UN PASEO A TRAVÉS DEL 2010

ALGUNAS PROPIEDADES DEL 2010

El número 2010 es de la forma $2k,$ es par ya que $2010 = 2\cdot 1005$
Es un número compuesto, ya que $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$
Tiene 16 divisores, $\tau_{(2010)} = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ que son $1,2,3,5,6,10,15,30,67,134,201,$

$335,402,670,1005,2010,$ y que suman $\sigma_{(2010)} = \frac{2^2-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}\cdot\frac{67^2-1}{67-1} = 4896$
Es un número abundante ya que $4896-2010 = 2886$ la suma de sus divisores es mayor que el 2010.
En la sucesión de números primos, el 2010 corresponde al 17477.
Entre el 1 y el 2010 hay 306 números primos.

```
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,
101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,
193,197,199,211,223,227,229,233,239,241,251,257,263,269,271,277,281,283,
293,307,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379,383,389,397,401,
409,419,421,431,433,439,443,449,457,461,463,467,479,487,491,499,503,509,
521,523,541,547,557,563,569,571,577,587,593,599,601,607,613,617,619,631,
641,643,647,653,659,661,673,677,683,691,701,709,719,727,733,739,743,751,
757,761,769,773,787,797,809,811,821,823,827,829,839,853,857,859,863,877,
881,883,887,907,911,919,929,937,941,947,953,967,971,977,983,991,997,1009
1013,1019,1021,1031,1033,1039,1049,1051,1061,1063,1069,1087,1091,1093,
1097,1103,1109,1117,1123,1129,1151,1153,1163,1171,1181,1187,1193,1201,
1213,1217,1223,1229,1231,1237,1249,1259,1277,1279,1283,1289,1291,1297,
1301,1303,1307,1319,1321,1327,1361,1367,1373,1381,1399,1409,1423,1427,
1429,1433,1439,1447,1451,1453,1459,1471,1481,1483,1487,1489,1493,1499,
1511,1523,1531,1543,1549,1553,1559,1567,1571,1579,1583,1597,1601,1607,
1609,1613,1619,1621,1627,1637,1657,1663,1667,1669,1693,1697,1699,1709,
1721,1723,1733,1741,1747,1753,1759,1777,1783,1787,1789,1801,1811,1823,
1831,1847,1861,1867,1871,1873,1877,1879,1889,1901,1907,1913,1931,1933,
1949,1951,1973,1979,1987,1993,1997,1999,2003,2011,2017.
```

De las que podemos obtener 61 parejas de gemelos

```
{3,5},{5,7},{11,13},{17,19},{29,31},{41,43},{59,61},{71,73},{101,103},{107,109},
{137,139},{149,151},{179,181},{191,193},{197,199},{227,229},{239,241},{269,271},
{281,283},{311,313},{347,349},{419,421},{431,433},{461,463},{521,523},{569,571},
{599,601},{617,619},{641,643},{659,661},{809,811},{821,823},{827,829},{857,859},
{881,883},{1019,1021},{1031,1033},{1049,1051},{1061,1063},{1091,1093},{1151,1153},
{1229,1231},{1277,1279},{1289,1291},{1301,1303},{1319,1321},{1427,1429},{1451,1453},
{1481,1483},{1487,1489},{1607,1609},{1619,1621},{1667,1669},{1697,1699},{1721,1723},
{1787,1789},{1871,1873},{1877,1879},{1931,1933},{1949,1951},{1997,1999}}
```

En la factorización canónica aparecen dos factores de la forma $4k+3,$ el 3 y el 67, lo que indica que el 2010 no es un número gaussiano.
En el anillo $\mathbb{Z}[i],$ la factorización resulta

$$2 = (1+i)(1+i)(-i) \text{ y } 5 = (2+i)(1+i)(-i)$$

Si esto es así,

$$10 = \left[(1+i)(1+i)\right]\left[(2+i)(1+2i)\right](-1)$$

pero

$$(1+i)(1+2i)(-i) = 3+i \text{ y } (1+i)(2+i)(-i) = 3-i$$

luego, admite esta otra factorización

$$(3+i)(3-i)=10 \text{ y } (1+3i)(-1+3i)(-1)=10$$

Podemos concluir que el número 2010 no es de factorización única, ya que

$$2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$$
$$2010=3\cdot 67\cdot (1+i)^2(2+i)(1+2i)(-1)$$
$$2010=3\cdot 67\cdot (3+i)(3-i)$$
$$2010=3\cdot 67\cdot (1+3i)(-1+3i)(-1)$$

Esta última denota el elemento unidad del anillo conmutativo.
La estructura algebraica de los números es, o bien de la forma $4k+1$ ó $4k+3,$ los primeros conocidos como números de Fermat en honor a Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francés y una de las figuras más destacadas junto con Descartes y Pascal, y los segundos conocidos como números de Mersenne en honor a Marín Mersenne (1588-1648), monje francés, filósofo y matemático que se constituyó en canal de comunicación entre sus coetáneos Descartes, Fermat, Galileo y Pascal, es cierto que no todos los números de la forma $4k+1$ son de Fermat ni todos los de la forma $4k+3$ son de Mersenne, pero es una clasificación que abunda en los libros de matemáticas. Referente al número 2010 y los factores que lo componen, podemos obtener

$$3=1^2+2\cdot 1^2=3^2-6\cdot 1^2$$
$$5=1^2+4\cdot 1^2=3^2-4\cdot 1^2$$
$$67=7^2+2\cdot 3^2=11^2-6\cdot 3^2$$

Las dos formas anteriores de representar a los números nos llevan a lo que se ha venido en llamar la ecuación de Fermat generalizada que representamos como $x^2\pm 2y^2=N$ donde N es primo. De hecho esta ecuación se conoce como *conjetura de Albert Gerald* que dice que *todo número primo mayor que dos, de las formas* $4k+1$ *ó* $4k+3,$ *se puede obtener como resultado de la suma ó diferencia, según sea el valor de* $k,$ *de un cuadrado y un doble cuadrado*. Albert Gerald (1590-1633) fue un matemático francés que demostró la existencia de las raíces imaginarias y calculó el área de las figuras poligonales trazadas sobre una superficie plana. También hizo aportaciones en la teoría de los números. Además, fue el introductor de los signos numéricos *sin, cos, tan*, en representación del seno, coseno y tangente.
Podemos observar que hemos descrito las estructuras de los números $3,5,67$ pero falta el 2. Para el número 2010 tenemos, $2010=2(4\cdot 251+1)$ donde el 2 es un multiplicador de la estructura algebraica.
Utilizando exclusivamente números primos, para 2010 tenemos

$$2010=2(17^2+179\cdot 2^2)$$
$$2010=2(29^2+41\cdot 2^2)$$
$$2010=2(7^2+239\cdot 2^2)$$
$$2010=2(31^2+11\cdot 2^2)$$

Aquí tenemos otra representación de 2010

$$2010 = 97^2 - 151 \cdot 7^2$$

SECUENCIAS

Sabemos que el número 2010 es compuesto. Supongamos que todos los números que terminan en $1, 3, 7\ y\ 9$ son primos, y supongamos que deseamos conocer números primos de seis cifras en donde cuatro de ellas sea el 2010. Como el número sería de la forma $abcdef$, el número 2010 podría estar en una de estas posiciones: $2010ef$, $a2010f$ ó $ab2010$. No cabe duda que esta última combinación no podría darse, pero, ¿y las otras? Las otras sí, y aquí tenemos una representación.

$$\underline{2010}1,\ \underline{2010}7,\ 1\underline{2010}3,\ \underline{2010}07,\ \underline{2010}11,\ \underline{2010}31,\ \underline{2010}37,\ \underline{2010}49,$$
$$\underline{2010}73,\ 3\underline{2010}1,\ 3\underline{2010}7,\ 4\underline{2010}3,\ 5\underline{2010}3,\ 7\underline{2010}1,\ 8\underline{2010}9,\ 9\underline{2010}7$$

PARTES Y PARTICIONES

El reparto de un entero puede ser lineal: Por ejemplo, dividir 100 entre 10. Como $100/10 = 10$, cada elemento recibe una parte lineal de 10 unidades.

Reparto proporcional regular: Por ejemplo, dividir 100 entre cuatro personas de tal forma que la primera reciba una parte, la segunda dos partes, la tercera tres partes y la cuarta, cuatro partes. Como $p + 2p + 3p + 4p = 10p$ y $100/10 = 10$ es el valor de una parte, descubrimos que, el primero recibe 10, el segundo 20, el tercero 30 y el cuarto 40, luego $10 + 20 + 30 + 40 = 100$.

Reparto proporcional irregular: Por ejemplo, mismo reparto anterior, pero, que las cantidades a recibir sean números primos. Como ya tenemos el reparto proporcional regular, buscamos números primos equidistantes de las cuantías, así

7	10	11
19	20	23
29	30	31
37	40	41

Ahora debemos buscar una combinación de cuatro primos que sumen 100.

$$100 = 7 + 19 + 31 + 43$$
$$100 = 7 + 23 + 29 + 41$$
$$100 = 11 + 23 + 29 + 37$$

Cuatro combinaciones sobre las cuales deberemos escoger una.

Pero nosotros vamos a tratar de las particiones del número 2010 así, ¿qué les parece si aplicamos a este número el mismo reparte irregular anterior?

Como $p + 2p + 3p + 4p = 10p$, el valor de una parte resulta $2010/10 = 201$, por lo que obtendremos, $2010 = 201 + 402 + 603 + 804$. A continuación buscamos primos equidistantes,

199	201	211
401	402	409
601	603	607
797	804	809

y obtenemos las siguientes combinaciones,

$$2010 = 199 + 401 + 601 + 809$$
$$2010 = 199 + 409 + 593 + 809$$
$$2010 = 211 + 401 + 601 + 797$$
$$2010 = 197 + 409 + 607 + 797$$

Una partición de un entero positivo n es una forma de escribir n como la suma de enteros positivos. Por ejemplo, $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ es una partición de 7. Sea P_m el número de particiones diferentes de m, donde dos particiones en las que aparecen los mismos términos ordenados de distinta forma se consideran iguales. Sea $P_{m,n}$ el número de formas diferentes de expresar m como suma de enteros positivos menores o iguales a n. Por ejemplo, para $P_5 = 7$ tenemos,

$$5,\ \ 4+1,\ \ 3+2,\ \ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1$$

Para los 10 primeros enteros positivos m, estos son los valores de P_m.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_m	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Con referencia al supuesto anterior, supongamos que el número 2010 se divide en cuatro conjuntos A, B, C, D que contienen $3, 4, 5, 6$ elementos cada uno siendo la suma de cada conjunto $201, 402, 603, 804$ respectivamente. Se establece la condición de que los elementos deben ser números primos.
De las muchas variaciones que podemos encontrar, una puede ser

3	201	61+67+73
4	402	89+97+103+113
5	603	101+107+127+131+137
6	804	73+79+83+173+197+199
18	2010	61+67+73+73+79+83+89+97+103+107+113+127+131+137+173+197+199

CONJETURA DE GOLDBACH

Christian Goldbach (1690–1764), fue un matemático prusiano, hijo de un pastor, que estudió leyes y matemáticas y conoció a varios famosos de su tiempo como Leibniz, Euler o Daniel Bernoulli. En 1725 se convirtió en historiador y profesor de matemáticas en San Petersburgo.
Aunque realizó importantes trabajos en el campo de las matemáticas, Goldbach es más conocido por sus conjeturas, conocidas como *Conjeturas de Goldbach*.
Se conoce como Conjetura fuerte de Goldbach la que dice que *todo número par mayor de 2 puede escribirse como suma de dos números primos*. Se puede emplear dos veces el mismo número. Esta conjetura había sido conocida por Descartes. En 1742, en una carta de Goldbach a Euler, le dice que *todo entero impar mayor que 5 se puede escribir como suma de tres números primos*. Esta conjetura se conoce como Conjetura débil de Goldbach. Hay una tercera conjetura que dice que *todo número impar mayor que 7 puede expresarse como suma de tres números primos impares*. Subyace en esta conjetura que no debe utilizarse el 2, único primo par.
El número 2010 es par, por tanto, el número de primos que satisfagan al 2010 debe ser también par. Veamos algunos ejemplos:

$$2010 = 997 + 1013$$
$$2010 = 487 + 499 + 503 + 521$$
$$2010 = 269 + 311 + 317 + 353 + 359 + 401$$
$$2010 = 223 + 233 + 239 + 241 + 257 + 263 + 271 + 283$$

CONJETURA DE CHEN

En su *Diccionario Akal de Matemáticas*, los profesores Alain Bouvier y Michel George recogen la Conjetura de Chen, atribuyéndola a GeorgeChing Jun Chen (1933-). Dicen que *todo número par suficientemente grande es, bien suma de dos enteros primos bien suma de un número y del producto de dos primos. Es el resultado más cercano a la conjetura de Goldbach.* Como nuestro número 2010 es par y suficientemente grande, veamos algunas representaciones,

$2010 = 13 + 1997$	$2010 = 53 + 19 \cdot 103$
$2010 = 131 + 1879$	$2010 = 71 + 7 \cdot 277$
$2010 = 587 + 1423$	$2010 = 367 + 31 \cdot 53$
$2010 = 997 + 1013$	$2010 = 863 + 31 \cdot 37$
$2010 = 1089 + 921$	$2010 = 1089 + 3 \cdot 307$

TEOREMA DE VAUGHAN

Según el diccionario comentado en el apartado anterior, EL Teorema de Vaughan, atribuido a Robert Charles Vaughan (1945-) dice, *que todo entero par es suma como máximo de veintiséis números primos*.
Si lo que deseamos es conseguir el 2010 con el máximo de sumandos de números primos, aquí tenemos una suma con 31

$$\begin{aligned} 2010 = {} & 2 + 3 + 5 + 11 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + \\ & 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + \\ & 83 + 89 + 101 + 103 + 107 + 109 + 113 + 127 + \\ & 131 + 137 + 139 \end{aligned}$$

Sin comentarios.

CONJETURA SCHINZEL-TIJDEMAN

Esta conjetura fue ideada por Andrzej Schinzel (1937-), matemático polaco y profesor de la Academia Polaca de Ciencias y Robert Tijdeman (1943-), matemático neerlandés y profesor de la Universidad de Leiden, ambos especializados en teoría de números. Esta conjetura que es una ampliación de la Conjetura de Goldbach, propone la partición de un número en un polinomio tal que $P_{(n)} = p^a \pm q^b \pm r \cdot s \cdot t$ donde $a, b, p, q, r, s, t \in \text{Pr}imos.$
Para nuestro número 2010, proponemos las siguientes representaciones

$$2010 = 47^2 - 199,\quad 2010 = 59^2 - 1471,\quad 2010 = 73^2 - 3319,\quad 2010 = 79^2 - 4231$$
$$2010 = 17^3 - 2903,\quad 2010 = 73^3 - 387007,\quad 2010 = 103^3 - 1090717$$

$$2010=7^5-14797,\quad 2010=13^5-369283$$
$$2010=19^7-893869729$$

Otras representaciones pueden ser,

$$2010=2^3+3^5+1759,\quad 2010=2^5+5^7-76147,\quad 2010=2^3+3^5+5^7-2\cdot 38183$$
$$2010=2^{13}+3^{11}-183329,\quad 2010=2^{11}-2^{19}+2\cdot 11\cdot 23833$$
$$2010=3^2+5^3+7^5+11^7-2\cdot 9751051$$
$$2010=2^3+3^7+7^{11}+11^2-41\cdot 3889\cdot 12401$$

CONJETURA DE FERMAT-CATALAN

Sea la ecuación $x^p+y^q=z^r$ con x,y,z coprimos y $p,q,r>1$. Tomando fracciones unitarias, se plantean los siguientes casos:

<u>Caso 1</u>:

$1/p+1/q+1/r>1,$ donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}>1.$

Las soluciones son infinitas y se pueden expresar en función de parámetros, como ocurre en las ternas pitagóricas. En este caso comprenden aquellas en las que (p,q,r) toman los valores de las ternas $(2,2,k),$ con $k\geqq 2,$ $(2,3,3),$ $(2,3,4)$ y $(2,3,5),$ en cualquier orden.

Ecuaciones descubiertas:

$1^2+2^3=3^2$ y $8^3+28^2=36^2,\ 12^3+104^2=112^2,\ 24^3+72^2=140^2$

ambas descubiertas por Catalán, *Eugene Charles Catalán (1814-1894)*, matemático belga que trabajó en la teoría de los números.

<u>Caso 2</u>:

$1/p+1/q+1/r=1,$ donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}=1.$

Catalán consiguió la terna $(2,3,6),$ y existen otras como $(2,4,4)$ y $(3,3,3),$ encontradas por Fermat y Euler. Son soluciones finitas.

<u>Caso 3</u>:

$1/p+1/q+1/r<1,$ donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}<1.$

Mediante la aplicación de la Conjetura ABC, propuesta por Joseph Oesterlé y David Masser en 1985, se pueden generar infinitas soluciones. Para las ternas $(p,q,r),$ algunos valores son

$$(2,3,7),(2,3,8),(2,3,9),(2,4,5),(2,4,6),(2,4,7),(3,3,4),(3,3,5),\ etc.$$

Aplicando esta conjetura a nuestro caso particular, a continuación les ofrecemos algunas de las soluciones a la ecuación $2010=x^p+y^q+z^r+\ldots+w^s.$

$$2010=2^1+2^3+2^4+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}$$
$$2010=3^1+3^2+3^3+3^3+3^4+3^4+3^4+3^5+3^6+3^6$$

$$2010 = 5^1 + 5^1 + 5^3 + 5^4 + 5^4 + 5^4$$
$$2010 = 7^0 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^3$$
$$2010 = 11 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^2 + 2^3 = 11(13^1 + 13^2) + 2^3$$
$$2010 = 30 \cdot 67^1$$
$$2010 = 8 \cdot 11^0 + 6 \cdot 11^1 + 5 \cdot 11^2 + 11^3$$
$$2010 = 8 \cdot 13^0 + 11 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^2 = 8 \cdot 13^0 + 11(13^1 + 13^2)$$
$$2010 = 15 \cdot 19^0 + 10 \cdot 19^1 + 5 \cdot 19^2$$

Otras representaciones,

$$2010^2 = 2^2 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^{10} + 2^{13} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21}$$
$$2010^2 = 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 10 \cdot 3^5 + 22 \cdot 3^7 + 20 \cdot 3^8 + 3^9 + 2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^{13}$$
$$2010^2 = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^6 + 11 \cdot 5^7 + 8 \cdot 5^8$$
$$2010^2 = 29 \cdot 67^2 + 13 \cdot 67^3$$
$$2010^3 = 66 \cdot 67^3 + 6 \cdot 67^5$$
$$2010^5 = 38 \cdot 67^5 + 15 \cdot 67^6 + 53 \cdot 67^7 + 13 \cdot 67^8 + 67^9$$

TERNAS PITAGÓRICAS

Sabemos que el 2010 factoriza como $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ y que podemos obtener los siguientes pares de de divisores,

$$2010 = \begin{cases} 67 \cdot 30 \\ 201 \cdot 10 \\ 335 \cdot 6 \\ 1005 \cdot 2 \\ 2010 \cdot 1 \end{cases}$$

Para cada una de estas combinaciones, a partir de $2 \cdot 2010 = 4020,$ obtenemos

$$4020^2 = (67^2 + 30^2)^2 - (67^2 - 30^2)^2 = (201^2 + 10^2)^2 - (201^2 - 10^2)^2$$
$$4020^2 = (335^2 + 6^2)^2 - (335^2 - 6^2)^2 = (1005^2 + 2^2)^2 - (1005^2 - 2^2)^2$$
$$4020^2 = (2010^2 + 1^2)^2 - (2010^2 - 1^2)^2$$

Si tenemos en cuenta que el número 2010 tiene como multiplicador el 2, a partir de 1005 que es su mitad, podemos establecer,

$$1005 = \begin{cases} 67 \cdot 15 \\ 201 \cdot 5 \\ 335 \cdot 3 \\ 1005 \cdot 1 \end{cases}$$

De las que obtenemos para 2010,

$$2010^2 = (67^2 + 15^2)^2 - (67^2 - 15^2)^2 = (201^2 + 5^2)^2 - (201^2 - 5^2)^2$$
$$2010^2 = (335^2 + 3^2)^2 - (335^2 - 3^2)^2 = (1005^2 + 1^2)^2 - (1005^2 - 15^2)^2$$

Gauss también puso su granito de arena en este tipo de ternas.
Ya sabemos que el número 2010 tiene dos números que son gaussianos, el 2 y el 5, y dos que no lo son, el 3 y el 67. Pues bien, el número 10 es gaussiano y el número 201 es irreducible. Si hacemos que $2=(1+i)(1-i)$ y $5=(2+i)(2-i)$, sustituyendo en alguna de las ternas anteriores, podremos encontrar

$$\left[(1+i)(1-i)\cdot 3\cdot(2+i)(2-i)\cdot 67\right]^2=2010^2$$
$$\left[(67^2+(3\cdot(2+i)(2-i))^2\right]^2-\left[(67^2-(3\cdot(2+i)(2-i))^2\right]^2=4714^2-4264^2=2010^2$$
$$\left[(1+i)(1-i)\cdot(2+i)(2-i)\cdot 201\right]^2=2010^2$$
$$\left[(201^2+((2+i)(2-i))^2\right]^2-\left[(201^2-((2+i)(2-i))^2\right]^2=40426^2-40376^2=2010^2$$
$$\left[(1+i)(1-i)\cdot(2+i)(2-i)\cdot 3\cdot 67\right]^2=2010^2$$
$$\left[((2+i)(2-i)\cdot 67)^2+3^2\right]^2-\left[((2+i)(2-i)\cdot 67)^2-3^2\right]^2=112234^2-112216^2=2010^2$$

FRACCIONES UNITARIAS

Sea m un entero cualquiera y $p,q,r,\ldots$ números primos donde $m=p+q+r+\ldots$
Si $a,b,c,d,\ldots$ son divisores de m y si se toman en grupos de $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$ como raíces que satisfacen estructuras de ecuaciones cuadráticas, cúbicas, cuarticas, etc., mediante la aplicación de fracciones unitarias podemos determinar la composición de los coeficientes dependientes de la ecuación, de acuerdo con la Ley de Coeficientes de Descartes o el Teorema de Polinomios Simétricos de Newton. A su vez, estos mismos coeficientes nos facilitan la partición del número m en suma de dos o más números primos. El valor de $m, m>1$ y si es primo o compuesto, condicionará la partición.
Si a,b son las raíces que satisfacen a la ecuación $x^2-Bx+C=(x-a)(x-b)$ entonces, por la Ley de Coeficientes de Descartes (LCD),

$$x^2-(a+b)x+ab=0, \text{ donde } x_1=a,\ x_2=b$$

Aplicando fracciones unitarias,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{Q}{Q+1}, \text{ donde } Q=\frac{a+b}{ab-(a+b)}=\frac{Bx}{C-Bx}=\frac{p}{r} \text{ y,}$$

por tanto, $m=p+q+r+\ldots$
Si a,b,c son raíces que satisfacen a

$$x^3-Bx^2+Cx-D=(x-a)(x-b)(x-c)$$

entonces, por la (LCD),

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0,$$

donde $x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c$

Aplicando fracciones unitarias

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{Q}{Q+1},\text{ donde } Q=\frac{ab+ac+bc}{abc-(ab+ac+bc)}=\frac{Cx}{D-Cx}=\frac{p}{r}\text{ y,}$$

por tanto, $m=p+q+r+\dots$

Para la ecuación cuartica,

$$x^4-Bx^3+Cx^2-Dx+E=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

si a,b,c,d son sus raíces,

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0.$$

Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{Q}{Q+1}$ donde $Q=\frac{a(cd+b(c+d))+bcd}{abcd-(a(cd+b(c+d))+bcd)}=\frac{Dx}{E-Dx}=\frac{p}{r}$

y, por tanto $m=p+q+r+\dots$

A estas alturas ya sabemos que 2010 factoriza como $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$. De esta factorización podemos deducir las siguientes combinaciones o raíces:

$$2010=2\cdot1005=30\cdot67=3\cdot670=5\cdot402=2\cdot15\cdot67=3\cdot10\cdot67=5\cdot6\cdot67=2\cdot3\cdot5\cdot67$$

Ocho combinaciones donde habrá tres ecuaciones de segundo grado, tres de tercer grado y una de cuarto grado.

<u>Ecuación con raíces 2,1005</u>:

Fracción unitaria $\frac{1}{2}+\frac{1}{1005}=\frac{Q}{Q+1},\ \Rightarrow\ Q=\frac{2+1005}{2010-(2+1005)}=\frac{1007}{1003}=\frac{19\cdot53}{17\cdot59}$

Como $2010-(17+19+53+59)=1862=2\cdot931$

Fracción unitaria $\frac{1}{2}+\frac{1}{931}=\frac{Q}{Q+1},\ \Rightarrow\ Q=\frac{2+931}{1862-(2+931)}=\frac{933}{929}=\frac{3\cdot311}{929}$

Como $1862-(3+311+929)=619$ que es primo, luego $3+311+619+929=1862$. Por tanto, la partición de 2010 es de

$$2010=3+17+19+53+59+311+619+929$$

Y hemos necesitado dos ecuaciones de segundo grado,

$x^2-1007x+2010=0,$ con $x_1=2,\ \ x_2=1005$

$x^2-933x+1862=0,$ con $x_1=2,\ \ x_2=931$

<u>Ecuación con raíces 30, 67</u>:

Fracción unitaria $\frac{1}{30}+\frac{1}{67}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{30+67}{2010-97}=\frac{97}{1913}$

Como 97 y 1913 son primos, la partición de 2010 resulta

$$2010=97+1913$$

y se ha generado una ecuación de segundo grado,

$x^2-97x+2010=0,$ con $x_1=30,\ x_2=67$

<u>Ecuación con raíces 3, 670</u>:

Fracción unitaria $\frac{1}{3}+\frac{1}{670}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{3+670}{2010-673}=\frac{673}{1337}=\frac{673}{7\cdot 191}$

Siguiendo el mismo procedimiento, obtenemos la partición de 2010,

$$2010=5+7+17+67+191+211+673+839$$

<u>Ecuación con raíces 5, 402</u>:

Fracción unitaria $\frac{1}{5}+\frac{1}{402}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{5+402}{2010-407}=\frac{407}{1603}=\frac{11\cdot 37}{7\cdot 22}$

Operando obtenemos,

$$2010=2+3+5+7+11+19+37+41+43+151+229+599+863$$

<u>Ecuación con raíces 2, 15, 67</u>:

Fracción unitaria $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{67}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{2(15+67)+15\cdot 67}{2010-1169}=\frac{1169}{841}=\frac{7\cdot 167}{29^2}$

Como

$$2010-(7+29+167)=1807=1\cdot 3139$$
$$1807-(13+139)=1655=5\cdot 331$$
$$1655-(5+331)=1319$$

ya que 1319 es primo, la partición de 2010 resulta

$$2010=5+7+13+29+139+167+331+1319$$

La ecuación de tercer grado generada ha sido

$x^3-84x^2+1169x-2010=0,$ con $x_1=2,\ x_2=15,\ x_3=67$

<u>Ecuación con raíces 3, 10, 67</u>:

A partir de la ecuación $x^3 - 80x^2 + 901x - 2010 = 0$ se consigue una partición de 2010 de,

$$2010 = 3 + 17 + 19 + 29 + 53 + 277 + 503 + 1109$$

Ecuación con raíces 5, 6, 67:

A partir de la ecuación $x^3 - 78x^2 + 767x - 2010 = 0,$ se consigue una partición de 2010 de,

$$2010 = 2 + 5 + 11 + 13 + 59 + 113 + 181 + 719 + 907$$

Ecuación con raíces 2, 3, 5, 67:

A partir de las ecuaciones $x^4 - 77x^3 + 701x^2 - 2107x + 2010 = 0,$ con $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 67$ y $x^2 - 178x + 1837 = 0,$ con $x_1 = 11,\ x_2 = 167$ se genera la partición de 2010

$$2010 = 2 + 3 + 7 + 23 + 43 + 79 + 89 + 97 + 1667$$

EL 2010: UNA ECUACIÓN LINEAL

Supongamos que nos plantean resolver la ecuación $2x + 11y + 17z = 2010,$ y con los resultados obtenidos, aplicando fracciones unitarias, hacer particiones en números primos.
La solución de este tipo de ecuaciones (una ecuación con dos o más variables) se puede acometer, desde un punto de vista metodológico o desde la lógica y el razonamiento. En el primer caso requiere conocimientos específicos y en el segundo es aplicar el raciocinio, inherente al ser humano. Intentaremos una solución aplicando ambos conceptos.
Esta ecuaciones tendrá solución sí, y sólo sí, el máximo común divisor de los coeficientes dependientes de las variables divide al coeficiente independiente. Como el $mcd(2,11,17) = 1,$ y $1 | 2010$ (1 divide a 2010), la ecuación tendrá solución. Para evitar los cálculos dentro del vector (2, 11,17), resolveremos con dos variables principales y una libre. Si tenemos en cuenta que $mcd(2,2010) = 2,$ distinto a 1, lo que indica que no son coprimos, podemos tomar y, z como variables principales y x como variable libre, planteando la solución como,

$$11y + 17z = 2010 - 2s$$

donde s es la representación paramétrica de x de la variable libre.

Aplicando método Euclides-Euler:

Despejamos y:

$$11y = 2010 - 2s + 17t$$

donde t es la representación paramétrica de las variables principales.
Sacamos restos respecto al módulo 17:

$$11y = 4 - 2s + 17t$$

Multiplicamos la ecuación por 14 para eliminar el coeficiente de y:

$$14(11y = 4 - 2s) + 17t$$

Sacamos restos respecto al módulo 17:

$$y = 5 - 11s + 17t$$

Aplicamos complemento para cambiar el signo de s:

$$\boxed{y = 5 + 6s + 17t}$$

Por sustitución, despejamos z:

$$z = \frac{2010 - 11(5 + 6s + 17t)}{17} = 115 - 4s - 11t \;\Rightarrow\; \boxed{z = 115 - 4s - 11t}$$

La solución a la ecuación $2x + 11y + 17z = 2010$ resulta,

$$\boxed{2(s) + 11(5 + 6s + 17t) + 17(115 - 4s - 11t) = 2010}$$

Dando valores, independientemente, a cada uno de los parámetros s, t encontraran infinitas soluciones.

<u>Aplicando método Euclides-Gauss</u>:

Mediante ecuaciones modulares:

<u>Despejamos **x** en función de **y**</u>:

Planteamos la siguiente ecuación:

$$2x + 17z \equiv 2010(mód.11)$$

Simplificamos:

$$2x + 6z \equiv 8(mód.11)$$

Dividimos la ecuación por 2:

$$x + 3z \equiv 4(mód.11)$$

Despejamos x:

$$x \equiv 4 - 3s(mód.11)$$

que escribimos como

$$x \equiv 4 + 8s(mód.11) \;\Rightarrow\; \boxed{x = 4 + 8s}$$

<u>Despejamos **y** en función de **z**</u>:

Planteamos la siguiente solución:

$$11y + 2(4+8s) \equiv 2010(mód.17)$$

Simplificamos:

$$11y + 8 + 16s \equiv 2010(mód.17)$$

Aunamos coeficientes y sacamos restos respecto a 17:

$$11y + 16s \equiv 13(mód.17)$$

Despejamos y:

$$11y + 16s \equiv 13 - 16s(mód.17)$$

Multiplicamos por 14 para eliminar coeficiente de y:

$$14(11y + 16s \equiv 13 - 16s)(mód.17)$$

que, sacando restos respecto a 17:

$$y \equiv 12 + 14s(mód.17) \;\Rightarrow\; \boxed{y = 12 + 14s + 17t}$$

<u>Despejamos **z** por sustitución</u>:

Planteamos la siguiente solución:

$$z = \frac{2010 - 2(4+8s) - 11(12+14s+17t)}{17} = 110 - 10s - 11t \;\Rightarrow\; \boxed{z = 110 - 10s - 11t}$$

La solución a la ecuación $2x + 11y + 17z = 2010$ resulta,

$$\boxed{2(4+8s) + 11(12+14s+17t) + 17(110-10s-11t) = 2010}$$

Dando valores, independientemente, a cada uno de los parámetros s,t encontraran infinitas soluciones.
La solución, utilizando la lógica, puede ser la siguiente:
Como $2p + 11p + 17p = 30p$ y $2010/30 = 67$, resulta una solución de

$$x = 2\cdot 67 = 134;\quad y = 11\cdot 67 = 737;\quad z = 17\cdot 67 = 1139$$

de donde

$$\boxed{2x + 11y + 17z = 2010 = 134 + 737 + 1139}$$

Ahora atacaremos la partición de estos valores en suma de números primos.

Para **x**:

Fracción unitaria $\frac{1}{2}+\frac{1}{67}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{2+67}{134-69}=\frac{69}{65}=\frac{3\cdot 23}{5\cdot 13}$

Haciendo operaciones, la partición resulta

$$134 = 3+5+13+19+23+71$$

Para **y**:

Fracción unitaria $\frac{1}{11}+\frac{1}{67}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{11+67}{737-78}=\frac{78}{659}=\frac{2\cdot 3\cdot 33}{659}$

Haciendo operaciones, la partición resulta

$$737 = 2+3+13+17+43+659$$

Para **z**:

Fracción unitaria $\frac{1}{17}+\frac{1}{67}=\frac{Q}{Q+1}, \Rightarrow Q=\frac{17+67}{1139-84}=\frac{84}{1055}=\frac{2^2\cdot 3\cdot 7}{5\cdot 211}$

Haciendo operaciones, la partición resulta

$$1139 = 2+3+5+7+211+911$$

En este caso, hemos conseguido 18 particiones del número 2010, aunque algunas repetidas,

$$2010 = 2(2)+3(3)+2(5)+7+2(13)+17+19+23+43+71+211+659+911$$

LA BIBLIA

Según el Evangelio de San Juan (cap. 21, vers.11), los peces pescados por Simón Pedro fueron 153. Aparte de que algunos afirman que era la cantidad de especies de peces conocidas en aquella época, es un número que podemos escribir como

$$1!+2!+3!+4!+5! = 2^7+5^2 = 153$$

y también como

$$1^3+3^3+5^3 = 3^2+12^2$$

También es el décimo séptimo número triangular

$$\sum_{k=1}^{17} k = 1+2+3+\ldots+16+17 = 153$$

Pero, este número lo traemos aquí por tener una extraña relación con el número 2010 y los cubos de sus cifras. Veamos por qué

2010: $2^3+0^3+1^3+0^3=9$

9: $9^3=729$

729: $7^3+2^3+9^3=1080$

1080: $1^3+0^3+8^3+0^3=513$

513 $5^3+1^3+3^3=153$

153 $1^3+5^3+3^3=153$

BIBLIOGRAFIA

Autor	**Obra**	**ISBN**
ALAIN BOUVIER y MICHEL GEORGE	Diccionario de Matemáticas	84-7339-706-1
CARL B.BOYER	Historia de la Matemática	84-206-8186-5
CHRISTOPHER CLAPHAM	Dictionary of Mathematics	84-89784-566
EMILIO ESPAÑA BROS	Tomo I: Problemas Resueltos de Álgebra	84-85257-15-4
HAROLD M. EDUARDS	Galois Theory	0-387-90980-X
HENRI COHEN	Number Theory: Tools and Diophantine Equations	0-387-49922-2
KENNETH H. ROSEN	Matemática Discreta y sus Aplicaciones	84-481-4073-7
R.B.J.T. ALLENBY	Rings, Fields and Groups: Abstract Álgebra	0-340-54440-6
ROBERT TIJDEMAN	Exponential Diophantine Equations	05-212-6826-5
T.M. APOSTOL	Introducción a la Teoría Analítica de Números	84-291-5006-4

INFORMACIÓN DE INTERNET

Antonio Roldán Martínez: WWW.hojamat.es
WWW.mathpuzze.com
WWW.euler.free.fr
WWW.mathworld.wolfram.com
WWW.wolframalpha.com