1 PRELIMINARES

1.1 Concepto de número primo

El conjunto de los números primos es un subconjunto de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto que son divisibles únicamente por sí mismo y por la unidad. Todos los números naturales son divisibles por sí mismos y por la unidad, excepto el 0, ya que ningún número es divisible entre 0.

El profesor de matemáticas de la Universidad de Oxford, Marcus du Sautoy, en su obra La Música de los Números Primos publicada en 2003, asegura que los números primos son como los átomos de las matemáticas.

Partamos de que todos los números son divisibles por sí mismos y por la unidad, pero sólo los números primos son divisibles, únicamente, por sí mismo y por la unidad. Supongamos el número 42 que tiene como divisores el conjunto $\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$. El número 42 es divisible por $\{1,42\}$, que son la unidad y el propio 42, pero además, $\{2,3,6,7,14,21\}$ también son divisores de 42 luego, el número 42 es compuesto. El número 71 tiene como divisores al conjunto $\{1,71\}$ que son el propio número y la unidad luego, el número 71 es primo.

Salvo el número 2 y el número 5, todos los números primos terminan en 1,3,7 y 9, aunque no todos los números que terminan en 1,3,7 y 9 son primos. El gran Euler, Leonhard Euler (1707-1783) relacionó esta circunstancia con nuestro sistema de numeración de base diez. Si un número se divide por 10 pueden ocurrir dos cosas: que la división sea exacta, por lo que estamos ante un número que es 10 o múltiplo de 10; que la división no es exacta, estamos ante un número que no es múltiplo de 10 y por tanto generará el siguiente conjunto de restos, $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Euler quiso averiguar cuáles de estos números son coprimos con 10 y se encontró con 1,3,7 y 9. Había encontrado la función $\varphi(fi)$, conocida como función Indicatriz de Euler que se denota como $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ y calcula el número de enteros positivos menores que n que son coprimos con n.

1.2 Propiedades de los primos

Algunas de las propiedades de los números primos son:

- ✓ Si *p* es un número primo y divisor del producto de números enteros $a \cdot b$, entonces p es divisor de *a* o de *b*. (Lema de Euclides).
- ✓ Si *p* es primo y *a* es algún número natural diferente de 1, entonces $a^p - a$ es divisible por *p*. (Pequeño Teorema de Fermat).
- ✓ Un número *p* es primo si y sólo si el factorial $(p-1)!+1$ es divisible por *p*. (Teorema de Wilson).
- ✓ Si *n* es un número natural, entonces siempre existe un número primo *p* tal que $n<p<2n.$ (Postulado de Bertrand).
- ✓ En toda progresión aritmética $a_n = a+nq,$ donde los enteros positivos $a,q \geqq 1$ son primos entre sí, existen infinitos números primos. (Teorema de Dirichlet).
- ✓ El número de primos menores que un x dado sigue una función asintótica a $f(x)=\frac{x}{\ln x}.$ (Teorema de los números primos).
- ✓ El anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo si y sólo si n es primo. Equivalentemente: n es primo si y sólo si $\varphi(n)=n-1,$ donde $\varphi(n)$ es la función fi de Euler.

1.3 Distintas categorías de números primos

En la sucesión de números primos, el 2011 corresponde al 17483.
Entre el 1 y el 2011 hay 305 números primos.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003 y 2011

de los que podemos obtener 61 parejas de gemelos

{3,5},{5,7},{11,13},{17,19},{29,31},{41,43},{59,61},{71,73},{101,103},
{107,109}, {137,139},{149,151},{179,181},{191,193},{197,199},{227,229},
{239,241},{269,271},{281,283},{311,313},{347,349},{419,421},{431,433},
{461,463},{521,523},{569,571},{599,601},{617,619},{641,643},{659,661},
{809,811},{821,823},{827,829},{857,859},{881,883},{1019,1021},{1031,1033},
{1049,1051},{1061,1063},{1091,1093},{1151,1153},1229,1231},{1277,1279},
{1289,1291},{1301,1303},{1319,1321},{1427,1429},{1451,1453}, {1481,1483},
{1487,1489},{1607,1609},{1619,1621},{1667,1669},{1697,1699},{1721,1723},
{1787,1789},{1871,1873},{1877,1879},{1931,1933},{1949,1951},{1997,1999}}

Entre 1 y 2017 hay 506 números primos de la forma $4k+1$ conocidos como enteros de Gauss. Estos números primos tienen la particularidad de que son suma de dos cuadrados y permiten la factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,101,109,113,137,149,157,173,181,193,197,229,233,
241,257,269,277,281,293,313,317,337,349,353,373,389,397,401,409,421,433,449,
457,461,509,521,541,557,569,577,593,601,613,617,641,653,661,673,677,701,709,
733,757,761,769,773,797,809,821,829,853,857,877,881,929,937,941,953,977,997,
1009,1013,1021,1033,1049,1061,1069,1093,1097,1109,1117,1129,1153,1181,1193,
1201,1213,1217,1229,1237,1249,1277,1289,1297,1301,1321,1361,1373,1381,1409,
1429,1433,1453,1481,1489,1493,1549,1553,1597,1601,1609,1613,1621,1637,1657,
1669,1693,1697,1709,1721,1733,1741,1753,1777,1789,1801,1861,1873,1877,1889,
1901,1913,1933,1949,1973,1993,1997 y 2017.

Entre 1 y 2017 hay 503 números primos de la forma $4k+3$ conocidos como primos de Gauss. Estos números primos tienen la particularidad de que no son suma de dos cuadrados y, por tanto, no permiten la factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

3,7,11,19,23,31,43,47,59,67,71,79,83,103,107,127,131,139,151,163,167,179,191,199,
211,223,227,239,251,263,271,283,307,311,331,347,359,367,379,383,419,431,439,
443,463,467,479,487,491,499,503,523,547,563,571,587,599,607,619,631,643,647,
659,683,691,719,727,739,743,751,787,811,823,827,839,859,863,883,887,907,911,
919,947,967,971,983,991,1019,1031,1039,1051,1063,1087,1091,1103,1123,1151,
1163,1171,1187,1223,1231,1259,1279,1283,1291,1303,1307,1319,1327,1367,1399,
1423,1427,1439,1447,1451,1459,1471,1483,1487,1499,1511,1523,1531,1543,1559,
1567,1571,1579,1583,1607,1619,1627,1663,1667,1699,1723,1747, 1759,1783,1787,
1811,1823,1831,1847,1867,1871,1879,1907,1931,1951,1979, 1987,1999,2003 y 2011.

Entre 1 y 500000 los primos que contienen el "2011" en secuencia son:

$$\underline{2011}, 1\underline{2011}, \underline{2011}3, \underline{2011}7, 6\underline{2011}, 12\underline{2011}, 16\underline{2011}, 18\underline{2011}, 20\underline{1101}, 20\underline{1107},$$

$$\underline{2011}19, \underline{2011}21, \underline{2011}39, \underline{2011}51, \underline{2011}63, \underline{2011}67, \underline{2011}93, 22\underline{2011}, 27\underline{2011},$$

$$28\underline{2011}, 3\underline{2011}3, 3\underline{2011}9, 33\underline{2011} \text{ y } 39\underline{2011}$$

2 ALGUNAS PROPIEDADES Y REPRESENTACIONES DEL NÚMERO 2011

2.1 Propiedades

El número 2011 es Impar de la forma $2011 = 2k + 1 = 2 \cdot 1005 + 1$
Es un número Primo ya que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad $2011 = 1 \cdot p = 1 \cdot 2011$
Tiene 2 divisores, $\tau_{(2011)} = (1+1) = 2$ que son 1 y 2011 y que suman

$$\sigma_{(2011)} = \frac{2^1 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{2011^2 - 1}{2011 - 1} = 2012$$

Es un número Deficiente ya que $\sigma(n) < 2n = 2012 < 4011$ la suma de sus divisores es menor que dos veces el 2011.
El número 2011 puede ser representado en otras bases como:

$$b_2 = 11111011011,\ b_3 = 2202111,\ b_4 = 133123,\ b_5 = 31021,\ b_6 = 13151,\ b_7 = 5602,$$
$$b_8 = 3733,\ b_9 = 2674,\ b_{10} = 2011,\ b_{11} = 1569,\ \ldots\ldots$$

El número 2011 es primo también en base 6 y base 8
Es un número odioso porque tiene número impar de 1 en base 2.

2.2 Clasificación como número primo

El número 2011 es un primo de Gauss de la forma $2011 = 4k + 3 = 4 \cdot 502 + 3$ que no puede ser expresado como suma de dos cuadrados y, por tanto, no tiene factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$. Ver http://Oeis.org/A002145.
Es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\} = \{2011, 2017\}$ son primos. Ver http://Ois.org/A023201.
Es un primo Impar de la forma $2011 = 2k - 1 = 2 \cdot 1006 - 1$. Ver http://Oeis.org/A065091.
Es un primo Fuerte ya que $P_n > \frac{P_{n-1} + P_{n+1}}{2} = 2011 > \frac{2003 + 2017}{2} = 2011 > 2010.$ Estos primos son muy apreciados en Criptografía por su baja vulnerabilidad.
Es un primo Narcisista ya que $2^3 + 0^3 + 1^3 + 1^3 = 10,\ 1^3 + 0^3 = 1$ termina en la unidad.
Es un primo de la forma $2011 = 10k + 1 = 10 \cdot 201 + 1.$
Es el primo Regular 305 de la sucesión. Ver http://Oeis.org/A007703. Un primo Regular p es aquel que no divide el número de clases del cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Todos los enteros primos $p < 37$ son Regulares. Fueron introducidos por Ernst Eduard Kummer(1810-1893) que determinó que todo primo impar p es regular si y solamente sí no divide en el anillo $\mathbb{Z}[p]$ ninguno de los números de Bernoulli $b_2, b_4, ..., b_{p-3}$, es decir, si p^2 no divide ninguna de las sumas $1^k + 2^k + 3^k + ... + (p-1)^k$ con $k = 2, 4, 6, ..., p-3.$
Es el primo Higgs 149 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver http://Oeis.org/A007459.
Es el primo Higgs 219 de la sucesión con a^3. Ver http://Oeis.org/ A057447.
El 2011 es un primo altamente Cototient que satisface la ecuación $n - \phi(n) = k$ después de 255 iteraciones y donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver http://Oeis.org/A105440.

El 2011 se puede representar como $2011=\phi^{15}+\phi^{13}+\phi^{10}+\phi^{2}+\frac{1}{\phi^{2}}+\frac{1}{\phi^{11}}+\frac{1}{\phi^{16}}$ donde $\phi=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

El 2011 es un primo Infeliz ya que la iteración de los cuadrados de sus cifras tiene como límite una cantidad distinta a la unidad. Veamos:

$$2^2+0^2+1^2+1^2=6;\ 6^2=36;\ 3^2+6^2=45;\ 4^2+5^2=41;\ 4^2+1^2=17;\ 1^2+7^2=50;$$
$$5^2+0^2=25;\ 2^2+5^2=29;\ 2^2+9^2=85;\ 8^2+5^2=\boxed{89}$$
$$8^2+9^2=145;\ 1^2+4^2+5^2=42;\ 4^2+2^2=20;\ 2^2+0^2=4;$$
$$4^2=16;\ 1^2+6^2=37;\ 3^2+7^2=58;\ 5^2+8^2=\boxed{89};.....$$

Se produce una serie que se repite $89,145,42,20,4,16,37,58,89,145,...$ distinta a la unidad.

2.3 Algunas representaciones del número 2011

El número 2011 puede ser representado como suma de cuatro cuadrados de seis formas distintas:

$$2011=5^2+7^2+16^2+41^2=5^2+16^2+19^2+37^2=9^2+24^2+25^2+27^2$$
$$2011=13^2+17^2+23^2+32^2=16^2+17^2+25^2+29^2=47^2+19^2+20^2+31^2$$

El número 2011 puede ser representado como suma de cinco cuadrados en seis formas distintas:

$$2011=2^2+19^2+21^2++23^2+26^2=3^2+6^2+15^2+29^2+30^2=4^2+11^2+19^2+27^2+28^2$$
$$2011=8^2+9^2+20^2+25^2+29^2=9^2+16^2+19^2+23^2+28^2=11^2+17^2+20^2+24^2+25^2$$

El número 2011 puede ser representado como suma de seis cuadrados de cuatro formas distintas:

$$2011=5^2+6^2+9^2+13^2+26^2+32^2=7^2+9^2+17^2+18^2+22^2+28^2$$
$$2011=9^2+15^2+16^2+17^2+22^2+26^2=14^2+17^2+18^2+19^2+20^2+21^2$$

El número 2011 puede ser representado como suma de seis cubos en cuatro formas distintas:

$$2011=1^3+1^3+4^3+6^3+9^3+10^3=2^3+2^3+3^3+5^3+8^3+11^3$$
$$2011=2^3+5^3+5^3+8^3+8^3+9^3=3^3+4^3+4^3+4^3+4^3+12^3$$

El número 2011 puede ser representado como suma de siete cubos de cuatro formas distintas:

$$2011=0^3+1^3+1^3+4^3+6^3+9^3+10^3=4^3+4^3+5^3+7^3+7^3+7^3+9^3$$
$$2011=1^3+3^3+4^3+4^3+7^3+8^3+10^3=0^3+2^3+2^3+3^3+5^3+8^3+11^3$$

El número 2011 puede ser representado como una terna pitagórica:

$$2011^2+2022060^2=2022061^2$$

También puede ser representado como suma pitagórica de cuatro cuadrados:

$$2011^2=2010^2+50^2+39^2$$

Otras representaciones del número 2011:

$$2011=3^2+3^4+5^4+6^4=2^1+2^2+3^2+3^2+3^5+3^5+3^5+3^5+4^5$$
$$2011=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^1+1^0$$
$$2011=3^6+3^6+3^5+3^5+3^3+3^3+3^2+3^1+3^0$$
$$2011=5^4+5^4+5^4+5^3+5^1+5^1+5^0$$

Utilizando la descomposición mesopotámica, el número 2011 puede ser representado como diferencia de dos cuadrados:

$$n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=\left(\frac{2011+1}{2}\right)^2-\left(\frac{2011-1}{2}\right)^2=1006^2-1005^2=2011$$

3 OTRAS REPRESENTACIONES DEL NÚMERO 2011

3.1 Formas $2011=\sum_{e=1}^{r} n^e + N$ donde $n = 2,3,5,6,7,11,...$ y N un número positivo.

$$2011=\sum_{e=1}^{9} 2^e + 989 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 989 = 1022 + 989$$

Si $989 = 31 + 47 + 911$:

El 31 es un primo Feliz ya que $3^2 + 1^2 = 10,\ 1^2 + 0^2 = 1$ termina en la unidad.

El 47 es un primo de Eisenstein ya que $47 = 3\cdot 16 - 1$.

El 911 es un primo Decagonal centrado ya que $911 = 5(n^2 - n) + 1$ con $n = 14$.

$$2011=\sum_{e=1}^{6} 3^e + 919 = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 1092 + 919$$

Si $919 = 173 + 223 + 523$:

El 173 es un primo Equilibrado ya que $173 = (167 + 179)/2$.

El 223 es un primo de Carol ya que $223 = (2^4 - 1)^2 - 2$.

El 523 es un primo Gemelo ya que $\{521, 523\}$ son números primos.

$$2011=\sum_{e=1}^{4} 5^e + 1231 = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 1231 = 780 + 1231$$

El número 1231 es un primo Gemelo ya que $\{1229, 1231\}$ son números primos.

El 1231 es un primo Regular ya que $1231 = 2\cdot 615 + 1$.

$$2011=\sum_{e=1}^{4} 6^e + 457 = 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 457 = 1554 + 457$$

El 457 es un primo Bueno ya que $457^2 > 449\cdot 461 = 208849 > 206989$.

$$2011=\sum_{e=1}^{3} 7^e + 1882 = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 1612 = 399 + 1612$$

Si $1612 = 311 + 1301$:

El 311 es un primo Circular ya que $\{113, 131, 311\}$ son todos números primos.

El 1301 es un primo Cuadrado centrado ya que $1301 = n^2 + (n+1)^2$ con $n = 25$.

$$2011=\sum_{e=1}^{3} 11^e + 548 = 11^1 + 11^2 + 11^3 + 548 = 1463 + 548$$

Si $548 = 547 + 1$:

El número 547 es un primo Cubano ya que $547 = n^3 - (n-1)^3$ con $n = 14$.

3.2 Formas $2011=\sum_{b=1}^{r} b^n + N$ donde $n = 2,3,5,6,7,9,...$ y N un número positivo.

$$2011=\sum_{b=1}^{17} b^2 + 226 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 226 = 1785 + 226$$

$$2011=\sum_{b=1}^{8} b^3 + 715 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 715 = 1296 + 715$$

El 715 es un número Sphenic ya que $715 = 5\cdot 11\cdot 13$ es producto de tres números primos.

El 715 es un número Harshad ya que $715/(7+1+5) = 55$ divide a la suma de sus cifras.

El 715 es un número Pentatope ya que $715 = ((n-4)(n-3)(n-2)(n-1))/24$ con $n = 14$.

$$2011=\sum_{b=1}^{4} b^5+711=1^5+2^5+3^5+4^5+711=1300+711$$

El $711=3^2\cdot 79$ es un número Harshad ya que $711/(7+1+1)=79$ divide a la suma de sus cifras.

$$2011=\sum_{b=1}^{3} b^6+1217=1^6+2^6+3^6+1217=794+1217$$

El número 1217 es un primo Proth ya que $1217=19\cdot 2^6+1$.

$$2011=\sum_{b=1}^{2} b^7+1882=1^7+2^7+1882=129+1882$$

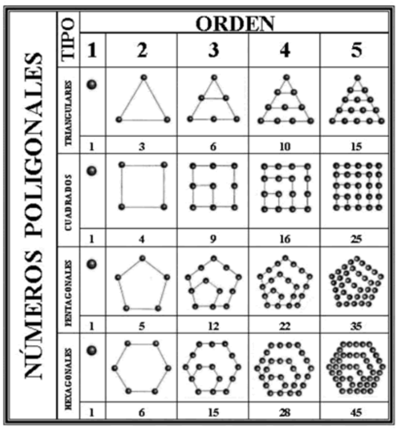
El número 1882 se puede representar como suma de dos cuadrados $1882=19^2+39^2$ o como suma de dos números primos iguales $1882=941+941$. El $941=311+313+317$ es suma de tres números primos consecutivos o $941=179+181+193+197$ como suma de cinco números primos consecutivos. El 941 es un primo de Eisenstein ya que $941=3\cdot 314-1$. Es un primo de Primos ya que $\{p,p+4\}=937,941$ son ambos números primos. El 941 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=937,941$ son ambos números primos.

$$2011=\sum_{b=1}^{2} b^9+1498=1^9+2^9+1498=513+1498$$

Si el número 1498 se representa como $1498=749+749$, el $749=241+251+257$ es suma de tres números primos consecutivos.
Si el número 1498 se representa como suma de dos números primos $1498=701+797$, el número 701 es suma de tres números primos consecutivos $701=229+233+239$ y también un número primo de Eisenstein ya que $701=3\cdot 234-1$. También es un primo Circular, ya que $\{701,107\}$ son ambos primos. El 797 es primo Palíndromo y un primo de Eisenstein ya que $797=3\cdot 266-1$. También es un primo Truncable ya que $\{7,79,797\}$ son todos números primos.

4. CONCEPTO DE NÚMERO FIGURADO

En su obra Pitágoras El Filósofo del Número, el profesor Pedro Miguel González Urbaneja, nos cuenta que los pitagóricos solían representar los números mediante puntos en un pergamino o piedrecillas en la arena y los clasificaban según las formas poligonales de estas distribuciones de puntos, es decir, asociaban los números a figuras geométricas obtenidas por la disposición regular de puntos, cuya suma determina el número representado. Así obtenían los diversos tipos de números poligonales o figurados:



$\boldsymbol{Los\ número\ triangulares}$: $\mathbf{1,3,6,10,15,\ldots}$
$\boldsymbol{Los\ número\ cuadrados}$: $\mathbf{1,4,9,16,25,\ldots}$
$\boldsymbol{Los\ números\ pentagonales}$: $\mathbf{1,5,12,22,35,.}$

4.1 Números figurados

4.1.1 Números Triangulares de la forma $n(n+1)/2$

1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120,136,153,171,190,210,231,253,276,300,325,351,378, 406,435,465,496,528,561,595,630,666,703,741,780,820,861,903,946,990,1035,1081,1128,1176, 1225, 1275,1326,1378,1431,1485,1540,1596,1653,1711,1770,1830,1891,1953,2016

$2011 = 1953 + 58$ donde $1953 = n(n+1)/2\ \ con\ n = 62$

$58 = 5 + 53$ dos números primos Equilibrados ya que $5 = (3+7)/2$ y $53 = (47+59)/2$.

4.1.2 Números Cuadrados de la forma n^2

1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,441,484,529,576,625, 676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,1369,1444,1521,1600,1681,1764, 1849, 1936,2025

$2011 = 1936 + 75$ donde $1936 = n^2\ \ con\ n = 44$

$75 = 1 + 5 + 12 + 22 + 35$ es suma de los primeros cinco números Pentagonales.

4.1.3 Números Pentagonales de la forma $n(3n-1)/2$

1,5,12,22,35,51,70,92,117,145,176,210,247,287,330,376,425,477,532,590,651,715,782,852,925, 1001, 1080,1162,1247,1335,1426,1520,1617,1717,1820,1926,2035

$2011 = 1926 + 85$ donde $1926 = n(3n-1)/2\ \ con\ n = 36$

$85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$. Además, 85 es un Repunit en $b_4 = 1111$.

4.1.4 Números Hexagonales de la forma $n(2n-1)$

1,6,15,28,45,66,91,120,153,190,231,276,325,378,435,496,561,630,703,780,861,946,1035,1128, 1225,1326,1431,1540,1653,1770,1891,2016

$2011 = 1891 + 120$ donde $1891 = n(2n-1)\ \ con\ n = 31$

$$120 = 47 + 73 \text{ donde } \begin{cases} 47 = (2^3-1)^2 - 2 \text{ es un primo de Carol.} \\ 73 \text{ es un repunit en } b_8 = 111 \text{ y un primo Circular con 37.} \end{cases}$$

4.1.5 Números Heptagonales de la forma $n(5n-3)/2$

1,7,18,34,55,81,112,148,189,235,286,342,403,469,540,616,697,783,874,970,1071,1177,1288, 1404, 1525,1651,1782,1918,2059

$2011 = 1918 + 93$ donde $1918 = n(5n-3)/2\ \ con\ n = 28$

93 es un entero Blum ya que es producto de dos primos: $93 = 3 \cdot 31$. También es un Repdigit en $b_5 = 333$.

4.1.6 Números Octagonales de la forma $n(3n-2)$

1,8,21,40,65,96,133,176,225,280,341,408,481,560,645,736,833,936,1045,1160,1281,1408,1541, 1680,1825,1976,2133

$2011 = 1976 + 35$ donde $1976 = n(3n-2)\ \ con\ n = 26$

$35 = 34 + 1$ donde 34 es el 9º número de Fibonacci.

4.1.7 Números Nonagonales de la forma $n(7n-5)/2$

1,9,24,46,75,111,154,204,261,325,396,474,559,651,750,856,969,1089,1216,1350,1491,1639, 1794,1956,2125

$2011 = 1956 + 55$ donde $1956 = n(7n-5)/2\ \ con\ n = 24$

$55 = 47 + 2^3$ donde 47 es el 8º número de Lucas.

4.1.8 Números Decagonales de la forma $n(4n-3)$

1,10,27,52,85,126,175,232,297,370,451,540,637,742,855,976,1105,1242,1387,1540,1701, 1870,2047}

$2011 = 1870 + 141$ donde $1870 = n(4n-3)\ con\ n = 22$

$141 = 132 + 3^2$ donde 132 es el 6º número de Catalán.

4.1.9 Números Oblongos, Heterómecos o Pronic de la forma $n(n+1)$

2,6,12,20,30,42,56,72,90,110,132,156,182,210,240,272,306,342,380,420,462,506,552,600, 650,702,756,812,870,930,992,1056,1122,1190,1260,1332,1406,1482,1560,1640,1722,1806, 1892,1980,2070

$2011 = 1980 + 31$ donde $1980 = n(n+1)\ con\ n = 44$

El número 31 es un primo de Mersenne ya que $31 = 2^5 - 1$ y está relacionado con el número perfecto $496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$ donde 31 es el 8º número de Mersenne.

4.1.10 Número Octaedral de la forma $(2n^3 + n)/3$

1,6,19,44,85,146,231,344,489,670,891,1156,1469,1834,2255

$2011 = 1834 + 177$ donde $1834 = (2n^3 + n)/3\ con\ n = 14$

El 177 es un número Leyland ya que $177 = 2^7 + 7^2$. Es un número Blum ya que $177 = 3 \cdot 59$ es producto de dos números primos. Se puede representar como suma de tres cuadrados de dos formas diferentes $177 = 2^2 + 2^2 + 13^2 = 7^2 + 8^2 + 8^2$. Puede ser representado como $177 = 59 + 59 + 59$ donde 59 es un primo de Eisenstein ya que $59 = 3 \cdot 20 - 1$. Es un primo Bueno ya que $59^2 > 53 \cdot 61 = 3481 > 3233$. Es un primo Seguro ya que 59 y $29 = (59-1)/2$ son números primos.

4.1.11 Número Estrella de la forma $6n(n-1)+1$

1,13,37,73,121,181,253,337,433,541,661,793,937,1093,1261,1441,1633,1837,2053

$2011 = 1837 + 174$ donde $1837 = 6n(n-1) + 1\ con\ n = 18$

El 174 es un número Sphenic ya que $174 = 2 \cdot 3 \cdot 29$ es producto de tres números primos. Es suma de dos números primos: $174 = 23 + 151$. El 23 es el 5º número primo de Sophie Germain. El 151 es un primo Palíndromo y un primo de Padovan ya que $151 = (n-2) + (n-3)$ con $n = 78$.

4.2 Números figurados centrados

4.2.1 Números Triangulares Centrados de la forma $(3n^2 + 3n + 2)/2$

4,10,19,31,46,64,85,109,136,166,199,235,274,316,361,409,460,514,571,631,694,760,829,901,976, 1054,1135,1219,1306,1396,1489,1585,1684,1786,1891,1999,2110

$2011 = 1999 + 12$ donde $1999 = (3n^2 + 3n + 2)/2\ con\ \ n = 36$

$12 = 5 + 7$ donde 5 y 7 son dos primos Afortunados ya que $\begin{cases} 5 = 11 - (2 \cdot 3) \\ 7 = 37 - (2 \cdot 3 \cdot 5) \end{cases}$

4.2.2 Números Cuadrados Centrados de la forma $2n(n+1)+1$

5,13,25,41,61,85,113,145,181,221,265,313,365,421,481,545,613,685,761,841,925,1013,1105, 1201,1301,1405,1513,1625,1741,1861,1985,2113

$2011 = 1985 + 26$ donde $1985 = 2n(n+1)+1\ con\ n = 31$

$26 = 13 + 13$ donde 13 es el 7º número de Fibonacci y también una forma pitagórica $13^2 = 12^2 + 5^2$.

4.2.3 Números Cubos Centrados de la forma $n^3 + (n+1)^3$

9,35,91,189,341,559,855,1241,1729,2331

$2011 = 1729 + 282$ donde $1729 = n^3 + (n+1)^3\ con\ n = 9$

$282 = 83 + 199$ donde $83 = 23 + 29 + 31$ suma de tres números primos consecutivos y también un número primo de Eisenstein ya que $83 = 3 \cdot 28 - 1$. El número 199 es el 11º de Lucas y también un número primo circular ya que $\{199, 919, 991\}$ son todos primos.

4.2.4 Números Pentagonales Centrados de la forma $(5(n-1)^2 + 5(n-1) + 2)/2$

1,6,16,31,51,76,106,141,181,226,276,331,391,456,526,601,681,766,856,951,1051,1156,1266,
1381,1501,1626,1756,1891,2031

$2011 = 1891 + 120$ donde $1891 = (5(n-1)^2 + 5(n-1) + 2)/2\ con\ n = 27$

$120 = 41 + 79$ donde 41 es un primo Proth ya que $41 = 10 \cdot 2^2 + 1$ y 79 es un primo Pillai ya que 79 satisface $n! + 1 \equiv 0 (mód.79)$ para $n = 23$.

4.2.5 Números Hexagonales Centrados de la forma $n^3 - (n-1)^3$

1,7,19,37,61,91,127,169,217,271,331,397,469,547,631,721,817,919,1027,1141,1261,1387,
1519,1657,1801,1951,2107

$2011 = 1951 + 60$ donde $1951 = n^3 - (n-1)^3\ con\ n = 26$

$60 = 29 + 31$ donde $29 = 2(n-1) + (n-2)$ con $n = 11$ es un primo Pell y $31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ es un número primo Primorial.

4.2.6 Números Heptagonales Centrados de la forma $(7n^2 - 7n + 2)/2$

1,8,22,43,71,106,148,197,253,316,386,463,547,638,736,841,953,1072,1198,1331,1471,
1618,1772,1933,2101

$2011 = 1933 + 78$ donde $1933 = (7n^2 - 7n + 2)/2\ con\ \ n = 24$

$78 = 5 + 73$ donde $5 = 2^1 \cdot 2^1 + 1$ y $73 = 2^3 \cdot 3^2 + 1$ son dos primos Pierpont.

4.2.7 Números Octagonales Centrados de la forma $(2n-1)^2$

1,9,25,49,81,121,169,225,289,361,441,529,625,729,841,961,1089,1225,1369,1521,
1681,1849,2025

$2011 = 1849 + 162$ donde $1849 = (2n-1)^2\ con\ n = 22$

$162 = 31 + 131$ son dos números primos Circulares ya que $\begin{cases} 13, 31 \\ 113, 131, 311 \end{cases}$ son números primos.

4.2.8 Números Nonagonales Centrados de la forma $((3n-2)(3n-1))/2$

1,10,28,55,91,136,190,253,325,406,496,595,703,820,946,1081,1225,1378,1540,
1711,1891,2080

$2011 = 1891 + 120$ donde $1891 = ((3n-2)(3n-1))/2\ con\ n = 21$

$120 = 5!$ es la factorial de 5. $120 = 59 + 61$ es suma de dos números Gemelos. 120 es un número Harshad ó Niven ya que $120/(1+2+0) = 40$ es divisible por la suma de sus cifras. Es suma de cuatro primos consecutivos $120 = 23 + 29 + 31 + 37$. Es suma de cuatro potencias consecutivas de dos $120 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$. Es suma de cuatro potencias consecutivas de tres $120 = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$. $120 = 59 + 61$ donde $n! + 1 \equiv 0(mód.59)$ con $n = 15$ es un primo de Pillai y $61 = n^3 - (n-1)^3$ con $n = 5$ es un primo Cubano. Es suma de los 8 primos números Triangulares $120 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36$.

4.2.9 Números Decagonales Centrados de la forma $5(n^2 - n) + 1$

1,11,31,61,101,151,211,281,361,451,551,661,781,911,1051,1201,1361,1531,
1711,1901,2101

$2011 = 1901 + 110$ donde $1901 = 5(n^2 - n) + 1 \; con \; n = 20$

El número 110 puede ser expresado como $110 = 5^2 + 6^2 + 7^2$ suma de los cuadrados de tres números consecutivos. Es un número Sphenic ya que $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ es producto de tres números primos. Es un número Pronic, Oblongo ó Heterómeco ya que $110 = 10(10+1)$ es el producto de dos números consecutivos.

5. EL NÚMERO DE ORO Y LOS PRIMOS

5.1 Sección Áurea

La Sección Áurea, Proporción Áurea o Divina Proporción es la división de un segmento en media y extrema razón, es decir, en dos subsegmentos de longitudes a y b tales que, suponiendo $a > b$, $(a+b)/a = a/b$. Si tomamos como unidad de longitud el subsegmento más corto y la longitud del otro como Φ, se tiene $(\Phi + 1)/2 = \Phi/1$, de donde resulta que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ con valores de $\Phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}61803398...$ y $\Phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}61803398...$

5.2 Números de Fibonacci

A mediados del siglo XIX el matemático francés Jacques Marie Binet descubrió una fórmula que aparentemente ya era conocida por Euler, y por otro matemático francés, Moivre. Esta fórmula permite encontrar el enésimo número de Fibonacci sin necesidad de reproducir todos los números anteriores. La fórmula de Binet depende exclusivamente del número Áureo y es

$$F_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{(\Phi)^n - \left(\dfrac{-1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

que dándole valores a n podemos obtener los siguientes números de Fibonacci:

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584$

Esta fórmula podemos expresarla como $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ donde $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \; y \; \beta = \left(1-\sqrt{5}\right)/2.$

5.3 Números de Lucas

Utilizando la fórmula anterior, el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891), descubrió la propiedad para generar los números que llevan su nombre aplicando la siguiente fórmula:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

que dándole valores a n obtenemos:

$$1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,2207$$

La fórmula anterior puede ser escrita como $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

5.4 Números primos Áureos

A partir de la fórmula $n^2 - n - 1$, y dándole valores a n podemos encontrar infinitos números primos. Veamos:

$$5,11,19,29,41,55,71,89,109,131,155,181,239,271,379,419,461,$$

$$599,701,811,929,991,1259,1481,1559,1721,1979,2069$$

Algunos de estos números, a su vez, pueden generar nuevos números primos, por ejemplo:

$$5^2 - 5 - 1 = 19,\ \ 11^2 - 11 - 1 = 109,\ \ 19^2 - 19 - 1 = 341 = 11 \cdot 31$$

$$131^2 - 131 - 1 = 17029,\ \ 379^2 - 379 - 1,\ \ 461^2 - 461 - 1 = 212059 = 19 \cdot 11161$$

6. DESCOMPOSICIÓN EN SUMA DE NÚMEROS PRIMOS

6.1 Descomposición en suma de números primos mediante fracciones unitarias

Utilizando las fracciones unitarias vamos a descomponer el número 2011 en suma de números primos. Al tratarse de un número primo y buscando números iguales o mayores que 10, el número de descomposiciones debe ser impar. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{29} = \frac{Q}{Q+1},\ \ Q = \frac{2+29}{2 \cdot 29 - 31} = \frac{31}{27} = \frac{31}{3^3}$$

Obtenemos el número primo 31, por lo que nos quedan pendientes:

$$2011 - 31 = 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{31} = \frac{Q}{Q+1},\ \ Q = \frac{6+31}{6 \cdot 31 - 37} = \frac{37}{149}$$

Como los números 37 y 149 son primos, quedan pendientes:

$$1980 - (37 + 149) = 1794 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 23$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{13} = \frac{Q}{Q+1},\ \ Q = \frac{6+13}{6 \cdot 13 - 19} = \frac{19}{59}$$

Los números 19 y 59 son primos, por tanto:

$$1794 - (19 + 59) = 1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{37} = \frac{Q}{Q+1},\ \ Q = \frac{6+37}{6 \cdot 37 - 43} = \frac{43}{179}$$

Como los números 43 y 179 son primos, tenemos:

$$1716 - (43 + 179) = 1494 = 2 \cdot 3^2 \cdot 83$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{83} = \frac{Q}{Q+1},\ \ Q = \frac{6+83}{6 \cdot 83 - 89} = \frac{89}{409}$$

Los números 89 y 409 son primos, luego

$$1494-(89+409)=996=2^2 3\cdot 83$$

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{83}=\frac{Q}{Q+1},\ Q=\frac{14+83}{14\cdot 83-97}=\frac{97}{1065}=\frac{97}{3\cdot 5\cdot 71}$$

El número 97 es primo, por tanto

$$996-97=899=29\cdot 31$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{47}=\frac{Q}{Q+1},\ Q=\frac{6+47}{6\cdot 47-53}=\frac{53}{229}$$

Como los números 53 y 229 son primos, tenemos

$$899-(53+229)=617$$

El número 617 también es primo, por tanto, el número 2011 queda descompuesto en suma de trece números primos, a saber

$$2011=19+31+37+43+53+59+89+97+149+179+229+409+617$$

6.2 Clasificación de los números primos anteriores

6.2.1 Para el número 19

El número 19 es de la forma $19=4k+3=4\cdot 4+3$ por tanto, es un primo de Gauss. No puede ser expresado como suma de dos cuadrados pero sí como representación de cuatro cuadrados de la forma $19^2=18^2+6^2+1^2$.

El 19 es un primo Gemelo ya que $\{p,p+2\}=17,19$ son números primos.

El 19 es un primo Afortunado ya que $P_n-q=19$ donde $P_{17}=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17=510510$ y q es el producto del número primo inmediatamente superior a $P_{17}+1=510510+1=510511,$ esto es $P_{17}+1=510510+1=510511\to 510529,$ y por tanto, $510529-510511=19.$

El número 19 es un primo de Mersenne ya que $2^{19}-1=524287$ donde 524287 es primo.

$19=(3n^2+3n+2)/2$ con $n=3$ donde 19 es un número Triangular centrado.

$19=n^3-(n-1)^3$ con $n=3$ donde 19 es un número Hexagonal centrado.

$19=3n^2-3n+1$ con $n=3$ donde 19 es un Hexágono mágico.

$19=(n+1)^3-n^3$ con $n=2$ donde 19 es un primo Cubano.

$19=2^0\cdot 3^2+1$ es un primo de Pierpont.

$19=\left(1+3\sqrt{-2}\right)\left(1-3\sqrt{-2}\right)$ es un número de Heegner que representa formas cuadráticas de los cuerpos $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right)$ a través del campo imaginario.

Es el primo Higgs 19 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n)|\prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n>Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.

6.2.2 Para el número 31

El número 31 es de la forma $31=4k+3=4\cdot 7+3$ por lo que es un primo de Gauss. Puede ser representado como $31^2=30^2+6^2+5^2$.

El número 31 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=31,37$ son números primos.

El número 31 es un primo de Mersenne ya que $31=2^5-1$ está relacionado con el número perfecto 496, ya que $496=2^{5-1}(2^5-1).$

El número 31 es un primo Primorial y un primo de Euclides ya que $31 = 2\cdot 3\cdot 5+1$.
$31=(3n^2+3n+2)/2$ con $n=4$ es un primo Triangular centrado.
$31=(5(n-1)^2+5(n-1)+2)/2$ con $n=4$ es un primo Pentagonal centrado.
$31=5(n^2-n)+1$ con $n=3$ es un primo Decagonal centrado.
$31=2k-1=2\cdot 16-1$ es un primo Impar. Ver secuencia A065091.
El 31 es un primo Regular de la forma $31=2n+1$ con $n=15$. Estos primos no dividen al número de clases del p-ésimo campo ciclotómico.
El 31 es un primo Haga Truncable ya que 3, 13 y 31 son números primos.
El 31 es un primo Feliz ya que $3^2+1^2=10;\ 1^2+0^2=1$ termina en la unidad.
El 31 es un primo Gemelo ya que $\{p, p+2\}=29,31$ son números primos.
El número 31 es un primo Circular ya que 13 y 31 son primos.
Es el primo Higgs 31 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n)|\prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.

6.2.3 Para el número 37

El número 37 es de la forma $37=4k+1=4\cdot 9+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $37=6^2+1^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$. Efectivamente:

$$37=(6+i)(6-i)=6^2+1^2 \text{ o bien } 37=(6+i)(1+6i)(-i)=6^2+1^2$$

$37=(n+1)^3-n^3$ con $n=3$ es un primo Cubano.
$37=(n-2)+(n-3)$ con $n=21$ es un primo de la secuencia de Padovan.
$37=6n(n-1)+1$ con $n=3$ es un primo Estrella.
El número 37 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\}=37,43$ son primos.
El número 37 es un primo Stomer ya que $37^2+1=1370$ donde el mayor factor es 137.
El número 37 es un primo Truncable a la izquierda ya que $3,7,37$ son primos.
El 37 es un primo de Primos ya que $\{p, p+4\}=37,41$ son primos.
El 37 es un primo Invertible ya que al invertir sus cifras, 37 y 73 son primos.
El número 37 es un primo Circular ya que $3,7,37,73$ son primos.
$37=2^2\cdot 3^2+1$ es un primo de Pierpont
El número 37 es un primo Regular ya que no divide al número de clases del p-ésimo campo ciclotómico. Ver secuencia A007703.
El 37 es un primo Afortunado ya que $P_n-q=37$ donde $P_{23}=223092870$ y $q=223092907$ por lo que $223092907-223092870=37$.
El 37 es un primo Primigenio ya que $37=\{3,7,37,73\}$ es el conjunto de las permutaciones en números primos que se forman de algunos o de todos sus dígitos. Ver secuencia A119535.
El 37 es un primo Haga ya que 3,7,37 y 73 son primos generados al truncar sus dígitos.
El 37 es un primo Impar ya que $37=2k-1=2\cdot 19-1$.
El 37 es un primo Bueno ya que $P_n^2 > P_{n-1}\cdot P_{n+1} = 37^2 > 31\cdot 41 = 1369 > 1271$ el cuadrado de 37 es mayor al producto de 31 (primo anterior a 37) y 41 (primo posterior a 37). Ver secuencia A028388.
Es el primo Higgs 37 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tie-

ne la forma $\phi(Hp_n)|\prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.
El número 37 es el único número de dos cifras en base 10, cuyo producto multiplicado por 2, tomado al revés menos la unidad, vuelve a ser 37: $2\cdot 37 = 74$, $74-1=73$ y 37.

6.2.4 Para el número 43

El número 43 es de la forma $43 = 4k+3 = 4\cdot 10+3$ por lo que es un primo de Gauss. Puede ser representado como $43^2 = 42^2+9^2+2^2 = 42^2+7^2+6^2$. Aquí la doble representación se produce al no ser primo el 85 donde $85 = 43^2 - 42^2$.
$43 = (7n^2-7n+2)/2$ con $n=4$ es un primo Heptagonal centrado.
$43 = n^2-n+1$ con $n=7$ es un primo de la secuencia de Sylvester.
El 43 es un primo de Chen ya que $\{p, p+2\} = 43, 47$ ambos son primos.
$43 = \frac{2^q+1}{3} = \frac{2^7+1}{3}$ es un primo de Wagstaff ya que 43 y 7 son primos.
$43 = \left(5+3\sqrt{-2}\right)\left(5-3\sqrt{-2}\right)$ es un primo Heegner.
Es el primo Higgs 43 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n)|\prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.
El 43 es el número más pequeño representable como suma de 2, 3, 4 ó 5 primos diferentes:

$$43 = 2+41 = 11+13+19 = 2+11+13+17 = 3+5+7+11+17$$

6.2.5 Para el número 53

El número 53 es de la forma $53 = 4k+1 = 4\cdot 13+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $53 = 7^2+2^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$. Efectivamente:

$$53 = (7+2i)(7-2i) = 7^2+2^2 \text{ o bien } 53 = (7+2i)(2+7i)(-i) = 7^2+2^2$$

$53 = 3\cdot 18-1$ es un primo de Eisenstein.
$53 = (107-1)/2$ es un primo Seguro utilizado en Criptología por su escasa vulnerabilidad.
$53 = (47+59)/2$ es un primo Equilibrado ya que es igual a la media aritmética del número primo anterior y posterior a 53 y, por tanto, se encuentra en progresión aritmética.
El número 53 es un primo Bueno ya que $p_n{}^2 > p_{n-1}\cdot p_{n+1} = 53^2 > 47\cdot 59 = 2809 > 2773$ la diferencia entre el cuadrado de 53 y el productos de los números primos anterior (47) y posterior (59) es menor.
Es el primo Higgs 53 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n)|\prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.
El 53 es un primo Truncable a la izquierda ya que 5 y 3 son primos.
$53 = 2k-1 = 2\cdot 27-1$ es un número Impar primo.
El 53 es un número Sexi ya que $\{53, 53+6\}$ 53 y 59 son números primos.

El 53 es un primo de Sophie Germain ya que $\{53, 2\cdot 53+1\}$ 53 y 107 son números primos.
La suma de los primeros 53 números primos es 5830 que es divisible por 53 ya que $5830 = 2\cdot 5\cdot 11\cdot 53.$

6.2.6 Para el número 59

El número 59 es de la forma $59 = 4k+3 = 4\cdot 14+3$ por lo que es un primo de Gauss. Puede ser representado como $59^2 = 58^2 + 9^2 + 6^2.$ Aquí la doble representación se produce al no ser primo el 117 donde $117 = 59^2 - 58^2.$
$59 = 3\cdot 20-1$ es un primo de Eisenstein.
En 59 es un primo Seguro ya que en $29 = (59-1)/2$, 29 y 59 son primos.
El 59 es un primo de Euclides ya que $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1 = 30031 = 59\cdot 509$ es un múltiplo de 59.
El 59 es un primo altamente Cototient ya que satisface la ecuación $x-\varphi(x) = k$ para cualquier entero por debajo de k y por encima de 1. $\varphi(n)$ es la función Indicatriz de Euler. Ver secuencia A100827.
El 59 es un primo Afortunado ya que $P_{53} - q = 59.$ Ver secuencia A046066.
El 59 es un número primo de Pillai ya que satisface la ecuación $n!+1 \equiv 0(mód.59)$ para $n = 15.$ Ver secuencia A063980.
mo: $59+95 = 154;\ \ 154+451 = 605;\ \ 605+506 = 1111.$
Es el primo Higgs 59 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.

6.2.7 Para el número 89

El número 89 es de la forma $89 = 4k+1 = 4\cdot 22+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $89 = 8^2 + 5^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.
$89 = 3\cdot 30-1$ es un primo de Eisenstein.
El 89 es un primo de Fibonacci ya que $\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...\}$.
El 89 es un primo Afortunado ya que $P_{67} - q = 89.$ Ver secuencia A046066.
Es el primo Higgs 89 de la sucesión con a^3. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A057447.
El 89 es un primo de Markov ya que satisface la ecuación $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$ con las siguientes representaciones: Ver secuencia A002559

$$1^2 + 34^2 + 89^2 = 3\cdot 1\cdot 34\cdot 89 = 9078$$
$$1^2 + 89^2 + 233^2 = 3\cdot 1\cdot 89\cdot 233 = 62211$$

6.2.8 Para el número 97

El número 97 es de la forma $97 = 4k + 1 = 4 \cdot 24 + 1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $97 = 9^2 + 4^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.
El 97 es un primo Truncable a la izquierda ya que 7 y 79 son primos.
$97 = 2^5 \cdot 3^1 + 1$ es un primo Pierpont.
El 97 es un primo Circular ya que 97 y 79 son primos.
$97 = 3 \cdot 2^5 + 1$ es un primo de Proth.
El número 97 es un primo Bueno ya que $97^2 > 89 \cdot 101 = 9709 > 8989$ (el cuadrado de 97 es mayor que el producto del primo anterior y primo posterior).
El 97 es un primo Feliz ya que $9^2 + 7^2 = 130;\ 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10;\ 1^2 + 0^2 = 1$ tiene como límite la unidad.

6.2.9 Para el número 149

El número 149 es de la forma $149 = 4k + 1 = 4 \cdot 37 + 1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $149 = 10^2 + 7^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.
$149 = 3 \cdot 50 - 1$ es un primo de Eisenstein.
El 149 es un primo de Chen ya que $\{149, 149 + 2\} = 149, 151$ son primos. Ver secuencia A09611.
El 149 es un primo Fuerte ya que $149 > (139 + 151)/2 = 149 > 145$.
Es el primo Higgs 149 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p - 1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.

6.2.10 Para el número 179

El número 179 es de la forma $179 = 4k + 3 = 4 \cdot 44 + 3$ por lo que es un primo de Gauss. Puede ser representado como $179^2 = 178^2 + 17^2 + 8^2 + 2^2 = 178^2 + 16^2 + 10^2 + 1^2$.
$179 = 3 \cdot 60 - 1$ es un primo de Eisenstein.
$179 = 2 \cdot 89 + 1$ es un primo de Sophie Germain ya $\{179, 2 \cdot 179 + 1\} = 179, 359$ son números primos.
El 179 es un primo Fuerte ya que $179 > (173 + 181)/2 = 179 > 177$.
$179 = (n - 1)/2$ con $n = 359$ es un primo Seguro ya que 179 y 359 son primos.
El 179 es un primo Chen ya que $\{179, 179 + 2\} = 179, 181$ son primos.
Es el primo Higgs 179 de la sucesión con a^3. Son Higgs los números primos p para los que $p - 1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A057447.
El número 179 se puede representar como $179 = (17 \cdot 9) + (17 + 9)$.

6.2.11 Para el número 229

El número 229 es de la forma $229 = 4k+1 = 4\cdot 57+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $229 = 15^2 + 2^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

El 229 es un primo Afortunado ya que $P_{131} - q = 229$. Ver secuencia A046066.

El 229 es un primo Gemelo con 227.

El 229 es un primo de Primo ya que $\{229, 229+4\} = 229, 233$ son primos.

El 229 es un Triple primo ya que $\{p, p+4, p+6\} = 223, 227, 229$ son primos.

El 229 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\} = 223, 229$ son primos.

El 229 es el primo más pequeño en base 10 que si se suma con su inversión, genera otro primo: $229 + 922 = 1151$. Ver secuencia A061783.

Es el primo Higgs 229 de la sucesión con a^2. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A007459.

El número 229 es un primo Regular ya que $229 = 2k+1$ con $k = 114$. Ver secuencia A007703. Estos números no dividen al número de clases del p-ésimo campo ciclotómico.

6.2.12 Para el número 409

El número 409 es de la forma $409 = 4k+1 = 4\cdot 102+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $409 = 20^2 + 3^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

$409 = (3n^2 + 3n + 2)/2$ con $n = 16$ es un primo Triangular centrado.

El 409 es un primo Feliz ya que $4^2 + 0^2 + 9^2 = 97;\ 9^2 + 7^2 = 130;\ 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10;\ 1^2 + 0^2 = 1$ termina en la unidad.

El número 409 es un primo Irregular. Ver secuencia A000928. Estos números dividen al número de clases del p-ésimo campo ciclotómico.

6.2.13 Para el número 617

El número 617 es de la forma $617 = 4k+1 = 4\cdot 154+1$ y es un entero de Gauss ya que puede escribirse como suma de dos cuadrados: $617 = 19^2 + 16^2$ y por tanto, admite factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

$617 = 3\cdot 206 - 1$ es un primo de Eisenstein.

El 617 es un primo Truncable a la izquierda ya que 7,17,617 son primos.

El 617 es un primo de Chen ya que $\{617, 617+2\} = 617, 619$ son primos.

$617 = (1!)^2 + (2!)^2 + (3!)^2 + (4!)^2$ es suma de los cuadrados de las factoriales de los cuatro primeros números naturales.

Es el primo Higgs 617 de la sucesión con a^3. Son Higgs los números primos p para los que $p-1$ divide el cuadrado del producto de todos los términos anteriores. Su representación tiene la forma $\phi(Hp_n) | \prod_{i=1}^{n-1} Hp_i^a$ y $Hp_n > Hp_{n-1}$ donde $\phi_{(n)}$ es la función Indicatriz de Euler. Ver la secuencia en http://Oeis.org/A057447.

$617 = 109 + 113 + 127 + 131 + 137$ es suma de cinco números primos consecutivos.

6.3 Descomposición en suma de números primos mediante conjetura de Goldbach

Christian Goldbach (1690-1764) fue profesor de matemáticas e historiador de la Academia Imperial de San Petersburgo y tutor del zar Pedro II en Moscú. Se le recuerda sobre todo por su famosa conjetura según la cual, todo entero par, mayor que 2, sería suma de dos números primos. Hasta ahora nadie ha conseguido demostrarla o refutarla, y sigue siendo uno de los más famosos problemas no resueltos de la Teoría de los Números. Precisamente, basándonos en esta conjetura vamos a intentar descomponer el número 2011 y suma de la mayor cantidad de números primos distintos. Operamos de la siguiente forma:
Suma de los primeros 34 números primos: 2127
Diferencia con 2011: 2127-2011 = 116
Esta diferencia puede expresarse como 116=3+113, por tanto el número 2011 puede ser representado como suma de 32 números primos distintos y cuasi consecutivos:

$$2011 = 2+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+$$
$$67+71+73+79+83+89+97+101+103+107+109+127+131+137+139$$

A continuación anotamos algunas de las propiedades de cada uno de estos números primos.
El 2 es el más pequeño de los números primos y el único primo que es par.
El 2 es un primo de Sophie Germain ya que $\{p, 2p+1\} = 2,5$ son números primos.

$2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/16 + ... = 2$ es el único número x tal que la suma de los recíprocos de los exponentes de x es igual a sí mismo.

$2 = \dfrac{\left(1+2\sqrt{2}\right)^n - \left(1-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$ con $n=1$ es un número primo de Pell.

$2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ con $n=0$ es un número primo de Lucas.

$2 = n!+1$ con $n=1$ es un número primo Factorial.
$2 = 3\cdot 1 - 1$ es un número primo de Eisenstein.
El 5 es un número primo Gemelo con 3 y con 7.
$5 = 2(n-1)+(n-2)$ con $n=3$ es un número primo de Pell.
$(n-1)!+1 \equiv 0(m\acute{o}d.n^2)$ con $n=5$ es un número primo de Wilson.

$5 = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ con $n=3$ es un número primo de Catalán.

$7 = 2^3 - 1$ es un número primo de Mersenne.
$7 = 2\cdot 2^2 - 1$ es un número primo de Woodall.
$7 = \left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$ es un número primo de Heegner en campo Real.
$7 = 2\cdot 3 + 1$ es un número primo Seguro.
El 11 es un primo de Sophie Germain ya que $\{p, 2p+1\} = 11, 23$ son números primos.
El 11 es un número primo Strobogrammatic ya que tiene la misma significación de forma simétrica.
El 11 es un primo Repunit ya que $11 = (10^n - 1)/(10-1)$ con $n=2$.
$11 = 3\cdot 4 - 1$ es un número primo de Eisenstein.
El 13 es un primo Circular ya que $\{13, 31\}$ son números primos.
El 13 es un número primo Cubano ya que $13 = 3n^3 + 6n + 4$ con $n=1$.
El 13 es un número primo Pierpont ya que $13 = 2^2 \cdot 3^1 + 1$.

El 13 es un número primo Proth ya que $13 = 6 \cdot 2^1 + 1$.
$13 = 2^2 + 2^3 + 1$ es un número primo de Solinas.
El 17 es un número primo de Fermat ya que $17 = 2^4 + 1$.
El 17 es un primo Circular ya que $\{17, 71\}$ son números primos.
El 17 es un número primo de Perrin ya que $17 = (n-2) + (n-3)$ con $n = 11$.
El 17 es un número primo Leyland ya que $17 = 3^2 + 2^3$.
El 19 es un primo Trillizo ya que $\{p, p+2, p+6+p+8\} = 11,13,17,19$ son todos números primos.
$19 = \left(1+3\sqrt{-2}\right)\left(1-3\sqrt{-2}\right)$ es un número primo de Heegner en campo Complejo.
El 19 es un número primo Cubano ya que $19 = n^3 - (n-1)^3$ con $n = 3$.
El 23 es un número primo Factorial ya que $23 = 4! - 1$.
El 23 es un primo Seguro ya que 23 y $(23-1)/2 = 11$ son números primos.
$23 = 3 \cdot 2^n - 1$ con $n = 3$ es un número primo de Thabit.
$23 = n \cdot 2^n - 1$ con $n = 3$ es un número primo de Woodall.
El 29 es un número primo de Pell ya que $29 = 2(n-1) + (n-2)$ con $n = 11$.
$n! + 1 \equiv 0(mód.29) = 18$ es un número primo de Pillai.
El 29 es un primo de Markov ya que a la ecuación $x^2 + y^2 + p^2 = 3xyp$ le satisfacen las siguientes soluciones: $\{2,5,29\}, \{2,29,169\}, \{5,29,433\}$.

$$29 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ con $n = 7$ es un número primo de Lucas.

El 31 es un número primo de Euclides ya que $31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$.
El 31 es un número primo de Mersenne ya que $31 = 2^5 - 1$.
$31 = (5(n-1)2 + 5(n-1) + 2)/2$ con $n = 4$ es un número primo Pentagonal centrado.
El 31 es un primo Permutable ya que $\{31, 13\}$ son números primos.
$37 = n^3 - (n-1)^3$ con n=4 es un número primo Cubano.
$37 = (n-2) + (n-3)$ con n=21 es un número primo de Padovan.
El 37 es un primo Circular ya que $\{3, 7, 37, 73\}$ son números primos.
El 37 es un primo Stomer ya que $n^2 + 1 > 2n$ con n=6 de donde $6 \wedge 2 + 1 > 2 \cdot 6 = 37 > 12$.
$37 = 6n(n-1) + 1$ con n=3 es un número primo Estrella.
El 41 es un primo Bueno ya que $41^2 > 37 \cdot 43 = 1681 > 1591$.
El 41 es un primo Proth ya que $41 = 5 \cdot 2^3 + 1$.

$$41 = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$$ con n=5 es un número primo Newman-Shanks-Williams ya que $(41^2 + 1)/2 = 29^2$.

El 41 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\} = 41, 47$ son números primos.
El 43 es un primo Trillizo con $\{37, 41, 43\}$ y $\{41, 43, 47\}$.
El 43 es un primo de Wagstaff ya que $43 = (2^7 + 1)/3$.
El 43 es un primo de Primos ya que $\{p, p+4\} = 43, 47$ son números primos.
El 47 es un primo de Eisenstein ya que $47 = 3 \cdot 16 - 1$.
$47 = (2^n - 1)^2 - 2$ con n=3 es un número primo de Carol.

$47=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ con $n=8$ es un número primo de Lucas.

$47=3\cdot 2^4-1$ es un número primo de Thabit

El 53 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\}=53,59$ son números primos.

$53=(47+59)/2$ es un número primo Equilibrado.

El 53 es un primo de Sophie Germain ya que 53 y $2\cdot 53+1=107$ son números primos.

$53=6^2+2^4+1$ es un número primo de Solinas.

$53=3\cdot 18-1$ es un número primo de Eisenstein.

El 59 es primo Gemelo con 61.

$n!+1\equiv 0(mód.59)=40$ es un número primo de Pillai.

$59=2\cdot 30-1$ es un número primo Impar.

El 61 es un primo Cubano ya que $61=n^3-(n-1)^3$ con n=5.

El 61 es un primo Cuadrado centrado ya que $61=n^2+(n-1)^2$ con n=6.

El 61 es un primo Decagonal centrado ya que $61=5(n^2-n)+1$ con n=4.

El 67 es un primo de Primos ya que $\{p, p+4\}=67,71$ son números primos.

$67=\left(7+3\sqrt{-2}\right)\left(7-3\sqrt{-2}\right)$ es un número primo Heegner del campo complejo.

$n!+1\equiv 0(mód.67)=18$ es un número primo de Pillai.

El 67 es un primo Bueno ya que $67^2>61\cdot 71=4489>4331$.

El 71 es un primo de Brown y hace referencia al problema de Brucard ya que $n!+1=m^2$ donde $7!+1=71^2$.

El 71 es un primo Gemelo con 73.

El 71 es un primo Permutable ya que $\{71,17\}$ son números primos.

$71=(7n^2-7n+2)/2$ con n=5 es un número primo Heptagonal centrado.

El 73 es un primo Permutable ya que $\{73,37\}$ son números primos.

El 73 es un primo Circular ya que $\{3,7,37,73\}$ son todos números primos.

$73=6n(n-1)+1$ con n=4 es un número primo Estrella.

El 73 es número Repunit con base 8 ya que $b_8=111$.

El 79 es un primo Permutable ya que $\{79,97\}$ son números primos.

$79=(2^n+1)^2-2$ con n=3 es un número primo de Kynea.

El 79 es un primo de Primos ya que $\{p, p+4\}=79,83$ son números primos.

$79=2\cdot 40-1$ es un número primo Impar.

El 83 es un número primo de Sophie Germain ya que 83 y $2\cdot 83+1=167$ son números primos.

$n!+1\equiv 0(mód.83)=13$ es un número primo de Pillai.

$83=3\cdot 28-1$ es un número primo de Eisenstein.

El 89 es un primo de Sophie Germain ya que 89 y $2\cdot 89+1=179$ son números primos.

$89=\left(9+2\sqrt{-2}\right)\left(9-2\sqrt{-2}\right)$ es un número primo Heegner del campo complejo.

$89=3\cdot 30-1$ es un número primo de Eisenstein.

$89=(n-1)+(n-2)$ con n=46 es un número primo de Fibonacci.

El 97 es un primo Circular ya que $\{97,79\}$ son números primos.

El 97 es un primo Proth ya que $97=6\cdot 2^n+1$ con n=4

El 97 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\}=97,103$ son números primos.

El 97 es un primo de Primos ya que $\{p, p+4\}=97,101$ son números primos.

El 97 es un primo Trillizo ya que $\{p, p+4, p+6\} = 97,101,103$ son todos números primos.
El 101 es un primo Chen ya que $\{p, p+2\} = 101,103$ son números primos.
$101 = 5(n^2 - n) + 1$ con n=5 es un número primo Decagonal centrado.
$101 = 3 \cdot 34 - 1$ es un número primo de Eisenstein.
El 103 es un número primo Impar ya que $103 = 2 \cdot 52 - 1$.
El 103 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6\} = 103,109$ son números primos.
El 103 es un número primo de Gauss ya que $103 = 4 \cdot 25 + 3$.
El 103 es un primo Trillizo ya que $\{p, p+4, p+6\} = 103,107,109$ son todos números primos.
El 107 es un primo Impar ya que $2 \cdot 54 - 1$.
$107 = 3 \cdot 36 - 1$ es un número primo de Eisenstein.
El 107 es un primo Seguro ya que 107 y $(107-1)/2 = 53$ son números primos.
El 107 es un primo Cuatrillizo con $\{101,103,107,109\}$.
El 109 es un primo Feliz ya que $1^2 + 0^2 + 9^2 = 82,\ 8^2 + 2^2 = 68,\ 6^2 + 8^2 = 100,\ 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ termina en la unidad.
$109 = 2^2 \cdot 3^3 + 1$ es un número primo de Pierpont.
$109 = 3n^2 + 6n + 4$ con n=5 es un número primo Cubano.
El 127 es un primo de Mersenne ya que $127 = 2^7 - 1$.
$127 = 3n^2 + 3n + 1$ con n=6 es un número primo Cubano.
El 127 es un número de Friedman ya que $127 = -1 + 2^7$ utiliza todas las cifras del número.
El 127 es un primo Fuerte ya que $127 > (113+131)/2 = 127 > 122$.
$131 = 3 \cdot 44 - 1$ es un número primo de Eisenstein.
El 131 es un primo de Sophie Germain ya que 131 y $2 \cdot 131 + 1 = 263$ son números primos.
El 131 es un primo Circular ya que $\{13,31,113,131,311\}$ son todos números primos.
El 131 es un número primo Palíndromo.
El 137 es un primo Gemelo con 139.
El 137 es un primo Impar ya que $137 = 2 \cdot 69 - 1$.
$n! + 1 \equiv 0(mód.137) = 16$ es un número primo de Pillai.
El 137 es un primo Truncable por la izquierda ya que $\{137, 37, 7\}$ son números primos.
El 139 es un primo de Gauss ya que $139 = 4 \cdot 34 + 3$.
$n! + 1 \equiv 0(mód.139) = 16$ es un número primo de Pillai.
El 139 es un primo Feliz ya que $1^2 + 3^2 + 9^2 = 91,\ 9^2 + 1^2 = 82,\ 8^2 + 2^2 = 68,\ 6^2 + 8^2 = 100$ y $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ termina en la unidad.

7. CONJETURAS Y DEMOSTRACIONES

7.1 Todo número entero positivo es suma de cuatro cuadrados

En el año 1621, Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) publicó una nueva edición en versión greco-latina de los seis libros entonces conocidos de la Aritmética de Diofanto. En nota marginal de uno de los libros conjeturó que todos los enteros positivos se pueden obtener como suma de cuatro cuadrados, verificando esta hipótesis para todos los números hasta 120. Esta conjetura fue confirmada y ampliada en 1770 por el matemático suizo-alemán Josep Louis Lagrange (1736-1813). Este mismo año, el profesor de la Universidad de Cambridge Edward Waring (1734-1793), publicó su libro Meditations Algebraicae, el que conjeturo que todos número puede escribirse como suma de cuatro cuadrados, de nueve cubos,

de dieciséis bicuadrados, etc. Finalmente, esta teoría fue probada en 1909 por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943).
Con referencia al número 2011, he aquí algunas representaciones:

$$2011 = 5^2 + 8^2 + 31^2 + 31^2$$
$$2011 = 7^2 + 8^2 + 23^2 + 37^2$$
$$2011 = 5^2 + 7^2 + 16^2 + 41^2$$
$$2011 = 3^2 + 3^2 + 12^2 + 43^2$$

7.2 El producto de cuatro números consecutivos es igual a $p^2 - 1$

En su obra Para Pensar Mejor, el matemático, humanista y miembro de la Real Academia Española de las Ciencias Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004) plantea que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre un cuadrado perfecto menos la unidad.

El producto de cuatro números enteros consecutivos puede ser representado como $n(n+1)(n+2)(n+3)$, con n entero. La prueba de que es igual a $p^2 - 1$ viene determinada por

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = \left[(n+1)(n+2)\right]^2 - 1 = \left[n(n+3)+1\right]^2 - 1$$

En el producto de cuatro números consecutivos, si c es el centro de los cuatro, podemos expresarlos como

$$(c - 3/2)(c - 1/2)(c + 1/2)(c + 3/2) = (c^2 - 9/4)(c^2 - 1/4)$$

donde queda demostrada la conjetura de $p^2 - 1$ al ser c el epicentro o semisuma de los cuatro números consecutivos.

El número 2011 no puede ser expresado como producto de cuatro enteros consecutivos, pero sí como suma de cuatro números consecutivos más o menos un número primo. Veamos:

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680 = 41^2 - 1 \quad \Rightarrow 2011 = 1680 + 331$$
$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024 = 55^2 - 1 \quad \Rightarrow 2011 = 3024 - 1013$$

En el primer caso $41 = (5 \cdot 8 + 6 \cdot 7)/2$ y en el segundo $55 = (6 \cdot 9 + 7 \cdot 8)/2$, en ambos casos hemos tomado las semisumas de los cuatro números. En cuanto a los números primos que suman o restan, sus características son:

El 331 es un entero de Gauss, ya que es de la forma $331 = 4k + 3$ y no tiene factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

Se puede expresar como suma de cinco primos consecutivos: $331 = 59 + 61 + 67 + 71 + 73$.

Es un Pentagonal centrado ya que $(5(n-1)^2 + 5(n-1) + 2)/2 = 331$ con $n = 12$.

Es un Hexagonal centrado ya que $n^3 - (n-1)^3 = 331$ con $n = 11$.

Es un Primo Cubano ya que, $3n(n-1) + 1 = 331$ para $n = 10$ ó -11.

Los primos Cubanos se representan como $(x^3 - y^3)/(x - y) = p$, en nuestro caso $p = 331$, donde $x = y + 1$ con $y > 0$, que tiene igual solución que la anterior.

En cuanto al número 1013, es un primo de Sophie Germain ya que $2p + 1 = 2027$, donde $p = 1013$ y 2027 son primos.

El 1013 es un Cuadrado centrado ya que, $2n(n+1) + 1 = 1013$, con $n = 22$.

7.3 El producto de cuatro números enteros en progresión aritmética es siempre diferencia entre un cuadrado y una cuarta potencia de enteros

Si en la expresión anterior sustituimos p/q en lugar de n resulta, después de multiplicar por q^4, obtenemos la igualdad

$$p(p+q)(p+2q)(p+3q)=\left[(p+q)(p+2q)-q^2\right]^2-q^4$$

que nos demuestra que, si p y q son números enteros, el producto de cuatro enteros en progresión aritmética es siempre la diferencia entre un cuadrado y una cuarta potencia.
Por ejemplo, en la progresión aritmética $1,6,11,16$ de razón 5, obtenemos

$$1\cdot 6\cdot 11\cdot 16+5^4=1681=41^2$$

Por ejemplo, en la progresión aritmética $3,6,9,12$ de razón 3, obtenemos

$$3\cdot 6\cdot 9\cdot 12+3^4=2025=45^2$$

Las diferencias que se producen respecto a 2011, son las siguientes:

$2011=2025-14$ y $2011=1681+330$

Donde $14=(12n^2-10n)/2$ es un número Tetradecagonal y $330=n(3n-1)/2$ con $n=15$ es un número Pentagonal.

7.4 Cuadrados de números primos

Si p es un número primo mayor que 3, entonces p^2 es múltiplo de 12 más 1, es decir $p^2=12k+1.$ Pero esto es lo mismo que decir que $p^2-1=(p+1)(p-1)=12k.$ Por ejemplo:

$$43^2=1848+1=12\cdot 154+1$$
$$13^2=168+1=12\cdot 14+1$$
$$2^2=3+1=3\cdot 1+1$$
$$2^2-1=2+1=2^2-1=3$$

El número 12 es múltiplo de 3 y 4. Como debe ser primo, será impar y de la forma $p+1$ ó $p-1,$ pero estas formas generan números pares, por tanto su producto es múltiplo de 4. Además, si p es primo mayor que 3, será de la forma $3k+1$ ó $3k+2$ donde $k=1,2,3,...$ En el primer caso $p-1=3k,$ en el segundo caso $p+1=3(k+1)$ así, en todo caso $(p+1)(p-1)$ es múltiplo de 3. En realidad, no hace falta que p sea primo, basta que no sea 1, ni múltiplo de 2 ni de 3. Así, tenemos que

$$1849+169+4+3=43^2+13^2+2^2+3^1=2025$$

donde

$$2011=2025-14$$

con

$$14=3+11=7+7$$

7.5 La diferencia entre dos cuadrados es un cubo

Sea $x^2-y^2=z^3$ donde la diferencia entre los cuadrados de dos números triangulares es un cubo y sea n un entero cualquiera, entonces

$$x^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}\qquad y^2=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}$$

luego

$$z^3=n$$

y por tanto

$$x^2-y^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=z^3$$

$2011=1728+283$ donde $1728=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ con $n=12$

$$1728=78^2-66^2=12^3$$

$$2011 = 2744 - 733 \text{ donde } 2744 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \text{ con } n = 14$$

$$2744 = 105^2 - 91^2 = 14^3$$

En cuanto al 283 es un primo Gemelo con 281. También es un primo Trillizo ya que 281, 283 y 311 son números primos. En cuanto al 733 es un primo Bueno ya que $733^2 > 727 \cdot 739 = 537289 > 537253.$ Es un primo Equilibrado ya que $733 = (727 + 739)/2.$ También es un entero de Gauss ya que $733 = 2^2 + 27^2$ es suma de dos cuadrados.

7.6 La suma de dos cuadrados es un cubo

En su obra Diophantine Analysis, el que fuera profesor de matemáticas en The University of Illinois, presidente de The Mathematical Association of America y editor jefe de The American Mathematical Montly, Robert Daniel Carmichael (1879-1967), plantea una doble solución para la ecuación $x^2 + y^2 = z^3$ en donde

$$x = m^3 + mn^2, \ y = m^2 n + n^3, \ z = m^2 + n^2$$

$$x = m^3 - 3mn^2, \ y = 3m^2 n - n^3, \ z = m^2 + n^2$$

con $m > n.$

Para $m = 3, \ n = 1$ $\begin{cases} 30^2 + 10^2 = 10^3 \\ 18^2 + 26^2 = 10^3 \end{cases}$

Para $m = 3, \ n = 2$ $\begin{cases} 39^2 + 26^2 = 13^3 \\ (-9)^2 + 46^2 = 13^3 \end{cases}$

$$2011 = 10^3 + 1011 = 1000 + \{337 + 337 + 337\}$$

$$2011 = 13^3 - 186 = 2197 - \{89 + 97\}$$

El número 337 es primo de la forma $337 = 6n(n-1) + 1$ con $n = 8.$ Es un número Estrella que representa un centro Hexagrama como las damas chinas. También es un primo Permutable ya que 337 y 733 son primos.

El número 89 es de la forma $89 = p + 2$ donde $89 = 87 + 2 = 3 \cdot 29 + 2.$ Es un primo de Chen ya que 87 es un Semiprimo. Es un primo de Sophie Germain ya que en $2 \cdot 89 + 1 = 179$ los números 89 y 179 son primos. Es un primo de Eisenstein ya que $89 = 3k - 1 = 3 \cdot 30 - 1.$

El número 97 es de la forma $97 = 3 \cdot 2^5 + 1,$ es un primo Proth. También es un primo Feliz ya que $97 \to \ 9^2 + 7^2 = 130; \ 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10; \ 1^2 + 0^2 = 1$ termina en la unidad.

7.7 La diferencia de dos cubos es un cuadrado

Si m y n son dos enteros tales que $(m+1)^3 - m^3 = n^2$ entonces $n = k^2 + (k+1)^2.$ Empecemos por desarrollar los exponentes:

$$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1 = n^2 \text{ y } n = k^2 + (k+1)^2 = 2k^2 + 2k + 1$$

Las soluciones reales vendrán determinadas por:

$$m = -1/2; \ \ n = 2k^2 + 2k + 1; \ \ k = -1/2$$

Para $m = 7$: $(7+1)^3 - 7^3 = 8^3 - 7^3 = 13^2 \to 2^2 + (2+1)^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

Para $m = 104$: $(104+1)^3 - 104^3 = 105^3 - 104^3 = 181^2 \to 9^2 + (9+1)^2 = 9^2 + 10^2 = 181$

Para $m = 1455$: $(1455+1)^3 - 1455^3 = 1456^3 - 1455^3 = 2521^2 \to 35^2 + (35+1)^2 = 35^2 + 36^2 = 2521$

$$2011 = 181 + 1830 = 181 + 911 + 919$$

$$2011 = 2521 - 510 = 2521 - \{241 + 269\}$$

Donde 911 es un primo de Sophie Germain, de Eisenstein y un Decagonal centrado ya que $911 = 5(n^2 - n) + 1$ con $n = 14.$ El 919 es un primo Cubano, Chen y un número Palíndromo. Es un Hexagonal centrado ya que $919 = n^3 - (n-1)^3$ con $n = 18.$

El primo 241 es Gemelo con el 239 y es un primo Proth, ya que $241 = 15 \cdot 2^4 + 1.$ El número 269 es un primo de Eisenstein ya que $269 = 3k - 1 = 3 \cdot 90 - 1$ y también es un primo Regular ya que no divide al enésimo campo ciclotómico.

7.8 Aportaciones de Nicómaco de Gerasa

Nicómaco de Gerasa filosofo y matemático griego nació en la ciudad jordana de Gerasa allá por el siglo I de nuestra era. Perteneció a la escuela neopitagórica y fue el primero en separar la aritmética de la geometría. Escribió tres obras: Introducción a la Aritmética, que trata de la aritmética de los números; Teología de la Aritmética, que trata de la relación existente entre la matemática y la filosofía, y Manual de Armonía, que es la fuente sobre la teoría musical pitagórica.

A partir de los Elementos de Euclides de Alejandría (324-267) y posiblemente otras fuentes procedentes de la Mesopotamia, plantea la paridad y la primalidad de los números para cuantificar cantidades.

7.8.1 Números de la forma $6k,\ 6k+1\ ó\ 6k+3$:

- Toma una cantidad y la divide en dos partes iguales. Si lo consigue, la cantidad es par y de la forma $2k,$ si no lo consigue sobrará una unidad y por tanto, la cantidad será impar y de la forma $2k+1.$
- Toma las dos partes anteriores y traspasa de una parte a la otra una cantidad $k.$ A continuación divide la parte mayor en dos partes iguales. Si lo consigue, la cantidad es par y de la forma $2k.$ Estas dos partes son iguales a la parte anterior más pequeña. Si no lo consigue sobrará una unidad y por tanto, la cantidad será impar y de la forma $2k+1.$ Las dos partes iguales serán igual a la parte anterior más pequeña menos una unidad.

Para Euclides, si un número es susceptible de ser dividido en dos partes iguales y en tres partes iguales, también podrá ser dividido en seis partes iguales luego, el número podrá ser de la forma $6k,$ $6k+1$ ó $6k+3.$ Veamos un ejemplo:

$$2011 = 1005 + 1005 + 1$$

$$1005 \pm 335 \to \begin{cases} 1005 + 335 = 1340 \\ 1005 - 335 = \ \ 670 \end{cases}$$

$$1340 = 670 + 670$$

$$2011 = 670 + 670 + 670 + 1$$

7.8.2 Números oblongos o Heterómecos de la forma $n(n+1)$:

Es un número figurado creado por Pitágoras de Samos (579-500? a.C.). Buscamos un número de la forma $n(n+1) = n^2 + n.$

$2011 = 1938 + 73$ donde $1938 = n(n+1)$ con $n = 17$

$2011 = 2280 - 269$ donde $2280 = n(n+1)$ con $n = 18$

En cuanto al número primo 73, es Gemelo con 71, es un primo Permutable ya que 37 también es primo, es un número Estrella ya que $73 = 6n(n-1) + 1$ con $n = 4$ y es una solución del problema de Waring ya que $2^n + (1{,}5^n) - 2 \approx 73$ con $n = 6.$ En cuanto a 269, es un primo

Gemelo con 271, es un primo de Eisenstein ya que $269=3\cdot 90-1$ y es un primo de Chen ya que $269=267+2$ donde 267 es el producto de dos números primos. Es un primo Sexi de la forma $\{p, p+6\}$ $\{263, 269\}$, Trillizo de la forma $\{p, p+6, p+12\}$ $\{257, 263, 269\}$ y Cuatrillizo de la forma $\{p, p+6, p+12, p+18\}$ $\{251, 257, 263, 269\}$.

7.8.3 Juegos numéricos

Posiblemente lo más conocido de Nicómaco de Gerasa sean los juegos con montones. Veamos el juego de los tres montones.

Dividamos un número en tres partes iguales a las que llamaremos A, B, C. A continuación llevamos a cabo los siguientes movimientos:

1. C entrega la mitad de lo que tiene a A
2. A entrega la mitad de lo que tiene ahora a B.
3. B entrega la mitad de lo que tiene ahora a C.

Esto produce una estructura única, y genera un número mínimo y necesario que ha permitido llevar a cabo estos tres movimientos. También descubre una propiedad matemática en virtud de la cual podemos encontrar el número mínimo y necesario para una cesión de $1/n$ partes con p divisiones y m movimientos.

Vamos a utilizar lógica numérica para obtener la solución.

La cantidad mínima y necesaria para que un número pueda ser dividido en 3 partes iguales es 3, que genera 3 partes de una unidad cada una. Es un número de la forma $3k$.

- **<u>Primer movimiento</u>**: Para que C pueda ceder la mitad de lo que tiene, debe contar con una cantidad que sea 2 o múltiplo de 2, por tanto la cantidad mínima será 6, divida en 3 partes de 2 unidades cada una. Es un número de la forma $6k$.
- **<u>Segundo movimiento</u>**: Para que A pueda ceder la mitad de lo que tiene, ha debido recibir de C una cantidad par, lo que implica que C debe disponer de una cantidad de 4 o múltiplo de 4 luego, la cantidad mínima será de 12, dividida en tres partes de 4 unidades cada una. Es un número de la forma $12k$.
- **<u>Tercer movimiento</u>**: Para que B pueda ceder la mitad de lo que tiene, debe contar con una cantidad que sea 2 o múltiplo de 2. Esto sólo se consigue si B dispone de una cantidad que sea 4 o múltiplo de 4 y C, una cantidad que sea 8 o múltiplo de 8. Para llevar a cabo este movimiento, la cantidad mínima y necesaria debe ser 24 dividida en tres partes de 8 unidades cada una. Es un número de la forma $24k$.

  Las partes resultantes son:

$$x=\frac{4A+2C}{8}=6,\ y=\frac{2A+4B+C}{8}=7,\ z=\frac{2A+4B+5C}{8}=11$$

donde $A+B+C=8+8+8=24 \Rightarrow x+y+z=6+7+11=24$. Se trata de una solución indeterminada que podemos escribir como $6\,t+7t+11t=24t$, donde t es un entero cualquiera.

La cantidad mínima que puede ser dividida en tres partes iguales p, con una cesión de $1/n$ partes en m movimientos, ha resultado ser $24=3\cdot 2^3=p\cdot n^m$. Esta propiedad nos ofrece una importante herramienta para conocer, con poco esfuerzo, la cantidad necesaria en cualquier combinación de p, n, m.

	A	B	C	Total
Inicio	8	8	8	24
Primer movimiento	+4		-4	
	12	8	4	24
Segundo movimiento	-6	+6		
	6	14	4	24
Tercer movimiento		-7	+7	
Final	6	7	11	24

$$2011 = 1992 + 19$$

donde $1992 = 664(2+4)/8 + 664(2+4+1)/8 + 664(2+4+5)/8 = 498 + 581 + 913$

$$2011 = 2016 - 5$$

donde $2016 = 672(2+4)/8 + 672(2+4+1)/8 + 672(2+4+5)/8 = 504 + 588 + 924$

En cuanto al 19 es un primo de Heegner ya que $19 = \left(1+3\sqrt{-2}\right)\left(1-3\sqrt{-2}\right)$ es una forma cuadrática dentro del cuerpo $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right)$. En cuanto al 5, como $5 = 3\cdot 2^1 - 1$, es un número primo de Thabit.

Supongamos que en el caso anterior la cesión es de un quinto en lugar de la mitad. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos

$$p\cdot n^m = 3\cdot 3^3 = 81$$

que podemos dividir en tres partes de 27 unidades cada una, y cuyo desarrollo resulta:

	A	B	C	Total
Inicio	27	27	27	81
Primer movimiento	+9		-9	
	36	27	18	81
Segundo movimiento	-12	+12		
	24	39	18	81
Tercer movimiento		-13	+13	
Final	24	26	31	81

$$2011 = 1944 + 67$$

donde $1944 = 648\cdot 24/27 + 648\cdot 26/27 + 648\cdot 31/27 = 576 + 624 + 744$

$$2011 = 2025 - 14$$

donde $2025 = 675\cdot 24/27 + 675\cdot 26/27 + 675\cdot 31/27 = 600 + 650 + 775$

El 67 es un primo Fuerte ya que $67 > (61+71)/2 = 67 > 66.$

Si $14 = 3 + 11,\ 3 = \left(1+\sqrt{-2}\right)\left(1-\sqrt{-2}\right)$ es un primo de Heegner y 11 es un número primo.

Si $14 = 7 + 7,\ 7 = 4^1 + 2^2 - 1$ es un número primo de Kynea de segundo orden.

Seguro ya que $5 = (11-1)/2$ donde 5 y 11 son números primos.

Supongamos ahora que el que caso anterior lo llevamos a cabo en cuatro movimientos. La cantidad mínima y necesaria será de

$$p\cdot n^m = 4\cdot 3^4 = 324$$

dividido en cuatro partes de 81 cada una que desarrollamos como

	A	B	C	D	Total
Inicio	81	81	81	81	324
Primer movimiento	+27			-27	
	108	81	81	54	324
Segundo movimiento	-36	+36			
	72	117	81	54	324
Tercer movimiento		-39	+39		
	72	78	120	54	324
Cuarto movimiento			-40	+40	
Final	72	78	80	94	324

Si planteamos una solución algebraica donde

$$A + B + C + D = x + y + z + w = 324$$

Como $A + D/3 = 3A + D/3$ y $3A + D/3 - \left(3A + D/3\right)/3 = 2(3A + D)/9,$ resulta para

$$x=\frac{6A+2B}{9}$$

Como $B+(3A+D/3)/3=(3A+9B+D)/9$ y

$(3A+9B+D)/9-((3A+9B+D)/9)/3=2(3A+9B+D)/27$, resulta

$$y=\frac{6A+9B+2D}{27}$$

y, así sucesivamente hasta conseguir para z y w

$$z=\frac{6A+18B+54C+2D}{81} \text{ y } w=\frac{3A+9B+27C+55D}{81}$$

Pero sabemos que $A=B=C=D=4k$, luego

$$x=\frac{8k}{9}=\frac{8\cdot 81}{9}=72,\quad y=\frac{26k}{27}=\frac{26\cdot 81}{27}=78$$

$$z=\frac{80k}{81}=\frac{80\cdot 81}{81}=80,\quad w=\frac{94k}{81}=\frac{94\cdot 81}{81}=94$$

donde $72+78+80+94=324$.

$$2011=1944+67$$

donde $1944=432+468+480+564$

$$2011=2268-257$$

donde $2268=504+546+560+658$

El 67 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=67,73$ son ambos números primos. También es un primo de Solinas ya que $67=2^6+2^2-1$.

El 257 es un primo de Eisenstein ya que $257=3\cdot 86-1$.

El 257 es un primo Equilibrado ya que $257=(251+263)/2$.

El 257 es un entero de Gauss ya que $257=1^2+16^2$.

El 257 es un primo de Pillai ya que $n!+1\equiv 0(mód.257)=31$.

7.8.4 Relación entre cuadrados y cubos

La maravilla que nos ha dejado Nicómaco de Gerasa es el estudio de cómo relacionar cuadrados con cubos. He aquí su planteamiento:

Parte de un número Oblongo o Heterómeco de la forma $n(n+1)$ que es el producto de dos números consecutivos. Para $n=5$, $5(5+1)=30$.

Suma con $(n+1)$ el valor de n:

$$5+5+5+5+5+5=30$$

Suma la sucesión de números naturales dos veces de la forma siguiente:

$$5+4+3+2+1+1+2+3+4+5=30$$

Iguala cubos y cuadrados de la forma siguiente:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2=225=15^2=\left(\frac{30}{2}\right)^2$$

Sin comentarios.

Por ejemplo, sea $n(n+1)=72$ con $n=8$.

$$8+8+8+8+8+8+8+8+8=72$$

$$8+7+6+5+4+3+2+1+1+2+3+4+5+6+7+8=72$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3=(1+2+3+4+5+6+7+8)^2=1296=36^2=\left(\frac{72}{2}\right)^2$$

$$2011=1296+715$$

$$2011=2025-14$$

El número 715 forma pareja con el 714, dos números consecutivos que forman parte del llamado problema de Ruth - Aarón. Como $714=2\cdot3\cdot7\cdot17$ y $715=5\cdot11\cdot13$ resulta que el producto de ambos números es $714\cdot715=510510=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$ que es el producto de siete números primos consecutivos, además $2+3+7+17=5+11+13=29$.

Referente al número 14, si $2\cdot14\pm1=\begin{cases}29\\27\end{cases}$ y hacemos que $\{10^{14}-29,10^{14}-27\}$ se crea una pareja de números primos que son Gemelos $\{99999999999971,99999999999973\}$. Todo una maravilla que se la debemos Chris Caldwell.

7.9 Cuadrados y cubos vistos por Liouville

El matemático francés Joseph Liouville (1809-1882) también puso su granito de arena en el tema de Nicómaco de Gerasa, tratado anteriormente. El procedimiento planteado por Liouville lo podemos resumir en lo siguiente:

1. Se toma un entero positivo cualquiera y se calculando los divisores, incluidos la unidad y el número propio.
2. De cada divisor calculado antes, se cuentan los divisores.
3. Se suman, por una parte, los cuadrados de cada uno de los divisores, y por otra los cubos de dichos divisores. Ambas cantidades deben ser coincidentes.

Veamos un ejemplo para el número 100:

Divisores de 100: $100=\{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$

Número de divisores de cada uno de estos divisores:

1={1}	1	20={1,2,4,5,10,20}	6
2={1,2}	2	25={1,5,25}	3
4={1,2,4}	3	50={1,2,5,10,25,50}	6
5={1,5}	2	100={1,2,4,5,10,20,25,50,100}	9
10={1,2,5,10}	4		

$$(1+2+3+2+4+6+3+6+9)^2=1296=36^2$$
$$1^3+2^3+3^3+2^3+4^3+6^3+3^3+6^3+9^3=1296=36^2$$
$$2011=1296+715$$

Sea $715=199+239+277$

El 199 es un primo Regular ya que $199=2\cdot99+1$. Se puede representa como suma de cuatro cuadrados $199^2=198^2+19^2+6^2$. También como $199=61+67+71$ suma de tres números primos consecutivos. Como $199=31+37+41+43+47$ suma de cinco números primos consecutivos.

El 199 es $199=(3n^2+3n+2)/2$ con $n=11$ un número primo Triangular centrado. Se puede representar como $199=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ con $n=11$ un número primo de Lucas.

Es un primo Impar ya que $199=2\cdot100-1$ y es un primo Circular ya que $\{199,919,991\}$ son todos números primos.

El 239 es un primo de Eisenstein ya que $239=3\cdot80-1$. Es un Gemelo con 241 ya que ambos son números primos. Como $\{239,2\cdot239+1\}=139,479$ son primos, son números de Sophie Germain. El 239 es un primo de Chen ya que $\{p,p+2\}=239,241$ son números primos. Es un número primo de Newman-Shanks-Williams ya que $239=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ con $n=7$.

Estos números tienen la propiedad de que $(p^2+1)/2=n^2$. En nuestro caso esta propiedad se cumple, ya que $(239^2+1)/2=169^2$.
El 277 es un entero de Gauss ya que $277=4\cdot k+1=4\cdot 69+1$ puede ser representado como $277=14^2+9^2$ suma de dos cuadrados y tiene factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.
Es un número de Perrin ya que $277=(n-2)+(n-3)$ con $n=141$. Es un número Trillizo de la forma $\{p, p+4, p+6\}=277, 281, 283$ donde todos son números primos. Es un número primo Fuerte ya que $277>\frac{271+281}{2}=277>276$. Es un primo Impar ya que $277=2\cdot 139-1$. También es número primo de Pillai ya que $n!+1\equiv 0(mód.277)=40$. Es un número primo Regular ya que $277=2\cdot 138+1$.

7.10 Suma de cuadrados consecutivos (*)

Para dar solución a la ecuación $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+....$, el profesor de matemáticas de la Universidad de Israel, Peter Isaak Samovol, a partir de $n(2n+1)=2n^2+n$, sacando derivadas la convirtió en $2n^2+n=4n+1$. Ahora dando valores a n, se puede obtener:

$n=1:\ x^2+y^2=a^2=3$

$n=2:\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2=10$

$n=3:\ x^2+y^2+z^2+u^2=a^2+b^2+c^2=21,\ etc$

Los números 3, 10 y 21 corresponden a los valores de x y nos permite realizar:

$3^2+4^2=5^2=25$

$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2=365$

$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2=2030$

Las cantidades 25, 365 y 2030 pueden ser obtenidas mediante sumatorios:

$\sum_{x=3}^{5} x^2 \Big/ 2=25,\ \sum_{x=10}^{14} x^2 \Big/ 2=365$ y $\sum_{x=21}^{27} x^2 \Big/ 2=2030$

(*) Ver http://hojaynumeros.blogsport.com/2010/03/curiosidades-bien-fundamentadas.

La diferencia con 2011 es $2011=2030-19$.
El 19 es un primo Triangular centrado ya que $19=(3n^2+3n+2)/2$ con $n=3$.
El 19 es un primo Cubano ya que $19=n^3-(n-1)^3$ con $n=3$.
El 19 es un primo Pierpont ya que $19=2^1\cdot 3^2+1$.
El 19 es un primo de Heegner ya que $19=\left(1+3\sqrt{-2}\right)\left(1-3\sqrt{-2}\right)$ puede ser representado como una forma cuadrática dentro de los cuerpo $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2}\right)$ a través del campo imaginario o complejo.

<u>8 APARECE CADA AUTOR CON SU PROBLEMA</u>

8.1 Aparece Liu Hui

Liu Hui (220-280) vivió en el Reino de Wei, es decir en la parte central del norte de la China, en la provincia actual de Shanshi, en el siglo III de nuestra era. Es por lo tanto contemporáneo de Diofanto de Alejandría.

Tras el colapso de la dinastía Han, se crearon los “Tres Reinos”. Además del Reino de Wei, los generales Han crearon un reino al sur del Yangzi y otro en el oeste de la China, en la provincia actual de Szechwan. Liu Hui vivió en el período de los Tres Reinos de China. Vivió, pues, en un período de constante confrontación e intrigas políticas. Sin embargo, actualmente, este período se considera uno de los más románticos de la historia de China.

Se desconoce como influyeron todas estas circunstancias en la vida de Liu Hui, lo que sí sabemos es que, en el año 260, escribió un texto breve, Haidao Suanjing (Manual Matemático de la Isla del Mar), y en el 263, un comentario extraordinariamente notable del Jiuzhang Suanshu que hoy conocemos como Nueve Capítulos de la Matemática China. El *Jiuzhang Suanshu,* compendio del saber matemático chino, fue escrito en el siglo III a.C. (al igual que los Elementos de Euclides), destacándose entre sus comentaristas posteriores la figura de Liu Hui.

Ver la obra *Liu Hui Nueve Capítulos de la Matemática China* del profesor Josep Pla i Carrera, doctor en matemáticas y profesor emérito de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

De entre los problemas recogidos por los Nueve Capítulos, escenificamos el siguiente:

Compramos un objeto de oro conjuntamente. Si cada uno contribuye con 20 monedas, se produce un exceso de 13 monedas; pero si cada uno contribuye con 19 monedas, el déficit es de 11. Dime las personas que participan en la compra y el precio del objeto.
Resultado: {24 personas,467 monedas}
Sea M el número de monedas y p las personas participantes.
En el primer intento resulta $20\text{p} = \text{M} + 13$ y en el segundo $19\text{p} = \text{M} - 11$. Si ahora restamos una ecuación de la otra, obtenemos (20p=M+13)-(19p=M-11)=24p, de donde el número de participantes es de 24.
Ahora la cantidad de monedas vendrá determinada por $20 \cdot 24 - 13 = 19 \cdot 24 + 11 = 467$.
La relación con el número 2011 es $2011 = 467 + 1544$. Si $1544 = 757 + 787$, la descomposición resulta $2011 = 467 + 757 + 787$, suma de tres números primos cuyas características reseñamos a continuación:

$$467^2 = 466^2 + 23^2 + 20^2 + 2^2 = 466^2 + 22^2 + 20^2 + 7^2$$
$$757^2 = 756^2 + 37^2 + 12^2 = 756^2 + 28^2 + 27^2$$
$$787^2 = 786^2 + 31^2 + 24^2 + 6^2 = 786^2 + 30^2 + 23^2 + 12^2$$

Los números 467, 757 y 787 son números primos de Heegner:

$$467 = \left(15 + 11\sqrt{-2}\right)\left(15 - 11\sqrt{-2}\right)$$
$$757 = \left(27 + 2\sqrt{-7}\right)\left(27 - 2\sqrt{-7}\right)$$
$$787 = \left(28 + \sqrt{-3}\right)\left(28 - \sqrt{-3}\right)$$

El 467 es un primo Seguro ya que 467 y $(467 - 1)/2 = 233$ son números primos.

El 757 es un Entero de Gauss ya que $757 = 4 \cdot 189 + 1 = 26^2 + 9^2$ y tiene representación en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

El 787 es $787 = 149 + 151 + 157 + 163 + 167$ suma de cinco números primos consecutivos.

8.2 Aparece Fibonacci

Leonardo de Pisa más conocido como Fibonacci (1170-1250) fue un comerciante y matemático italiano que se interesó por la aritmética india y árabe. Escribió dos obras, una denominada Liber Abasí dedicada al estudio de los ábacos y publicada en 1202, y otra denominada Liber Quadratorum sobre ecuaciones diofánticas y publicada en 1225. Su aportación más importan fue su famosa sucesión conocida como *Sucesión de Fibonacci*, 1,1,2,3,5,8,13,..., en la que a partir del tercer término cada uno de ellos es la suma de los dos anteriores. Esta sucesión tiene varias propiedades interesantes; por ejemplo, la sucesión formada por las razones entre cada número de *Fibonacci* y el anterior, 1,2,3/2, 5/3, 8/5,..., tiene como límite la R*azón Áurea*.

Cuando se habla de la *Sucesión de Fibonacci* se trata de la definida como $u_1 = u_0 = 1,$ y se verifica, según la fórmula de Jacques Binet (1786-1856), que:

$$u_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

donde u_n es el n-ésimo termino de la sucesión.

Basándonos en uno de los problemas que Fibonacci plantea en su Liber Abasí, vamos dividir el número 2011 en cinco partes formadas por dos grupos de dos y tres primos, respectivamente.

Tomamos una cantidad y la dividimos en tres partes iguales a las que llamaremos $P, Q, R.$ A continuación restamos de R dos pequeñas cantidades a las que llamaremos a, b con $a \neq b.$ Las sumas $P+a$ y $Q+b$ resultan ser múltiplos de 20 y de 30, respectivamente, debido a que en el primer caso se ha convertido en 20 veces la cantidad b que hemos colocado en Q y en el segundo caso se ha convertido en 30 veces la cantidad a que hemos añadido en $P.$ El resto que queda hasta 2011 es suma de dos números primos.

<u>Planteamiento de Fibonacci:</u>

Considera que los números 20 y 30 son proporcionales y anota que cada una de las partes es de $20 \cdot 30 = 600$ de donde $P+Q+R = 600+600+600 = 1800.$

Considera que los valores de a y b son de 20 y 30 y anota $P+a = 600+20 = 620 = 20 \cdot 31$ que es un múltiplo de 20 y $Q+b = 600+30 = 630 = 30 \cdot 21$ que es un múltiplo de 30, con lo que da por hecho de que los valores de 620 y 630 son correctos.

Considera que los valores de a y b son de 21 y 31, que ya están incluidos en 620 y 630, por lo que, el valor inicial de $P = 620-21 = 599$ y el valor de $Q = 630-31 = 599$ luego, los valores iniciales de $P+Q+R = 599+599+599 = 1797$ donde 599 es un número primo.

La diferencia hasta 2011 es $2011-1797 = 214 = 107+107$ que es suma de dos primos iguales.

Estamos en el primer tercio del siglo XIII y Fibonacci está utilizando herramientas que fueron conocidas mucho más tarde. Actualmente podríamos haber calculado las tres variables de la siguiente forma:

$x = ab+a = 20\cdot 30+20 = 620,$ $y = ab+a = 20\cdot 30+30 = 630$ y $z = ab+a = 20\cdot 30-1 = 599$

Observar que el valor de z es el determinante de una matriz:

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 1 & 30 \end{vmatrix} = 20\cdot 30 - 1 = 499$$

En este supuesto aparecen el 107 y el 599 como números primos. Veamos sus características:

El 107 es un primo de Gauss ya que $107 = 4\cdot 26+3.$ Este número no puede ser representado como suma de cuadrados, pero sí como $107^2 = 106^2+14^2+4^2+1^2 = 106^2+10^2+8^2+7^2.$

El 107 es un primo de Chen ya que $\{p, p+2\} = 107{,}109$ son números primos.

El 107 es un primo Circular ya que $107, 701$ son números primos.

El 107 es un primo Primigenio ya que $\{7,17,71,107,701\}$ son todos números primos.

El 599 es un primo de Gauss ya que $599 = 4\cdot 149+3.$ Este número no puede ser representado como suma de cuadrados, pero sí como $599^2 = 598^2+26^2+20^2+11^2 = 598^2+27^2+18^2+12^2.$

El 599 es un primo Gemelo con 601.

El 599 es un primo Fuerte ya que $599 > (593+601)/2 = 599 > 597.$

El 599 es un primo Pillai ya que $n!+1 \equiv 0(m\acute{o}d.599) = 598.$

El 599 es un primo Sexi ya que $\{p, p+6, p+12\} = 587{,}593{,}599$ son números primos.

8.3 Aparece Bhâskara

Bhâskara (1114-1185) fue un matemático y astrónomo hindú que en 1150 escribió una obra que llamó Joya Principal de la Precisión, dividida en cuatro partes, de las que las dos primeras las dedicó a las matemáticas y las otras dos a la astronomía. La primera llamada Lilavati o Jugadora es su obra más famosa y está plagada de leyenda y poesía. El título mismo es interpretado por unos como una alegoría a la aritmética que se convierte así en protagonista personalizada. Otros creen que se refiere a su hija, víctima de un sortilegio, a quién Bhâskara se supone dedica la obra.

De entre los problemas recogidos en la parte de matemáticas, escenificamos uno sobre congruencias. Cierta cantidad de monedas se intenta repartir entre 10 personas, pero sobra una moneda. Se prueba el reparto con 9 personas, pero sigue sobrando una moneda. Si tenemos en cuenta que la cantidad es la mitad aproximada de 2011 y también es un número primo, ¿de qué cantidad estamos hablando?.

Planteamiento de Bhâskara :

Considera que si al dividir por 10 sobra una unidad la cantidad es un múltiplo de 10 más una unidad. Es de la forma $10n+1.$ Si al dividir por 9 sobra una unidad, la cantidad es de la forma $9n+1.$

Considera que el $mcm(9,10)=90,$ por tanto el número primo a localizar es de la forma $90n+1.$

Si en la forma $90n+1$ vamos dando valores a $n,$ encontramos:

$181, 271, 541, 631, 811, 991, 1171, 1531, 1621$ y 1801

todos números primos que al ser divido por 10 o por 9 dan como resto 1.

El número buscado es la mitad aproximada de 2011, $2011/2 \simeq 1005,$ el más cercano a esta cifra es el 991.

La diferencia con 2011, resulta $2011 = 991 + 1020.$

El 991 es un Entero de Gauss ya que $991 = 4 \cdot 247 + 3$ no puede ser representado como suma de dos cuadrados, pero sí como $991^2 = 990^2 + 36^2 + 19^2 + 18^2 = 990^2 + 27^2 + 26^2 + 24^2.$

El 991 es un primo Impar ya que $991 = 2 \cdot 496 - 1.$

El 991 es un primo Circular ya que $\{991, 199\}$ son números primos.

El 991 es un primo Regular ya que $991 = 2 \cdot 495 + 1.$

El 991 es un primo de Solinas ya que $991 = 2^{10} - 2^5 - 1.$

Sea $1020 = 510 + 510.$

El 510 es un Sphenic ya que $510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ es producto de cuatro primos.

El $510 = 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79$ es suma de ocho números primos consecutivos.

El $510 = 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71$ es suma de diez primos consecutivos.

El $510 = 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67$ es suma de doce números primos consecutivos.

Sea $510 = 255 + 255.$

El 255 es un primo de Mersenne ya que $255 = 2^8 - 1.$

El 255 es un número Sphenic ya que $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ es producto de tres números primos.

El 255 es un Repdigit en base 2 ya que $b_2 = 11111111.$

El 255 es un Totient perfecto ya que $\varphi(255) = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255.$ Un Totient perfecto es de la forma $n = \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(n)$ donde $\varphi^i(n) = \begin{cases} \varphi(n) & si \;\; i = 1 \\ \varphi(\varphi^{i-1}(n)) & otros \end{cases}$

8.4 Aparece Marco Aurel

De Marco Aurel (1478-1545) poco se conoce de su biografía. Se sabe que era de origen alemán, que ejerció como maestro en una escuela en Valencia (España) y que escribió Libro Primero de Arithmética y Algebratica que fue el primer libro de texto de aritmética y álgebra escrito en castellano. Este libro fue publicado por primera vez en 1552 e incluido en 1913 en la obra de Julio Rey Pastor, Los Matemáticos Españoles del Siglo XVI. La obra de Aurel, que recoge muchos problemas cotidianos y resueltos de una manera muy amena, puede ser descargada en versión PDF y castellano antiguo. Precisamente, basándonos en uno de estos problemas, vamos a escenificar una situación.

Dos estudiantes están interesados en la compra de un portátil, pero ninguno de los dos tiene dinero suficiente para comprarlo por sí sólo. El primero propone al segundo que si a la cantidad que tiene le suma 1 de cada 21 euros de lo que lleva, podrá acceder al portátil. Alegando que su amigo se va a quedar sin dinero, el segundo propone al primero que si a la cantidad que tiene le añade 1 de cada 24 euros, el portátil lo puede comprar él. Al parecer ninguno de los dos se pone de acuerdo. Pero nosotros queremos saber cuánto costaba el portátil y cuánto dinero llevaba cada uno.

Este es un problema muy parecido al que hemos resuelto de Fibonacci. Aquí vamos a plantear la solución más actualizada.

Planteamiento:

Supongamos que A y B son las cantidades de cada uno de los amigos, P el costo del portátil y a,b los números proporcionales $21, 24$.

$$A = ab - b = 21\cdot 24 - 24 = 480, \quad B = ab - a = 21\cdot 24 - 21 = 483$$

$$P = ab - 1 = 21\cdot 24 - 1 = 503$$

Conociendo el valor del portátil, 503, y la cantidad que llevada cada amigo, 480 y 483, las propuestas de cada uno se materializan:

$P = A + B/21 = 480 + 483/21 = 503$ y $P = B + A/24 = 483 + 480/24 = 503$

Como $480 + 483 + 503 = 1466$, la diferencia con 2011, $2011 = 1466 + 545$.

Sea $545 = 109 + 109 + 109 + 109 + 109$.

Sea $1466 = 313 + 313 + 337 + 503$

El $545 = 5\cdot 109$ es un Cuadrado centrado de la forma $545 = n^2 + (n-1)^2$ con $n = 17$.

El número 1466 puede ser representado como:

$$1466 = 29^2 + 25^2 = 25^2 + 21^2 + 20^2 = 31^2 + 19^2 + 12^2$$

$$1466 = 9^3 + 9^3 + 2^3 = 10^3 + 6^3 + 5^3 + 5^3$$

$$1466^2 = 216^2 + 1450^2$$

$$1466^2 + 537288^2 = 537290^2$$

Pasamos ahora a estudiar las propiedades de los primos 109, 313, 337 y 503.

El 109 es un primo Gemelo con 107.

El 109 es un Primo Chen ya que $\{p, p+2\} = 107,109$ son números primos.

El 109 es un primo Triangular centrado ya que $109 = (3n^2 + 3n + 2)/2$ con $n = 8$.

El 109 es un Entero de Gauss ya que $109 = 4\cdot 27 + 1 = 10^2 + 3^2$ y tiene factorización en el anillo $\mathbb{Z}[i]$.

El 109 es un primo Cubano ya que $109 = 3n^2 + 6n + 4$ con $n = 5$.

El 109 es un primo Trillizo ya que $\{p, p+2, p+6\} = 107,109,113$ son números primos.

El 109 es un primo Cuatrillizo ya que $\{p, p+2, p+6, p+8\} = 101,103,107,109$ son números primos.

El 109 es Quintillizo ya que $\{p, p+4, p+6, p+10, p+12\} = 97,101,103,107,109$ son números primos.

El 109 es un primo Feliz ya que $1^2+0^2+9^2=82,\ 8^2+2^2=68,\ 6^2+8^2=100,\ 1^2+0^2+0^2=1$ termina en la unidad.
El 109 es un primo Regular ya que $109=2\cdot 54+1$.
El 109 es un primo Pierpont ya que $109=2^2\cdot 3^3+1$.
El 313 es un Cuadrado centrado ya que $313=n^2+(n+1)^2$ con $n=12$.
El 313 es un primo de Primos ya que $\{p,p+4\}=313,317$ son números primos.
El 313 es un primo Truncable ya que $\{3,13,31,313\}$ son todos números primos.
El 313 es un primo Palíndromo.
El 313 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=307,313$ son números primos.
El 337 es un primo Circular ya que $\{337,373,733\}$ son todos números primos.
El 337 es un primo Reflejo ya que $\{337,733\}$ son números primos.
El 337 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=331,337$ son números primos.
El 337 es un primo Estrella ya que $337=6n(n-1)+1$ con $n=8$.
El 337 es un primo Truncable ya que $\{3,37\}$ son números primos.
El 337 es un primo Permutable ya que $\{337,373,733\}$ son todos números primos.
El $503=163+167+173$ es suma de tres números primos consecutivos.
El $503=2^3+3^3+5^3+7^3$ es suma de los cubos de los cuatro primeros números primos.
El 503 es un Seguro ya que 503 y $(503-1)/2=251$ son ambos números primos.
El 503 es un primo Sexi ya que $\{p,p+6\}=503,509$ son números primos.
El 503 es un primo de Primos ya que $\{p,p+4\}=499,503$ son números primos.
El 503 es un primo de Eisenstein ya que $503=3\cdot 168-1$.
El 503 es un primo Impar ya que $503=2\cdot 252-1$.
El 503 es un primo de Pillai ya que $n!+1\equiv 0(mód.503)=502$.

BIBLIOGRAFÍA

BOUVIER y GEORGE, Diccionario de Matemáticas, ISBN: 84-7339-706-1
CLAPHAM, Christopher, Dictionary of Mathematics Originally, ISBN: 84-89784-56-6
COHEN, Henri, Number Theory: Tools and Diophantine Equations, ISBN: 978-0-387-49922-2
CUSICK, DING, RENVALL, Stream Ciphers and Number Theory, ISBN: 0-444-51631-X
DEPMAN, I. Iá, Del Álgebra Clásica al Álgebra Moderna, ISBN: 978-5-484-01047-9
DUNHAM, William, El Universo de las Matemáticas, ISBN: 84-368-0896-7
GONZÁLEZ URBANEJA, P. Miguel, Pitágoras: El Filósofo del Número, ISBN: 84-95599-08-2
GUZMÁN OZAMIZ, Miguel, Para Pensar Mejor, ISBN: 84-368-0810-X
MILLÁN GASCA, Ana, Euclides: La fuerza del razonamiento matemático, ISBN: 84-95599-85-6
MORENO CASTILLO, Ricardo, Fibonacci, el primer matemático medieval, ISBN: 84-95599-82-1
NONDEDEU MORENO, Xaro, Mujeres, manzanas y matemáticas, ISBN: 84-930719-8-6
PLA CARRERA, Josep, Liu Hui, Nueve Capítulos de la Matemática China, ISBN: 978-84-92493-43-2
REY PASTOR y BABINI, Historia de la Matemática, ISBN: 84-7432-807-1
SANCHEZ y ROLDAN, Goldbach: Una Conjetura Indomable, ISBN: 978-84-92493-44-9
SAUTOY, Marcus, La Música de los Números Primos, ISBN: 978-84-96489-83-7

APOYO INTERNET

http://books.google.es/books?id=2qrrCWJQX2cC&pg=PA89-IA2&dq=marcos+aurel&hl=es&ei=ZzsLTcLUK9CfOuX0tLYJ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCgQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false Bajar el libro de Marco Aurel
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_numbers#Prime_numbers
http://hojamat.es/parra/iniparra.htm
http://mathworld.wolfram.com/
http://wapedia.mobi/es/N%C3%BAmero_primo
http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/Main_Page/
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html
http://www.wolframalpha.com/examples/