ECUACION PELL

ORIGEN DE LA ECUACIÓN

En su obra A Dictionary of Mathematics Originally, el profesor de la Universidad de Oxford Chistopher Clapham, define a la Ecuación Pell como una ecuación diofántica de la forma $x^2 = ny^2 + 1,$ donde n es un entero *que no es cuadrado perfecto*.
Arquímedes (287-212 a.C.) recoge en su obra Libro de los Lemas el problema de los bueyes, donde plantea la ecuación $x^2 = 4729494y^2 + 1,$ de la que no da solución.
En su Aritmética, Diofanto de Alejandría (sobre 250 d.C.), plantea las ecuaciones $x^2 = 26y^2 + 1$ y $x^2 = 30y^2 + 1$ que, aunque no da solución, bien podrían considerarse como de Pell.
En el año 628, el astrónomo y matemático hindú Brahmagupta (598-665), plantea el primer método razonado para la solución de esta ecuación. Este método fue mejorado por otro astrónomo y matemático hindú, Bhaskara (1114-1185), que queda recogido en su obra Lilavati.
Fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) el que, aprovechando las aportaciones de Pierre de Fermat (1601-1665) y de Leonhard Euler (1707-1783), y con la ayuda de fracciones continuas, dio uno de los métodos que se aplica en la actualidad. Fue precisamente Euler el que, por equivocación dio a la ecuación el nombre de Pell, atribuyendo su descubrimiento a John Pell (1610-1685), matemático ingles que ha pasado a la historia de las matemáticas, precisamente por esta equivocación.
En 1799, la ecuación $x^2 = ny^2 + 1$ pasó a ser representada como $x^2 - Dy^2 = \pm 1,$ cuando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicó su obra Disquisitiones Arithmeticae, donde expone la factorización única en cuerpos complejos y, a partir del conjugado, establece la norma

$$N(\alpha) = (a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2 = \pm 1$$

que permite otra solución a la ecuación Pell,

$$x = \frac{(x + y\sqrt{D})^n + (x - y\sqrt{D})^n}{2} \quad y = \frac{(x + y\sqrt{D})^n - (x - y\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

donde $D = b^2 - 4ac$ es el discriminante o dominio de integridad de los sistemas cuadráticos.

HERRAMIENTAS PARA LA SOLUCIÓN

La solución a esta ecuación no es fácil, pero tampoco imposible. Requiere, eso sí, la utilización de ciertas herramientas, como las fracciones continuas o métodos de solución de una ecuación modular. Vamos a exponerlos vía ejemplos.
Supongamos que debemos resolver la ecuación $x^2 - 7y^2 = 1.$

APLICANDO MODULARES

Despejamos x en función de y:

Escribimos la ecuación como $x^2 \equiv 1(mód.7)$
El coeficiente independiente de esta ecuación es 1, y 1 siempre es resto cuadrático de cualquier ecuación, ya que $1^2 - 1 = 0,$ por tanto la primera raíz es $x_1 = 1 + 7t.$ Es una solución paramétrica. Gauss nos enseña, que si una ecuación cuadrática mónica admite una raíz, también admitirá como segunda raíz su inversa. La inversa de un número, respecto al módulo, es su complemento. En nuestro caso, la inversa de 1 respecto a 7 es 6, ya que $6 + 1 = 7$ entonces, la segunda raíz es $x_2 = 6 + 7t.$ Observar que la suma de los coeficientes independientes de las raíces, en las ecuaciones mónicas, dan el módulo, $6 + 1 = 7.$

Al tratarse de una ecuación multivariable, si la primera tiene dos raíces, la segunda también. Por sustitución, despejamos y:

$$(1+7t)^2 - 7y^2 = 1 \ \rightarrow y_1^2 = \frac{-1+(1+7t)^2}{7} = 0 + 2t + 7t^2$$

$$(6+7t)^2 - 7y^2 = 1 \ \rightarrow y_2^2 = \frac{-1+(6+7t)^2}{7} = 5 + 12t + 7t^2$$

La solución a la ecuación es:

$$x^2 \equiv 1(mód.7) \ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 7t \ \ y_1^2 \ = 0 + 2t + 7t^2 \\ x_2 = 6 + 7t \ \ y_1^2 = 5 + 12t + 7t^2 \end{cases}$$

Ahora se trata de que, dando valores a t, busquemos un cuadrado en x tal que, restando la unidad y dividiendo por 7, obtengamos un cuadrado. O bien, busquemos un cuadrado que, multiplicado por 7 y sumándole la unidad, obtengamos un cuadrado perfecto.

Observar, que si en $x_1 = 1 + 7t$ damos valor 1 a t, resulta $8^2 = 64$ y $64 - 1 = 63 = 7 \cdot 9 = 7 \cdot 3^2$, por tanto la solución a la ecuación es $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$.

Ahora, observar otra cosa, $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7}) = 1$ es la norma. Aplicando la solución de Gauss,

$$x = \frac{(8+3\sqrt{7})^1 + (8-3\sqrt{7})^1}{2} = 8, \quad y = \frac{(8+3\sqrt{7})^1 - (8-3\sqrt{7})^1}{2\sqrt{7}} = 3$$

Hemos dado a la ecuación exponente 1. Para exponentes $2, 3, 4, \ldots$ las soluciones habrían sido,

$x = 127, \ 2.024, \ 32.257, \ldots$ e $y = 48, \ 765, \ 12192, \ldots$

Que producen los siguientes resultados.

$$127^2 - 7 \cdot 48^2 = 1; \quad 2024^2 - 7 \cdot 765^2 = 1; \quad 32257^2 - 7 \cdot 12192^2 = 1$$

Como verán, es un tipo de ecuación que genera infinitas soluciones.

APLICANDO FRACCIONES CONTINÚAS

El astrónomo y matemático hindú Aryabhata (476-550), se cree fue el primero en utilizar las fracciones continuas para resolver sistemas de ecuaciones indeterminados. Así se desprende de su obra Aryabhatiya, escrita en verso allá por el año 510. Fue John Wallis (1616-1703), el más importante matemático inglés anterior a Isaac Newton (1642-1727), el que, en 1655, introdujo y desarrolló el concepto de fracción continua en su obra Arithmetica Infinitorum.

La relación de las fracciones continuas con los cuerpos cuadráticos se basa en que los desarrollos de los irracionales cuadráticos son periódicos.

Un número irracional α es cuadrático sí, y sólo sí, los coeficientes de su fracción continua se repiten periódicamente a partir de un cierto término.

Para desarrollar el irracional cuadrático α vamos a calcular los coeficientes a_n al mismo tiempo que los restos α_n. Concretamente a_n es la parte entera de α_n y $\alpha_{n+1} = 1/(\alpha_n - a_n)$.

En la fracción planteada, como la $\sqrt{7}$ está comprendida entre 2 y 3, entonces $a_0 = 2$.

Para $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ y $a_1 = 2$. Para $\alpha_2 = \dfrac{1}{\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} - 1} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ y $a_2 = 1$.

Para $\alpha_3 = \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{7}}{2} - 1} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ y $a_3 = 1$. Para $\alpha_4 = \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3} - 1} = 2 + \sqrt{7}$ y $a_4 = 1$.

Para $\alpha_5 = \dfrac{1}{2+\sqrt{7}-4} = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} = \alpha_1$ y $a_5 = 4$.

Por tanto, obtenemos $\sqrt{7}=\left[2,\overline{1,1,1,4}\right]$, donde la barra indica el periodo que se repite.
Observar que en el paso α_5 se repite la fracción de α_1, con lo que se termina un período y empieza otro.

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}=\left[2,\overline{1,1,1,4}\right]$$

Ahora, calcularemos los convergentes o reducidas de la siguiente forma:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a_n	*2*	*1*	*1*	*1*	*4*	*1*	*1*	*1*	*4*
x	2	3	5	8	37	45	82	127	590
y	1	1	2	3	14	17	31	48	223
x^2-Dy^2	-3	2	-3	1	-3	2	-3	1	-3

Observar que los valores de x^2-Dy^2 forman una sucesión que se repite al igual que el período de restos. También, que los únicos valores que satisfacen a la ecuación son los de las columnas 4 y 8. El primero corresponde a la norma del cuerpo cuadrático, esto es $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})=1$, el segundo corresponde al exponente 2,

$$x=\frac{(8+3\sqrt{7})^2+(8-3\sqrt{7})^2}{2}=127,\quad y=\frac{(8+3\sqrt{7})^2-(8-3\sqrt{7})^2}{2\sqrt{7}}=48$$

donde $8^2-7\cdot 3^2=(8^2-7\cdot 3^2)^2=127^2-7\cdot 48^2=1$.
Vamos a resolver la ecuación $x^2-23y^2=1$.
Como $\sqrt{23}$ está comprendido entre 4 y 5, entonces $a_0=4$.

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{23}-4}=\frac{4+\sqrt{23}}{7},\ a_1=4\quad \alpha_2=\frac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{4+\sqrt{23}}{7}-1}}=\frac{3+\sqrt{23}}{2},\ a_2=1$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{3+\sqrt{23}}{2}-3}}=\frac{3+\sqrt{23}}{7},\ a_3=3\quad \alpha_4=\frac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{3+\sqrt{23}}{7}-1}}=4+\sqrt{23},\ a_4=1$$

$$\alpha_5=\frac{1}{\cfrac{1}{4+\sqrt{23}-8}}=\frac{4+\sqrt{23}}{7}=\alpha_1,\ a_5=8$$

Por tanto, obtenemos $\sqrt{23}=\left[4,\overline{1,3,1,8}\right]$, donde la barra indica el periodo que se repite.

$$\sqrt{23}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\ddots}}}}}=\left[4,\overline{1,3,8}\right]$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	*4*	*1*	*3*	*1*	*8*	*1*	*3*	*1*	*8*
x	4	5	19	24	211	235	916	1151	10124
y	1	1	4	5	44	49	191	240	2111
x^2-Dy^2	-7	2	-7	1	-7	2	-7	1	-7

A partir de estos datos, la norma es $(24+5\sqrt{23})(24-5\sqrt{23})=1$ y la solución a la ecuación propuesta,

$$x=\frac{(24+5\sqrt{23})^1+(24-5\sqrt{23})^1}{2}=24,\quad y=\frac{(24+5\sqrt{23})^1-(24-5\sqrt{23})^1}{2\sqrt{7}}=5$$

Si hubiéramos resuelto mediante ecuaciones modulares, en $x^2-23y^2=1$ despejamos x,

$$x^2\equiv 1(mód.23)$$

Sabemos que la unidad es raíz de una ecuación cuadrática, por tanto

$$x_1=1+23t$$

La segunda raíz será la inversa respecto al módulo 23, esto es

$$x_2=22+23t$$

Por sustitución despejamos y, luego

$$(1+23t)^2-23y^2=1\ \rightarrow\ y_1^2=\frac{-1+(1+23t)^2}{23}=0+2t+23t^2$$

$$(22+23t)^2-23y^2=1\ \rightarrow\ y_1^2=\frac{-1+(22+23t)^2}{23}=21+44t+23t^2$$

Observar, que para $t=1,\ x=1+23=24$ que es el valor de la norma, $(24+5\sqrt{7})(24-5\sqrt{7})=1$, el valor de y, $y=2+23=25=5^2$, o también $24^2-1=575=23\cdot 25=23\cdot 5^2$.

APLICANDO CUADRADOS

Si se tiene cuenta que la ecuación Pell tiene como solución la diferencia de un cuadrado y el producto de otro cuadrado con un entero, *que no sea un cuadrado*, esta solución puede encontrarse directamente utilizando cuadrados perfectos.

Supongamos que buscamos un cuadrado de la forma $4k+1=s^2$, a partir la cual podemos hallar las siguientes soluciones,

$4\cdot 2+1=9\ \rightarrow\ 3^2\text{-}2\cdot 2^2=1$	$4\cdot 42+1=169\ \rightarrow\ 13^2-42\cdot 2^2=1$
$4\cdot 6+1=25\ \rightarrow\ 5^2-6\cdot 2^2=1$	$4\cdot 56+1=225\ \rightarrow\ 15^2-56\cdot 2^2=1$
$4\cdot 12+1=49\ \rightarrow\ 7^2-12\cdot 2^2=1$	$4\cdot 72+1=289\ \rightarrow\ 17^2-72\cdot 2^2=1$
$4\cdot 20+1=81\ \rightarrow 9^2-20\cdot 2^2=1$	$4\cdot 90+1=361\ \rightarrow\ 19^2-90\cdot 2^2=1$
$4\cdot 30+1=121\ \rightarrow\ 11^2-30\cdot 2^2=1$	$4\cdot 110+1=441\ \rightarrow\ 21^2-110\cdot 2^2=1$

Para números de la forma $4k+3=ns^2$ hallamos, entre otros

$4\cdot 15+3=63\ \rightarrow\ 8^2\text{-}7\cdot 3^2=1$	$4\cdot 24+3=99\ \rightarrow\ 10^2-11\cdot 3^2=1$

Es importante observar la progresión que se produce para los valores de k, que pone de manifiesto la estructura de los números entre los de la forma $4k+1$ y $4k+3$.

Si tenemos en cuenta que $n^2-1=ds^2$ es una solución de la ecuación Pell, donde $d,n,s\in Z$, a partir de un cuadrado podemos encontrar algunas de las muchas soluciones en el cuadro siguiente:

$2^2-1=3=3\cdot 1^2 \;\rightarrow\; 2^2-3\cdot 1^2=1$
$3^2-1=8=2\cdot 2^2 \;\rightarrow\; 3^2-2\cdot 2^2=1$
$4^2-1=15=15\cdot 1^2 \;\rightarrow\; 4^2-15\cdot 1^2=1$
$5^2-1=24=6\cdot 2^2 \;\rightarrow\; 5^2-6\cdot 2^2=1$
$6^2-1=35=35\cdot 1^2 \;\rightarrow\; 6^2-35\cdot 1^2=1$
$7^2-1=48=12\cdot 2^2 \;\rightarrow\; 7^2-12\cdot 2^2=1$
$8^2-1=63=7\cdot 3^2 \;\rightarrow\; 8^2-7\cdot 3^2=1$
$9^2-1=80=20\cdot 2^2 \;\rightarrow\; 9^2-20\cdot 2^2=1$
$10^2-1=99=11\cdot 3^2 \;\rightarrow\; 10^2-11\cdot 3^2=1$

Así, sucesivamente, se puede generar una solución a partir de infinidad de cuadrados.
En la reseña sobre el origen de la Ecuación Pell, hemos anotado las ecuaciones $x^2=26y^2+1$ y $x^2=30y^2+1,$ atribuidas ambas a Diofanto de Alejandría, pero que no da solución. Bien, nosotros lo vamos a intentar, pero ignorando las fracciones continuas y los cuerpos cuadráticos, desconocidos en la época en la que vivió Diofanto, siglo III de nuestra Era.
Para la ecuación $x^2=26y^2+1$:
Por tanteo con n, buscamos $26n^2+1=s^2$. Para $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots$ encontramos que el 10 satisface la ecuación. Efectivamente, $26\cdot 10^2+1=2601=3^2\cdot 17^2=51^2$, por tanto

$$x^2=26y^2+1=51^2-26\cdot 10^2=1$$

donde la norma es $(51+10\sqrt{26})(51-10\sqrt{26})=1.$
Para la ecuación $x^2=30y^2+1$:
Por tanteo con n, buscamos $n^2-1=30s^2$. Para $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots$ encontramos que el 11 satisface la ecuación. Efectivamente, $11^2-1=120=2^3\cdot 3\cdot 5=2^2\cdot 30,$ por tanto

$$x^2=30y^2+1=11^2-30\cdot 2^2=1$$

donde la norma es $(11+2\sqrt{30})(11-2\sqrt{30})=1.$

APLICANDO CUERPOS CUADRÁTICOS

Si $\alpha=a+b\sqrt{D}$ es un entero perteneciente al cuerpo cuadrático $\mathbb{Z}\sqrt{D}$ y $N(\alpha)=a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})=a^2-Db^2=\pm 1,$ siendo $N(a,b)$ la norma del conjugado $a-b\sqrt{D},$ una solución para la ecuación Pell sería $x+y\sqrt{D})(x-y\sqrt{D})=x^2-Dy^2=1,$ donde el valor de D puede ser calculado mediante fracciones continuas.
Si α,β es una solución de la ecuación $x^2-Dy^2=1,$ también $\alpha^2-D\beta^2=1$ y $(\alpha^2-D\beta^2)^n=1$ serán soluciones para cualquier valor de n con $n\geqq 1,$ entonces

$$x^2-Dy^2=(\alpha^2-D\beta^2)^n$$

$$(x+y\sqrt{D})(x-y\sqrt{D})=(\alpha+\beta\sqrt{D})^n(\alpha-\beta\sqrt{D})^n$$

De donde

$$x+y\sqrt{D}=(\alpha+\beta\sqrt{D})^n \text{ y } x-y\sqrt{D}=(\alpha-\beta\sqrt{D})^n$$

Resolviendo el sistema

$$x=\left[(\alpha+\beta\sqrt{D})^n+(\alpha-\beta\sqrt{D})^n\right]\Big/2,\quad y=\left[(\alpha+\beta\sqrt{D})^n-(\alpha-\beta\sqrt{D})^n\right]\Big/(2\sqrt{D})$$

que es la solución planteada por Gauss.
Por ejemplo, vamos a resolver la ecuación $x^2-31y^2=1.$
Sabemos que $\alpha_0=\sqrt{D}=\sqrt{31},$ raíz que está comprendida entre 5 y $6.$
A continuación calculamos los cocientes incompletos que se generan:

$$\alpha_1=\frac{1}{\alpha_0-a_0}=\frac{1}{\sqrt{31}-5}=\frac{5+\sqrt{31}}{6},\quad \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1}=\frac{1}{\frac{5+\sqrt{31}}{6}-1}=\frac{1+\sqrt{31}}{5}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-a_2}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{31}}{5}-1}=\frac{4+\sqrt{31}}{3},\quad \alpha_4=\frac{1}{\alpha_3-a_3}=\frac{1}{\frac{4+\sqrt{31}}{3}-3}=\frac{5+\sqrt{31}}{2}$$

$$\alpha_5=\frac{1}{\alpha_4-a_4}=\frac{1}{\frac{5+\sqrt{31}}{2}-5}=\frac{5+\sqrt{31}}{3},\quad \alpha_6=\frac{1}{\alpha_5-a_5}=\frac{1}{\frac{5+\sqrt{31}}{3}-3}=\frac{4+\sqrt{31}}{5}$$

$$\alpha_7=\frac{1}{\alpha_6-a_6}=\frac{1}{\frac{4+\sqrt{31}}{5}-1}=\frac{1+\sqrt{31}}{6},\quad \alpha_8=\frac{1}{\alpha_7-a_7}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{31}}{6}-1}=\frac{5+\sqrt{31}}{1}$$

$$\alpha_9=\frac{1}{\alpha_8-a_8}=\frac{1}{5+\sqrt{31}-10}=\frac{5+\sqrt{31}}{6}=\alpha_1.$$

Planteamos su desarrollo

$$\sqrt{31}=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}=\left[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right]$$

Finalmente calculamos las reducidas o convergentes

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_n	*5*	*1*	*1*	*3*	*5*	*3*	*1*	*1*	*10*	*1*	*1*	*3*
x	5	6	11	39	206	657	863	1520	16063	17583	33646	118521
y	1	1	2	7	37	118	155	273	2885	3158	6043	21287
x^2-Dy^2	-6	5	-3	2	-3	5	-6	1	-6	5	-3	2

Como podemos comprobar, $(1520-273\sqrt{31})(1520-273\sqrt{31})=1$ es la unidad fundamental de norma 1, y la solución a la ecuación $1520^2-31\cdot 273^2=1$.
Teniendo en cuenta que los valores de las variables vienen determinados por

$$x=\frac{(x+y\sqrt{D})^n+(x-y\sqrt{D})^n}{2},\quad y=\frac{(x+y\sqrt{D})^n-(x-y\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

Para $n=1,2\ y\ 3,$ tenemos

$$x=\frac{(1520+273\sqrt{31})^n+(1520-273\sqrt{31})^n}{2}=1.520,\ 4.620.799,\ 14.047.227.440,\dots$$

$$y=\frac{(1520+273\sqrt{31})^n-(1520-273\sqrt{31})^n}{2\sqrt{31}}=273,\ 829.920,\ 2.522.956.527,\dots$$

Dado que acabamos de entrar en el año 2010, vamos a resolver $x^2 - 2010y^2 = 1$. La solución es $269^2 - 2010 \cdot 6^2 = 1$. Dejamos en sus manos aplicar los mecanismos necesarios para encontrarla.
En el cuadro siguiente se recogen, para números primos menores a 101, las unidades fundamentales para la norma 1, así como los cocientes incompletos de los cuerpos cuadráticos $K = Q\sqrt{D}$.

D	x	y	$[a_o, \{a_1, a_2, a_3\}]$
2	3	2	1,{2}
3	2	1	1,{1,2}
5	9	4	2,{4}
7	8	3	2,{1,1,1,4}
11	10	3	3,{3,6}
13	649	180	3,{1,1,1,1,6}
17	33	8	4,{8}
19	170	39	4,{2,1,3,1,2,8}
23	24	5	4,{1,3,1,8}
29	9801	1820	5,{2,1,1,2,10}
31	1520	273	5,{1,1,3,5,3,1,1,10}
37	73	12	6,{12}
41	2049	320	6,{2,2,12}

D	x	y	$[a_o, \{a_1, a_2, a_3\}]$
43	3482	531	6,{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}
47	48	7	6,{1,5,1,12}
53	66249	9100	7,{3,1,1,3,14}
59	530	69	7,{1,2,7,2,1,14}
61	1766319049	226153980	7,{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}
67	48842	5967	8,{5,2,1,1,7,1,1,2,5,16}
71	3480	413	8,{2,2,1,7,1,2,2,16}
73	2281249	267000	8,{1,1.5,5,1,1,16}
79	80	9	8,{1,7,1,16}
83	82	9	9,{9,18}
89	500001	53000	9,{2,3,3,2,18}
97	62809633	6377352	9,{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}
101	201	20	10,{20}

El dominio de la solución de la Ecuación Pell nos capacita para dar el salto desde la teoría de los números a la teoría analítica de los números, disciplina que se estudia a nivel muy alto dentro de las matemáticas. A partir de las funciones hiperbólicas, las formas cuadráticas binarias, que podemos escribir como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = m$, tienen como solución

$$x = \frac{-By \pm \sqrt{y^2(B^2 - 4AC) + 4Am}}{2A},\ y = \frac{-Bx \pm \sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + 4Cm}}{2C}$$

Ejemplo: Resolver $x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$.
La solución de una forma cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = m$, requiere los siguientes pasos:
Calcular el discriminante: $B^2 - 4AC = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17$
Calcular la estructura del número algebraico: $\mathbb{Z}\sqrt{D} = \sqrt{17}$
Calcular la norma: $N(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D}) = (33 + 8\sqrt{17})(33 - 8\sqrt{17}) = 1$

Calcular una variable: $[(\alpha + \beta\sqrt{D}) - (\alpha - \beta\sqrt{D})] / \left(\sqrt{D}\right) = \dfrac{(33 + 8\sqrt{17}) - (33 - 8\sqrt{17})}{\sqrt{17}} = \pm 16$

Calcular la otra variable: $x^2 + Bx + C = 0 = x^2 + 5x16 + 2 \cdot 16^2 - 1 = 0 = x^2 + 80x + 511 = \begin{cases} x_1 = \ \ -7 \\ x_2 = -73 \end{cases}$

Por lo que, una de las muchas soluciones, es $-7^2 + 5 \cdot 16(-7) + 2 \cdot 16^2 = 1$, que podemos ratificar mediante,

$$x = \frac{-5 \cdot 16 + \sqrt{16^2(5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2) + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -7,\ y = \frac{-5(-7) + \sqrt{7^2(5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2) + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = 16$$

Como podemos comprobar, el valor de $\sqrt{17}$ lo podemos obtener mediante fracciones continuas o, consultando la tabla anterior.

Si, a pesar de todo, aún no tienen claro cómo resolver una ecuación Pell, les recomiendo consultar la página web de D. Antonio Roldán Martínez, [WWW.hojamat.es](http://www.hojamat.es) donde, en la hoja ecuación Pell, sólo tienen que introducir un número y obtienen la solución.