+19+74=96
Esto me ha animado para profundizar en el tema de la descomposición en tres factores, pero desde el punto de vista algorítmico, y como ya viene siendo costumbre en este blog, abordando primero la cuestión usando algoritmos de "fuerza bruta", sin análisis previos, para después ir profundizando en el tema hasta el límite que seamos capaces de alcanzar.

Fuerza bruta

Supondremos que todos los productos que buscamos poseerán sus factores ordenados en orden creciente. Esto no restringe el problema y nos permite simplificar los procesos.

Siempre que se tengan que combinar tres variables, aquí **i*j*k=N**, la primera idea que surge es el empleo de tres bucles anidados FOR-NEXT. Es un método lento, porque ha de recorrer muchos valores inútiles, aparte de la multiplicación de casos que se producen al combinar unas variables con otras.

En este caso, si dado un número N, admitimos como seguro el producto 1*1*N, podemos acotar las variables i, j y k mediante N/2, que sería el máximo divisor propio posible de N (evidentemente sería menor si N es impar). Así lo haremos con la primera variable, que recorrerá los valores desde 1 hasta N/2, sabiendo que después habrá que añadir el caso 1*1*N, que no se producirá,

La segunda variable **j** puede recorrer el intervalo entre el valor de la primera y N/2. Así conseguimos que sólo aparezcan productos en orden creciente. Igualmente efectuaremos con la tercera variable **k**.

Hemos diseñado una función, ***trifactor(n)***, que nos devuelve la lista de los productos posibles, precedida del número de ellos. Es de tipo *string*, ya que alojará texto.

Function trifactor$(n) ‘La definimos como string o texto

Dim i, j, k, v, t
Dim s$

s$ = "" ‘El resultado se inicia en un texto vacío
t = 0 ‘Contador de productos
v = n / 2 ‘Cota para los factores
For i = 1 To v
If n / i = n \ i Then ‘Comprueba que el valor de i es divisor de n
For j = i To v
If n / j = n \ j Then ‘El segundo valor también es divisor
For k = j To v
If n / k = n \ k Then ‘Tercer valor como divisor
If i * j * k = n Then s = s + Str$(i) + "*" + Str$(j) + "*" + Str$(k) + " , ": t = t + 1
‘Si el producto es N, incorporamos el resultado e incrementamos el contador
End If
Next k
End If
Next j
End If
Next i
s = Str$(t) + " resultados: " + s
trifactor = s
End Function

Por ejemplo, trifactor(546)=”13 resultados: 1* 2* 273 , 1* 3* 182 , 1* 6* 91 , 1* 7* 78 , 1* 13* 42 , 1* 14* 39 , 1* 21* 26 , 2* 3* 91 , 2* 7* 39 , 2* 13* 21 , 3* 7* 26 , 3* 13* 14 , 6* 7* 13,”

De esta forma disponemos de todas las soluciones en modo texto. Hay que acordarse de añadir 1*1*546. Si no nos convence esta opción, bastará cambiar la instrucción **v=n/2** por **v=n**. De esa forma la función será más lenta de cálculo, pero evitaremos que se nos olvide un producto.

La herramienta que propuse hace nueve años, alojada en

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.ods
http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.xls

daba las soluciones sin tener en cuenta el factor 1. Puedes usarla para comprobaciones.

Número que deseas factorizar			**546**
Número de factores (menor que 10)			**3**
			2* 3* 91
			2* 7* 39
			2* 13* 21
			3* 7* 26
			3* 13* 14
			6* 7* 13

Fuerza "menos bruta"

En este algoritmo estamos usando tres bucles FOR-NEXT, pero, en realidad, basta con dos, ya que si conocemos los valores de **i** y de **j**, el de **k** puede obtenerse mediante una simple división: k=N/i/j. Pero esto tiene un coste en condiciones, ya que i*j puede que no sea divisor de N, por lo que hay que exigir que k sea entero y divisor de N. Además, deseamos que k sea igual o mayor que las otras variables. A pesar de estas condiciones, el algoritmo ganará en velocidad. Puede quedar así:

```
Function trifactor$(n)
Dim i, j, k, v, t
Dim s$

s$ = ""
t = 0
```

v = n / 2
For i = 1 To v
If n / i = n \ i Then
For j = i To v
If n / j = n \ j Then
k = n / i / j ‘Sustituimos el tercer bucle por un cociente
If k = Int(k + 0.0001) Then ‘Exigimos que sea entero, divisor de N y mayor o igual que j
If n / k = n \ k And k >= j Then s = s + Str$(i) + "*" + Str$(j) + "*" + Str$(k) + " , ": t = t + 1
End If ‘El resto del algoritmo queda igual
End If
Next j
End If
Next i
s = Str$(t) + " resultados: " + s
trifactor = s
End Function

Da un resultado más en el ejemplo, el 1*1*546

“14 resultados: 1* 1* 546 , 1* 2* 273 , 1* 3* 182 , 1* 6* 91 , 1* 7* 78 , 1* 13* 42 , 1* 14* 39 , 1* 21* 26 , 2* 3* 91 , 2* 7* 39 , 2* 13* 21 , 3* 7* 26 , 3* 13* 14 , 6* 7* 13,” Como esta versión mejora bastante la anterior, la hemos traducido a PARI. Sólo tienes que escribir el valor de N, en este caso 546, al principio del código: **n=546**

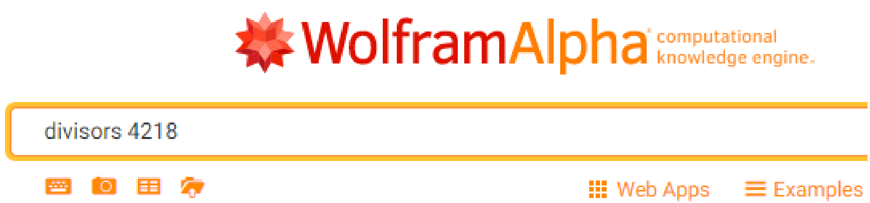
```
n=546;v=truncate(n/2);for(i=1,v,if(n%i==0,for(j=i,v,
if(n%j==0,
k=n/(i*j);if(k==truncate(k)&&n%k==0&&k>=j,print(i,"*
",j,"*",k))))))
```

Como era de esperar, nos produce el mismo resultado, pero con productos separados, no en forma de string.

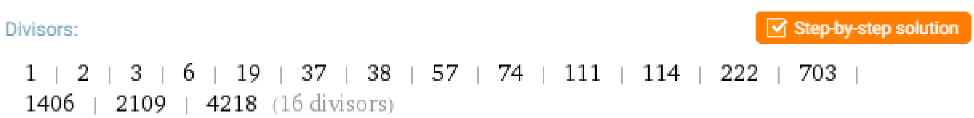
```
1*1*546
1*2*273
1*3*182
1*6*91
1*7*78
1*13*42
1*14*39
1*21*26
2*3*91
2*7*39
2*13*21
3*7*26
3*13*14
6*7*13
?
```

Conversión en subrutina

Supongamos que poseemos la lista de divisores del número dado. En nuestros cálculos usamos la función LISTADIV, de diseño propio, pero se basa en otras funciones algo complejas que requieren un entorno distinto a una entrada de blog. No obstante, existen muchas herramientas en Internet que nos pueden proporcionar esa lista. Últimamente acudimos a la página de WolframAlpha. Le podemos pedir los divisores de 4218:



El resultado será:



Es muy probable que conozcas otras herramientas, como Wiris, WxMaxima u otra similar que te ofrezca la lista de divisores. Desde aquí te podemos ofrecer nuestro Buscador de Naturales, alojado en

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador

Si lo descargas, habilita contenido y macros. Basta observar la imagen para entender su funcionamiento:

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	4218

Con estas propiedades:

divisor 4218

Hemos diseñado una búsqueda entre 1 y 4218, borrado las condiciones y añadida la de DIVISOR 4218. Con esto, obtenemos los 16 divisores deseados:

Resultado de la búsqueda

Núm.	Solución	Detalles
1	1	
2	2	
3	3	
4	6	
5	19	
6	37	
7	38	
8	57	
9	74	
10	111	
11	114	
12	222	
13	703	
14	1406	
15	2109	
16	4218	

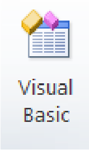
La ventaja de usar el Buscador es que nos devuelve el resultado en columna y en formato de hoja de cálculo. A partir de ella, con Copiar-Pegar podemos abordar otros desarrollos. El primero, que es el que da título a este apartado, es el de convertir la función ***trifactor*** en una subrutina tal que dada la columna de divisores, nos devuelva el conjunto de las descomposiciones en tres factores. Así lo hemos efectuado en la hoja de cálculo ***trifactor.xlsm***, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/blog/trifactor.xlsm

En ella aparecen los factores ocupando celdas distintas, lo que propicia su estudio posterior. En la imagen puedes reconocer la propiedad con la que comenzamos este estudio, y es que 4218 presenta productos con la misma suma de factores, 132 y 96:

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	4218	4220
2	2	1	2	2109	2112
3	3	1	3	1406	1410
4	6	1	6	703	710
5	19	1	19	222	242
6	37	1	37	114	152
7	38	1	38	111	150
8	57	1	57	74	132
9	74	2	3	703	708
10	111	2	19	111	132
11	114	2	37	57	96
12	222	3	19	74	96
13	703	3	37	38	78
14	1406	6	19	37	62
15	2109				
16	4218				

Omitimos el código de la subrutina, ya que coincide con la función ***trifactor*** salvo la escritura y lectura de celdas. Lo puedes estudiar si abres la hoja que ofrecemos y eliges **Programador – Visual Basic**



A la derecha de la pantalla tendrás la subrutina ***trifactor***:

```
Sub trifactor()
Dim i, j, v, t, a, b, c, n, fila


'Lee los datos
j = leecelda(0, 0, 0)
If j = 0 Then Exit Sub
t = 1
v = 1
n = 1
While t <> 0
j = leecelda(0, 0, v)
If j = 0 Then t = 0 Else v = v + 1: If j > n Then n = j
Wend
v = v - 1
```

(La imagen no abarca toda la rutina)

Búsquedas de números

La hoja ***trifactor*** no permite buscar números con propiedades similares a la del 4218 (poseer dos sumas de factores iguales). Por ello, volveremos ***a la función***

trifactor, que iremos modificando según la propiedad que nos interese.

En primer lugar diseñamos la función **igualsum_trifactor(n**), que nos devuelve el número de pares de igual suma entre las descomposiciones en tres factores. No es bueno incluir demasiados códigos nuevos, por lo que insertamos el suyo en un Anexo. Con ella se puede descubrir, por ejemplo, que entre 1 y 100 sólo existe un número que presente sumas iguales, y es el 90, cuyos factores pueden sumar 16 o 20 dos veces. En la imagen lo puedes comprobar:

90		2 : 20 16		
1* 1* 90 , 1* 2* 45 , 1* 3* 30 , 1* 5* 18 , 1* 6* 15 , 1* 9* 10 , 2* 3* 15 , 2* 5* 9 , 3* 3* 10 , 3* 5* 6 ,				

Las sumas repetidas son 2+3+15=1+9+10=20 y 3+3+10=2+5+9=16

En concreto, estos son los primeros números que presentan repeticiones en sus productos (se cuentan pares, de forma que si existen tres sumas iguales se contarán como tres pares)

N		Sumas repetidas	
90		2 : 20 16	
144		2 : 19 17	
168		2 : 27 21	
240		2 : 24 21	
270		2 : 34 26	
288		2 : 42 26	
360		5 : 43 29 25 23 22	
396		2 : 41 31	
420		2 : 42 30	
432		4 : 44 43 35 28	
450		2 : 56 28	
480		5 : 48 47 40 33 27	
504		2 : 34 29	
540		2 : 52 39	
546		2 : 48 36	
560		2 : 49 28	

Entre estos números figura el 546 que ya analizamos.

Estos resultados se pueden comprobar con la hoja ***trifactor.xlsm*** que presentamos más arriba. Sin embargo, podemos proponer el uso de nuestra hoja Cartesius

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

En ella podemos definir una etiqueta nueva en la hoja "Etiquetas" que haga referencia a los divisores del número que estemos estudiando. Elegimos el 360, que presenta muchos pares de sumas iguales, y la encabezamos con la etiqueta DIV

DIV
1
2
3
4
5
6
8
9
10
12
15
18
20
24
30
36
40
45
60
72
90
120
180
360

Después se programan las condiciones

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=3
xt=1..24
xt=etiq(DIV)
es x1*x2*x3=360
creciente

En las condiciones (siguiendo su orden) pedimos que sean tres los factores, que abarquen del 1 al 24, que es el número de divisores de 360. Seguidamente se indica que los datos figuran en la etiqueta DIV, exigimos que el producto de los tres sea 360 y que figuren en orden creciente.

Con este planteo se obtienen 32 productos distintos

X1	X2	X3
1	1	360
1	2	180
1	3	120
1	4	90
1	5	72
1	6	60
1	8	45
1	9	40
1	10	36
1	12	30
1	15	24
1	18	20
2	2	90
2	3	60
2	4	45
2	5	36
2	6	30
2	9	20
2	10	18
2	12	15
3	3	40
3	4	30
3	5	24
3	6	20
3	8	15
3	10	12
4	5	18
4	6	15
4	9	10
5	6	12
5	8	9
6	6	10

Junto a ellos podemos calcular su suma, y comprobar si resultan cinco pares de resultados iguales. En esta imagen parcial de la tabla de sumas se han destacado en negrita los cinco pares de sumas iguales:

1	12	30		**43**
1	15	24		40
1	18	20		39
2	2	90		94
2	3	60		65
2	4	45		51
2	5	36		**43**
2	6	30		38
2	9	20		31
2	10	18		30
2	12	15		**29**
3	3	40		46
3	4	30		37
3	5	24		32
3	6	20		**29**
3	8	15		26
3	10	12		**25**
4	5	18		27
4	6	15		**25**
4	9	10		**23**
5	6	12		**23**
5	8	9		**22**
6	6	10		**22**

Variantes

Cambiando adecuadamente las líneas de código de la función ***trifactor*** podemos descubrir algunas propiedades de cada terna de factores. Vemos algunas

Sumas pitagóricas

Puede ocurrir que los tres factores sean parte de un conjunto pitagórico de tres dimensiones (lados de un ortoedro y su diagonal). Aquí tienes los primeros:

N	Factores e hipotenusa
4	1 2 2 : 3
32	1 4 8 : 9 2 4 4 : 6
36	2 3 6 : 7
108	1 6 18 : 19 2 6 9 : 11 3 6 6 : 9
112	4 4 7 : 9
140	2 5 14 : 15
144	1 12 12 : 17 3 4 12 : 13
220	2 10 11 : 15
252	6 6 7 : 11
256	1 8 32 : 33 2 8 16 : 18 4 8 8 : 12
288	4 6 12 : 14
364	2 7 26 : 27
396	3 6 22 : 23

Por ejemplo, 108 presenta tres descomposiciones pitagóricas:

108=1*6*18, y $1^2+6^2+18^2=361=19^2$
108=2*6*9, y $2^2+6^2+9^2=121=11^2$
108=3*6*6, y $3^2+6^2+6^2=81=9^2$

Puedes comprobar, para practicar, las tres posibilidades que presenta 256.

Estos números están publicados en

http://oeis.org/A118901

A118901 Volumes of cuboids with integer sides and main diagonal.

4, 32, 36, 108, 112, 140, 144, 220, 252, 256, 288, 364, 396, 400, 500, 540, 608, 612, 644, 756, 832, 864, 896, 900,…

El texto explicativo en inglés identifica los tres factores como los lados enteros de un ortoedro con diagonal también entera, y los términos de la sucesión se corresponden con los volúmenes.

Con la hoja ***trifactor.xlsm*** basta añadir otra columna y elegir las hipotenusas sin decimales. En la siguiente imagen lo hemos probado con el número 256:

B	C	D	E
1	1	256	256,003906
1	2	128	128,01953
1	4	64	64,132675
1	**8**	**32**	**33**
1	16	16	22,6495033
2	2	64	64,0624695
2	4	32	32,3109888
2	**8**	**16**	**18**
4	4	16	16,9705627
4	**8**	**8**	**12**

Suma cuadrada

En lugar de buscar una hipotenusa, podemos elegir las sumas de factores que sean cuadradas. Aquí tienes el resultado:

2	1 1 2 : 4	
7	1 1 7 : 9	
12	1 2 6 : 9	
14	1 1 14 : 16	
15	1 3 5 : 9	
16	1 4 4 : 9	
20	2 2 5 : 9	
23	1 1 23 : 25	
24	2 3 4 : 9	
26	1 2 13 : 16	
27	3 3 3 : 9	
34	1 1 34 : 36	
36	1 3 12 : 16	
44	1 2 22 : 25	1 4 11 : 16
47	1 1 47 : 49	
48	2 2 12 : 16	
50	1 5 10 : 16	
54	1 6 9 : 16	
56	1 7 8 : 16	
62	1 1 62 : 64	
63	1 3 21 : 25	
66	1 2 33 : 36	2 3 11 : 16

Hemos acompañado a cada número los factores cuya suma es un cuadrado y junto a ellos esa suma. Por ejemplo:

44=1*2*22, S=1+2+22=25=5^2
62=1*1*62, S=1+1+62=64=8^2
Se observa que varios números presentan dos soluciones. El 128 es el primer número con tres soluciones: 1* 8* 16, S=25; 2*2*32, S=36; 4*4*8, S=16

Si deseas practicar con elementos de programación, puedes estudiar y mejorar el código en PARI que se ha usado.

for(n=1, 300, t=0; v = truncate(n/2); for(i = 1, v, if(n%i == 0, for(j = i, v, if(n%j == 0, k = n/(i*j); if(k ==

truncate(k)&&n%k == 0&&k >= j, if(issquare(i+j+k), t = 1)))))); if(t == 1, print1(n,", ")))

Otras propiedades

Una vez que sabemos alinear bien en una hoja de cálculo todas las ternas de factores cuyo producto es un número dado, con pequeños cambios de código descubriremos otras propiedades. Insertamos algún ejemplo:

Suma prima

Estos son los primeros números cuyas sumas de “trifactores” es prima:

3		1 1 3 : 5	
4		1 2 2 : 5	
5		1 1 5 : 7	
8		1 2 4 : 7	
9		1 1 9 : 11 1 3 3 : 7	
11		1 1 11 : 13	
12		2 2 3 : 7	
15		1 1 15 : 17	
16		1 2 8 : 11	
17		1 1 17 : 19	
20		1 2 10 : 13	
21		1 1 21 : 23 1 3 7 : 11	
24		1 4 6 : 11	
25		1 5 5 : 11	
27		1 1 27 : 29 1 3 9 : 13	
28		1 2 14 : 17 2 2 7 : 11	
29		1 1 29 : 31	
32		1 2 16 : 19 1 4 8 : 13	
35		1 1 35 : 37 1 5 7 : 13	
36		1 6 6 : 13 2 2 9 : 13 2 3 6 : 11	

Vemos que, por ejemplo, el 36 posee tres soluciones:

36=1*6*6, S=13; 36=2*2*9, S=13; 36=2*3*6, S=11

Suma capicúa

Esta propiedad da lugar a menos casos. Se ve que resulta más exigente:

9		1 1 9 : 11
16		1 2 8 : 11
20		1 1 20 : 22
21		1 3 7 : 11
24		1 4 6 : 11
25		1 5 5 : 11
28		2 2 7 : 11
31		1 1 31 : 33
36		2 3 6 : 11
38		1 2 19 : 22
40		2 4 5 : 11
42		1 1 42 : 44
45		3 3 5 : 11
48		3 4 4 : 11
53		1 1 53 : 55
54		1 3 18 : 22
60		1 2 30 : 33

Suma cúbica

Por último, aunque se pueden buscar más propiedades, listamos los números cuyos factores suman un cubo:

6		1 1 6 : 8
10		1 2 5 : 8
12		1 3 4 : 8
16		2 2 4 : 8
18		2 3 3 : 8
25		1 1 25 : 27
48		1 2 24 : 27
62		1 1 62 : 64
69		1 3 23 : 27
88		1 4 22 : 27
92		2 2 23 : 27
105		1 5 21 : 27
120		1 6 20 : 27
122		1 2 61 : 64
123		1 1 123 : 125
132		2 3 22 : 27
133		1 7 19 : 27
144		1 8 18 : 27

ANEXO

```
Function igualsum_trifactor$(n)
Dim i, j, k, v, t, ns, cs
Dim s(100)
Dim ss$

ns = 0
t = 0
v = n / 2
For i = 1 To v
If n / i = n \ i Then
For j = i To v
If n / j = n \ j Then
```

```
k = n / i / j
If k = Int(k + 0.0001) Then
If n / k = n \ k And k >= j Then
ns = ns + 1
s(ns) = i + j + k
t = t + 1
End If
End If
End If
Next j
End If
Next i
ss = "": cs = 0
For i = 1 To ns
For j = 1 To i
If i <> j And s(i) = s(j) Then
cs = cs + 1
ss = ss + " " + Str$(s(i))
End If
Next j
Next i
ss = Str$(cs) + " : " + ss
ss = Right$(ss, Len(ss) - 1)
igualsum_trifactor = ss
End Function
```

USOS DE LA HOJA "CARTESIUS"

PARTICIONES CLÁSICAS

Condicionamientos sobre las particiones de un conjunto

En una entrada de nuestro blog

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/06/cartesius-5-particiones-1.html)

procedimos a crear particiones en un número, y en algunas condicionamos los sumandos, para que fueran primos, triangulares o cuadrados. Ahora condicionaremos los resultados, y más adelante repasaremos los condicionamientos clásicos.

Condicionamientos sobre resultados

Las particiones de un número las hemos definido a partir de todas las sumas posibles, pero estas podrían ser condicionadas, en el sentido de suprimir algunas de ellas. Lo vemos con un ejemplo:

¿De cuántas formas podemos descomponer el número 7 en particiones con los dos sumandos menores iguales?

Si no condicionamos los sumandos, existen, según vimos, 15 particiones. Al obligar a que los dos menores sean iguales, restringiremos ese número. Podemos plantearlo así:

XRANGO=7
XT=1..7
CRECIENTE
ES X1=X2
SUMA=7

Es el mismo planteamiento usado anteriormente sobre el tema de particiones, con el añadido **ES X1=X2**, que obliga a que los dos primeros sumandos sean iguales. Como hemos decidido que los arreglos sean crecientes, estos dos primeros serán también los menores. El resultado es:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	1	5				
2	2	3				
1	1	1	4			
1	1	2	3			
1	1	1	1	3		
1	1	1	2	2		
1	1	1	1	1	2	
1	1	1	1	1	1	1

Resultan ocho particiones en lugar de 15.

Podemos introducir muchos más condicionamientos: fijar la suma parcial de los tres menores o exigir que el tercer sumando sea mayor que el segundo, y otros parecidos.

Particiones condicionadas

Todos estos condicionamientos se suelen expresar como función así:

P(N/condicionamiento)

De esta forma, el anterior ejemplo se escribiría como P(7/x1=x2)

Otro ejemplo

Imaginemos que deseamos que el tercer sumando sea a su vez suma de los dos anteriores. Procederíamos así:

XRANGO=7
XT=1..7
CRECIENTE
ES X3=X1+X2
SUMA=7

Al desarrollar veríamos que es un ejemplo sin interés, porque sólo existe una suma así (siendo sumandos crecientes)

X1	X2	X3	X4	X5
1	1	2	3	

En efecto, si los valores iniciales son 1, 1, 2, ya no admiten para suma 7 nada más que un 3.

Condicionamientos clásicos

Ya vimos particiones que históricamente se han planteado algunos condicionamientos especiales a las particiones. Los recorremos de nuevo:

Función de partición $P_k(N)$

Es la misma función P(N) condicionada a que sólo intervenga un número K de sumandos:

$P_k(N)$= P(N / k sumandos): Particiones con un número k de sumandos fijado.

Con la hoja Cartesius es fácil programar esta función, ya que basta con definir XTOTAL=K, dejando el resto de condiciones igual.

Por ejemplo, evaluamos las particiones del número 12 en 4 sumandos, es decir $p_4(12)$:

xtotal=4
xt=1..12
creciente

suma=12

X1	X2	X3	X4
1	1	1	9
1	1	2	8
1	1	3	7
1	1	4	6
1	1	5	5
1	2	2	7
1	2	3	6
1	2	4	5
1	3	3	5
1	3	4	4
2	2	2	6
2	2	3	5
2	2	4	4
2	3	3	4
3	3	3	3

Resultan 15 particiones.

Función de partición Q(N)

Como la anterior, cuenta el número de particiones, pero en este caso se exige que los sumandos sean todos distintos. Por ejemplo, el entero 7 admite las siguientes particiones como números distintos: 7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1, luego Q(7)=5

Euler demostró que esta función coincide con el número de particiones de n en partes impares. Lo veremos más adelante.

La programación de esta función se consigue añadiendo la condición NO REPITE, para que todos los sumandos sean iguales. En el caso del 7 podríamos escribir:

xrango=7
xt=1..7
suma=7
creciente
no repite

Tendríamos el resultado siguiente:

X1	X2	X3
7		
1	6	
2	5	
3	4	
1	2	4

Sólo son posibles las cinco particiones.

Particiones en partes impares P(N/Impar)

Introducimos este condicionamiento porque da lugar a un resultado obtenido por Euler:

El número de particiones de un número en sumandos distintos coincide con el de particiones en sumandos impares

Con Cartesius el planteo se limita a exigir que los sumandos sean impares. Basta condicionar los sumandos como una sucesión del tipo 2*n-1:

xrango=7
xt=1..4
xt=suc(2*n-1)
suma=7
creciente

Obtenemos cinco particiones, el mismo número que nos dio el de sumandos distintos.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
7						
1	1	5				
1	3	3				
1	1	1	1	3		
1	1	1	1	1	1	1

Podíamos haber usado un filtro, para que los sumandos sean impares:

xrango=7
xt=1..7
xt=filtro(impar)
suma=7
creciente

Resultaría más rápido que el planteamiento anterior. Por último, otra posibilidad es definir los sumandos como un conjunto:

xrango=7
xt=1,3,5,7
suma=7
creciente

También es más rápido.

PARTICIONES ESPECIALES

Este capítulo desarrolla varias descomposiciones clásicas de un número en sumandos de cierto tipo, como en tres números triangulares, cuatro cuadrados o dos o tres primos. Más adelante añadiremos otras que hemos usado en las redes sociales, como capicúas, cuadrados simétricos o productos cíclicos.

Teorema de Javier Cilleruelo

El matemático español recientemente fallecido Javier Cilleruelo demostró que ***todo número natural es suma de tres capicúas*** en cualquier base de numeración mayor o igual que 5.

Para el cumplimiento del teorema consideraremos (y así se suele hacer) como capicúas los números de una sola cifra. Podemos también incluir el cero o no, porque lo que deseamos es efectuar comprobaciones a nuestro criterio. Si deseas excluir los de una cifra en tus descomposiciones (aunque no se cumpla el teorema) puedes definir XT=11..200, por ejemplo, en los rangos de sumandos. Aquí no lo haremos así.

Un ejemplo: descomposición del número 167

Como ignoramos la cota de cada sumando, deberemos definir **XT=1..167**. Para que los sumandos sean capicúas filtraremos usando **filtro(capicua)**. Definimos tres columnas de sumandos y el resto es sencillo de entender. Quedaría así:

xtotal=3
xt=1..167
xt=filtro(capicua)
suma=167
creciente

Como hemos admitido capicúas de una cifra obtenemos bastantes resultados:

X1	X2	X3
1	5	161
1	55	111
2	4	161
2	44	121
2	66	99
2	77	88
3	3	161
3	33	131
4	22	141
5	11	151
7	9	151
8	8	151
11	55	101
22	44	101
33	33	101

Si definimos el rango como **XT=11..167** reduciremos los casos a dos o más cifras.

X1	X2	X3
11	55	101
22	44	101
33	33	101

Observamos que entre ellos hay una descomposición simétrica: 33+101+33. En Twitter (@connumeros) publicamos casos simétricos de este tipo. Podemos obligar a que los dos primeros sumandos sean iguales, añadiendo **ES X1=X2** a las condiciones. Así lo hemos efectuado con el número 231 obteniendo tres resultados:

X1	X2	X3
55	55	121
66	66	99
77	77	77

Hemos supuesto algo que no nos consta, y es que los sumandos iguales son los dos primeros, pero podían ser los últimos (recuerda que al ser creciente no se dará la igualdad de primero y último salvo que los tres sean iguales)

Podemos tenerlo previsto si cambiamos **ES X1=X2** por **ES (X1=X2)+(X2=X3)**

Funciona esta condición porque en Cartesius la suma en este caso equivale a la conectiva **O lógica**. Lo hemos aplicado al 111 admitiendo capicúas de una cifra y se perciben muy bien los dos casos:

```
xtotal=3
xt=1..111
xt=filtro(capicua)
suma=111
creciente
es (X1=X2)+(X2=X3)
```

X1	X2	X3
1	55	55
5	5	101
6	6	99

Los filtros en Cartesius pueden resultar lentos, porque se selecciona elemento a elemento. Hay que ejercitar la paciencia en casos más complejos. El siguiente listado, correspondiente a sumandos de tres cifras para generar el número 636, ha tardado algunos minutos.

X1	X2	X3
101	101	434
101	111	424
101	121	414
101	131	404
101	202	333
101	212	323
101	222	313
101	232	303
111	111	414
111	121	404
111	202	323
111	212	313
111	222	303
121	202	313
121	212	303
131	202	303
202	202	232
202	212	222
212	212	212

Teorema de Lagrange

Todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados.

Es evidente que pueden ser menos de 4, por lo que usaremos XRANGO=4 en lugar de XTOTAL=4.

Este caso resulta más rápido que el anterior. Hay dos razones para ello. Por una parte, no es necesario usar filtros, porque los cuadrados se pueden definir mediante la condición **XT=SUC(n^2)**, lo que nos lleva a la segunda ventaja, y es que el rango se reduce a la raíz cuadrada del número dado.

Comenzamos este caso con el número 874 (elegido al azar). El planteo podría ser:

xrango=4
xt=1..30
xt=suc(n^2)
suma=874
creciente

Se toma xrango=4 para que también aparezcan sumas de dos o tres cuadrados. El intervalo se toma de 1 a 30, que es la raíz cuadrada de 874 por exceso. La condición suc(n^2) exige que los sumandos sean cuadrados. Después sigue que la suma sea la pedida, 874, y que los sumandos estén ordenados de forma creciente.

Con ese planteamiento resultan 40 casos, de los que insertamos algunos:

9	81	784	
9	289	576	
64	81	729	
144	289	441	
1	1	196	676
1	16	16	841
1	25	64	784
1	100	289	484
1	225	324	324
1	256	256	361

Todos esos cuadrados suman 874. En el mismo desarrollo, mediante la función RAIZ puedes adjuntar las bases de esos cuadrados. Aquí tienes un recorte:

1	100	289	484		1	10	17	22
1	225	324	324		1	15	18	18
1	256	256	361		1	16	16	19
4	4	25	841		2	2	5	29
4	25	169	676		2	5	13	26
4	25	361	484		2	5	19	22
4	49	196	625		2	7	14	25

Lagrange demostró que bastan tres cuadrados, salvo en unos casos poco numerosos, que son aquellos números que se pueden escribir como 4^k*(8m+7).

Para comprobar esta variante del problema basta definir XTOTAL=3. Hemos preparado así un listado de números del 600 al 610 con una descomposición en tres cuadrados para cada uno (hay más)

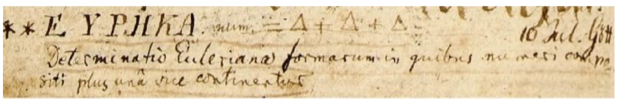
4	196	400		600
9	16	576		601
1	25	576		602
25	49	529		603
4	25	576		605
1	121	484		606
16	16	576		608
4	121	484		609
9	25	576		610

Vemos que faltan el 604 y el 607, y es que pertenecen a las excepciones, ya que 604=4^1*(8*18+7) y 607=4^0*(8*75+7)

Teorema de Gauss

Todo entero positivo es suma de tres números triangulares.

Este es el más popular de este tipo de teoremas. En esta imagen tan conocida expresó con ¡Eureka! su alegría por haber encontrado esta propiedad.



Con la condición SUC de Cartesius basta para engendrar los triangulares. Escribiremos **XT=SUC(n*(n+1)/2)**

Quedaría así en el caso de N=107:

xrango=3
xt=1..22
xt=suc(n*(n+1)/2)
suma=107

Usamos XRANGO por si basta con un triángulo o dos. La cota 22 es la suficiente para llegar a 107. Después se definen los triangulares mediante xt=suc(n*(n+1)/2), y finalmente se ajusta la suma. Si se añade la condición CRECIENTE para eliminar repeticiones, resultarían cuatro descomposiciones:

X1	X2	X3
1	1	105
1	15	91
1	28	78
6	10	91

Con Cartesius es fácil descubrir los sumandos triangulares. En una entrada ya antigua de este blog proponemos otro algoritmo para encontrarlos:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/12/suma-de-tres-numeros-triangulares.html

Teorema de los poligonales

Fermat extendió las propiedades anteriores a sumas de cinco pentagonales, seis hexagonales y así con cualquier número de lados. Lo intentamos con pentagonales:

Los números pentagonales 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92,… se engendran con la expresión n(3n-1)/2

Así que basta adaptar lo expuesto anteriormente al caso de cinco sumandos del tipo pentagonal. Incluimos el planteamiento para el número 68:

xrango=5
xt=1..7
xt=suc(n*(3*n-1)/2)
suma=68
creciente

Y el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5
5	12	51		
12	12	22	22	
1	1	22	22	22
1	5	5	22	35

Conjetura de Goldbach para impares

“Todo número impar mayor que cinco se escribe como la suma de tres números primos”

Para comprobar esta conjetura volveremos a los filtros. Si los sumandos han de ser primos, usaremos FILTRO(PRIMO). En el siguiente ejemplo lo usamos para descomponer el número 67

xtotal=3
xt=1..67
xt=filtro(primo)
suma=67
creciente

Definimos tres columnas con rango 1..67 y filtro primo. Después obligamos a que la suma sea 67. Resultan 20 soluciones:

X1	X2	X3
3	3	61
3	5	59
3	11	53
3	17	47
3	23	41
5	19	43
5	31	31
7	7	53
7	13	47
7	17	43
7	19	41
7	23	37
7	29	31
11	13	43
11	19	37
13	13	41
13	17	37
13	23	31
17	19	31
19	19	29

PARTICIONES CURIOSAS

Desde hace unos meses publico cálculos sobre la fecha del día en Twitter (@connumeros). Entre ellos aparecen algunos que se pueden desarrollar con Cartesius. Veamos unos ejemplos:

Sumas simétricas de cuadrados

El número 2147 se puede descomponer en una suma simétrica de tres cuadrados:

2147=23^2+33^2+23^2

¿Cómo encontrar, si existen, particiones similares en otro número?

El conjunto de condiciones es muy simple. Para el número 1298 sería:

xtotal=2
xt=1..37
x1=suc(n^2)
x2=suc(2*n^2)
suma=1298

El número de columnas es dos, porque los cuadrados iguales los agrupamos en un solo sumando. El rango 1..37 está elegido mediante la raíz cuadrada entera de 1298 por exceso. Finalmente, el primer sumando recoge un cuadrado y el segundo dos.

El resultado es:

X1	X2
576	722
1296	2
24	19
36	1

Arriba aparecen dos juegos de sumandos y debajo hemos añadido la raíz cuadrada del primer sumando y la de la mitad del otro, resultando las bases (24,19) y

(36,1), que dan lugar a las descomposiciones simétricas:

1298=19^2+24^2+19^2
1298=1^2+36^2+1^2
Otros números no admiten ninguna suma de este tipo. Inténtalo con 1300.

Se pueden imaginar otros conjuntos de condiciones. El siguiente es más intuitivo, pero algo más lento:

xtotal=3
xt=1..37
xt=suc(n^2)
es x1=x2
suma=1298
creciente

En él exigimos que X1=X2 y que los sumandos sean todos cuadrados. De esta forma aparecen los cuadrados iguales de forma más clara:

X1	X2	X3
1	1	1296
361	361	576

Algo más difícil de encontrar es un conjunto con cuatro cuadrados iguales y otro distinto, que puede ser el central. Así ocurre con el número 117:

117=3^2+3^2+9^2+3^2+3^2

Para otros números, por ejemplo el 116, vale este conjunto de condiciones:

xtotal=2
xt=1..11
x1=suc(n^2)
x2=suc(4*n^2)
suma=116

Es similar al caso de tres sumandos, cambiando 2*n^2 por 4*n^2. Obtenemos:

X1	X2
16	100
100	16
4	5
10	2

Se pueden interpretar como:

116=5^2+5^2+4^2+5^2+5^2
116=2^2+2^2+10^2+2^2+2^2
Finalmente, una simetría muy atractiva es la de cuadrados alternados.

210=4^2+9^2+4^2+9^2+4^2

Como en casos anteriores, no todos los números enteros las admiten. Las condiciones pueden ser:

xtotal=2
xt=1..11
x1=suc(2*n^2)
x2=suc(3*n^2)
suma=210

Dan lugar al juego de cuadrados anterior y otro más:

210=8^2+3^2+8^2+3^2+8^2

Te dejamos abiertas otras posibilidades similares.

Sumas de potencias

Cuadrados y cubos

Esta descomposición es más difícil de lograr. Por ejemplo, se puede intentar descomponer un número en potencias de 2 y de 3. Si no permitimos repetir sumandos hanrá menos posibilidades. Intentemos conseguirlo con cinco sumandos, dos para la base 2 y tres para la base 3 (podían ser otros):

En el caso de 113 lo logramos:

xtotal=2
x1=1..8
x2=1..4
x1=suc(2*2^n)
x2=suc(3*3^n)
suma=113

Si has entendido los ejemplos anteriores comprenderás cómo funciona este. Hemos asignado rangos distintos para X1 y X2 para ahorrar tiempo. El resultado obtenido ha sido:

X1	X2
32	81

Se puede interpretar como:

113=2^4+2^4+3^3+3^3+3^3

También se pueden intentar sumandos únicos. Por ejemplo:

10817=22^3+13^2

Te dejamos que concretes las condiciones. Ese mismo número, 10817, admite una suma simétrica con cuadrado y cubo:

10817=61^2+15^3+61^2

Potencias superiores

Por experiencia sabemos que no es fácil la descomposición en potencias cuartas. Aquí tienes las condiciones para descomponer 210:

xrango=5
xt=1..6
xt=suc(n^4)
suma=210
creciente

Hemos tenido que llegar a cinco sumandos en este caso:

210=2^4+2^4+2^4+3^4+3^4

Prueba con otros números, y verás que es difícil que admitan estas descomposiciones.

Una curiosidad que se publica en las redes es la de descomponer un número en suma de potencias de sus cifras. Es muy raro que esto ocurra. Si quieres experimentar, puedes usar algo similar a esto:

xtotal=4
x1=1..12
x2=1..7

x3=1..4

x4=1..4

x1=suc(2^n)

x2=suc(3^n)

x3=suc(5^n)

x4=suc(6^n)

suma=2356

Este es el planteamiento para el 2356 (elegido al azar). Hemos ajustado los rangos para x1, x2, x3 y x4 de la forma una forma óptima, y se han obtenido dos soluciones:

X1	X2	X3	X4
8	2187	125	36
128	2187	5	36

Corresponden a dos sumas de potencias:

2356=2^3+3^7+5^3+6^2

2356=2^7+3^7+5^1+6^2

Productos cíclicos

Con expresiones similares podemos buscar sumas de otros tipos. Un ejemplo que solemos publicar es el de productos cíclicos de tres factores, del tipo N=a*b+b*c+c*a

No es demasiado complicado organizar un conjunto de condiciones que lo logre. Es aconsejable un rango de búsqueda que llegue hasta la raíz cuadrada de N, para que no se nos escape ninguna posibilidad. Proponemos estas condiciones, en el caso de N=324

xtotal=3
xt=1..18
es x1*x2+x2*x3+x3*x1=324
creciente

La condición interesante es la tercera, que mediante la condición ES obliga a una suma de productos cíclicos con tres factores. Obtenemos:

X1	X2	X3
4	13	16
6	9	18
6	12	14

Podemos comprobarlo:

324=4*13+13*16+16*4
324=6*9+9*18+18*6
324=6*12+12*14+14*6