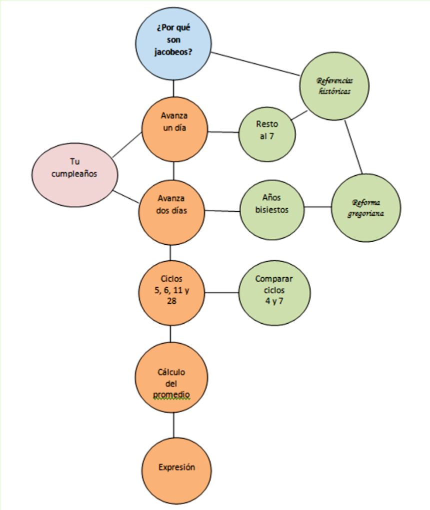
Ideas para el aula



Edición Junio – 2013 (Definitiva)

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

El autor estuvo tentado de no incluir estos temas en las colecciones temáticas, dada su condición de jubilado y su alejamiento de las aulas desde hace años, pero después pensó que, cambiando la envoltura y quizás las herramientas, algunas sugerencias podían seguir siendo válidas.

Las Matemáticas son intemporales, y una Metodología puede tener validez si no se deja llevar por modas y entrega el protagonismo del aprendizaje al alumnado. Confiando en ello se han recogido aquí todas las sugerencias incluidas en el blog.

Esta edición será ya la definitiva, porque no se van a publicar más temas de aplicación al aula. Se dejará este documento en la colección por si fuera útil en el futuro.

Como advertiremos en todos los documentos de esta colección, el material presentado no contiene desarrollos sistemáticos, ni pretende ser un manual teórico. En cada tema se incluirán cuestiones curiosas o relacionadas con las hojas de cálculo, con la única pretensión de explicar algunos conceptos de forma amena.

TABLA DE CONTENIDO

Presentación **2**

Tabla de contenido **3**

Cuestiones y curiosidades **5**

Un cuadrado conocido a medias 5

Pasatiempo sencillo 8

Con tecnologías o sin ellas **11**

Ideas para una webquest 11

¡Calculadoras fuera! 13

También sin calculadora 15

Uso de tablas en el aula 17

Cribas y barridos 21

Sistema de numeración binaria 30

Experimentaciones **33**

Descomponer en tres factores 33

Múltiplo de cuadrados 35

Deconstruir y construir números 37

Compartir o no compartir 38

¿Cuántas palabras? 45

La conjetura de Collatz en el aula 50

Historias de un tanteo 55

Estudio del entorno **62**

Los años jacobeos 62
Baldosas, pasos y farolas 67
Alfabeto Braille 73
Terrones de azúcar 78
Esperanzas en el metro de Madrid 79
Medir el mundo con los dedos 84
Soluciones 93
Apéndice 95

.

Cuestiones y curiosidades

UN CUADRADO CONOCIDO A MEDIAS

Proponemos una búsqueda ordenada a partir de una cuestión similar a la siguiente:

Encuentra un número entero positivo de tres o cuatro cifras sabiendo que su cuadrado comienza con las cifras 82541…

La idea es resolverlo con calculadora u hoja de cálculo, con lo que la primera reacción, además de una búsqueda bastante larga, es obtener la raíz cuadrada de lo que tenemos, y comenzar con las cifras que nos resulten: raíz(82541)=287… Pero ¿qué hacemos ahora? ¿irle añadiendo cifras e ir probando? ¿considerar los decimales?...Puede resultar bien, y al final de diez intentos conseguiríamos la solución, 2873, pero es que faltaban dos cifras, y por eso fue fácil. ¿Y si hubieran faltado tres?

El interés del problema, para el alumnado de Enseñanza Secundaria, es que al ignorar a priori cuántas cifras faltan, no sólo debemos pensar en la raíz del número dado, sino también en la raíz del número que queda al eliminar una cifra. Lo vemos con este ejemplo:

¿Qué número tiene un cuadrado que comienza por 824… sabiendo que faltan por escribir una, dos o tres cifras?

Probamos el procedimiento anterior: Raíz(824)=28,7

Si faltaran dos cifras, deberíamos probar con números cercanos a 285, 286, 287,…y ninguno de sus cuadrados comienza con 824.

Probamos la hipótesis de que falte una cifra, con lo que deberíamos basarnos en Raíz(82)=9,05, y obtenemos otro fracaso, pues desde 90 a 100 ningún número produce un cuadrado que comience con 824.

Por último, probamos con tres cifras más. En teoría deberíamos probar desde 2850 a 2880, por ejemplo, y con paciencia llegaríamos a 2872^2=8248384

¿Qué se podría lograr en el aula con este ejercicio? Destacamos algunos aprendizajes y estrategias que se podrían descubrir:

Posibles objetivos

- Darse cuenta de que la raíz cuadrada actúa sobre pares de cifras
- Descubrir búsquedas binarias cuando los procesos se ponen difíciles (caso de tres cifras)
- Aprovechar los decimales que nos dan las calculadoras (aquí no lo hemos hecho)

- Saber cambiar de estrategia a tiempo.

Posible desarrollo

Se lee en común la cuestión propuesta por el procedimiento que se juzgue más adecuado.

No se debe nombrar la raíz cuadrada en un principio, salvo que transcurran los minutos y no se logre ningún avance. Se plantea la cuestión, explicando las dudas que surjan y se comienza el trabajo de búsqueda. Es conveniente tener preparados varios ejemplos más con distinto número de cifras para intentar conseguir que se resuelvan varios en una misma sesión.

Al finalizar el trabajo se organiza una puesta en común para compartir resultados y estrategias. Si el proceso va lento, se puede abrir una debate breve cuando hayan aparecido dos o tres soluciones.

Agrupamiento del alumnado

Puede organizarse en grupos de dos o individualmente. Si se ve necesario para atender a la diversidad, se pueden permitir grupos de tres.

Material

- Calculadora y papel: Tiene la ventaja de que se puede organizar el trabajo de forma individual, pero las búsquedas pueden ser exasperantes.
- Hoja de cálculo: Obliga a organizar equipos, pero se da facilidad para organizar mejor las búsquedas y aprovechar la posibilidad de ordenar los intentos en serie en una columna.

Evaluación

Debe obligarse a la escritura de conclusiones, ya sea en otra sesión, o bien fuera del horario escolar. En este ejercicio es tan importante la velocidad como el descubrimiento de estrategias y atajos.

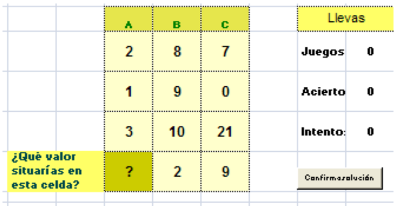
La evaluación se realizará atendiendo al documento producido y a las notas tomadas por el profesorado respecto al desarrollo del trabajo, número de soluciones, variedad de métodos, etc.

PASATIEMPO SENCILLO

Hoy presentamos un pasatiempo tomado del libro "Estimula tu inteligencia natural", de Bragdon y Fellows.

Es sencillo adaptarlo a hoja de cálculo, y por eso tiene un sitio en este libro.

Es un pasatiempo fácil, pero que hace pensar y a veces se complica. Consiste en descubrir la pauta de cálculo que siguen las cuatro filas de una tabla numérica y aplicarla a encontrar el valor adecuado que ha de tener la celda que contiene la interrogación.



Los resultados de la última columna se obtienen a partir de las dos primeras y de un número desconocido mediante las operaciones de sumar, restar y multiplicar. Hay que adivinar dos operaciones y el número desconocido.

Aunque es un pasatiempo sencillo, en él se desarrollan tres habilidades fundamentales:

(a) Descubrimiento de regularidades

(b) Análisis de la relación entre resultado y datos. Estudiando las variaciones de estos y su influencia en los resultados, se puede conjeturar qué operaciones han intervenido.

(c) Uso de las operaciones inversas para descubrir el dato que falta.

Como es costumbre en este libro, no se indica ni nivel de enseñanza ni el momento de uso de este pasatiempo en clase.

Para quienes deseéis practicar con él, podéis descargar laversión en Excel desde la dirección

http://hojamat.es/sindecimales/juegos/hoja/pauta.xls

y la versión en Calc desde

http://hojamat.es/sindecimales/juegos/hoja/pauta.ods

CON TECNOLOGÍAS O SIN ELLAS

IDEAS PARA UNA WEBQUEST

"Los números triangulares, expresados en base decimal, no pueden terminar en 2, 4, 7 ó 9"

La metodología de las webquest se adapta muy bien al uso de las hojas de cálculo y a una buena atención a la diversidad. La afirmación anterior constituye un punto de partida que admite la organización de una webquest con distintos itinerarios de aprendizaje.

Se puede comenzar con esta frase, y organizar una webquest para entender bien su significado y los fundamentos de esa afirmación. Incluimos a continuación algunos pasos que se podrían seguir:

(a) Definición de número triangular. Se puede buscar en páginas fiables, tales como Wikipedia o la misma Hojamat del autor de este libro.

(a1) Para el alumnado más aventajado, se sugerirá alguna búsqueda de carácter histórico sobre estos números.

(a2) Los estudiantes con dificultades pueden copiar imágenes de números triangulares y pegarlas en un documento.

(b) Fórmula de los números triangulares. Lo ideal sería que se pudiera deducir en el aula mediante inducción y discusión en grupos con la ayuda del profesorado. Así lo ha conseguido el autor en varias ocasiones, Si no, en las mismas páginas se puede encontrar dicha fórmula.

Una vez conseguida la fórmula T(n)=n(n+1)/2, se construye una tabla de números triangulares con una hoja de cálculo.

(b1) Este paso admite una rama de profundización consistente en buscar en Internet propiedades de los números triangulares y experimentarlas con la misma hoja de cálculo. También se puede intentar generarlos por recurrencia: T(n+1) = T(n)+n+1

(b2) Una rama de consolidación del aprendizaje consistiría en aplicar esa fórmula sin el uso del ordenador y reproducir en papel los cálculos que se han efectuado en la hoja de cálculo.

(c) Ya se está en condiciones de comprobar que ningún número triangular termina en 2, 4, 7 ó 9, y, lo más importante, intentar justificarlo mediante la fórmula o razonamiento.

Mediante la fórmula T(n)=n(n+1)/2 se puede discutir en qué cifra puede terminar n, después n+1, su producto y, por último, la mitad del mismo.

(c1) Una actividad de perfeccionamiento consistiría en usar la propiedad de que “si tomo ocho veces un número triangular y después sumo 1, resulta un cuadrado”. Se estudian las terminaciones de los cuadrados impares, se les quita una unidad y se discute su cociente entre 8.

(c2) Para el alumnado que necesite consolidar lo aprendido, se puede organizar el cálculo de números triangulares grandes para comprobar sus terminaciones.

(d) Todo el trabajo realizado se expone al resto del aula mediante documentos, presentaciones o puestas en común. Si se dispone de una web de centro, se incluye en ella todo el material generado en la webquest.

¡CALCULADORAS FUERA!

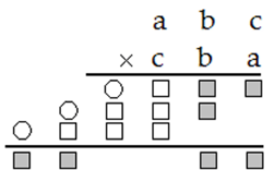
Hoy rompemos la línea de este blog con una propuesta en la que se desaconseja el uso de la calculadora o de cualquier hoja de cálculo. Consiste en lo siguiente:

Se presenta un número de cinco o seis cifras, como el 149152, del que sabemos que es producto de dos números de tres cifras simétricos entre sí, es decir, que abc*cba = 149152, siendo abc y cba sus expresiones decimales respectivas.

(a) Una vez presentado se pide organizar una búsqueda ordenada de las tres cifras a, b y c tomando nota por escrito de los pasos que se han intentado. Es bueno organizarla por grupos para fomentar la discusión.

(b) Después de varios intentos, se invita a generalizar o formalizar lo conseguido, todo dentro del nivel matemático del grupo.

Puede ser útil disponer de un dibujo de cómo sería la operación de multiplicar esos dos números:



Los cuadrados son cifras y los círculos posibles arrastres. Se puede ampliar para que se pueda usar como plantilla y escribir en ellos las pruebas.

Todo el razonamiento se basará fundamentalmente en las casillas coloreadas en gris.

En el ejemplo dado 149152 se podría producir este esquema de búsqueda

Terminación 2: a=1;b=2, a=3;b=4, a=2;b=6, a=4;b=8, a=6;b=7, a=8;b=9

La cifra de orden mayor del producto es 1, y es un arrastre, porque hay seis cifras, luego esto elimina a=1;b=2, a=4;b=8, a=6;b=7, a=8;b=9

La decena 5 proviene de 7b+1 o de 8b+1, y esto hace que abc= 324, 236

Completamos el producto y vemos que la solución es 236: 236*632=149152

Hemos oscurecido la explicación a propósito, para dejar margen a variantes y para no dar todo elaborado.

Para quienes deseen practicar, ofrecemos algunas propuestas más:

34222
194242
675783
548208
726363
95254
85405
274428
679354
407515
26962
136888
165628
137052

TAMBIÉN SIN CALCULADORA

Nos hemos aficionado a prescindir de la calculadora. Aquí tenéis una propuesta nada difícil, pero que se puede usar para ordenar bien nuestros cálculos y razonamientos. No son necesarios grandes desarrollos.

Imaginemos todos los números de tres cifras entre las que no figura el 0, como por ejemplo 163. Diremos que uno de ellos es centralmente accesible con su simétrico si se pueden convertir uno en el otro sumando reiteradamente (o restando) la cifra central. Por ejemplo, 163 es accesible con su simétrico 361, porque 163+6+6+6… (33 veces)… = 361.

Al número de veces que hay que sumar la cifra central para lograr la conversión la llamaremos **distancia central**. En el ejemplo anterior es 33. En los capicúas es evidente que será 0. Para el par 129 y 921, la distancia es nada menos que 396, porque 129+2*396=921. Otros números ni siquiera poseen distancia, porque no son accesibles, como 245 y 542

Os proponemos algunas cuestiones realmente fáciles:

(1) ¿Qué condición han de cumplir dos números simétricos para que sean accesibles entre sí? (Parece ser que hay 189 parejas de ese tipo)

(2) Excluyendo el valor trivial de 0, ¿cuáles son la distancia central mínima y la máxima?

(3) Demuestra que si una distancia obtenida resulta ser de tres cifras no nulas, siempre es accesible con su simétrico. Ocurre así con 833-338=495=3*165, luego su distancia es 165, que a su vez es accesible con 561, ya que 561-165=66*6, lo que da distancia 66.

(4) En esta sí es conveniente usar una hoja de cálculo. Sólo hay un número de tres cifras no nulas en progresión aritmética cuya distancia central con su simétrico posee también cifras en progresión, aunque no en el mismo orden.

USO DE TABLAS EN EL AULA

Desde la llegada de las calculadoras y los ordenadores el manejo de tablas se ha ido olvidando en nuestras aulas. Sin embargo, su poder formativo es muy grande, y son imprescindibles cuando su contenido está compuesto por datos experimentales, que no se pueden obtener con una calculadora. ¿Qué capacidades del alumnado podemos enriquecer con ese uso? Desarrollamos a continuación algunas de ellas:

Consulta

Muchas de las tablas verdaderamente útiles son de doble entrada (en parte para aprovechar espacio en los libros) pero a los alumnos les puede suponer una gran dificultad su manejo. Un ejemplo de ello son las antiguas tablas de cuadrados. En la siguiente imagen reproducimos un fragmento de una tabla de cuadrados construida con Hoja de Cálculo.

	0	1	2	3	4	5
2	4	4,0401	4,0804	4,1209	4,1616	4,2025
2,1	4,41	4,4521	4,4944	4,5369	4,5796	4,6225
2,2	4,84	4,8841	4,9284	4,9729	5,0176	5,0625
2,3	5,29	5,3361	5,3824	5,4289	5,4756	5,5225
2,4	5,76	5,8081	5,8564	5,9049	5,9536	6,0025
2,5	6,25	6,3001	6,3504	6,4009	6,4516	6,5025
2,6	6,76	6,8121	6,8644	6,9169	6,9696	7,0225
2,7	7,29	7,3441	7,3984	7,4529	7,5076	7,5625
2,8	7,84	7,8961	7,9524	8,0089	8,0656	8,1225
2,9	8,41	8,4681	8,5264	8,5849	8,6436	8,7025

La hemos elegido porque las cifras que figuran en la fila superior son centésimas, lo que obliga a realizar un esfuerzo de interpretación. Así, para calcular el cuadrado de 2,64 se deberá buscar la fila 2,6 y ver dónde se cruza con la columna del 4, con un resultado de 6,9696

Son muchas las tablas estadísticas y experimentales que pueden presentar este tipo de dificultades, por lo que creemos que dedicarles a las tablas algunas sesiones no será tiempo perdido.

Interpolación

Otra utilidad formativa de las tablas proviene de la necesidad de efectuar interpolaciones debido a que no nos presentan todos los resultados posibles. Además, en cada interpolación se puede tener una idea del error cometido, al tener siempre dos valores de la tabla acotando al verdadero.

Un ejemplo de interpolación directa: ¿Cuál es tu mejor aproximación para el cuadrado de 2,427 (usando la tabla)?

Buscamos los datos de 2,42 y 2,43, con los resultados siguientes:

Número	Cuadrado
2,42	**5,8564**
2,43	**5,9049**

Calculamos la tasa de variación: T=(5,9049-5,8564)/(2,43-2,42) = 4,85 y la multiplicamos por 0,007, que es la cifra siguiente, con un resultado de 0,03395, que sumado al primer valor nos da una aproximación de $2,427^2 = 5,89035$ próximo al que nos daría una calculadora: $2,427^2 = 5,890329$.

No nos extendemos en este tema, pero nuestros lectores pueden ir reflexionando sobre todas las operaciones mentales que han efectuado los alumnos para entender y reproducir los cálculos anteriores

Podemos destacar alguna capacidades y conceptos que obtendrían beneficio de este tipo de actividad:

- Repaso o profundización del concepto de tasa de variación media. Extensión a otros temas similares,
- Superación de la idea de regla de tres. Cuanto antes la olvidemos, mejor.
- Práctica del método de reducción a la unidad, injustamente olvidado.
- Afianzamiento del concepto de aproximación y de la idea de valores por exceso y por defecto.

Extensión de la tabla

Interpolación inversa: Encuentra mediante la tabla el valor aproximado de la raíz cuadrada de 731

En primer lugar deberán entender que esta tabla, mediante multiplicaciones por potencias de 10, puede resolvernos otros cálculos que no figuren en ella. En este caso buscamos los dos valores más aproximados a 7,31, que son

Número	**Cuadrado**
2,7	**7,29**
2,71	**7,3441**

Procedemos como en el anterior ejemplo. Calculamos la tasa inversa

TI=(2,71-2,7)/(7,3441-7,29) = 0,18484288 la multiplicamos por (7,31-7,29), con un resultado de 0,00369686, que sumado a 2,7 nos da una aproximación a la raíz de 7,31 igual a 2,70369686. Como nos piden la raíz de 731 y no de 7,31, multiplicamos por 10 (¿por qué?) y finalmente obtenemos el valor 27,0369686, aproximado al que nos da la calculadora: 27,0370117

Si revisamos todo lo efectuado, también descubriremos en este cálculo los conceptos y capacidades que se adquieren con él. No es una propuesta fácil. Se manejan conceptos de cierta profundidad, por lo que deberíamos darnos por satisfechos con cualquier logro que se alcance.

Construcción

La construcción de estas tablas estaría reservada al profesorado y a alumnado de enseñanza media. Una idea, llevada la práctica por el autor, es la de que los alumnos de Informática construyan tablas con hojas de cálculo y se las pasen a otros cursos para que practiquen con ellas. Así el beneficio es doble.

No es trivial esta construcción. Invitamos a los lectores a reproducir la tabla ejemplo que hemos insertado y podrán comprobar que hay que ir con cuidado. Proponemos también construir la siguiente tabla de interés compuesto, en la que dados el tipo de interés anual y los años transcurridos nos devuelva el tipo acumulado (no el TAE).

	Años				
Tipo	1	2	3	4	5
1%	1,0%	2,0%	3,0%	4,1%	5,1%
2%	2,0%	4,0%	6,1%	8,2%	10,4%
3%	3,0%	6,1%	9,3%	12,6%	15,9%
4%	4,0%	8,2%	12,5%	17,0%	21,7%
5%	5,0%	10,3%	15,8%	21,6%	27,6%
6%	6,0%	12,4%	19,1%	26,2%	33,8%
7%	7,0%	14,5%	22,5%	31,1%	40,3%

CRIBAS Y BARRIDOS

Dos características de la hoja de cálculo apreciamos mucho en este blog. Una es que permite estudios de nivel elemental y medio sin gran preparación previa en los trabajos y la otra su facilidad de presentación de estructuras y procesos matemáticos. Evidentemente, no la recomendamos para estudios universitarios, aunque también podría dar juego, pero su uso del formato en coma flotante la imposibilita para el tratamiento exacto de grandes números.

Una posibilidad muy atractiva es la de presentar en pantalla resultados de cribas de números y barridos exhaustivos. Lo explicaremos con un ejemplo, el de los **números intocables.**

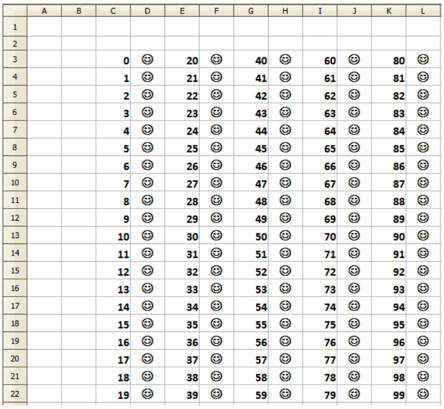
Se llaman así a aquellos números que no pueden ser el resultado de la suma de las partes alícuotas de otro número, es decir, de la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, el 88 no coincide con ningún resultado de sumar los divisores propios de ningún número natural. Si efectuamos un barrido de los N primeros números y anotamos el resultado de esa suma, ningún resultado coincidirá con 88.

Los primeros números intocables son 2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146, 162, 188, 206, 210, 216, 238, 246, 248, 262, 268, 276, 288, … http://oeis.org/A005114

Puedes aprender algo sobre estos números en la Red. Por ejemplo en http://mathworld.wolfram.com/UntouchableNumber.html,

pero tampoco dan mucho de sí. Se aprenden sus propiedades en pocos minutos. Aquí nos va a interesar su generación y presentación atractiva con hoja de cálculo. Lo haremos con estos pasos:

(1) Presentemos los primeros números naturales en una pantalla de hoja de cálculo, y junto a cada uno escribamos cualquier símbolo, por ejemplo una carita sonriente:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3			0	☺	20	☺	40	☺	60	☺	80	☺
4			1	☺	21	☺	41	☺	61	☺	81	☺
5			2	☺	22	☺	42	☺	62	☺	82	☺
6			3	☺	23	☺	43	☺	63	☺	83	☺
7			4	☺	24	☺	44	☺	64	☺	84	☺
8			5	☺	25	☺	45	☺	65	☺	85	☺
9			6	☺	26	☺	46	☺	66	☺	86	☺
10			7	☺	27	☺	47	☺	67	☺	87	☺
11			8	☺	28	☺	48	☺	68	☺	88	☺
12			9	☺	29	☺	49	☺	69	☺	89	☺
13			10	☺	30	☺	50	☺	70	☺	90	☺
14			11	☺	31	☺	51	☺	71	☺	91	☺
15			12	☺	32	☺	52	☺	72	☺	92	☺
16			13	☺	33	☺	53	☺	73	☺	93	☺
17			14	☺	34	☺	54	☺	74	☺	94	☺
18			15	☺	35	☺	55	☺	75	☺	95	☺
19			16	☺	36	☺	56	☺	76	☺	96	☺
20			17	☺	37	☺	57	☺	77	☺	97	☺
21			18	☺	38	☺	58	☺	78	☺	98	☺
22			19	☺	39	☺	59	☺	79	☺	99	☺

La idea es que cuando encontremos un número que coincida con una suma de partes alícuotas de otro **se borre la carita**, y al final sólo la conserven los números intocables.

(2) Implementamos la función **alícuota(n)**

public function alicuota(n)
dim i,s
s=0

```
for i=1 to n/2
if n/i=n\i then s=s+i
next i
alicuota=s
End function
```

Esta función recorre los posibles divisores propios, con la prueba n/i=n\i, que equivale a afirmar que el cociente n/i es entero que por tanto i divide a n. El resto se entiende fácilmente.

(3) Efectuamos un barrido de todos los posibles resultados de la función alícuota(n). Aquí hay un punto delicado y es el rango de cálculo que debemos elegir. Si deseamos encontrar los intocables menores que 100 deberemos buscar resultados hasta casi el 10000. El problema radica en que si un número es del tipo p+1 con p primo, será el resultado de la suma de divisores propios de p^2, como puedes razonar si te paras a pensar en ello. Como el máximo primo del 1 al 100 es 97, habrá que llegar más allá de $97^2=9409$.

La idea es que cada vez que salga una suma que equivalga a un número de nuestra tabla **le borramos la carita sonriente**, simplemente escribiendo sobre ella un espacio en blanco. Esto es muy dinámico, y si lo presentas a unos alumnos se darán cuenta de que sólo los números intocables se libran de que le borren la carita. Es una forma activa de comprender que estamos cribando números.

Para que todo funcione hay que encajar cada número en su fila y columna correspondiente para que localice la carita. Si cada columna contiene 20 números, hallaremos el cociente entero del resultado entre 20 y nos dará la columna y el resto resultante, la fila.

Lo puedes ver en este código comentado

sub intocables
dim i,f,c,p

for i=1 to 10000
p=alicuota(i) ‘ p es un resultado posible
if p<=100 then ‘restringimos p a la tabla que hayamos planteado
c=p\20 ‘se calcula la columna
f=p-20*c ‘se calcula la fila
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(3).GetCellByPosition(3+2*c,2+f).string=" "
‘se escribe un espacio en blanco en la celda. En el ejemplo se supone que trabajamos en la hoja 4 y que la tabla comienza en C3. Esta línea de código está adaptada a Calc. En Excel sería ActiveWorkbook.Sheets(4).Cells(3+f,4+2*c).Value = " "
end if
next i
end sub

Al principio desaparecen las caras a gran velocidad, para ralentizarse después bastante. Las últimas en desaparecer son las de 80, 84 y 98 (¿por qué?). Al final queda así:

0		20		40		60		80	
1		21		41		61		81	
2	☺	22		42		62		82	
3		23		43		63		83	
4		24		44		64		84	
5	☺	25		45		65		85	
6		26		46		66		86	
7		27		47		67		87	
8		28		48		68		88	☺
9		29		49		69		89	
10		30		50		70		90	
11		31		51		71		91	
12		32		52	☺	72		92	
13		33		53		73		93	
14		34		54		74		94	
15		35		55		75		95	
16		36		56		76		96	☺
17		37		57		77		97	
18		38		58		78		98	
19		39		59		79		99	

Quedan como supervivientes los números intocables.

¿Qué ocurriría si exigiéramos que no coincidieran con la suma de divisores propios, sino con la suma de todos (función SIGMA)? Nos daría una lista (más numerosa) de números intocables de otro tipo. Te dejamos el encargo.

Otros ejemplos

Debemos insistir en esta segunda entrega del tema de barridos en que nuestro objetivo es la forma de presentar hechos y conceptos, y en ningún momento demostrar o comprobar.

Desarrollamos otros dos ejemplos:

Primos que se descomponen en suma de dos cuadrados

Sabemos que si un primo es de la forma 4k+1 se podrá descomponer en suma no trivial de dos cuadrados, siendo esto imposible si es de la forma 4k+3. Podríamos comprobar este hecho mediante un barrido.

Obtenemos una lista de primos y los acompañamos con un símbolo, y al lado su resto módulo 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3				3	☺	3		
4				5	☺	1		
5				7	☺	3		
6				11	☺	3		
7				13	☺	1		
8				17	☺	1		
9				19	☺	3		
10				23	☺	3		
11				29	☺	1		
12				31	☺	3		
13				37	☺	1		
14				41	☺	1		

Después engendramos todas las sumas de dos cuadrados en un rango adecuado, que puede ser la raíz cuadrada del último primo de la lista, o algo mayor por precaución ante redondeos. Para cada suma buscamos en la lista de primos si coincide con ella. En caso positivo borramos el símbolo, y quedarán como resultados negativos los que posean resto 3 respecto a 4.

3	☺	3
5		1
7	☺	3
11	☺	3
13		1
17		1
19	☺	3
23	☺	3
29		1
31	☺	3
37		1
41		1
43	☺	3
47	☺	3
53		1

Por si deseas profundizar, copiamos el código empleado en OpenOffice Calc, que puedes adaptar a tu caso cambiando la hoja, filas y columnas y también a Excel.

sub primos2cuad
dim i,j,k, rango

```
rango=15

for i=1 to rango
for j=1  to i
a=i^2+j^2
for k=1 to 50
if
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(1).GetCellB
yPosition(3,k).value=a then
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(1).GetCellB
yPosition(4,k).string=" "
end if
next k
next j
next i
end sub
```

Conjetura de Goldbach

Cuando se conoce por primera vez la conjetura de Goldbach la idea inicial es la de ir seleccionando números pares para buscarles su descomposición de suma de dos primos. Podríamos cambiar la perspectiva: engendrar todas las sumas de dos primos en un rango y cotejar con una lista de números pares para ver si alguno de ellos es resultado de esa suma. En ese caso, como venimos haciendo, le borraríamos el símbolo que le acompañe.

Así que comenzamos con una lista de pares que comience en 4:

		40	☺	60	☺	100	☺	140	☺
		42	☺	62	☺	102	☺	142	☺
4	☺	44	☺	64	☺	104	☺	144	☺
6	☺	46	☺	66	☺	106	☺	146	☺
8	☺	48	☺	68	☺	108	☺	148	☺
10	☺	50	☺	70	☺	110	☺	150	☺
12	☺	52	☺	72	☺	112	☺	152	☺
14	☺	54	☺	74	☺	114	☺	154	☺
16	☺	56	☺	76	☺	116	☺	156	☺
18	☺	58	☺	78	☺	118	☺	158	☺
20	☺	60	☺	80	☺	120	☺	160	☺
22	☺	62	☺	82	☺	122	☺	162	☺
24	☺	64	☺	84	☺	124	☺	164	☺
26	☺	66	☺	86	☺	126	☺	166	☺
28	☺	68	☺	88	☺	128	☺	168	☺
30	☺	70	☺	90	☺	130	☺	170	☺
32	☺	72	☺	92	☺	132	☺	172	☺
34	☺	74	☺	94	☺	134	☺	174	☺
36	☺	76	☺	96	☺	136	☺	176	☺
38	☺	78	☺	98	☺	138	☺	178	☺

Después engendramos todas las sumas de dos primos impares con rango 200. Para ello creamos la macro ***Goldbach,*** cuyo código se ofrece más abajo, y al ejecutarla, ¡zas!, todas las caritas desaparecen y queda comprobada la conjetura.

	40	60	100	140
	42	62	102	142
4	44	64	104	144
6	46	66	106	146
8	48	68	108	148
10	50	70	110	150
12	52	72	112	152
14	54	74	114	154
16	56	76	116	156
18	58	78	118	158
20	60	80	120	160
22	62	82	122	162
24	64	84	124	164
26	66	86	126	166
28	68	88	128	168
30	70	90	130	170
32	72	92	132	172
34	74	94	134	174
36	76	96	136	176
38	78	98	138	178

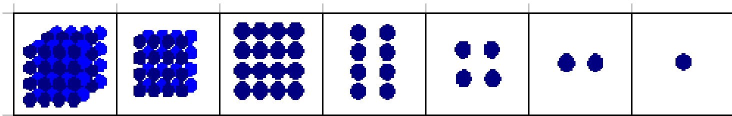
Código de la macro goldbach

```
sub goldbach
dim i,j,k, rango,p,q

rango=200
for i=3 to rango
if esprimo(i)=1 then
for j=1  to i
if esprimo(j)=1 then
a=i+j
p=int(a/40)
q=a-p*40
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(2).GetCellB
yPosition(3+2*p,2+q/2).string=" "
end if
next j
end if
next i
end sub
```

SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIA

El sistema de numeración en base 2 puede tener un aprendizaje totalmente distinto que el del resto de sistemas en otras bases. Su esencia es la de intentar formar un número a partir de los sumandos 1, 2, 4, 8, 16,… tomados sin repetir. Por ello, si se presenta al alumnado un catálogo de estos números, representados como conjuntos o “montones”, basta ir eligiéndolos uno a uno para formar el número deseado.



64	32	16	8	4	2	1	Total
1	0	1	0	0	0	1	
☑	☐	☑	☐	☐	☐	☑	81

Así, para formar el número 81, se van sumando los números 64, 32, 16, etc. añadiendo o quitando cada uno de ellos hasta llegar a la solución 81 = 64 + 16 + 1. La parte más difícil es interpretar después que esta suma da lugar a la representación binaria 1010001. Para ayudar en ese paso hemos creado una hoja de cálculo que visualiza tanto la agregación de los “montones” como la representación binaria a la que dan lugar.

No se dan aquí indicaciones de cómo usar esta hoja, pues su simplicidad permite varios itinerarios distintos en el aprendizaje y la elección de la metodología más adecuada a juicio de cada docente.

La hoja de cálculo de OpenOffice.org Calc está alojada en la siguiente dirección:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aula/hojas/binario2.ods

Al abrirla se nos consulta sobre la activación de macros. Se puede aceptar sin problemas de seguridad, porque sólo contiene un pequeño código para el funcionamiento de un botón.

EXPERIMENTACIONES

DESCOMPONER EN TRES FACTORES

La descomposición de un número en dos factores mayores que 1 de todas las formas posibles es una operación relativamente sencilla para el alumnado. Puede intentarlo mediante pruebas repetidas, aunque el procedimiento más seguro es el de encontrar todos los divisores propios del número, desechar el 1 y después ir emparejando cada uno con su complementario:

Por ejemplo, los divisores propios de 84 son 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28 y 42, con lo que basta emparejarlos en productos: 84=2*42=3*28=4*21=6*14=7*12

¿Y si se pidiera descomponerlo en tres factores mayores que 1?

Esta operación es más difícil, y no nos ayuda tanto el encontrar todos los divisores, porque se pueden producir duplicaciones.

Proponemos plantear esta búsqueda en el aula con un número concreto, por ejemplo 216, que admite estas descomposiciones: 2*2*54 2*3*36 2*4*27 2*6*18 2*9*12 3*3*24 3*4*18 3*6*12 3*8*9 4*6*9 6*6*6

La búsqueda puede organizarse en tres etapas:

Búsqueda libre: Organizada por equipos para que se puedan efectuar correcciones mutuas y lograr avances en las estrategias. Si algún equipo se acerca a la solución se le puede indicar que han de llegar a 11 posibilidades. Es el momento también de corregir los fallos.

Búsqueda con ayudas: Con otros números similares se emprenden otras búsquedas, pero ahora con algunas sugerencias:

¿Convendría descomponerlo en factores primos?

¿No sería bueno que los factores fueran crecientes, para evitar repeticiones?

¿Te vendría bien obtener una lista de todos los divisores?

Atención a la diversidad: Para quienes hayan tenido dificultades se puede repasar la descomposición en dos factores, además de proponer más descomposiciones con números sencillos.

Para los alumnos y alumnas que hayan superado con comodidad el reto, se les pueden sugerir descomposiciones en cuatro factores y la redacción de un texto breve en el que expliquen las estrategias que han seguido.

También en esta etapa se puede mostrar cómo lo hace un modelo de hoja de cálculo. El algoritmo voraz que lo consigue está explicado en el Apéndice.

Se puede descargar la hoja de cálculo que lo contiene desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.ods (Versión para Calc)

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/enfactores.xls (Versión para Excel)

MÚLTIPLO DE CUADRADOS

El número 144 es el entero positivo más pequeño que es divisible entre 1, 4, 9 y 16, los cuatro primeros cuadrados. ¿Cuál es el número más pequeño que es múltiplo de los 20 primeros cuadrados? La solución es 54192375991353600, pero ¿cómo encontrarlo?

Llegar hasta ese número puede resultar complicado, en parte porque las calculadoras y hojas de cálculo pueden no llegar a gestionar tantas cifras. Por eso, sería preferible establecer una especie de competición en el aula para ver quién consigue el número más alto que sea múltiplo de los N primeros cuadrados. Salvo algún error por nuestra parte, esta es la solución:

1	
4	4
9	36
16	144
25	3600
36	3600
49	176400
64	705600
81	6350400
100	6350400
121	768398400
144	768398400
169	129859329600
196	129859329600
225	129859329600
256	519437318400
289	150117385017600
324	150117385017600
361	54192375991353600
400	54192375991353600

Se pueden abordar varias estrategias:

* Multiplicar todos los cuadrados y después eliminar factores primos comunes. Es un método poco fiable y sujeto a errores y distracciones.

* Usar el MCM. Es la mejor estrategia, pero hay que organizarla bien. Con una hoja de cálculo no es difícil, pero se produce desbordamiento de cifras.

* Ir multiplicando cada solución por los factores nuevos que aporta la siguiente. Por ejemplo, la solución para 324, si se multiplica por 361, nos da la solución para 400 ¿por qué?

* Cualquier otra que se le ocurra al alumnado, basada en ensayo y error, pero debe completarse con alguna prueba de que el número encontrado es el más pequeño posible.

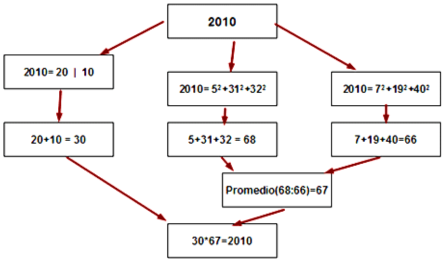
Para que la experiencia tenga éxito no se deben dar pistas, tan sólo asegurarse de que se ha entendido bien la propuesta. Si acaso, presentar el número 144 como solución para N=4.

Si se logra algo distinto de un fracaso absoluto, se puede completar el trabajo con puestas en común, entradas de blog o confección de una página en la web del centro de enseñanza en las que se vuelquen los distintos resultados, métodos y dificultades.

DECONSTRUIR Y CONSTRUIR NÚMEROS

Tomamos a palabra deconstruir de nuestro admirado cocinero Ferrán Adriá. Al igual que él descompone un plato en sus constituyentes y lo vuelve a montar de otra forma, nosotros lo haremos con números. La idea es descomponer un número entero de alguna forma, usando varias operaciones, y después volverlo a construir de otra manera totalmente distinta con los mismos ingredientes.

Lo vemos con el año 2010



La idea es usar distintas técnicas en cada paso: separar cifras, buscar factores primos, descomponer en cuadrados, hallar promedios, usar las cuatro operaciones básicas, etc.

Para un mismo número se pueden establecer competiciones en el aula, para ver qué esquema de deconstrucción es más elegante, o más complejo, o con operaciones muy distintas entre sí. Puede ser un entretenimiento muy formativo, pero se deberá adaptar a la edad de alumnado y a sus conocimientos.

COMPARTIR O NO COMPARTIR

Uno de los teoremas más elegantes de la Teoría de la Divisibilidad afirma que la probabilidad de que al escoger al azar dos números naturales, estos resulten primos entre sí, es decir, que no compartan divisores primos, es igual a $6/\pi^2$

Es evidente que la comprensión y demostración de este teorema sobrepasa las capacidades del alumnado de

Enseñanza Media, pero se puede intentar una aproximación intuitiva al mismo. Podríamos plantearnos distintas fases de una experimentación.

Fase 1

Experimentación y cálculo

Experimentación con frecuencias y con números acotados

El teorema que presentamos contiene infinitos en su enunciado. Por una parte, la variable aleatoria usada abarca todos los números naturales. Por otra, no existe máximo en la muestra que podamos estudiar. Por eso, en el aula nos podemos restringir a números acotados (por ejemplo, los menores que 100) y a muestras pequeñas, o bien toda la población de los mismos, que en este caso equivaldría a 10000 pares de números. Al alumnado entonces hay que advertirle que estudiaremos frecuencias, no probabilidades.

Experimentación

Se pueden usar bolas del bingo (por ejemplo, cien) con reposición, e ir planteando para cada par si tienen divisores comunes o no. Se puede organizar por grupos o con toda el aula. Cada alumno o alumna copiará en su cuaderno los pares y si son primos o no, para obtener frecuencias.

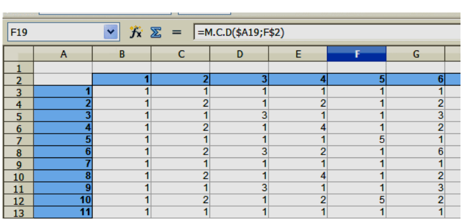
Con ello obtendremos, una tabla parecida a la siguiente:

Comparten divisores	79
Son primos entre sí	121
Total	200
Frecuencia relativa	0,6050

Si repetimos el experimento varias veces o acumulamos resultados de varios grupos, nos acercaremos al verdadero valor de la probabilidad para números menores que 100, cuyo valor exacto es 6087/10000 = 0,6087

Cálculo

¿Cómo podemos encontrar esa probabilidad exacta con una hoja de cálculo? Si no deseamos acudir a macros, podemos construir una tabla de doble entrada, por ejemplo de 100 por 100, y calcular la función de Excel y Calc **=M.C.D(a,b)** para cada par. En la imagen puede ver un fragmento de esa tabla:


F19 =M.C.D($A19;F$2)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	2	3	4	5	6
3	1	1	1	1	1	1	1
4	2	1	2	1	2	1	2
5	3	1	1	3	1	1	3
6	4	1	2	1	4	1	2
7	5	1	1	1	1	5	1
8	6	1	2	3	2	1	6
9	7	1	1	1	1	1	1
10	8	1	2	1	4	1	2
11	9	1	1	3	1	1	3
12	10	1	2	1	2	5	2
13	11	1	1	1	1	1	1

Sobre ella aplicamos la función **=CONTAR.SI(Rango de los mcd;1)**, para contar los valores 1, y nos resultarán 6087 sobre 10000.

Ampliación

Después, como ampliación, se pueden encargar experimentos con cotas más altas, como 200, o cálculos de la probabilidad exacta para números pequeños, como del 2 al 20.

Siempre obtendremos frecuencias o probabilidades cercanas al 0,6, con lo que el alumnado sospechará que el verdadero valor es el 60%, por lo que en una segunda fase habrá que sacarle del error:"Esto no es tan simple".

Un punto delicado es el de saltar a la idea de infinito, pero en estos niveles siempre haremos lo que podamos, sin forzar.

Fase 2

Simulación

Con una hoja de cálculo se pueden simular dos columnas de números aleatorios. La fórmula, como puede ser complicada, se debe sugerir.

Recomendamos usar **=ENTERO(1+ALEATORIO()*COTA)** , siendo COTA la que deseemos marcar para los números del experimento, porque funciona bien en Excel y Calc y no da problemas al recalcular.

En una nueva columna escribimos su M.C.D y contaremos, con CONTAR.SI, la cantidad de valores 1 que aparezcan. Dividimos después por el número de filas usadas y tendremos una aproximación a la probabilidad.

Esta tabla contiene el final de una simulación de números con cota 2000 en una simulación de 2000 filas:

335	481	1
1545	705	15
593	551	1
1633	1049	1
1224	1204	4
Total de pares		**2000**
Total de coprimos		**1236**
Frecuencia		**0,6180**

El total de pares se ha calculado con la función CONTAR, el de coprimos con CONTAR.SI aplicado al valor 1, y la frecuencia mediante división.

Si deseas una simulación más potente mediante macros, puedes usar este código:

```
Sub compartir

Dim i,n,cota,m
dim a,b


randomize
cota=val(inputbox("Cota"))
n=val(inputbox("Número de repeticiones"))
m=0
for i=1 to n
a=int(rnd()*cota+1)
b=int(rnd()*cota+1)
if mcd(a,b)=1 then m=m+1
next i
msgbox(m)

End Sub
```

Con esta macro podemos preparar tablas en las que se observe su acercamiento al límite teórico. La siguiente tabla está construida con 10000 simulaciones para cada nivel:

N	100	500	1000	10000	100000	1000000
P	0,6098	0,6081	0,6119	0,6060	0,6094	0,6093

Se observa la gran estabilidad de este cálculo, ya que a veces los errores propios de la simulación esconden la convergencia al límite.

Límite similar

También es igual a $6/\pi^2$ el límite de la frecuencia con la que aparecen los números libres de cuadrados. Se llaman así a aquellos que no son divisibles entre ningún cuadrado, como 21 o 30. Es un poco complicado buscar esos números de forma manual, por lo que podemos usar una función nueva en la hoja de cálculo, cuyo código puede ser:

```
Public function librecuad(a)
dim m,n,p
dim divi as boolean

if a<4 then
librecuad=1
else
divi=false:n=2:p=1
while divi=false and n<=int(sqr(a))
if a/n/n = int(a/n/n) then divi=true:p=0
n=n+1
wend
librecuad=p
end if
end function
```

Es una función que nos devuelve un 1 si el número está libre de cuadrados, y 0 si contiene alguno.

Se pueden crear columnas paralelas como las de la imagen

1	1
2	1
3	1
4	0
5	1
6	1
7	1
8	0
9	0
10	1
11	1
12	0
13	1
14	1
15	1
16	0
17	1
18	0
19	1
20	0
21	1
22	1

y después usar la función CONTAR para calcular la frecuencia

Si diseñamos dobles columnas para números de mil en mil, nos sorprenderemos de la estabilidad de las frecuencias y su cercanía al límite

Rango	Libres de cuadrados
1 a 1000	608
1001 a 2000	607
2001 a 3000	609
3001 a 4000	609
4001 a 5000	609

¿CUÁNTAS PALABRAS?

El otro día, después de jugar con mi nieta a inventar palabras, se me ocurrió una experiencia para el aula, y es la de organizar un proyecto de estimación del número de palabras que se pueden construir en nuestro idioma. ¿Cuántas pueden ser? ¿veinte millones? ¿sólo unos miles? ¿miles de millones? ¿trillones?... Quizás así, de improviso, no se te ocurra ninguna idea.

Parece ser que reuniendo todas las variantes locales, no llegaríamos a unos pocos cientos de miles de palabras usadas realmente (los diccionarios no suelen traer más de 90.000), pero aquí nos interesan las posibles palabras que podríamos inventar.

Objetivo del proyecto:

Estimar el número de palabras posibles que puede contener nuestro idioma.

Como el planteamiento es muy amplio, se deberían tener en cuenta estos detalles:

- Se puede acotar la estimación a palabras de no más de cinco sílabas. Si no, nos toparíamos con molestos infinitos.
- Es bueno que la estimación no se base sólo en técnicas de conteo. También se deben repasar los conceptos de sílaba directa, inversa o mixta, los diptongos y los triptongos.
- Lo normal es que en la puesta en común aparezcan grandes discrepancias en las estimaciones, lo que dará pie a discusión en grupo e incluso elección de la mejor estimación.

¿Qué podemos conseguir con esta experiencia?

- Estudio de las sílabas y palabras como objetos de un conteo

- Repaso de las técnicas de contar
- Asimilación del concepto de estimación y de orden de magnitud.
- Ejercitación en la puesta en común, muy necesaria en un tema que puede admitir variantes en resultados y métodos.
- Experimentación de concurrencias entre dos materias muy distintas, como la Gramática y la Combinatoria.
- Construcción de esquemas ordenados.

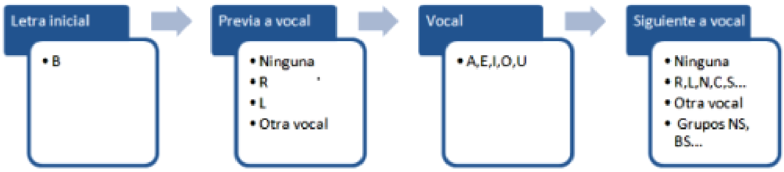
El proyecto podría tener estas fases:

Recuento de sílabas

La primera tarea podría consistir en contar el número posible de sílabas que comienzan con una letra determinada. No hay que ser muy exigentes en este primer paso, pero deberán considerar sílabas directas, mixtas e inversas en su caso. Por ejemplo, para la letra B se deberían considerar al menos estas: BA, BE, BI, BO, BU, BRA, BRE, BRI…BLA, BLE,…BAR, BER,..BAS, BES,…BAL,…BLAS, BLES,…BIA, BIAS, BUAI, BONS,…

No se trataría de realizar un estudio exhaustivo (imposible sin convenios previos), sino de aproximarnos al uso general de nuestro idioma. Es posible que se olviden sílabas como INS, TRANS, ABS,… pero no hay que darle importancia. Se trata de una estimación.

Se podrían contar mediante un producto cartesiano:



Este esquema nos una idea del número de sílabas que forma la B (sólo una aproximación)

1*8*5*12 = 40*12 = 480

Insistimos en que esta fase no ha de ser demasiado cuidadosa. Habrá letras que formen unas 480 sílabas y otras (como la A) que formen menos. Esto es lo bueno, que todo el planteamiento pueda ser discutido.

El mismo estudio que sugerimos sobre la B se podría repetir con las demás letras. Por simplificar, supongamos que el número medio de sílabas por letra fuera de 300 y que letras válidas en español contáramos 26. Ello nos daría una estimación de 7800 sílabas distintas.

Recuento de palabras

Seguimos con el producto cartesiano. El número de palabras entre una y cinco sílabas sería: $7800+7800^2+7800^3+7800^4+7800^5$= 2,88754E+19

¿A que no esperabas que fueran tantas? Son trillones. Ahora te toca criticar esta estimación, pero reconocerás que no me van a faltar palabras para inventar con mi nieta.

Pasamos por alto que las sílabas inversas sólo aparecen en primer lugar. Se trata de dar una idea. Quizás a algún lector le apetezca realizar un estudio más fino.

Puesta en común

Este paso es imprescindible. Lo ideal sería efectuarlo con una PDI y libre discusión entre grupos. Puede durar una hora o más, pero no será tiempo perdido.

No se trata de estimar mejor o peor, sino de llegar a una idea sobre el orden de magnitud y, lo que es más importante, a un intercambio de métodos.

Publicación

También este paso es insoslayable. Repito algo que siempre comento: No has aprendido un concepto si no sabes comunicarlo a otros. Se podrá efectuar en formato de documento o presentación, como una memoria de la experiencia o usando la web o el blog del centro.

Como siempre en este blog, no sugerimos nivel educativo ni momento idóneo para organizar este proyecto. El profesor jubilado no quiere opinar sobre ello. Todo eso queda ya un poco lejano.

Ideas para el aula

Después de leer una entrada sobre la conjetura de Collatz en el blog ***Matemáticas educativas*** he recordado las investigaciones escolares que realicé hace años con unos alumnos de Taller de Matemáticas. He buscado la hoja de trabajo y la comparto hoy debidamente adaptada por si fuera útil a alguien. Mi recuerdo es muy positivo, pues incluso un alumno aventajado se inventó un teoremita que ahora no puedo recordar.

Nivel 1 – Oservación

Un misterio matemático

En esta primera fase el objetivo es que todo el alumnado, individualmente, por parejas o grupos, entienda bien de qué va la conjetura de Collatz. Se puede organizar al final de una clase y pedirles que reflexionen en casa y traigan algún resultado o comentario.

Recomendamos que se use la calculadora o el cálculo mental y que trabajen por parejas, para que uno teclee y otro tome nota.

Texto

El fenómeno que vas a ver ahora tiene intrigados a los matemáticos y no saben explicar las razones del mismo. Consiste en el siguiente juego:

Piensa un número entero, por ejemplo el 11

** Ahora, si es par, lo divides por 2 y si es impar lo multiplicas por 3 y le sumas 1*

** Repite el cálculo anterior con el número que salga y así con el siguiente y con el siguiente...hasta…*

** que observes algo.*

*Comenzamos: 11 es impar, luego 11 ==> 11*3+1 = 34*

34 es par, luego 34 ==> 34/2 = 17

*17 es impar, luego 17 ==> 17*3+1 = 52*

52 es par, luego 52 ==> 52/2 = 34

¿Cuál es el final de estas sucesiones? Prueba con varios números

Nivel 2: Exploración

Cúspides y órbitas

Esta segunda parte se puede organizar con hoja de cálculo y una PDI para la presentación de la tarea.

Consiste en automatizar el trabajo creando una columna con los términos de la sucesión recurrente. Se deja una celda preparada para el número inicial (semilla) y después se extiende hacia abajo la fórmula de recurrencia. Sería deseable construir un gráfico sobre unos 100 términos de la sucesión.

Texto

Lo que calculamos ayer se hizo un poco pesado. Se lo pediremos al ordenador. Abre la hoja de cálculo, reserva una celda para la semilla y a partir de la celda que está debajo de ella extiende esta fórmula. Cuando escribimos An-1 nos referimos a la celda de arriba

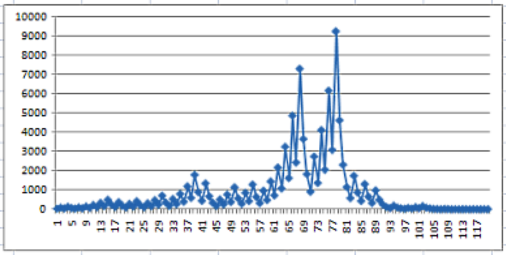
*=SI(RESIDUO(An-1;2)=0; An-1/2; 3*An-1+1)*

(Lo de RESIDUO significa “resto de dividir”. Si vale cero es que es par.)

Extiende la fórmula hacia abajo hasta un total de 100 o 200 celdas (si necesitas más sigues extendiendo). Crea un gráfico lineal con esta columna de números

Debe quedarte así:

Semilla	27
	82
	41
	124
	62
	31
	94
	47
	142
	71
	214
	107
	322
	161
	484
	242
	121



Explica qué ha ocurrido: ¿Cómo termina siempre la sucesión aunque cambies la semilla?

Cambia la semilla a tu gusto, con un número entero positivo. Siempre ocurrirá lo mismo.

Lo que acabas de descubrir ocurre para todos los números enteros, pero nadie sabe todavía la razón. Muchos matemáticos intentan demostrarlo sin éxito. (Al menos al escribir este texto).

El conjunto de los números que se recorren cuando haces este juego se llama Órbita. Para ver la órbita de un número dado, lo escribes como semilla y rellenas hacia abajo hasta que veas el primer 1 en la sucesión.

Por ejemplo, el 11 tiene una órbita de 15 números 11,34,17,52,....,4,2,1. Compruébalo.

Llamaremos cúspide de la órbita al punto más alto que tenga. Lo puedes ver muy bien en el gráfico.

El 11 tiene una cúspide de 52, que es el más alto de su órbita. Compruébalo.

Escribe aquí números que produzcan u órbitas muy largas o cúspides muy altas.

Nivel 3 Reflexión

¿Qué viene detrás de cada número?

Cuando el número aumente (porque lo hayamos multiplicado por 3 y añadido 1) diremos que ha dado un paso ascendente, y cuando disminuya (por haberlo dividido entre 2) diremos que ha sido descendente.

Reflexiona:

(a) Detrás de cada número sólo se asciende una vez (o ninguna) y después se baja. Puedes verlo en el gráfico, nunca hay dos tramos de subida distintos ¿Por qué ocurre esto? (Solución: porque si N es impar, 3N+1 es par)

(b) Hay números, como el 48, que producen muchos tramos de bajada seguidos: 48, 24, 12, 6, 3…y comienza a subir ¿Cómo puedes saber con antelación cuántas veces va a bajar? (Solución: Descomponemos el número en factores primos y leemos el exponente de 2)

(c) Ciertos números, como el 15, producen una subida, una bajada y otra subida: 15, 46, 23, 70… ¿Puedes encontrarles una fórmula? (Solución: Todos los números impares son o del tipo 4N+1 o bien 4N+3. Si es del primer tipo, su siguiente será 3(4N+1)+1=12N+4, que es múltiplo de 4 y producirá dos bajadas, luego no

nos vale ese tipo. Si es del otro tipo se tendrá $3(4N+3)+1= 12N+10$, que a su vez bajará a $6N+5$, que por ser impar subirá a $3(6N+5)+1=18N+16$.

$9N+8=4m+3$ $\quad$ $4m-9n=5$ $\quad$ $m=(9n+5)/4$ $\quad$ $n=3, m=8$

$n=3+4k, m=8+9k$

HISTORIAS DE UN TANTEO

Un partido de fútbol terminó con el resultado de 5 a 2. ¿Qué tanteos previos, incluido el 0 a 0, se pudieron dar? ¿Cuántas historias pudo tener el partido hasta llegar a ese resultado final?

Este es un problema elemental que suele figurar en textos de Combinatoria de tipo elemental o medio. La primera pregunta es muy sencilla: como los goles caen de uno en uno, para llegar al 5-2 se ha pasado por 8 tanteos (con el 0 a 0). Respecto al número posible de historias o desarrollos, en este caso existen 21. Si llamamos A a un equipo y B a otro, la secuencia de goles puede haber sido

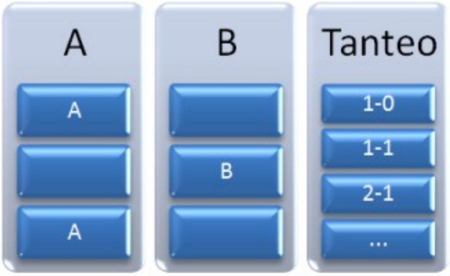
AAAAABB, AAAABAB; AAABAAB, AABAAAB, ABAAAAB, BAAAAAB, AAAABBA, AAABABA, AABAABA, ABAAABA, BAAAABA, AAABBAA, AABABAA, ABAABAA, BAAABAA, AABBAAA,

ABABAAA, BAABAAA, ABBAAAA, BABAAAA, BBAAAAA

Pensando en el uso de esta cuestión en las aulas, se puede aprovechar en varios tipos de aprendizajes distintos:

Representación

Si el alumnado ha entendido lo que se pide, ¿cómo podría representar la historia de un partido? Se podría sugerir que se inventaran varias formas, y no sólo una, pues en ese caso la que surgiría más natural es la de escribir los tanteos y perderíamos otras. Por ejemplo, la historia ABAAABA es muy probable que la representaran como 1-0, 1-1, 2-1, 3-1, 4-1, 4-2 y 5-2. Otros acudirían a una doble columna o un diagrama en árbol:



¿Se te ocurren más formas para representar las historias? Si se lo encargas a tus alumnos quizas te den alguna sorpresa.

Recuento

¿Por qué hay 21 historias posibles para el 5 a 2?

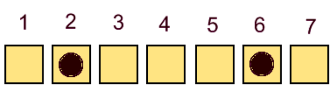
Si usamos la primera representación del tipo AAABABA descubriremos que estamos tratando con permutaciones de 7 elementos con repetición, con A tomada 5 veces y B dos.

Según la Combinatoria, su número es 7!/(2!*5!) = 7*6/2 = 21

Si esto se plantea en el aula, el mejor momento sería el inmediato anterior a la explicación teórica. Así se trabaja el problema a base de recuentos y puestas en común sin acudir a fórmulas.

Así que este problema equivale a permutar dos elementos A y B con un número fijado para cada uno. No es difícil descubrir que también se trata de un caso de combinaciones. En efecto, el equipo B ha de conseguir dos goles, y existen 7 ocasiones para hacerlo. El primer gol tiene 7 posibilidades en su localización y el segundo 6, luego en total son 42 y hay que dividir entre 2 porque los goles son indistingibles.

También se trata de un problema de cajas y bolas. Hay que situar dos bolas indistinguibles en siete cajas distinguibles con un máximo de una bola por caja:



Tal como se indicó antes, llegamos de nuevo a las combinaciones. El número de historias es $C_{7,2}$.

Si das clases de Matemáticas les puedes plantear esto a tus alumnos: Los goles van cayendo uno a uno formando una lista de siete. ¿En qué número de orden es más probable que caiga el segundo gol del perdedor? Que cuenten, que cuenten…

Simulación

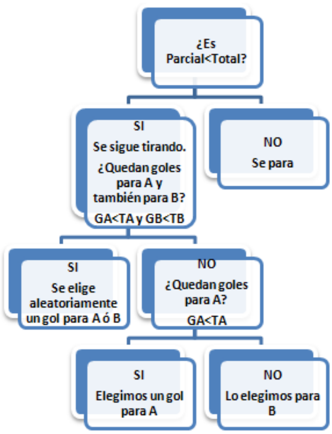
Si se reparten monedas, dados o ruletas por la clase, se podrían intentar algunas simulaciones. Por ejemplo, ¿cómo se organizaría una simulación de las historias posibles del resultado 5-2?

Proponemos una técnica que tiene un peligro oculto: Se van tirando monedas una a una. La cara puede ser un gol de A y la cruz el de B. Como A obtendrá 5 goles, al llegar a ese número rellenamos el resto con B, y si se obtienen 2 goles de B, rellenamos con A.¿Cómo simular las historias posibles de un tanteo de 5 goles a 2?

Si disponemos de una moneda, podemos asignar la cara al equipo A y la cruz al B. Si el resultado es 5-2, pararemos la simulación cuando A llegue a 5 o B llegue a 2 y, en ambos casos completaremos sin tirar la moneda. Por ejemplo, si la moneda nos ha proporcionado la lista de goles AABAB, completaremos hasta AABABAA, ya sin el uso del azar. Si nos resultara AAAAA la convertiríamos en AAAAABB.

Si te interesa el diseño en hoja de cálculo, te ofrecemos una simulación en la que las celdas importantes tienen todas la misma fórmula. Esto último constituye un condicionante muy útil para aprender a usar la función condicional SI.

Antes de nada, estudiemos el esquema de decisión de la simulación. Lo ordenaremos como un organigrama o árbol de decisión. La idea es que la celda que contenga la fórmula genere el símbolo A o el B de forma aleatoria, pero que pare y rellene cuando el tanteo se haya completado. Proponemos el siguiente:



Las variables usadas significan:
Total: Número total de goles del tanteo
Parcial: Goles totales que ya se llevan.
GA: Goles que lleva A
GB: Goles que lleva B
TA: Total de goles de A en el tanteo
TB: Ídem de B

Esta estructura da una fórmula para las celdas que contendrán los goles A ó B:

=SI(Parcial<Total;SI(Y(GA<TA;GB<TB);SI(Aleatorio>0, 5;"A";"B");SI(GA<TA;"A";"B"));" ")

Impresiona un poco, ¿verdad?.

Si deseas estudiar más a fondo esta estructura de celdas, descarga este archivo:

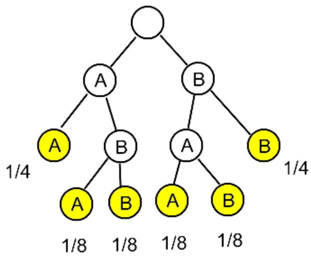
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A.Roldán 2011				Historias de un tanteo				
2									
3				Tanteo	A	5	B	2	
4									
5									
6									
7	Historia		A	A	A	A	B	A	B
8									
9	Goles A	0	1	2	3	4	4	5	5
10	Goles B	0	0	0	0	0	1	1	2
11									
12	Total	0	1	2	3	4	5	6	7
13									

http://hojamat.es/blog/tanteos.zip

Y ahora vamos con el peligro: esta simulación no produce sucesos equiprobables. En el caso del tanteo de 2 a 2, por ejemplo, resultarían más casos en AABB y BBAA que en el resto. Puedes verlo en este listado procedente de una simulación:

B	B	A	A	91
A	A	B	B	105
A	B	B	A	49
B	A	A	B	30
A	B	A	B	40
B	A	B	A	41

Si se estudia la simulación mediante un diagrama en árbol se comprenden mejor las probabilidades. Lo concretamos para un tanteo de 2-2



Los círculos de color naranja representan los momentos de parada de la simulación y su posterior relleno con A o B. Se percibe claramente la diferencia de probabilidades.

Para evitar esto se deben organizar las simulaciones completas, con todos los goles fijados, y después desechar los que no coincidan con el tanteo previsto. Por ejemplo, para simular un 3-1 tiraremos cuatro monedas seguidas, lo que nos producirá casos como AAAA, BABA que habrá que desechar, y quedarnos sólo con AAAB, AABA, ABAA y BAAA. De esta forma obtendremos sucesos equiprobables.

ESTUDIO DEL ENTORNO

LOS AÑOS JACOBEOS

Ideas para una webquest

Con motivo del fin del año jacobeo 2010 se ha incluido en la prensa la lista de los próximos años de este tipo. Puede ser una buena ocasión para estudiarlos.

¿Cuál es el intervalo promedio entre dos años jacobeos a lo largo de un siglo o dos?

Con esta pregunta podemos organizar una webquest bastante interesante. Como siempre en este blog, renunciamos a dar detalles de su estructura (Introducción, tarea, proceso, recursos, evaluación, conclusión y autores) para dar tan sólo unas ideas generales:

Relación entre bisiestos y jacobeos

En primer lugar los alumnos deben tener clara la definición de año jacobeo y el porqué de que no aparezcan cada siete años. En lo posible, deberían adivinar los ciclos de 6, 5, 6 y 11 años sin necesidad de navegar por Internet. Este recurso se debería usar para conocer aspectos históricos o para encontrar tablas de años jacobeos.

Para adivinar los distintos ciclos podrían situar los años bisiestos en distintos puntos respecto al último año jacobeo y sacar consecuencias.

Las ideas básicas serían:

- En un año normal el día de la semana de una fecha concreta avanza un día.
- En un año bisiesto avanzan dos días las fechas posteriores a Febrero (nuestro caso).

Debe recurrirse a los restos módulo 7 aunque no se les llame así.

El ciclo 6,5,6,11 debe surgir del trabajo de los grupos de alumnos, y no de la consulta en la Red.

El ciclo de 28 años

Es importante que se descubra que 28=mcm(4,7) juega un papel fundamental en el cómputo de años y la periodicidad que produce. En este momento se puede consultar páginas web adecuadas para resumir lo descubierto. Esta tabla, copiada de la Wikipedia, puede constituir una buena culminación de esta primera parte del estudio.

TABLA DE LOS AÑOS SANTOS COMPOSTELANOS DEL SIGLO XX Y XXI

	+6	+5	+6	+11
+28	1909	1915	1920	1926
+28	1937, extraordinario: 1938	1943	1948	1954
+28	1965	1971	1976	1982
+28	1993	1999	2004	2010
+28	2021	2027	2032	2038
+28	2049	2055	2060	2066
+28	2077	2083	2088	2094

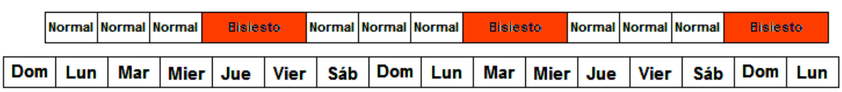
Intervalo promedio

En la segunda parte se puede plantear el cálculo de la media aritmética de los periodos. Con un poco de trabajo se podrá llegar a la conclusión de que no hay que llegar a un siglo o dos, sino que basta con el ciclo de 28 y que los cálculos pedidos se reducen a M=(6+5+6+11)/4=7, como era de esperar. Así que en términos de promedio, igual da que existan años bisiestos o que no.

Expresión de resultados

Una vez realizado el aprendizaje, se debe exigir una buena expresión de lo aprendido. Se puede realizar, por ejemplo, de alguna de estas formas:

Mediante dos regletas superpuestas. Su sola visión nos da la clave:



La regla de arriba se puede ir moviendo adosada a la inferior y así ver como cambia el salto de un día a dos en los bisiestos. Los rótulos de Normal y Bisiesto se pueden sustituir por los números de años: 2011, 2012, …

Mediante una hoja de cálculo

En la siguiente tabla de OpenOffice.org Calc la segunda columna indica el día de la semana (1=domingo) mediante la función DIASEM y la tercera indica si es bisiesto por medio de la función ESAÑOBISIESTO.

Santiago	Día sem.	Bisiesto
25/07/2010	**1**	0
25/07/2011	2	0
25/07/2012	4	1
25/07/2013	5	0
25/07/2014	6	0
25/07/2015	7	0
25/07/2016	2	1
25/07/2017	3	0
25/07/2018	4	0
25/07/2019	5	0
25/07/2020	7	1
25/07/2021	**1**	0
25/07/2022	2	0
25/07/2023	3	0
25/07/2024	5	1
25/07/2025	6	0
25/07/2026	7	0

Los domingos se han destacado mediante un formato condicional. Se destacan así los ciclos de 5, 6 y 11.

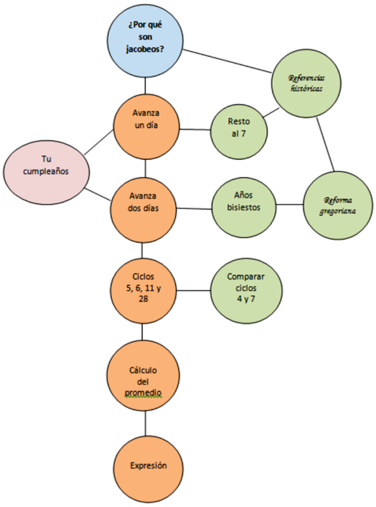
Otras formas de expresión

Se puede recurrir a documentos de texto, presentaciones, dramatizaciones, alguna exposición, páginas web, etc.

Ampliación

¿Qué son las clases de restos módulo 7?
¿Cuándo se rompe el ciclo de 28 años?
Aplica todo esto a tu cumpleaños.

A modo de mapa conceptual podemos resumir el trabajo propuesto.



BALDOSAS, PASOS Y FAROLAS

Como casi todos los profesores de Matemáticas de mi generación he intentado en clase la estimación de distancias, alturas o tiempos, a veces terminada con un aleccionador fracaso. Lo sabréis si habéis intentado medir alturas con medidores de ángulos o sombras. Creo que es una actividad muy educativa, especialmente si no se usan instrumentos de precisión, sino medidas de nuestro propio cuerpo (pasos, pies, manos,..), elementos repetidos (baldosas, vagones de un tren, farolas,…) o representaciones a escala, como los mapas de Google.

Para garantizarnos un resultado honorable y una buena práctica de medición creo que tenemos que contar con al menos estos elementos:

- Repetición de elementos razonablemente iguales (como medir por pies) y, a ser posible, pertenecientes a conjuntos distintos. Así se realizan varias mediciones.
- Un elemento al menos cuya medida real sea fiable: longitud de una baldosa, distancia entre dos bancos de un paseo, altura de un piso…
- Uso de fracciones comparativas entre medidas. Lo que desde la antigüedad hemos llamado “razón entre dos magnitudes”.
- Uso, si es posible, de la media aritmética entre estimaciones.

Ilustro estas ideas con un ejemplo que me sirvió de ejercicio y entretenimiento en mis últimas vacaciones.

Pasé unos días junto a las Salinas de San Pedro del Pinatar (Murcia, España). Un paseo muy popular es el que une dos molinos salineros abandonados, que tiene una longitud aproximada de tres kilómetros. Comienza siendo un paseo urbano (tramo A), frecuentado por quienes se aplican la terapia de los barros de las salinas, y termina como una senda ecológica (tramo B) que va a desembocar al mar abierto.

Como lo recorría con frecuencia, me planteé efectuar una estimación de la distancia total entre los dos molinos usando sólo los elementos propios de un paseo y los de la misma ruta. Para ello contaba con lo siguiente:

Pasos

La parte urbanizada del camino, quizás para estimular a las personas de cierta edad que lo usan, contiene en el pavimento la referencia a la distancia recorrida de 50 en 50 metros. Al final de esta primera parte A figura la distancia de 1182 m. Esa era la parte “fiable” de mi estimación.

Medí los pasos que tenía que dar para recorrer 50 m. Repetí varias veces esa medida contando mentalmente y me resultó una media aproximada de 60 pasos por cada 50 metros. Ya tenía un primer elemento repetitivo razonablemente conocido. Conté los pasos del segundo tramo, con la idea de multiplicarlos por la razón 50/60=5/6. No es fácil contar tantos pasos (intentadlo y veréis) y al final sólo sabía que serían unos 1850, pero con poca seguridad. Esto me daba una primera estimación: 1850*5/6= 1542 metros.

Postes

Al segundo día me di cuenta de que existían unos pequeños postes, de unos 40 cm. de altura, aparentemente equidistantes. Los medí por pasos varias veces y así confirmé que lo eran. Los conté y la parte A contenía 76 y la parte B, cuya distancia deseaba estimar, 102. Ya tenía mi segunda razón fiable: 102/76 = 51/38

Mi siguiente estimación sería 1182*51/38 = 1586 metros. Me quedaba la sospecha de que en el tramo B la distancia entre postes fuera algo menor, porque el número de pasos se acercaba en él a 19 y en el A a 20, pero no estaba seguro.

Minutos

Como sospechaba que los postes podían presentar diferencias en sus distancias mutuas, cronometré varias veces mi paseo por los dos tramos, obteniendo 17 minutos para el tramo B y 13 para la distancia conocida 1182 m., o algo más conservando la proporción. Fue una buena noticia para mí, pues confirmó mi buen estado de forma en esos días. Así que mi segunda razón podía ser 17/13 y la estimación 1182*17/13 = 1545.

Google

Sólo me quedaba acudir a un mapa en Internet. Me costó trabajo, pues no se veía bien la transición entre los dos tramos. Imprimí el mapa, pero la diferencia con las otras estimaciones era demasiado grande. Recordé entonces que el paseo urbanizado terminaba en una especie de semicírculo. Amplié la visión lo más posible hasta que apareció, cuidando después de identificar los accidentes del terreno cuando alejé el zoom para imprimir. Medí con una regla de dibujo en el mapa impreso y me resultó la razón 103/82   estimando con ella una distancia de 1182*103/82=1484

Resumiendo, la distancia total podría ser:

Pasos: 1182+1542 = 2724 m.

Postes: 1182+1586 = 2768 m.

Minutos: 1182+1545=2727 m.

Google: 1182+1484=2666 m.

Antes de encontrar la media quise criticar cada método:

* Contar pasos es cansado y desalentador, sujeto por tanto a olvidos y saltos en la cuenta.

* Los postes parecían estar más cercanos en el segundo tramo.

* Conté minutos, y no segundos, lo que disminuye la precisión.

* En el mapa no se veía bien la transición y tampoco el final de los postes respecto al segundo molino. Me pareció la menos fiable.

Así que mi estimación media fue de 2721 m. Unos días después de este juego, vi un cartel no muy visible al principio del paseo y en él se afirmaba que la distancia entre los dos molinos era de 2,7 km. ¡Pues no estuvo mal!

Ideas para el aula

Se pueden efectuar mediciones semejantes combinando varios conjuntos repetitivos:

- Ancho de un andén de ferrocarril contando baldosas, pasos, vagones o carteles publicitarios. Como elemento fiable se puede usar una baldosa medida con una regla de dibujo.
- Tramo de una calle mediante pasos, farolas, coches aparcados (asignando unos cuatro o cinco metros por coche). El elemento fiable podrá ser la distancia entre dos farolas medida con una cinta métrica.
- Avenida de un paseo, usando pasos, bancos, distancia entre árboles, etc. Aquí el único elemento fiable sería el de los pasos.

Pues nada, a intentarlo y divertirse con ello. No todo van a ser fórmulas y ecuaciones. Y siempre por equipos.

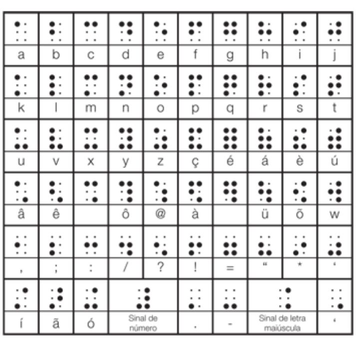
ALFABETO BRAILLE

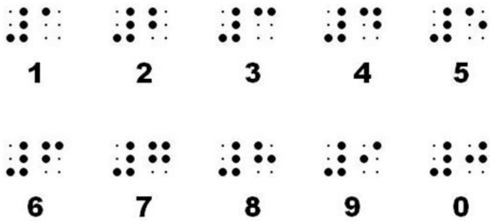
Ideas para un estudio en clase:

Es difícil motivar los temas de Combinatoria en clase, salvo los de conteos triviales. Los ejemplos usados no siempre son cercanos a la realidad de nuestros alumnos. El estudio del alfabeto Braille puede servir para lograr esa motivación si se le da un enfoque lo más interdisciplinar posible. Enunciamos a continuación algunas ideas aisladas sobre objetivos que se pueden lograr con este alfabeto. Se recomienda el trabajo por grupos.

(1) Búsquedas en Internet:

- Qué es el alfabeto Braille. Cómo se lee: Tras una breve introducción se inicia una búsqueda libre en Internet con la obligación de recopilar información. Es imprescindible obtener una imagen o varias con letras y números:





Esas imágenes se deben almacenar e imprimir para su posterior estudio.

- Escribir un resumen histórico del alfabeto en no más de 15 ó 20 líneas: Con el material almacenado, y pata evitar el uso de un simple copiar y pegar, se exigirá un resumen escrito del nacimiento y utilidad del alfabeto, de no más de 20 líneas. Si algún equipo lo desea puede ampliar el texto con otro documento complementario.
- Completar las búsquedas en la Red con otras en el entorno más próximo, como las teclas de los ascensores, una visita a la delegación de la Organización Nacional de Ciegos o cualquier otra cercana al alumnado.
- Sería conveniente que alguna frase de los documentos producidos se escribiera en Braille

(2) Para repasar Combinatoria:

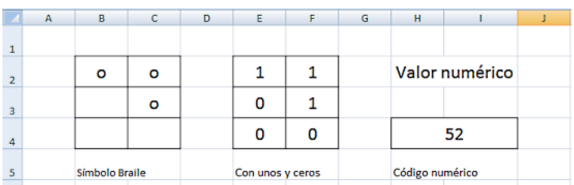
- Conteo en la celda básica de 2 por 3. Por los procedimientos que cada grupo elija, se debe llegar al total de 2^6=64 símbolos posibles. Si se ve conveniente, se puede interpretar el resultado como total de conjuntos, o variaciones de (0,1) o combinaciones de seis casillas tomadas de uno en uno, de dos en dos,…

• Repaso del producto cartesiano: Investigación de los prefijos, Número total de símbolos usando prefijos: 64*64=4096. Estudio especial de los números del 0 al 9. ¿Siguen alguna pauta de orden? Investigar.

(3) Para trabajar con Hoja de Cálculo:

Se puede confeccionar un traductor de símbolos Braille a letras. Para no complicar el trabajo se puede restringir el estudio a la célula básica sin prefijos. Se podría dividir el diseño en tres etapas:

(a) Traducir el esquema de seis puntos a un número binario



En la imagen se ha preparado, ajustando altura y anchura de las celdas, la célula básica del alfabeto en el rango B2:C4. Como punto se ha usado la letra “o”, pero puede servir cualquier otro.

La traducción a binario se consigue con la función SI. Copiamos a continuación la fórmula implementada en E2, que se ha extendido después al rango E2:F4:

=SI(B2="o";1;0)

Por último, se han asignado los valores 32, 16, 8, 4, 2 y 1 a cada una de las seis celdas. En el ejemplo se ha seguido el orden E2, F2, E3, F3, E4 y F4, para llegar a la fórmula

=E2*32+F2*16+E3*8+F3*4+E4*2+F4

Con ella conseguimos la traducción del símbolo Braille a un código comprendido entre 0 y 63 (64 posibilidades)

(b) Traducir el binario a símbolo Braille

Esta es la parte más pesada del trabajo, y por eso se aconseja el trabajo en equipo. Ahora, para cada letra se generará el código numérico correspondiente y se confeccionará una tabla de traducción. Mientras unos escriben los símbolos Braille en el primer rango otros toman nota del código generado y unos terceros van confeccionando la tabla traductora. Si se ve que falta tiempo, se pueden considerar sólo las diez o quince primeras letras.

Se pueden organizar en una tabla de dos columnas. Por dar comodidad al resto del diseño, situaremos a la izquierda el código y a su derecha la letra correspondiente:

32	a
40	b

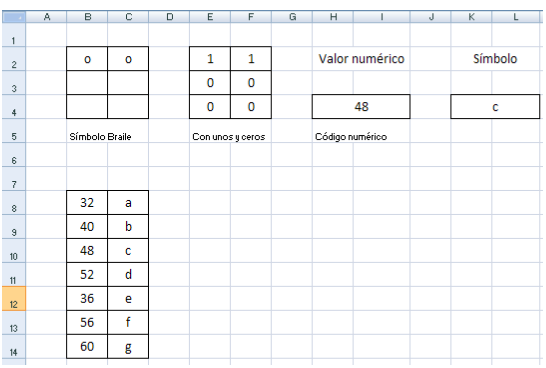
48	c
52	d
36	e
56	f
60	g

(c) Traducción de código numérico a símbolo

Una vez confeccionada la tabla, que la suponemos situada en el rango B8:C24, por ejemplo, bastaría con usar la función BUSCARV para que consiguiéramos la escritura del símbolo a la derecha del código en la celda K4:

=BUSCARV(H4;B8:C14;2)

En la imagen puedes ver completa la traducción de la letra c:



(4) Trabajos complementarios

Para atender a la diversidad y al trabajo voluntario individual, se pueden proponer también:

- Traductor para números
- Estudio e interpretación de los prefijos
- Búsqueda de información sobre el Braille Unicode
- Concurso de microrelatos en Braille.
- Cualquier otro trabajo propuesto por el alumnado

TERRONES DE AZÚCAR

Ayer compré un envase de terrones de azúcar y me llamó la atención la información que daba sobre el contenido: 126 terrones.

Después de pensar un poco creí estar en disposición de adivinar las dimensiones de cada terrón. Medí el envase y resultó tener las dimensiones 8,8, 11,2 y 5,5 respectivamente, de forma aproximada. En contra de lo que creía, aún tenía dudas después de la medida, pero me acordé de que los terrones tienen una cara casi cuadrada.

¿Cuál fue mi solución?

Este tipo de actividad es la que yo habría desarrollado en un taller de Matemáticas si estuviera en activo, pero ahora sólo puedo proponerlo. Creo que daría lugar a una interesante discusión en grupo.

ESPERANZAS EN EL METRO DE MADRID

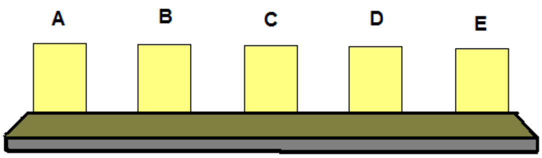
Conteos ordenados.

El otro día tomamos un amigo y yo el metro para recorrer un trayecto que finalizaba en una estación desconocida para nosotros. Comentamos dónde situarnos en el andén de partida, y él me respondió: *“En el centro”*. ¿Habrías decidido tú lo mismo? Seguramente sí. Todos tenemos la percepción de que es el punto en el que es más probable que tengamos que caminar menos.

¿Lo entenderían así nuestros alumnos?¿Será la decisión más adecuada?

Podemos aprovechar esta situación para repasar los conceptos de variable aleatoria y esperanza matemática. Para ello tenemos que simplificar el problema:

En primer lugar, estudiaremos el tema como si la situación fuera totalmente aleatoria.
También, para simplificar, reduciremos las entradas y salidas en cada andén a una sola (en Madrid hay muchas con dos).
Supondremos que las salidas sólo están situadas en cinco posibles posiciones aproximadas:



Serían dos extremas, a las que llamaremos A y E, la central C y las intermedias B y D.

Podemos asignarles los números 1 al 5 y considerarlas aleatorias.

Variables

Variable X

Como deseamos estudiar el problema en general, llamaremos X a la variable, entre 1 y 5 que representa la posición de la puerta **de entrada** a nuestro andén desde la calle. **Para esta estación sería una constante.**

Variable Z

Será **el punto del convoy** que elijamos para subirnos. Hay muchas puertas, pero consideraremos sólo las cinco posiciones que hemos fijado.

Variable Y

Representa **la puerta de salida de la estación de destino**. Para nosotros, si la estación es desconocida, funciona como aleatoria (perdonadme los puristas).

Todo trayecto que recorramos en los andenes está condicionado por esas tres variables. Podemos contar distancias **asignando la unidad a la longitud**

recorrida entre dos posiciones consecutivas. Así, las posibilidades de recorrer determinadas distancias entre X e Y vendrían dadas por tablas de doble entrada con las diferencias en valor absoluto entre valores. Habría cinco, una para cada elección nuestra de la variable Z. No es nada difícil reproducirlo en clase, y además es ameno.

Incluimos las tablas para los valores de Z 1 y 2 y dejamos a los lectores y sus alumnos la confección de las tres restantes.

Subir en la posición 1 (Extrema)

Subimos en la posición 1

	Salida					
Llegada	1	2	3	4	5	
1	0	1	2	3	4	10
2	1	2	3	4	5	15
3	2	3	4	5	6	20
4	3	4	5	6	7	25
5	4	5	6	7	8	30
	10	15	20	25	30	100

La columna de la derecha representa la entrada al primer andén. La fila de arriba la puerta de salida del segundo andén y en esta primera tabla suponemos que elegimos subir en la posición Z=1. Si nos situáramos en el extremo del convoy (Z=1) y preguntáramos a quienes se suben cuántos tramos han de recorrer sumando entrada y salida nos resultaría una media de 4 pasos, pues la tabla contene 25 posibilidades y la suma de tramos es 100.

Subir en la posición 2 (Intermedia)

Subimos en la posición 2						
	Salida					
Llegada	1	2	3	4	5	
1	2	1	2	3	4	**12**
2	1	0	1	2	3	**7**
3	2	1	2	3	4	**12**
4	3	2	3	4	5	**17**
5	4	3	4	5	6	**22**
	12	**7**	**12**	**17**	**22**	**70**

En este caso todas las posibilidades suman 70, luego la media de tramos recorridos será de 70/25=2,8. Hay una diferencia bastante grande con la anterior, que era de 4. Las personas que te encuentres en una posición intermedia han recorrido de media 2,8 tramos.

Subir en la posición 3 (Central)

Esta tabla la dejamos como ejercicio, aunque es la más importante, pero no vamos a descubrirlo todo. Hay que dejar que trabajen los alumnos. El resultado que debe dar es de 60 tramos totales con una media de 2,4.

Luego contando las situaciones de todos los viajeros que suban al metro, tenía razón mi amigo: Subir en el centro es lo más ventajoso si contamos todas las estaciones posibles de entrada y salida, pero…

El problema se planteó estando mi amigo y yo en una estación concreta. Dijimos al principio que esta posición era una constante. ¿Qué ocurrirá entonces?

Si has confeccionado las cinco tablas y ahora te fijas en las columnas de cada una, el mínimo de tramos esperados es cuando al llegar al andén **no te mueves de tu sitio.** No te lo creas hasta que no lo compruebes.

Así que dejémonos de cálculos: ***lo mejor es no moverse***.

Otros cálculos

(1) Intenta con tus alumnos comprobar que la media de tramos recorridos por los viajeros si contamos todas las entradas, incorporaciones y salidas posibles (variables X,Y,Z) es de 3,2. Recuerda que en los extremos era 4, en los intermedios 2,8 y para el centro 2,4

Puedes usar una tabla total como esta:

	Salida					
Llegada	1	2	3	4	5	
1	20	17	16	17	20	90
2	17	14	13	14	17	75
3	16	13	12	13	16	70
4	17	14	13	14	17	75
5	20	17	16	17	20	90
	90	75	70	75	90	400

En ella también puedes calcular la desviación típica del conjunto de las 25 posibilidades, que es de 1,76

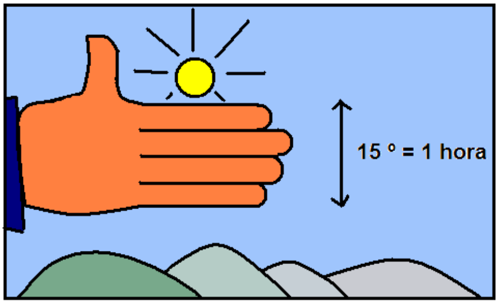
(2) Simulación: Una persona tira el dado desechando tirada si sale el 6 para simular la salida. Otra hace lo mismo con otro dado para simular la llegada. **Y una tercera para el convoy.** Se restan en valor absoluto las dos tiradas. Se repite hasta 40 o 50 veces. Al final se estima la esperanza y la varianza.

(3) Con hoja de cálculo: Usamos ALEATORIO-ENTRE(1;5) para simular. Se escriben en dos columnas unas cien tiradas dobles y se restan aplicando la función ABS. Después se usa la función PROMEDIO (y VAR para la varianza). También nos sirve una calculadora que posea la función Rnd. La hemos realizado con hoja de cálculo y se confirma la media de 3,2 pasos para todas las posibilidades.

(4) Puedes plantear el problema con menos posiciones (por ejemplo 3) o con más. A ver qué consigues.

MEDIR EL MUNDO CON LOS DEDOS

Hace poco volví a leer el procedimiento de calcular las horas de sol que quedan antes del ocaso mirando el cielo con el brazo extendido y contando una hora por cada vez que podamos insertar cuatro dedos de nuestra mano. Quizás sea un método poco exacto y criticable, pero me animó a jugar con las medidas a través de proporciones corporales, dejando a un lado la medida de ángulos, que no se contempla en los objetivos de este blog.



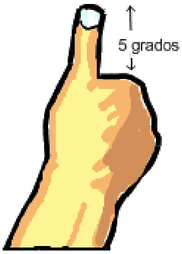
Esta técnica me recordó otras parecidas, que pude consultar en el libro de Geometría Recreativa de Yakov Perelman y las que yo mismo experimenté cuando era profesor en activo.

Mi propósito es reunir y comprobar algunas de estas técnicas añadiendo propuestas nuevas, estableciendo un orden lógico y con el uso de hojas de cálculo. En esta entrada trataremos de medidas que se pueden efectuar con los dedos de la mano sin considerar ángulos.

Parte 1 – Medidas y proporciones

Los dedos de la mano comparados con la longitud del brazo constituyen goniómetros bastante aceptables. Por ejemplo, se ha propuesto muchas veces intentar tapar la imagen de la Luna mediante el dedo índice o el pulgar con el brazo extendido. De esa forma se demuestra que su tamaño aparente es mucho menor del que se cree. Podemos organizar en el aula prácticas similares mediante el uso de los dedos de la mano. Comenzamos con este de un solo dedo.

Primer multiplicador corporal



Elegimos el pulgar porque se puede hacer formar un ángulo casi recto con el brazo, lo que aumenta su fiabilidad. El pulgar es un transportador de ángulos: lo usan los pintores para medir proporciones en un paisaje y con el mismo dedo trasladarlas al cuadro. Esto es lo que proponemos, usar la proporción entre dedo y brazo para comparar alturas y distancias. De esa forma, si conocemos uno de los dos datos, podemos calcular el otro. Daremos ejemplos más adelante.

Llamaremos primer multiplicador P1 al cociente entre la longitud de nuestro brazo y la del pulgar extendido en ángulo recto. En el caso del autor este cociente es de 10 con una cierta aproximación. Por tanto, la altura que tape nuestro pulgar tendrá una longitud diez veces más pequeña que la distancia que la separa de nosotros. Así, una casa de cinco pisos, que a unos 3 metros largos por piso tendrá una altura de unos 20 metros, si la tapa nuestro pulgar extendido verticalmente estará a unos 200 metros de nosotros. Esta proporción equivale a un ángulo de visión de unos 5,7º (Perelman sugiere 4º).

Además de esa proporción P1=10 podemos usar muchas más a partir de la mano y el brazo. Si proponemos estas medidas en el aula quizás bastaría con que se concreten sólo unas tres proporciones. Estas son las más destacadas (usando siempre el brazo extendido, salvo en el caso del índice que se inclina un poco):

P2 - Grueso del pulgar medido a la altura de la uña: cercano a 40, o bien unos 2 grados.

P3 – Dedo índice a nivel de uña y ligeramente inclinado hacia adelante: unos 50, que equivalen a un grado largo.

P4 – Anchura del puño cerrado medido en los nudillos: 8 o 7º (en algunos textos usan 10º)

P5 – Distancia entre pulgar e índice ambos extendidos: 3,7 o 15º

¿Qué podríamos organizar en el aula?

Daremos algunas ideas ordenadas de cómo vemos una serie de experimentos de este tipo.

1) Toma de medidas en nuestro cuerpo

Es la fase divertida y caótica, pues se trata de que el alumnado proceda a encontrar tres proporciones entre mano y brazo en su propio cuerpo. Se puede realizar por equipos, con medidas reiteradas y cálculo de promedios, así como un pequeño comentario de qué proporción P1 a P5 (u otras) se ve más idónea.

Se puede terminar con una puesta en común en la que se explique el fundamento de la medición que se puede efectuar con esas proporciones (triángulos semejantes, teorema de Thales, razones trigonométricas si las conocen, ejemplos prácticos o históricos, etc.)

2) Calibrado

En la fase anterior, entre bromas y comentarios se han podido cometer errores. El siguiente paso podría ser el de calibrar nuestras proporciones, es decir, aprovechar medidas conocidas para ver si hemos trabajado bien. Damos algunas ideas:

2a) Una experiencia propia: El autor, en sus paseos veraniegos, suele tener a la vista la cruz del Valle de los Caídos, cuya altura es de 108 metros y puede taparla aproximadamente con el ancho de su dedo pulgar (P2). Según la página web de Cartografía de Madrid, la cruz se encuentra a 4500 de donde se ha medido, por lo que el factor multiplicador de su pulgar es de unos 42.

2b) Nos informamos de la altura de un monumento, como la torre de la iglesia de nuestro pueblo, y nos alejamos hasta que se tape con el pulgar extendido (P1), que podrán ser bastantes metros, por lo que podríamos usar una carretera que disponga de los postecillos que miden hectómetros.

2c) Colgamos una cuerda desde una ventana del centro escolar y medimos su altura. Nos separamos unos metros y contamos cuantos pulgares o índices necesitamos para llegar desde al suelo hasta la ventana (quien sabe de esto adivinará que no es un método exacto)

3) Realización de medidas

Una vez calibradas nuestras proporciones corporales nos pondremos en acción: o medimos distancias con anchuras o alturas conocidas, o bien medimos estas alejándonos lo suficiente. Es preferible que la propuesta de medida salga del alumnado, y que los profesores sólo sugieran cuando falten ideas. Ahí van algunas:

3a) En un paseo por el campo medimos con pasos la anchura de un camino. Después intentamos tapar con el ancho del pulgar esa misma anchura unos metros más adelante. La distancia a ese punto que abarca el pulgar será de unos 300 metros.

3b) Si tapamos un persona con el truco del pintor (pulgar hacia arriba P1), estaremos a unos 20 metros de ella.

3c) Vistos desde la calle, la distancia entre piso y piso en una casa es de 3 metros. Si lo tapamos con el índice (P3) estaremos a unos 150 metros, si es con la uña del pulgar (P2) a unos 100 y si es con el pulgar completo (P1), a unos 30.

3d) En una carretera recta es posible que situados en un punto kilométrico veamos el siguiente. En ese caso podemos contar los dedos índices (P3) que caben en la altura de un árbol. Por cada dedo sumaremos unos 20 metros al árbol.

3e) Situados a unos 10 km de una cordillera (lo puedes medir en una página web de mapas, o con el GPS), cada ancho de dedo índice (P3) que acumulemos hacia arriba representará 200 metros de altura. Si tú estás a un nivel de 1000 metros y necesitas tres dedos índices para tapar un pico, este tendrá unos 1600 metros de altitud. Si sabes este dato, con los dedos puedes saber a qué distancia estás, si sabes buscar bien la horizontal.

Uso de la hoja de cálculo

Nos puede servir para:

- Cotejar una misma longitud medida con procedimientos diferentes
- Hallar una longitud total mediante la suma de productos de medidas parciales obtenidas con distintos procedimientos.

- Crear una sencilla herramientas para resolver proporciones.
- Confección de informes de resultados.

Presentación

Quien siga este blog sabrá que en cada actividad que propongamos no falta nunca la expresión de resultados. Sólo se ha aprendido verdaderamente lo que somos capaces de explicar a otros. Como en otras ocasiones, proponemos la confección de documentos, presentaciones en PowerPoint, Impress o Prezi, colaboración en la web del centro y cualquier otra forma de conseguir que el alumnado le cuente a los demás lo que ha aprendido.

Proyectos

Sería muy rico que todo esto fuera parte de un proyecto global de medida en el que cada grupo aporte datos nuevos. Por ejemplo, crear un polígono de alturas de tu pueblo o barrio, es decir, crear una triangulación en la que en cada vértice se aporte la altura de un edificio notable o accidente geográfico.

También puede emprenderse un trabajo interdisciplinar. Si se dispone de algún pequeño barómetro de bolsillo, se puede emprender un cálculo de la altura relativa de las montañas que rodeen al pueblo y después usar el barómetro como altímetro, así como proponer una corrección de los barómetros según la altura y presentarlo en el Ayuntamiento. Un complemento muy rico sería el de relacionar las alturas con la fauna y flora.

Estadísticas de las alturas de los árboles más frecuentes en nuestro entorno, sean de ornato ciudadano o rurales. Si se completa con informaciones de los agricultores, se podría correlacionar la altura con la edad. Se puede aplicar, por ejemplo, a olivos, frutales y eucaliptos

SOLUCIONES

También sin calculadora

(1) Si los números son abc y bca la cifra b ha de ser divisor de 99(a-c) (en valor absoluto)

(2) 11 y 792

(3) La distancia es igual a 99(a-c)/b. Puede ocurrir que b no divida a 99, sino a c-a. En ese caso la distancia será un múltiplo de 99: 198, 297, 396,…y su cifra central, 9, divide a 99, luego es accesible.

Por el contrario, si divide a 99 ha de ser un 3, pues si fuera 9 la distancia tendría sólo dos cifras. Así, si b=3, la distancia es igual a 33 por un número de una cifra:132, 165, 198, 231, 264 y 297, que son todos accesibles.

(4) El 135: 531-135=396=132*3

Terrones de azúcar

Solución: 126=2*3*3*7, luego la única descomposición parecida a la forma del envase es de 3*6*7, pero no sabía si los terrones se apilaban en 6 capas de abajo a arriba o de 7. Había entonces que basarse en la cara casi cuadrada.

Si divido 8,8/6=1,47 11,2/7=1,6 5,5/3=1,83 lo que me daría una cara no muy cuadrada. Cambié los cocientes: 8,8/7=1,26, 11,2/6=1,87, 5,5/3=1,83, que sí tiene dos lados casi iguales. Así que la solución en mm. Sería 13, 19 y 18.

Abría el envase, medí los terrones y, en efecto, había acertado.

APÉNDICE

ALGORITMO VORAZ PARA DESCOMPONER EN FACTORES

Entrada: Un número entero m

Operación: Descompone n en tres factores de todas las formas posibles.

Código en Basic

```
Sub voraz

dim m,n,r,j,fila as long
dim f(10),nume(10) as long
dim esdivi,sobrepasa as boolean
dim expre$
```

m=val(inputbox("Número a descomponer")) *(Lee el número)*
n= val(inputbox("Número de factores")) *(Lee el número de factores)*

(El número de factores debe ser pequeño, de 3 a 6, por ejemplo)

r=1 *(Este contador avanza y retrocede según vayan los cálculos)*
f(1)=1:nume(1)=m

while r>0
f(r)=f(r)+1 *(Factor que se prueba)*

(A continuación se acepta si es divisor y no sobrepasa sqr(n))

if nume(r)/f(r)= int(nume(r)/f(r)) then esdivi=true else esdivi=false
if f(r)>sqr(nume(r)) then sobrepasa=true else sobrepasa=false

if sobrepasa then *(Se ha terminado con este factor. Retrocede)*
r=r-1

else

if esdivi then *(Avanza)*
r=r+1
nume(r)=nume(r-1)/f(r-1) *(Es voraz. Se come al número)*

if r=n then *(Se han encontrado todos los factores pedidos)*
expre=""
for j=1 to n-1:expre=expre+str$(f(j))+"*":next j
expre=expre+str$(nume(r)
msgbox(expre) *(Se presenta el resultado)*
r=r-1 *(Se retrocede para buscar más)*
else

```
    f(r)=f(r-1)-1
    end if
end if
end if
wend

End Sub
```