Polinomio Mínimo en Campos Cuadráticos

1. Método de solución

Partiendo de que un cuerpo cuadrático es $K=\mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, vamos a proponer un método o estructura para encontrar el polinomio mínimo de grado $[K:\mathbb{Q}]=2n,\ con\ n\in\mathbb{Z}$ de la forma $x^{2n}+Bx^n+C=0$, y proponer su solución.

Sea D un número racional que no es cuadrado perfecto en $\mathbb{Q}$, pero que puede representar algunos de los elementos de un polinomio, como una raíz $r=a+b\sqrt{D}$ o un discriminante como $D=b^2-4c$. Podemos decir que un cuerpo cuadrático es de la forma $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ y puede ser definido como $\mathbb{Q}(\sqrt{D})=\left\{a+b\sqrt{D}:a,b\in\mathbb{Q}\right\}$.

Si $D<0$, pertenece al campo de los números complejos y tienen representaciones finitas de la forma $x^2+Dy^2=C$.

Si $D>0$, pertenece al campo de los números reales y tienen representaciones infinitas de la forma $x^2-Dy^2=C$.

Sea N una norma o conjugado tal que $N(a,b)=(a+b\sqrt{\pm D})(a-b\sqrt{\pm D})=a^2\pm Db^2$, donde, si $D<0$, pertenece al campo de los números complejos y tienen representaciones finitas de la forma $a^2+Db^2=C$ y si $D>0$, pertenece al campo de los números reales y tienen representaciones infinitas de la forma $a^2-Db^2=C$.

Establecida la relación entre $x^2+Dy^2\cong a^2+Db^2,\in\mathbb{C}$ y $x^2-Dy^2\cong a^2-Db^2,\in\mathbb{R}$, podemos determinar que todo polinomio de la forma $x^{2n}+Bx^n+C=0$ tiene solución a partir de

$$N(x,y)=(a+b\sqrt{\pm D})=x^2\pm Dy^2\Rightarrow\begin{cases}Si\ D<0,\ x^2+Dy^2=C\in\mathbb{C}\\ Si\ D>0,\ x^2-Dy^2=C\in\mathbb{R}\end{cases}$$

1.1. Soluciones finitas e infinitas de un cuerpo cuadrático

Supongamos que partimos del número 31, que es primo, y no tiene raíz cuadrada exacta, podemos decir que la raíz cuadrada de 31 está comprendida entre 5 y 6, esto es, $6^2>31>5^2$. Como $5^2+5=6^2-6=30=5(5+1)$, existe una dispersión de $1=(31-30)$ y genera un número Oblongo o Heterométrico, que es producto de dos números consecutivos. Pues bien, el 31 tiene exactamente 5 representaciones en el campo de los números complejos, tantas como números cuadrados son menores a 31, así:

Representaciones finitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x^2+Dy^2=31$	$1^2+30\times1^2$	$2^2+3\times3^2$	$3^2+22\times1^2$	$4^2+15\times1^2$	$5^2+6\times1^2$

Por contra, las representaciones en el campo real son infinitas como infinitos son los cuadrados mayores a 31.

Representaciones infinitas	**6**	**7**	**8**	**9**	**10...**
$x^2-Dy^2=31$	$6^2-5\times1^2$	$7^2-2\times3^2$	$8^2-33\times1^2$	$9^2-2\times5^2$	$10^2-69\times1^2...$

Todas estas representaciones generan otros tantos polinomios mínimos, bien dentro del campo complejo, bien dentro del campo real.

2. Si $K=\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ es un cuerpo cuadrático, el polinomio mínimo generado será de la forma $x^{2n}-Bx^n+C=0.$

2.1. Solución por descomposición polinómica

Para $\sqrt{3},$ si $x=\sqrt{3}$ y $x^2=3,$ entonces $x^2-3=0$ es un polinomio mónico.
Para $\sqrt{5},$ si $x=\sqrt{5}$ y $x^2=5,$ entonces $x^2-5=0$ es un polinomio mónico.
Con la multiplicación de estos dos polinomios mónicos, obtenemos:

$$(x-3)(x-5)=x^2-3x-5x+15=x^2-8x+15=0$$

polinomio que tiene como solución $x=3,5,$ los dos números bases de las radicales cuadráticos. Ahora bien, este no es el polinomio que buscamos, ya que la variable x tiene exponente $2,$ por tanto:

$$(x^2-3)(x^2-5)=x^4-3x^2-5x^2+15=x^4-8x^2+15=0$$

que es un polinomio de grado 4 que tiene como solución $x=\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{5},$ cuatro raíces reales dos a dos conjugadas. Es la solución de las raíces cuarticas.

2.2. Solución sobre cuerpo cuadrático con dominio real

Dado que se trata de un cuerpo cuadrático con dominio real, $\sqrt{3},\sqrt{5},$ las bases son positivas, la solución se plantea a partir de $N(x,y)=(a+b\sqrt{D})=x^2-Dy^2=C.$ En este caso, como las raíces reales son $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5},$ $x=a=3+5=8$ y $D=3\times5=15,$ tenemos $8^2-15y^2=C$ de donde $y^2=(8^2-C)/15.$

Mediante modulares, $8^2\equiv C(mód.15)$ obtenemos para $C=4=2^2$ y para $b=\sqrt{4}=2.$

Aplicando la estructura creada, $N(x,y)=(8+2\sqrt{15})=8^2-15\times2^2=4,$ podemos calcular los valores de B y C del polinomio $x^{2n}-Bx^n+C=0$:

$$C=(8+2\sqrt{15})(8-2\sqrt{15})=4 \text{ y } B=(8+2\sqrt{15})+(8-2\sqrt{15})=16$$

de donde el polinomio mínimo es $x^2-16x+4=0$ y su solución $x=8\pm2\sqrt{15}\in\mathbb{R},$ son dos raíces reales conjugadas.

2.3. Polinomio reducible o irreducible

Para determinar si un polinomio es reducible o irreducible, podemos aplicar el procedimiento del módulo 2. Veamos:

Si $x^{2n}-Bx^n+C\equiv0(mód.2)=0,$ el polinomio es reducible.
Si $x^{2n}-Bx^n+C\equiv0(mód.2)=\pm1,$ el polinomio es irreducible.

En nuestro supuesto anterior, $x^2-16x+4\equiv0(mód.2),$ $x^2\equiv0(mód.2)=0,$ por tanto es reducible.

Otro procedimiento nos viene dado por la estructura empleada. Si $mcd(a,b)=1,$ es irreducible. Si $mcd(a,b)\neq 1,$ es reducible. En nuestro caso, como $mcd(8,2)=2,$ el polinomio $x^2-16x+4=0$ es reducible, así $N(x,y)=(4+\sqrt{15})=4^2-15\times 1^2=1$ y, por tanto:

$$C=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=1 \text{ y } B=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$$

el polinomio mínimo es $x^2-8x+1=0$ y su solución $x=4\pm\sqrt{15}\in\mathbb{R},$ dos raíces reales conjugadas.

Podíamos haber utilizado la Norma, y el Polinomio se habría obtenido mediante desarrollo $(x-a+b\sqrt{D})(x-a-b\sqrt{D})=x^2+a^2-2ax-b^2D=x^2-Bx+C=0$

$$N(x)=(x-4+\sqrt{15})(x-4-\sqrt{15})=x^2-8x+1=0$$

Por la descomposición polinómica sabemos que el grado del polinomio es $[K:\mathbb{Q}]=2n,$ ya que se parte de dos polinomios mónicos, $x^2-3=0$ y $x^2-5=0,$ así

$$N(x)=(x^2-4+\sqrt{15})(x^2-4-\sqrt{15})=x^4-8x^2+1=0$$

es el polinomio mínimo irreducible, de la forma $x^{2n}-8x^n+1=0,$ que tiene como solución $x=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{15}}\in\mathbb{R},$ cuatro raíces reales, dos a dos conjugadas.

Podemos hacer la comprobación a partir de una de las raíces generadas. Por ejemplo, para $r=\sqrt{4+\sqrt{15}}$:

Si $x=\sqrt{4+\sqrt{15}},$ $x^2=4+\sqrt{15},$ $x^2-4=\sqrt{15}$ y $(x^2-4)^2=15,$ entonces $(x^2-4)^2-15=0.$ Desarrollando el cuadrado de la suma de dos números, resulta:

$$(x^2-4)^2-15=x^4-8x^2+1=0$$

lo que demuestra que las raíces son correctas para este polinomio.

2.4. Transformación de Tschirnhaus

Si en $x^{2n}-8x^n+1=0$ hacemos que $n=3,$ transformamos el polinomio en uno de sexto grado de la forma $x^6-8x^3+1=0.$ Es la transformación de Ehrenfried Walter von Tschirnhaus *(1651-1708)* que, en las *Acta Eruditorum de 1683,* propuso un método con el que pretendía transformar cualquier ecuación polinómica de grado n en otra del mismo grado sin términos intermedios. Esta idea ya era conocida por *François Viête (1540-1603)*. Ver página 4 de http://hojamat.es/parra/cuarticas.pdf

Supongamos que una de las raíces es $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}.$ Mediante transformación sucesiva, obtenemos $x^3=4+\sqrt{15},$ $x^3-4=\sqrt{15},$ $(x^3-4)^2=15,$ $(x^3-4)^2-15=0.$ Desarrollando el último término $(x^3-4)^2-15=x^6-8x^2+16-15=x^6-8x^2+1=0,$ obtenemos el polinomio de origen.

El resultado anterior nos asegura seis raíces: cuatro raíces dos a dos conjugadas, de la forma $x=\pm\sqrt[3]{4\pm\sqrt{15}}$ y dos raíces primitivas de la unidad de la forma $x=(-1)^{2/3}\times\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$, donde $(-1)^{2/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ y su conjugado $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=1.$
Ver página 4 de http://hojamat.es/parra/gaussiana.pdf

3. Si $K=\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{8})$ es un cuerpo cuadrático, el polinomio mínimo generado será de la forma $x^{2n}-Bx^n+C=0.$

3.1 Solución por descomposición polinómica

Para $\sqrt{6},\ x=\sqrt{6},\ x^2=6,\ x^2-6=0.$
Para $\sqrt{8},\ x=\sqrt{8},\ x^2=8,\ x^2-8=0$

de donde $(x^2-6)(x^2-8)=x^4-14x^2+48=0,$ que tiene como solución $x=\pm\sqrt{6},\pm\sqrt{8},$ cuatro raíces reales, dos a dos conjugadas, que representan las dos raíces cuadradas propuestas.

3.2 Solución de la forma cuadrática

Calculamos $a=x=6+8=14$ y $D=6\times8=48$ y buscamos la solución mediante la estructura $N(x,y)=(14+b\sqrt{48})=14^2-48y^2=C.$

Utilizando modulares hacemos que $14^2\equiv C(mód.48),$ de donde $C=4$ y $b=y=2,$ por tanto $N(x,y)=(14+2\sqrt{48})=14^2-48\times2^2=4.$ Los valores de C y $B,$ son

$$C=(14+2\sqrt{48})(14-2\sqrt{48})=4 \text{ y } C=(14+2\sqrt{48})+(14-2\sqrt{48})=28$$

de donde $x^4-28x^2+4=0$ es el polinomio que tiene como solución $x=\pm\sqrt{14\pm2\sqrt{48}},$ cuatro raíces reales, dos a dos conjugadas. Pero este polinomio es reducible. Veamos por qué:

Por la prueba del módulo 2, $x^4-28x^2+4\equiv0(mód.2),$ el valor de $x=0,$ por tanto distinto a, $x\neq1.$

El discriminante $48=2^4\times3,$ no es un número libre de cuadrados.

El $mcd(a,b)=d=(14,2)=2,$ o sea $d\neq1,$ entonces

$C=(7+1\sqrt{48})(7-1\sqrt{48})=1$ y $B=(7+1\sqrt{48})+(7-1\sqrt{48})=14,$ por lo que el polinomio mínimo es $x^2-14x+1=0,$ que tiene como solución $x=7\pm1\sqrt{48},$ dos raíces reales conjugadas.

El discriminante $48=2^4\times3,$ no es un número libre de cuadrados, ya que $\sqrt{48}=\sqrt{4^2\times3}=4\sqrt{3},$ por tanto $x^2-14x+1=0,$ tiene como solución $x=7\pm4\sqrt{3},$ dos raíces reales conjugadas.

Si el polinomio hubiera sido $N(x)=\left(x^4-7+4\sqrt{3}\right)\left(x^4-7-4\sqrt{3}\right)=x^8-14x^4+1=0,$ las soluciones habrían sido $x_1=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ y $x_2=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}i},$ ocho raíces en dos grupos de cuatro raíces conjugadas, reales y complejas, respectivamente.

4. Si $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-5}+\sqrt{-7})$ es un cuerpo cuadrático, el polinomio mínimo generado será de la forma $x^{2n}+Bx^n+C=0.$

4.1 Solución por descomposición polinómica

Para $\sqrt{-5},$ si $x=\sqrt{-5}$ entonces $x^2+5=0$ es un polinomio mónico.
Para $\sqrt{-7},$ si $x=\sqrt{-7}$ entonces $x^2+7=0$ es un polinomio mónico.
Con la multiplicación de estos dos polinomios mónicos, obtenemos:

$$(x^2+5)(x^2+7)=x^4+12x^2+35=0$$

Este polinomio tiene como solución $x=\pm\sqrt{5}i,\pm\sqrt{7}i,$ cuatro raíces complejas, dos a dos conjugadas.

4.2 Solución de la forma cuadrática en campo complejo

Calculamos $a=x=5+7=12$ y $D=5\times7=35$ y buscamos la solución mediante la estructura $N(x,y)=(12+b\sqrt{-35})=12^2+35y^2=C.$

Mediante modulares $12^2\equiv C(mód.35)$ de donde $C=4$ y $b=y=2,$ por tanto $N(x,y)=(12+2\sqrt{-35})=12^2+35\times2^2=284.$ Observamos que el $mcd(12,2)=2,$ por tanto podemos reducir el polinomio mediante $N(x,y)=(6+\sqrt{-35})=6^2+35\times1^2=1,$ por lo que el polinomio reducido resulta

$$C=(6+\sqrt{-35})(6-\sqrt{-35})=1 \text{ y } C=(6+\sqrt{-35})+(6-\sqrt{-35})=12$$

así, $x^4+12x^2+1=0$ es el polinomio que tiene como solución $x=\pm\sqrt{6\pm\sqrt{35}i},$ cuatro raíces complejas, conjugadas dos a dos.

4.3 Solución utilizando el programa WolframAlpha

Mediante la función $MinimalPolynomial\left[\sqrt{-5}+\sqrt{-7},x\right],$ de WolframAlpha, se genera el polinomio $x^4+24x^2+4=0,$ y mediante la función $Roots\left[x^4+24x^2+4==0,x\right],$ genera como soluciones $x=i\sqrt{2\left(6+\sqrt{35}\right)},x=-i\sqrt{2\left(6+\sqrt{35}\right)},x=i\sqrt{2\left(6-\sqrt{35}\right)},x=-i\sqrt{2\left(6-\sqrt{35}\right)}.$ Observen que las soluciones llevan todas el 2 como multiplicador, lo que sugiere que $x^4+24x^2+4=0,$ no es un polinomio irreducible. Efectivamente, prescindimos de ese multiplicador y utilizamos la norma o conjugado de $6+\sqrt{35},$ encontramos $N(x)=\left(x^2+6+\sqrt{35}\right)\left(x^2+6-\sqrt{35}\right)=x^4+12x^2+1=0,$ polinomio igual al encontrado anteriormente por un procedimiento totalmente distinto, y que podemos comprobar mediante $MinimalPolynomial\left[\sqrt{6+\sqrt{35}}i,x\right]=x^4+12x^2+1=0.$

Nota: Todas estas funciones pueden resolverse copiándolas simplemente en el programa WolframAlpha en on line.

http://hojamat.es
http://hojamat.es/parra/iniparra.htm
http://hojamat.es/index.htm