5. SISTEMAS LINEALES

5. 1. *Sistemas de la forma: Una ecuación con dos o más variables.*

1.1 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $3x + 5y = 23$.

La ecuación $3x + 5y = 23$ es equivalente a $3x \equiv 23(mód. 5)$, esto es, planteamos conocer el valor de X en función de Y.
Si multiplicamos la ecuación por 2 y sacamos restos respecto al módulo 5, obtenemos $2(3x \equiv 23)(mód. 5)$ = $6x \equiv 46(mód. 5)$, o sea, $x \equiv 1(mód. 5)$ luego, la solución de X viene determinada por $x = 1 + 5t$, siendo t un entero arbitrario.
El número *2*, que usamos para multiplicar a la ecuación, no es arbitrario, corresponde a un coeficiente de la $Identidad\ Bézout$.
La ecuación tendrá tantas soluciones como valores se le asignen a *t,* por tanto es un sistema indeterminado.

1.2 Utilizando sistemas diofánticos, resolver la ecuación $13x + 17y = 29$.

Una ecuación de la forma $Ax \pm By = C$ tendrá solución si, y sólo si, el $mcd(A, B) = d$ divide a *C*, esto es, $d|C$. Como $mcd(13,17) = 1$ y $1|29$, la ecuación tiene solución.
Sea $mcd(13,17) = 1 = 13(+4) + 17(-3)$, donde los coeficientes 4 y 3 vendrían determinados por el $Algoritmo\ de\ Euclides$, $mcd(a,b) = d = a(\pm s) + b(\pm t)$.
A partir del algoritmo anterior, $Bézout$ desarrolla su propia identidad en la que, $mcd(a,b) = d = a(\pm s) + b(\pm t) = a(x_0 + \frac{b}{d}t) + b(y_0 - \frac{a}{d}t)$ donde x_0 *e* y_0 son soluciones de la ecuación para un coeficiente independiente d, o sea, $13(4 + \frac{17}{1}t) + 17(-3 - \frac{13}{1}t) = 1$.
Procedemos a calcular X en función de Y:

$$13x = 29 + 17t, \text{ equivalente a } 4\cdot(13x = 29) + 17t \rightarrow 52x = 116 + 17t$$

Los restos de $52\ y\ 116$ respecto a 17 son:

$$52x = 116 + 17t \rightarrow x = 14 + 17t, \text{ que es el valor } X.$$

El valor de Y en función de X lo obtenemos por sustitución:

$$13(14 + 17t) + 17y = 29 = 182 + 221t + 17y$$
$$17y = 29 - 182 - 221t = -153 - 221t$$
$$y = -9 - 13t$$

La solución a la ecuación: $13(14 + 17t) + 17(-9 - 13t) = 29$

1.3 Utilizando sistemas diofánticos, resolver la ecuación $7x + 11y + 13z = 47$.

El $mcd(7,11,13) = 1$ divide a 47 luego, la ecuación tiene solución con dos variables principales y una libre, a elección.
Consideremos $X\ e\ Y$ como variables principales y Z como variable libre, la ecuación se soluciona en la forma $7x + 11y = 47 - 13z = 1$, con dos parámetros: s para la variable libre y t para las variables principales.
Como $mcd(7,11) = 1 = 7(+8) + 11(-5) = 7(8 + 11t) + 11(-5 - 7t)$, despejamos X en función de Y:

$7x = 47 - 13s + 11t$, equivalente a $8(7x = 47 - 13s) + 11t$, o sea, $x = 2 - 5s + 11t$.

Calculamos Y por sustitución:

$$7(2 - 5s + 11t) + 11y = 47 - 13s = 14 - 35s + 77t$$
$$11y = 47 - 14 + 35s - 13s - 77t = 33 - 22s - 77t$$
$$y = 3 + 2s - 7t$$

Los valores de las variables son:

$x = 2 - 5s + 11t$, $y = 3 + 2s - 7t$ y $z = s$.

y, por tanto, la ecuación tiene como solución:

7(2-5s+11t)+11(3+2s-7t)+13(s)=47.

1.4 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $11x + 43y + 23z = 101$.

Empecemos por calcular Z en función de X:

$43y + 23z \equiv 101(mód. 11)$, equivalente a $23z \equiv 101 - 43s(mód. 11)$.

Sacamos restos respecto al módulo 11:

$23z \equiv 101 - 43s(mód. 11) \rightarrow z \equiv 2 - 10s(mód. 11) \rightarrow z = 2 - 10s$.

Ahora, por sustitución, calculamos X en función de Y:

$11x + 23(2 - 10s) \equiv 101(mód. 43)$, $11x \equiv 12 + 15s(mód. 43)$, equivalente a $x \equiv 5 + 17s(mód. 43) \rightarrow x = 5 + 17s + 43t$.

Finalmente, por sustitución, despejamos Y:

$$11(5 + 17s + 43t) + 43y + 23(2 - 10s) = 101$$
$$55 + 187s + 473t + 43y + 46 - 230s = 101$$
$$43y = 101 - 55 - 46 - 187s + 230s - 473t = 0+43s-473t$$
$$y = 0+ s-11t$$

Los valores de las variables son:

$x = 5 + 17s + 43t$, $y = 0 + s - 11t$ y $z = 2 - 10s$.

Y, por tanto, la ecuación tiene como solución:

11(5+17s+43t)+43(0+s-11t)+23(2-10s)=101.

1.5 Utilizando sistemas diofánticos, resolver la ecuación $9x + 10y + 15z = 61$.

Como el $mcd(9,10,15) = 1$ y $1|61$, la ecuación tiene solución pero, ¿cómo?

Si $mcd(9{,}15) = 3,\ 3 \nmid 61,$ o sea, no tiene solución. Si $mcd(10{,}15) = 5,\ 5 \nmid 61,$ tampoco tiene solución, luego, sólo nos queda la opción $mcd(9{,}10) = 1$, $1|61$.
Resolvemos Y en función de X:

$10y \equiv 61(mód.\,9)$, que tiene como solución $y \equiv 7(mód.\,9) \rightarrow y = 7 + 9s$.

Por sustitución, tenemos:

$$9x + 10(7 + 9s) + 15z = 61 = 9x + 70 + 90s + 15z$$
$$9x + 90s + 15z = 61 - 70 = -9 \rightarrow 3x + 30s + 5z = -3$$

Despejamos X en función de Z:

$$3x + 30s \equiv -3(mód.\,5), x + 10s \equiv -1(mód.\,5) \rightarrow x = 4 + 5t.$$

Ahora, despejamos Z por sustitución:

$$9(4 + 5t) + 10(7 + 9s) + 15z = 61 = 36 + 45t + 70 + 90s + 15z$$
$$15z = 61 - 36 - 70 - 90s - 45t = -45 - 90s - 45t \rightarrow z = -3 - 6s - 3t.$$

Para las variables, los valores son $x = 4 + 5t$, $y = 7 + 9s$ y $z = -3 - 6s - 3t$ y la solución a la ecuación:

9(4+5t)+10(7+9s)+15(-3-6s-3t)=61.

1.6 Comprobar si el número de soluciones de una ecuación varía según se resuelva como modular o como diofántica. Utilizar la ecuación $15x + 35y = 25$.

Como el $mcd(15{,}35) = 5$, la ecuación diofántica se resuelve como $3x + 7y = 5$.
Si resolvemos como ecuación modular, tendrá tantas soluciones como determine el mcd en nuestro caso*, cinco* soluciones.
La solución diofántica se desarrolla:

$$3x = 5 + 7t, x = 4 + 7t.$$
$$7y = 5 - 3(4 + 7t) = -7 - 21t, y = -1 - 3t.$$

La solución: $15(4 + 7t) + 35(-1 - 3t) = 25$.
Como ecuación modular, la solución es:

$3x \equiv 5$(mód.7), equivalente a $x \equiv 4(mód.\,7) \rightarrow x = 4 + 7t$.

Dando valores a t, para el rango $4\ a\ 35$, tenemos $4, (4 + 7), (4 + 14), (4 + 21), (4 + 28)$, esto es $\{4{,}11{,}18{,}25{,}32\}$, de donde, los valores de la ecuación como modular son:

$$x \equiv 4{,}11{,}18{,}25{,}32(mód.\,35).$$

Observar que las soluciones forman una progresión aritmética de razón *7,* precisamente el $módulo$. Queda por tanto comprobado que el número de soluciones es distinto según se utilice resolución diofántica o resolución modular.

1.7 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $175x + 215y = 1005$.

El $mcd(175{,}215) = 5$, luego, tiene $cinco$ soluciones en la forma $35x \equiv 20(mód. 43)$.
Como $35x \equiv 20(mód. 43)$ es equivalente a $x \equiv 34(mód. 43)$, la solución general es

$$x \equiv 34{,}77{,}120{,}163{,}206(mód. 215).$$

1.8 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $117x + 153y = 171$.

El $mcd(117{,}153{,}171) = 9$, luego, la ecuación tiene $nueve$ soluciones.
La ecuación $117x + 153y = 171$ es equivalente $13x \equiv 19(mód. 17)$ y tiene como solución

$$13x \equiv 8(mód. 17) \to x = 8 + 17t.$$

y la solución general:

$$x \equiv 8{,}25{,}42{,}59{,}76{,}93{,}110{,}127{,}144(mód.153).$$

1.9 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $5x + 7y + 11z = 0$.

Se trata de un sistema homogéneo del que podemos plantear la siguiente solución:

$$7y + 11z \equiv 0(mód. 5),\ 11z \equiv -7s(mód. 5),\ z \equiv -2s(mód. 5),$$
$$z \equiv 3s(mód. 5),\ z = 3s.$$

$$5x + 11(3s) \equiv 0(mód. 7),\ 5x \equiv -5s(mód. 7),\ x \equiv -s(mód. 7),$$
$$x = -s + 7t.$$

Por sustitución, despejamos Y:

$$5(-s + 7t) + 7y + 11(3s) = 0 = -5s + 35t + 7y + 33s$$
$$7y = -28s - 35t, y = -4s - 5t.$$

La solución de la ecuación es,

$$5(-s+7t)+7(-4s-5t)+11(3s)=0$$

1.10 Utilizando sistemas modulares, resolver la ecuación $10x + 14y + 21z = 0$.

El $mcd(10{,}14{,}21) = 1$, $1|0$, luego, la ecuación tiene solución.
Despejamos Z en función de X:

$$14y+21z \equiv 0(mód. 10),\ 4y + z = 0(mód. 10),\ z = 0 - 4s.$$

Sustituimos este valor en la ecuación general:

$$10x + 14y + 21(-4s) = 0 = 10x + 14y - 84s$$

Dividimos el resultado por 2:

$$\frac{10x + 14y - 84s = 0}{2} = 5x + 7y - 42s = 0$$

Despejamos X en función de Y:

$$5x - 42s \equiv 0(mód.7),\ x \equiv 0(mód.7),\ x = 0 + 7t,$$

Despejamos Y por sustitución:

$$10(0 + 7t) + 14y + 21(-4s) = 0 = 70t + 14y - 84s$$

Dividimos el resultado por 14:

$$\frac{70t + 14y - 84s = 0}{2} = 35t + 7y - 42s = 0$$
$$7y = 42s - 35t,\ y = 6s - 5t.$$

La solución de la ecuación resulta ser:

$$10(0+7t)+14(0+6s-5t)+21(0-4s)=0$$

1.11 Resolver la ecuación $5x + 7y \equiv 3(mód.13)$.

La ecuación $5x + 7y \equiv 3(mód.13)$ es equivalente a $5x + 7y + 13z = 3$.
Resolvemos con Z libre y $X\ e\ Y$ principales:

$$5x = 3 - 13s + 7t, 3(5x = 3 - 13s) + 7t, x = 2 + 3s + 7t$$
$$7y = 3 - 5(2 + 3s + 7t) - 13s = -7 - 28s - 35t$$
$$y = -1 - 4s - 5t$$

La solución para ecuación diofántica es:

$$5(2+3s+7t)+7(-1-4s-5t)+13s=3$$

La solución modular se consigue transformando la solución diofántica al módulo 13.
Para X, al ser $x = 2 + 3s$ positiva, no procede ninguna transformación.
Para Y, al ser $y = -1 - 4s$ negativa, debemos transformar respecto al *módulo 13,* esto es, $y = -1 - 4s \cong 12 + 9s$ y la solución modular:

$$5(2+3s)+7(12+9s)\equiv 3(mód.13).$$

Si comparamos las dos soluciones, diofántica y modular, observaremos que, mientras la primera tiene infinitas soluciones, la segunda tiene sólo trece, exactamente tantas como el módulo utilizado. Esto se debe a que estamos operando dentro de un anillo $\mathbb{Z}n$, en este caso $\mathbb{Z}_{13}$, que genera tantas soluciones como números componen su sistema completo de restos, respecto a $\mathbb{Z}n$, esto es, $\{1,2,3,4,\ldots,10,11,13-1\}$. Veamos:

S=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
X=5(2+3s)	10	12	1	3	5	7	9	11	0	2	4	6	8	10	12	1	⋯
Y=7(12+9s)	6	4	2	0	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	⋯
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	⋯

5. 2. *Sistemas de la forma: Dos ecuaciones con tres o más variables.*

2.1 Resolver el sistema:

$$3x+2y+7z=74$$
$$2x+5y+4z=79$$

Si restamos de la segunda multiplicada por 3 la primera multiplicada por 2, obtenemos $11y-2z=89$ y el $mcd\ (11,2)\ =\ 1,\ 1|89,$ luego, la ecuación tiene solución.

$$11y=-89+2t,\ y=-1+2t,\ y=1+2t.$$
$$2z=-89+11(1+2t)=-78+22t,\ z=-39+11t.$$

Comprobamos que $11(1+2t)-2(-39+11t)=89.$
Por sustitución despejamos X:

$$3x+2(1+2t)+7(-39+11t)=74$$
$$3x+2+4t-273+77t=74$$
$$3x=74-2\mp 273-4t-77t=345-81t$$
$$x=115-27t$$

La solución al sistema es:

$$x=115-27t,\quad y=1+2t,\quad z=-39+11t.$$

Otra solución más abreviada puede ser:

$$x=7+27t,\ \ y=9-2t\ \text{ y }\ z=5-11t.$$

2.2 Resolver el sistema:

$$5x+4y+2z=37$$
$$x+y+z=12$$

Si restamos de la primera ecuación la segunda multiplicada por 2, obtenemos la ecuación $3x+2y=13.$ El $mcd(3,2)=1$ y $1|13,$ luego, la ecuación tiene solución.

$$3x\equiv 13(mód.2), x\equiv 1(mód.2), x=1+2t.$$

Por sustitución despejamos Y:

$$3(1+2t)+2y=3+6t+2y=13$$
$$2y=13-3-6t=10-6t, y=5-3t.$$

Despejamos Z con los valores obtenidos:

$$5(1+2t)+4(5-3t)+2z=5+10t+20-12t+2z=37$$
$$2z=37-5-20-10t+12t=12+2t, z=6+t.$$

Por lo que la solución al sistema es

$$x=1+2t,\quad y=5-3t,\quad z=6+t.$$

2.3 Resolver el sistema:

$$3x+4y-5z+6u=3$$
$$2x+3y+4z-5u=7$$

Se trata de una matriz que tiene un menor $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=1\neq 0$, por tanto, el sistema tiene solución en la forma $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+5z-6u \\ 7-4z+5u \end{pmatrix}$.

$$\triangle_x=\begin{pmatrix} 3+5z-6u & 4 \\ 7-4z+5u & 3 \end{pmatrix}=\frac{3(3+5z-6u)-4(7-4z+5u)}{1}=-19+31z-38u$$

$$\triangle_y=\begin{pmatrix} 3 & 3+5z-6u \\ 2 & 7-4z+5u \end{pmatrix}=\frac{3(7-4z+5u)-2(3+5z-6u)}{1}=15-22z+27u$$

Por tanto, la solución al sistema es:

$$x=-19+31s-38t,\quad y=15-22s+27t,\quad z=s,\quad u=t.$$

2.4 Resolver el sistema:

$$10x+9y+7z=47$$
$$3x+2y+z=11$$

Resolvemos mediante matrices en la forma $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 47-7z \\ 11-z \end{pmatrix}$.

Si recordamos que la inversa de una matriz $2x2\ es$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$ entonces, la ecuación de la matriz será $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 47-7z \\ 11-z \end{pmatrix}\left\{\begin{array}{l} x=\frac{5+5z}{7} \\ y=\frac{31-11z}{7} \end{array}\right.$.

La solución obtenida es

$$x=(5+5t)/7,\quad y=(31-11t)/7,\quad z=t.$$

Si restamos la primera ecuación de la segunda multiplicada por 7, obtenemos:

$$7(3x+2y+z=11)-(10x+9y+7z=47)=11x+5y=30$$
$$11x=30+5t, x=0+5t$$
$$5y=30-11(0+5t)=0-55t, y=6-11t$$

Despejamos Z por sustitución en la segunda ecuación:

$$3(0+5t)+2(6-11t)+z=11$$
$$z=11-3(0+5t)-2(6-11t)=11-12-15t+22t$$
$$z=-1+7t.$$

Eliminados los números racionales, la solución es

$$x = 0 + 5t, \quad y = 6 - 11t, \quad z = -1 + 7t.$$

2.5 Resolver el sistema:

$$3x + 7y + 5z = 29$$
$$4x + 9y - 3z = 37$$

El menor $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, luego, la ecuación tendrá solución como $\begin{matrix} 3x + 7y = 29 - 5z \\ 4x + 9y = 37 + 3z \end{matrix}$.

Mediante la utilización de matrices:

$$\triangle_x = \begin{cases} 29 - 5z & 7 \\ 37 + 3z & 9 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{9(29 - 5z) - 7(37 + 3z)}{-1} \end{cases} = \frac{2 - 66z}{-1} = -2 + 66z$$

$$\triangle_y = \begin{cases} 3 & 29 - 5z \\ 4 & 37 + 3z \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3(37 + 3z) - 4(29 - 5z)}{-1} \end{cases} = \frac{-5 + 29z}{-1} = 5 - 29z$$

siendo la solución con denominadores:

$$x = (-43t)/23, \quad y = (18t)/23, \quad z = t.$$

Si restamos la primera ecuación multiplicada por -3 de la segunda multiplicada por 5, obtenemos $29x + 66y = 272$, que podemos resolver como ecuación diofántica:

$$66y = 272 - 29t,\ 33y = 136 - 29t, 4y = 13 - 29t, y = 5 - 29t.$$
$$29x = 272 - 66(5 - 29t) = -58 + 1914t, x = -2 + 66t.$$

La solución diofánticas es:

$$x = -2 + 66t, \quad y = 5 - 29t, \quad z = t.$$

2.6 Resolver el sistema:

$$2x + 4y + 5z = 35$$
$$7x + 11y + 2z = 47$$

Si el menor $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$, la ecuación tiene solución como $\begin{matrix} 2x + 4y = 35 - 5z \\ 7x + 11y = 47 - 2z \end{matrix}$.

$$\triangle_x = \begin{cases} 35 - 5z & 4 \\ 47 - 2z & 11 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{11(35 - 5z) - 4(47 - 2z)}{-6} \end{cases} = \frac{197 - 47z}{-6}$$

$$\triangle_y = \begin{cases} 2 & 35 - 5z \\ 7 & 47 - 2z \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2(47 - 2z) - 7(35 - 5z)(}{-6} \end{cases} = \frac{-151 + 31z}{-6}$$

La solución por matrices es: $x = (-197 + 47t)/6, \quad y = (151 - 31t)6, \quad z = t.$

Haciendo operaciones, encontramos la solución sin racionales:

$$x = 22 + 47t,\ \ y = -11 - 31t \text{ y } z = 7 + 6t.$$

2.7 Resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 4x + 7y + 2z &= 0 \\ 5x + 3y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Como el menor $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = -23 \neq 0$, la solución mediante matrices vendrá determinada en la forma:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -7z \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2z \\ -7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\cdot 3-7\cdot 5} & -\frac{7}{4\cdot 3-7\cdot 5} \\ -\frac{5}{4\cdot 3-7\cdot 5} & \frac{4}{4\cdot 3-7\cdot 5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2z \\ -7z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{43z}{23} \\ y = \frac{18z}{23} \end{cases}.$$

La solución al sistema mediante matrices será:

$$x = (-43t)/23,\quad y = (18t)/23,\quad z = t.$$

Quitamos racionales y obtenemos,

$$x = 43t,\ \ y = -18t \text{ y } z = -23t$$

2.8 Resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 6x + 7y + 2z - 3u &= 0 \\ 5x + 6y + 4z + 4u &= 0 \end{aligned}$$

El menor $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto, habrá solución como $\begin{aligned} 6x + 7y &= -2z + 3u \\ 5x + 6y &= -4z - 4u \end{aligned}$.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z + 3u \\ -7z - 4u \end{pmatrix}.\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2z + 3u \\ -7z - 4u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \ \ 16z + 46u \\ y = -14z - 39u \end{cases}.$$

La solución al sistema mediante matrices será:

$$x = 16s + 46t +,\quad y = -14s - 39t,\quad z = s,\quad u = t.$$

Otra solución puede ser:

$$x = 6s - 2t,\ \ y = -14s + 3t,\ \ z = s - 3t \text{ y } u = t$$

2.9 Resolver el sistema homogéneo:

$$x+2y+3z=0$$
$$5x+y+0z=0$$
$$2x+y+z=0$$

La matriz principal tiene como $Det=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=0$ pero $\begin{pmatrix}1&2\\5&1\end{pmatrix}=-9\neq0$, luego, su rango es dos y podemos buscar su solución como $\begin{pmatrix}x+2y=-3z\\5x-y=\quad 0\end{pmatrix}$, sistema resoluble mediante la $Regla\ de\ Cramer$:

$$x=\frac{\begin{pmatrix}-3&2\\0&1\end{pmatrix}}{-9}=\frac{z}{3};\quad Y=\frac{\begin{pmatrix}1&-3\\5&0\end{pmatrix}}{-9}=-\frac{5z}{-9}.$$

La solución podemos escribirla como $\frac{z}{3}=\frac{x}{1}=\frac{y}{-5}=t$ de donde, haciendo operaciones

$$x=t,\quad y=-5t,\quad z=3t.$$

2.10 Resolver el sistema modular:

$$5x+6y+2z\equiv11(mód.13)$$
$$7x+5y+3z\equiv\ 5(mód.13)$$

Empecemos por resolver el sistema, $\begin{matrix}5x+6y+2z=11\\7x+5y+3z=\ 5\end{matrix}$.

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -2, la diferencia que obtenemos es

$$x+8y=23.\ x=23+8s=7+8s$$

En función de x, $8y=23-1(7+8s)=16$ −8s luego, $y=2-s$
Por sustitución, despejamos z.

$$3z=5-7(7+8s)-5(2-s)=-54-51s, z=-18-17s.$$
$$2z=5-5(7+8s)-6(2-s)=-36-34s, z=-18-17s.$$

El sistema diofántica tendrá tantas soluciones como valores se asignen a s, esto es,

$$5(7+8s)+6(2-s)+2(-18-17s)=11$$
$$7(7+8s)+5(2-s)+3(-18-17s)=5$$

Para el sistema modular, si tenemos en cuenta que el módulo 13 es equivalente al anillo $\mathbb{Z}_{13}$ y que sus raíces serán $trece$ y solamente $trece$, basta con transformar los valores de s de en función de 13 para obtener los valores de x,y,z.
El valor de X se transforma en $x=7+8t$. El valor de Y se transforma en $y=2+12t$. El valor de Z se transforma en $z=8+9t$. Ahora confeccionamos la tabla con los valores del anillo:

t=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
X=7+8t	7	2	10	5	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	⋯
Y=2+12t	2	1	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	⋯
Z=8+9t	8	4	0	9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4	0	⋯

que fácilmente se pueden comprobar aplicando dicho valores a los coeficientes del sistema planteado.
Observar que para $t \geq 13$ se repiten las soluciones.

2.11 Resolver el sistema modular:

$$5x+4y-6z+5 \equiv 0(mód.17)$$
$$9x-10y+5z-3 \equiv 0(mód.17)$$

Dado que en las dos ecuaciones que componen el sistema existen signos negativos, transformaremos el sistema en función del $módulo\ 17$:

$$\begin{aligned} &5x+4y+11z \equiv 12(mód.17) \\ &9x+7y+\ \ 5z \equiv 13(mód.17) \end{aligned}$$

y resolveremos, como en el caso anterior, la ecuación

$$\begin{aligned} &5x+4y+11z=12 \\ &9x+7y+\ \ 5z=13. \end{aligned}$$

La diferencia de la primera ecuación por 9 y la segunda por 5 es $y+74z=43$, de la que obtenemos para $y=43+74t$ y para $z=-t$.
Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones, resulta para x:

$$5x = 12 - 1(43+74t) + 74(-t) = -160 - 185t,\ x = -32 - 57t.$$
$$9x = 13 - 7(43+74t) + 5(-t) = -288 - 513t,\ x = -32 - 57t.$$

La solución diofántica es

$$\begin{aligned} &5(-32-57t)+4(43+74t)+11(-t)=12 \\ &9(-32-57)+7(43+74t)+5(-t)=13. \end{aligned}$$

Transformamos los valores de la diofántica al anillo $\mathbb{Z}_{17}$:

Diofántica	*Modular*
$x=-32-57t$	$x=2+11t$
$y=43+74t$	$y=9+6t$
$z=\quad -t$	$z=\quad 16t$

y obtenemos los valores del sistema:

t=	0	1	2	3	4	5	6	7		14	15	16	17	18	19	20	
X=2+11t	2	13	7	1	12	6	0	11	…	3	14	8	2	13	7	1	
Y=9+6t	9	15	4	10	16	5	11	0	…	8	14	3	9	15	4	10	
Z=16t	0	16	15	14	13	12	11	10	…	3	2	1	0	16	15	14	

Por ejemplo, para $t=5$:

$$5(6)+4(5)+11(12)=182\equiv 12(mód.17)$$
$$9(6)+7(5)+5(12)=149\equiv 13(mód.17)$$

5. 3. *Sistemas de la forma: Tres ecuaciones con cuatro o más variables.*

3.1 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}3x+5y\quad+z-2u&=1\\3x+4y-4z+11u&=2\\2x+3y\quad-z+3u&=1\end{aligned}$$

La segunda ecuación está formada por la diferencia entre la primera y $tres$ veces la tercera, luego, podemos considerar una la solución en la forma $\begin{cases}2x+3y=1+z-3u\\3x+5y=1-z+2u\end{cases}$.

Como $\det=\begin{pmatrix}1&3\\3&5\end{pmatrix}=1\neq 0$, podemos plantear la solución como sigue:

$$\Delta_x=\begin{pmatrix}1+z-3u&3\\1-z+2u&5\end{pmatrix}=\frac{2+8z-21u}{1}=2+8z-21u$$

$$\Delta_y=\begin{pmatrix}2&1+z-3u\\3&1-z+2u\end{pmatrix}=\frac{-1-5z+13u}{1}=-1-5z+13u$$

La solución general al sistema planteado es:

$$\boxed{\begin{aligned}x&=2+8s-21t\\y&=-1-5s+13t\\z&=s\\u&=t\end{aligned}}$$

3.2 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}x+2y\quad+3z+2u&=5\\2x+3y-2z+3u&=8\\3x+5y+z+5u&=13\end{aligned}$$

El sistema planteado tiene dos menores distintos de cero $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=-1$ y $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=1$. La primera ecuación queda anulada ya que es diferencia de la $tercera$ y la $segunda$, por lo tanto, la matriz tiene rango dos y la solución viene determinada al resolver:

$$\begin{aligned}2x+3y&=8+2z-3u\\3x+5y&=13-z-5u\end{aligned}$$

en donde x,y son variables principales y z,u son variables libres, la solución:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 13s \\ y = 2 - 8s - t \\ z = \quad s \\ u = \qquad t \end{array}}$$

3.3 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z + 2u + 3v + 5w &= 27 \\ 3x + 5y + 2z \; - u + \; v + 3w &= 34 \\ 2x + 3y + 3z + 2u + 5v \; + w &= 25 \end{aligned}$$

El menor $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, por lo que en principio, el rango es ≥ 2. A partir de este menor orlamos con los de tercer orden, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, que, al no haber menores de orden superior, el rango es $tres$. Tomando x, y, z como variables principales y el resto como libres, resolvemos en la forma

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 27 - 2u - 3v - 5w \\ 3x + 5y + 2z &= 34 + \; u - \; v - 3w \\ 2x + 3y + 3z &= 25 - 2u - 5v - w \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 27-2u-3v-5w & 3 & 4 \\ 34+u-v-w & 5 & 2 \\ 25-2u-5v-w & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-5+13u+40v-40w}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = 5-13u-40v+40w.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 27-2u-3v-5w & 4 \\ 3 & 34+u-v-w & 2 \\ 2 & 25-2u-5v-w & 3 \end{vmatrix} = \frac{-3-8u-23v+23w}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = 3+8u+23v-23w.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 27-2u-3v-5w \\ 3 & 5 & 34+u-v-3w \\ 2 & 3 & 25-2u-5v-w \end{vmatrix} = \frac{-2-2v+4w}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = 2+2v-4w.$$

La solución al sistema propuesto sería:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 - 13r - 40s + 40t \\ y = 3 + 8r + 23s - 23t \\ z = 2 \qquad + 2s - 4t \\ u = \quad r \\ v = \qquad s \\ w = \qquad\quad t \end{array}}$$

Hemos utilizado la regla de Pierre Sarrús (1798-1861), regla práctica utilizada para calcular determinantes de tercer orden. El determinante es igual a la suma de los productos de los tripletes de elementos situados sobre la paralela a la diagonal principal disminuida de la suma de los productos de los tripletes de elementos situados sobre una paralela a la diagonal no principal, por ejemplo:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2).$$

3.4 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y + 4z + 5u + 4v &= 8 \\ 2x + y + 3z - 2u + 3v &= 6 \\ 5x + 2y + 8z + u + 7v &= 15 \end{aligned}$$

El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. La matriz, por tanto, tiene solución con x, y, z como variables principales y u, v como libres, en la forma $\begin{cases} 3x + y + 4z = 8 - 5u - 4v \\ 2x + y + 3z = 6 + 2u - 3v. \\ 5x + 2y + 8z = 15 - u - 7v \end{cases}$

Luego la solución es:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 9s - t \\ y &= 1 + 14s - t \\ z &= 1 + 2s \\ u &= s \\ v &= t \end{aligned}}$$

3.5 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y + 5z - 3u + 4v &= 23 \\ 5x + 2y + 7z + 6u - v &= 38 \\ 3x + y + 6z + 2u + v &= 24 \end{aligned}$$

Si restamos la tercera ecuación de la segunda, obtenemos, $5u - 3v + z = 1$, de la que podemos despejar $z = 1 - 5u + 3v$.
Si restamos la segunda multiplicada por $tres$ de la tercera multiplicada por dos, obtenemos:

$$-8u + 8v - y + 9z = 6.$$

Si restamos

$$(-8u + 8v - y + 9z = 6) - 9(5u - 3v + z = 1)$$

resulta

$$53u + 35v - y = -3$$

de donde

$$\mathrm{y} = 3 - 53\mathrm{u} + 35\mathrm{v}$$

Sustituyendo en alguna de las ecuaciones los valores obtenidos, despejamos x que resulta:

$$x = 5 + 27u - 18v.$$

Por tanto, la solución al sistema es

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 + 27s - 18t \\ y = 3 - 53s + 35t \\ z = 1 - 5s + 3t \\ u = \quad s \\ v = \quad\quad t \end{array}}$$

3.6 Resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{l} 8x + 2y + 5z + u + 3v = 0 \\ 3x + y + 2z + 4u - 2v = 0 \\ 4x + y + 3z - 5u + 3v = 0 \end{array}$$

Si restamos la $tercera$ por ocho de la $primera$ por cuatro y dividimos por cuatro, tenemos, $11u - 3v - z = 0$, de la que despejamos $z = 11u - 3v$.
Si restamos la $segunda$ por cuatro de la $tercera$ por tres, tenemos $-31u + 17v - y + z = 0$ que restado de $11u - 3v - z = 0$, resulta $-20u + 14v - y = 0$, de donde despejamos $y = -20u + 14v$.
Por sustitución, en cualquiera de las ecuaciones tenemos para $x = -2.u - 2v$.
Cambiando las variables libres, u, v por los parámetros s, t, la solución al sistema homogéneo, es

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -2s - 2t \\ y = -20s + 14t \\ z = \quad 11s - 3t \\ u = \quad s \\ v = \quad\quad t \end{array}}$$

3.7 Resolver el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y + 7z + u - v = 0 \\ 2x + y + 3z - 2u + 3v = 0 \\ 5x + 2y + 8z + 4u + 5v = 0 \end{array}$$

Si restamos la $primera$ de la $tercera$, resulta $3u + 6v + z = 0$, de donde obtenemos $z = -3u - 6v$.
Restamos la $segunda$ por cinco de la $tercera$ por dos, $18u - 5v - y + z = 0$ cuya diferencia con $3u + 6v + z = 0$ es de $15u - 11v - y = 0$, que nos proporciona el valor de $y = 15u - 11v$.
Por sustitución, el valor para x resulta, $x = -2u + 13v$ y, la solución al sistema propuesto

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -2s + 13t \\ y = 15s - 11t \\ z = -3s - 6t \\ u = \quad s \\ v = \quad\quad t \end{array}}$$

3.8 Resolver el sistema modular:

$$3x+\ 5y-7z+4u\equiv 2(mód.13)$$
$$4x-\ 2y+3z+5u\equiv 1(mód.13)$$
$$5x+\ 3y+6z-2u\equiv 3(mód.13)$$

Se trata de una ecuación diofántica a resolver en Z_{13}. La ecuación principal tiene como determinante $|\Delta|=\begin{pmatrix}3 & 5 & -7\\ 4 & -2 & 3\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}=-262\neq 0$, por lo que el sistema puede tener solución en la forma

$$\begin{cases}3x+5y-7z=2-4u\\ 4x-2y+3z=1-5u\\ 5x+3y+6z=3+2u\end{cases}.$$

Aplicando procedimientos expuestos en supuestos anteriores, las soluciones serán

$$x=\frac{-90+341u}{-292},\ y=\frac{-76-303u}{-292},\ z=\frac{-18-220u}{-292},$$

siendo el valor de $u=t$.
Para evitar los números racionales, podemos resolver mediante eliminación como sigue:
La segunda ecuación por $tres$ de la primera por $cuatro$: $26y-37z+u=5$.
La primera por $cinco$ de la tercera por $tres$: $16y-53z+26u=1$.
La diferencia de ambas: $660y-909z=129$. De esta ecuación resulta para $y=109-303t$ y para $z=79-220t$. Si sustituimos estos valores en la primera diferencia, obtenemos $u=94-262t$. Ahora, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones, resolvemos para $x=-122+341t$, con lo cual hemos eliminado los números racionales.
Conocida la solución diofántica, procedemos a calcular los valores para la modular:

$$\boxed{\begin{aligned}x&=5+3t\\ y&=9+9t\\ u&=5+11t\\ z&=\qquad t\end{aligned}}$$

3.9 Resolver el sistema modular:

$$5x-\ 3y+8z+3u\equiv 5(mód.17)$$
$$7x+11y+3z-9u\equiv 4(mód.17)$$
$$6x+9y-2z+10u\equiv 7(mód.17)$$

El determinante de $|\Delta|=\begin{pmatrix}5 & -3 & 8\\ 7 & 11 & 3\\ 6 & 9 & -2\end{pmatrix}=-365\neq 0$. La matriz tendrá solución como

$$\begin{cases}5x-3y+\ 8z=5-3u\\ 7x+11y+3z=4+9u\\ 6x+9y-\ 2z=7-10u\end{cases}.$$

Operando como en casos anteriores, obtenemos los valores para

$$x = \frac{-660+1711u}{-365},\ y = \frac{215-1028u}{-365},\ z = \frac{265-1318u}{-365}.$$

Para eliminar los números racionales, transformamos estos resultados resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{-660+1711u}{-365} \Rightarrow 365x - 1711u = 660\text{: } x = 119 + 1711t,\ u = -25 - 365t$$

$$y = \frac{215-1028u}{-365} \Rightarrow 365y + 1028u = -215\text{: } y = -71 - 1028t,\ u = -25 - 365t$$

$$z = \frac{265-1318u}{-365} \Rightarrow 365z + 1318u = -265\text{: } z = -91 - 1318t.$$

Conocidos los valores para el sistema diofántico, calculamos los del anillo $\mathbb{Z}_{17}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 + 12t \\ y = 8 + 16t \\ u = 3 + 16t \\ z = \quad t \end{array}}$$

3.10 Resolver el sistema modular:

$$\begin{aligned} x - 4y - 3z + u &\equiv 1(\textit{mód}.19) \\ 3x + \ \ y - 3z + u &\equiv 2(\textit{mód}.19) \\ 2x + 5y - 7z + 3u &\equiv 3(\textit{mód}.19) \end{aligned}$$

Como el discriminante de $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} = -91 \neq 0$, la matriz tendrá solución en la forma

$$\begin{cases} x - 4y - \ 3z = 1 - u \\ 3x + y - \ 3z = 2 - u \\ 2x + 5y - 7z = 3 - 3u \end{cases}$$

que, haciendo operaciones, encontramos

$$x = \frac{33+10u}{91},\ y = \frac{5-4u}{91},\ z = \frac{-26+39u}{91}.$$

Utilizando cualquiera de los métodos aplicados últimamente, obtenemos otros resultados equivalentes para el sistema algebraico, no racionales, $x = 3 + 10t$, $y = -1 - 4t$, $z = 10 + 39t$, $u = 24 + 91t$.
En cuanto al sistema modular, tenemos

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 17 + 10t \\ y = 1 + 15t \\ u = 7 + 15t \\ z = \quad t \end{array}}$$

5. 4. *Algunas aplicaciones*

4.1 Codificar el mensaje: HOLA, LLEGARE TARDE, utilizando la siguiente matriz.

$$C=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -4\end{vmatrix}$$

Vamos a empezar por asignar a cada elemento a codificar una letra, en nuestro caso, los signos serán los de espacio y el alfabeto español de 27 letras.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R
2	S	T	U	V	W	X	Y	Z		

El mensaje: HOLA, LLEGARÉ TARDE, tiene 16 letras y dos espacios, un total de 18 signos.

H	*O*	*L*	*A*		*L*	*L*	*E*	*G*	*A*	*R*	*E*		*T*	*A*	*R*	*D*	*E*
08	**16**	**12**	**01**	**00**	**12**	**12**	**05**	**07**	**01**	**19**	**05**	**00**	**21**	**01**	**19**	**04**	**05**

Para codificar los 18 caracteres, a partir de una matriz de 3 x 3, vamos a utilizar otra matriz de 3 x 3, multiplicándolas.

$$C=\begin{vmatrix}08 & 16 & 12\\ 01 & 00 & 12\\ 12 & 05 & 07\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -12 & 16\\ 13 & -14 & -46\\ 14 & -26 & 11\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}01 & 19 & 05\\ 00 & 21 & 01\\ 19 & 04 & 05\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-13 & 12 & 39\\ -20 & 20 & 59\\ 20 & -39 & 30\end{vmatrix}$$

El mensaje codificado resulta:

[4,-12,16,13,-14,-46,14,-26,11] [-13,12,39,-20,20,59,20,-39,30]

4.2 Descodificar mensaje:4,-12,16,13,-14,-46,14,-26,11,-13,12,39,-20,20,59,20,-39,30.

Para descodificar el mensaje anterior deberemos calcular la inversa de la matriz que ha servido de base codificadora, en nuestro caso:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}-1 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -5\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

y multiplicarla por los números del mensaje divididos en matrices de 3 x 3, así

$$D=\begin{vmatrix}4 & -12 & 16\\ 13 & -14 & -46\\ 14 & -26 & 11\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -5\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}08 & 16 & 12\\ 01 & 00 & 12\\ 12 & 05 & 07\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}-13 & 12 & 39\\ -20 & 20 & 59\\ 20 & -39 & 30\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -5\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}01 & 19 & 05\\ 00 & 21 & 01\\ 19 & 04 & 05\end{vmatrix}$$

El código traducido resulta:

08	**16**	**12**	**01**	**00**	**12**	**12**	**05**	**07**	**01**	**19**	**05**	**00**	**21**	**01**	**19**	**04**	**05**
H	*0*	*L*	*A*		*L*	*L*	*E*	*G*	*A*	*R*	*E*		*T*	*A*	*R*	*D*	*E*

4.3 Codificar en 3H el mensaje ME GUSTA VIAJAR, utilizando la matriz:

$$C=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -1\\ -3 & -3 & -1\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}$$

La notación de que se va a codificar en 3H (3 x 1) con una matriz de 3 x 3, significa que la codificación será en bloques de 3 elementos en horizontal. Empecemos por dar valor numérico al mensaje:

M	*E*		*G*	*U*	*S*	*T*	*A*		*V*	*I*	*A*	*J*	*A*	*R*
13	**05**	**00**	**07**	**22**	**20**	**21**	**01**	**00**	**23**	**09**	**01**	**10**	**01**	**19**

Para codificar utilizamos 6 matrices de 3 x 1 junto con la de 3 x 3:

$$C=\begin{vmatrix}13 & 05 & 00\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & -1\\ -3 & -3 & -1\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-41 & -54 & -18\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix}07 & 22 & 20\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & -1\\ -3 & -3 & -1\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-120 & -167 & -49\end{vmatrix}$$

Así sucesivamente, hasta conseguir para el mensaje una codificación de

-41,-54,-18,-120,-167,-49,-45,-66,-22,-75,-100,-33,-61,-109,-30.

4.4 Descodificar mensaje: -41,-54,-18,-120,-167,-49,-45,-66,-22,-75,-100,-33,-61,-109,-30.

Calculamos la inversa de la matriz base de la codificación

$$D=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -1\\ -3 & -3 & -1\\ -2 & -4 & -1\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -6 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

y procedemos de forma inversa

$$D=\begin{vmatrix}-41 & -54 & -18\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -6 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 05 & 00\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}-120 & -167 & -49\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -6 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}07 & 22 & 20\end{vmatrix}$$

y así sucesivamente, hasta conseguir saber que el mensajes es

-41	*-54*	*-18*	*-120*	*-167*	*-49*	*-45*	*-66*	*-22*	*-75*	*-100*	*-33*	*-61*	*-109*	*-30*
13	**05**	**00**	**07**	**22**	**20**	**21**	**01**	**00**	**23**	**09**	**01**	**10**	**01**	**19**
M	**E**		**G**	**U**	**S**	**T**	**A**		**V**	**I**	**A**	**J**	**A**	**R**

4.5 Contéstele, con 3V, que 27,38,-51,51,54,-75,-21,18,,20,27,38,-52 .

El primero es

$$D=\begin{vmatrix}-1 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -5\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}27\\ 38\\ -51\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}01\\ 00\\ 13\end{vmatrix}$$

el resto lo dejo en vuestras manos.

BIBLIOGRAFIA

CASTELEIRO VILLALBA, José M. , Introducción al Álgebra Lineal, ISBN: 84-7356-394-8
QUIROGA, Antonia, Introducción al Álgebra Lineal, ISBN: 84-933631-7-0
KOSHY, Thomas, Elementary Number Theory with Aplications, ISBN: 978-0-12-372487-8
MERINO,L. y SANTOS, E., Álgebra Lineal, ISBN: 84-9732-481-1
QUEYSANNE, Michel, Álgebra Básica, ISBN: 84-316-1789-6

APOYO INTERNET

http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_ecuaciones_lineales
http://www.aulademate.com/foro/sistema-de-ecuaciones-modulares-vt1884.php?amp;sid=c8f979cf99fe6fb70708d43c131fa726
http://www.eui.upm.es/~jjcc/alg200809personal/material/Imprimir_Tema_III_ALG_MD.pdf
http://www.wolframalpha.com/examples/ (programa de matemáticas)
http://www.vitutor.com/algebralineal.html