MATEMÁTICAS: EGIPCIAS Y MESOPOTÁMICAS

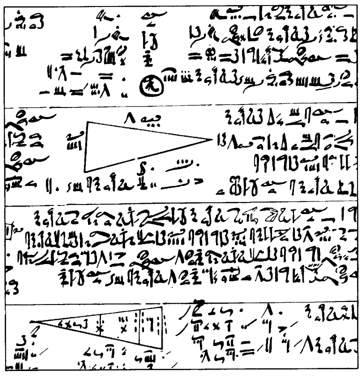
1. EL NACIMIENTO DE LOS NÚMEROS

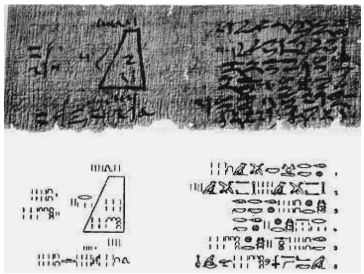
Entre los griegos, un número era una cantidad o una medida representadas, bien por un entero natural, bien por una relación de dos enteros naturales. Puede considerarse un número como una abstracción ligada a conjuntos de objetos y que se escinde, por consideración de los conjuntos infinitos, en dos conceptos diferentes.
En la actualidad, se define un número como elemento de un conjunto de números que deben verificar ciertas propiedades. Así es como se han definido los conjuntos N, Z, Q, R ó C. cuya construcción se hace por etapas sucesivas a partir del conjunto N de los números naturales.
La primera muestra de un registro numérico fue encontrada en Suazilandia, en el sur de África; se trata de un hueso, el peroné de un babuino, con veintinueve muescas bien marcadas y data de, aproximadamente, 35000 años a.C. Tiene un parecido extraordinario con el *calendario de varillas* que aún se usa en Namibia para registrar el paso del tiempo. En la República Checa se encontró un radio de lobo que data de, alrededor de 30000 años a.C., marcado con cincuenta y cinco muescas en dos series de grupos de cinco. Posiblemente se trate de una lista de animales cazados. Entre los hallazgos, el más curioso es el hueso conocido como *Ishango*, (***ver imagen***) descubierto en las orillas del lago Edwards, entre Uganda y la República Democrática del Congo, que data aproximadamente de 20000 años a.C., y aparenta ser algo más que un mero recuento, ya que, estudios microscópicos, han demostrado cierta relación con las fases lunares. Debido a la imperiosidad de predecir la luna llena, posiblemente por razones religiosas o pragmáticas que requerían la visibilidad nocturna, no es de extrañar que una de las inquietudes del hombre neolítico fuera observar el ciclo del gran reloj del cielo. De hecho, a través de la astronomía, de la astrología o de la cosmología, la observación de los cielos ha sido, sin duda, la mayor influencia en el descubrimiento de los números.

En su obra Historia Universal de las Cifras, el profesor Georges Ifrah dice que *hacia el 3300-3200 años a.C., la aparición simultánea de los números sumerios y de los números pro toelamitas, constituyen el sistema más antiguo de numeración escrito actualmente conocidos*. Se trata de un sistema de numeración posicional de base 60 que contiene el conjunto de números $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ esto es, todos los números naturales excepto el cero. El sistema sexagesimal se utiliza en la actualidad para medidas angulares y de tiempo. En el siglo III a.C. tiene su aparición el primer cero conocidos de la historia: el cero de los sabios babilónicos, utilizado exclusivamente en la numeración posicional babilonica para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto orden. El cero, tal y como lo conocemos en nuestros días, fue utilizado por primera vez en la India por el matemático y astrónomo Brahmagupta (598-670) que lo menciona en su obra *Brahmasphuta Siddhanta* del año 628 y fue introducido en Europa por los árabes, a los que algunas fuentes atribuyen ser los primeros en desarrollar los conceptos numéricos del 0 hasta el 9, 1000 años a.C.

2. LAS MATEMÁTICAS EGIPCIAS

Nuestros conocimientos sobre las matemáticas del Egipto Antiguo están basados principalmente en dos papiros de carácter matemático y en algunos fragmentos pequeños. Uno de de los grandes papiros se denomina el Papiro de Rhind, (***ver imagen página siguiente***) por el nombre del científico que lo adquirió en 1858 ó Papiro de Ahmes, en honor al escriba que los copió hacia el año 1650 a.C. Este escriba nos dice que el material se deriva de un





prototipo del Imperio Medio, de entre el 2000 y el 1800 a.C., y es posible que parte de estos conocimientos provengan, en realidad, de Imhotet, arquitecto y médico del faraón Zoser de la III Dinastía (2800?-2600? a.C.), que dirigió la construcción de su pirámide hacia el año 2700 a.C. Este papiro contiene una colección de 87 problemas de carácter aplicado. El otro papiro importante es el llamado Papiro Golenischev o de Moscú, (***ver imagen***) que fue comprado en Egipto el año 1893. El Papiro de Moscú es más pequeño que el de Ahmes, contiene 25 problemas y fue copiado sobre el año 1890 a.C., por un escriba desconocido de la dinastía XII. La presentación de las soluciones es muy parecida a la del Papiro de Ahmes. De menor entidad, existe un rollo de papiro que data de la dinastía XII, hacia 2000 a.C., que se denomina Papiro de Kahun, y que contiene problemas parecidos a los del Papiro de Ahmes; el Papiro de Berlín del mismo periodo; dos tablillas de madera de Akhmim (El Cairo) de hacia el año 2000 a.C. y, un rollo de piel que contiene lista de fracciones unitarias y que data del periodo final de los hicsos, un pueblo originario de Siria que invadió Egipto en el siglo XVIII a. C. Sus reyes pertenecieron a las dinastías XV y XVI, desde 1700 a 1580 a. C. en que fueron expulsados.

3. OPERACIONES ARITMÉTICAS

3.1. Sumas y restas

Las matemáticas egipcias se basaban en un sistema decimal, pero no posicional como el nuestro, sino aditivo. Las operaciones básicas de sumar y restar se limitaban a una combinación o cancelación de símbolos, no utilizaban un símbolo para representar, por ejemplo tres cosas, sino que repetían tres veces el símbolo de la unidad de que se tratara.
Por ejemplo, qué número debemos sumar a $1/3+1/7$ para obtener la unidad.
En notación actual $1/3+1/7=10/21.$ Como $21/21-10/21=11/21,$ resulta $10/21+11/21=1.$
Para el escriba $1-(1/3+1/7)=11/21,$ pero $11/21$ no es una fracción unitaria ya que el numerador es distinto a uno, por tanto

$$21/11+1=32/11=2{,}9\ldots \;\rightarrow\; 1/3$$

entonces

$$11/21-1/3=4/21$$

Pero $4/21$ no es fracción unitaria por tanto, repetimos como en el caso anterior

$$21/4+1=25/4=6{,}25 \;\rightarrow\; 1/6$$
$$4/21-1/6=1/42$$

Como $1/42$ es fracción unitaria

$$11/21=1/3+1/6+1/42$$

y por tanto

$$(1/3+1/7)+(1/3+1/6+1/42)=1$$

Por ejemplo, qué cantidad debe restarse de $1/2+1/4$ para obtener $2/5$.
En notación actual, como $1/2+1/4=3/4$ y $3/4>2/5$, entonces $3/4-2/5=7/20$, de donde

$$(1/2+1/4)-7/20=2/5$$

Para el escriba, como $2/5$ no es fracción unitaria, procede

$$5/2+1=7/2=3{,}5 \;\rightarrow\; 1/3 \;\Rightarrow\; 2/5-1/3=1/15$$

de donde

$$2/5=1/3+1/15$$

Ahora

$$(1/2+1/4)-(1/3+1/15)=7/20$$

Pero $7/20$ no es fracción unitaria, luego

$$7/20+1=27/7=3{,}85\ldots \;\rightarrow\; 1/3 \;\Rightarrow\; 7/20-1/3=1/60$$

de donde

$$7/20=1/3+1/60$$

y finalmente

$$(1/2+1/4)-(1/3+1/60)=2/5=1/3+1/15$$

Ejemplo, qué cantidad debe sumarse a $2/3+1/15$ para obtener la unidad.
Por notación actual, como

$$2/3+1/15=11/15$$

Si sumamos $4/15$ obtenemos $15/15$ que es igual a la unidad, por tanto

$$2/3+1/15+4/15=1$$

El escriba toma el número 15, y aplica

$2/3$ de $15=10$ y
$1/15$ de $15=1$

Ahora, toma $2/3$ de $15=10$ y $1/15$ de $15=1$ y suma $10+1=11$, por lo que obtiene 11 partes de 15, esto es $11/15$.

A continuación, opera

	1	15
	1/10	11/2
x	1/5	3
x	1/15	1

Como $3+1=4$ y $1/5+1/15=4/15$, entonces

$$2/3+1/15+4/15=1$$

Los trueques eran la forma más habitual de realizar transacciones económicas entre particulares. Este trueque no tenía por qué ser inmediato en sentido de realizar el intercambio de bienes. En este caso se procedía a abrir una cuenta donde se anotaban debidamente valoradas, las cosas que servían de trueque, hasta su total cancelación.
Por ejemplo, por la construcción de un ataúd un artesano pide 30 unidades. El comprador debe reunir una serie de bienes que permitan cancelar esta deuda.* La ficha que confecciona puede ser algo parecido a

Bienes	Valor	Suma	Pendiente
Un ataúd			30
Un par de sandalias	2	2	28
3 hin de aceite	2 1/2	4 ½	25 ½
5 cestos 'kbs'	5	9 ½	20 ½
2 cestos 'krht'	3	12 ½	17 ½
Un cerdo	4 ½	17	13
Cebada	13	30	0

* Ejemplo adaptado de www.personal.us.es/cmaza/egipto/aritmetica3

3.2. Multiplicación y División

Las operaciones de multiplicación y división se basaban en el mismo proceso aditivo. Para multiplicar se empleaba un sistema de duplicación adición, que requiere un poco de práctica. Este sistema se basa en la propiedad de que cualquier número natural puede expresarse como una suma de potencias de 2, que quizás los egipcios ya hubiesen descubierto por métodos empíricos. Si queremos multiplicar por ejemplo n x m, el sistema es el siguiente:
Se escribe una tabla de 2 columnas por n filas. Cada fila se obtiene por duplicación de la anterior. Si se quiere multiplicar n x m, la primera fila consta del número 1 y m. La segunda se compondrá del 2 y $2m$. La tabla se construye hasta que el siguiente valor es mayor que n, entonces se puede obtener el número n como suma de todos o algunos de los números de la primera columna. El resultado de la operación *n x m* es lógicamente la suma de todos los miembros de la segunda columna o de los equivalentes a los que suman n en la primera columna.
Por ejemplo, para multiplicar 21 por 43, se escriben en la primera columna los múltiplos de 2 y en la segunda el valor de multiplicar dicha potencia por 21. Veamos:

1	21
2	42
4	84
8	168
16	336
32	672
64	1344

Como el último múltiplo de 2 excede a 43, marcamos los números cuya suma total sea 43, en nuestro caso, $1+2+8+32=43$. A continuación se suman todos los valores de la columna de la derecha que están en línea con los números anteriores, o sea $21+42+168+672=903$, de donde $21\cdot 43=903$.
Por ejemplo, multiplicar 29 por 61.

1	29
2	58
4	116
8	232
16	464
32	928

Como $1+4+8+16+32=61$, $29+116+232+464+928=1769$ es el resultado de multiplicar $29\cdot 61=1769$.

Para los mesopotámicos

$$29\cdot 61=\left(\frac{61+29}{2}\right)^2-\left(\frac{61-29}{2}\right)^2=45^2-16^2=1769$$

Para llevar a cabo esta operación se basaban, para $a>b$

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$
$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Hemos podido comprobar que el método es válido para cantidades pequeñas pero, ¿y para cantidades grandes?
Por ejemplo, para multiplicar 77 por 234, operamos de la siguiente forma:
Para obtener la necesaria descomposición del número 77, calculamos las potencias de 2 menores a 77:

$$1,2,4,8,16,32,64$$

Restamos de 77 el 64, y repetimos la operación con los siguientes restos

$77-64=13,$ luego $77=61+13$
$13-8=5,$ luego $13=8+5$
$5-4=1,$ luego $5=4+1$

Por tanto

$$77 = 64 + 13 = 64 + 8 + 5 = 64 + 8 + 4 + 1$$

Ahora

1	234
2	468
4	936
8	1872
16	3744
32	7488
64	14976

de donde

$$234 + 936 + 1872 + 14976 = 18018$$

En notación babilónica tendríamos:

$$234 \cdot 77 = \left(\frac{234+77}{2}\right)^2 - \left(\frac{234-77}{2}\right)^2 = \left(\frac{311}{2}\right)^2 - \left(\frac{157}{2}\right)^2 = 18018$$

El problema de la división no era otra cosa que la multiplicación a la inversa. Por ejemplo, para dividir 98 entre 7 se ha utilizado una tabla de potencias de 2 hasta que $7 \cdot 2^{n+1}$ sea mayor que 98, así

1	7
2	14
4	28
8	56

Como

$$98 = 14 + 28 + 56 = 7(2 + 4 + 8)$$

resulta que

$$98/7 = 2 + 4 + 8 = 14$$

Si el resultado no es exacto, hay que introducir fracciones. Por ejemplo, dividir 20 entre 24. Como el dividendo es menor que el divisor, no tiene sentido duplicar, por tanto:

1	24	
2/3 de 24	16	
1/3 de 24	8	La mitad del anterior
1/6 de 24	4	La mitad del anterior

Como

$$16 + 4 = 20$$

y

$$\frac{20}{(2/3+1/6)}=24$$

resulta

$$\frac{20}{24}=2/3+1/6=\frac{5}{6}$$

Ejemplo, repartir cinco panes entre ocho personas.
Empecemos por convertir la fracción $5/8$ en una fracción unitaria.

$$8/5+1=13/5\neq 2,6.. \;\rightarrow\; 1/2 \;\Rightarrow\; \frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Como $1/8$ es una fracción unitaria (su numerador es *uno*), la fracción $5/8$ resulta ser

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

Lo que se interpreta como que cada persona recibe $1/2$ pan y después $1/8$, esto es

$$8\left(1/2+1/8\right)=5$$

Ejemplo, dividir siete panes entre diez personas. El calculista da como solución $2/3+1/30$ y pide la comprobación mediante multiplicación de este dato por diez.

$$7/10=1/2+1/5$$
$$7/10=1/3+1/30=1/2+1/6+1/30$$

por tanto:

$$10(1/2+1/6+1/30)=7$$

Utilizando múltiplos de dos, se consigue

	1	2/3	1/30			
x	2	1	1/3	1/15		
	4	2	2/3	1/10	1/30	
x	8	5	1/3	1/5	1/15	
	10	6	2/3	1/5	2/15	7

esto es:

$$6+2/3+1/5+2/15=7$$

Ejemplo, dividir $11/23$.
El escriba considera que

$$11/23=1/23+10/23=1/23+2\cdot 5/23$$

Mediante tablas, calcula

$$2/23 = 1/12 + 1/276$$
$$11/23 = 1/23 + 5/12 + 5/276 = 1/3 + 1/12 + 1/23 + 1/69 + 1/276$$

y sin necesidad de tablas, obtiene

$$11/23 = 1/3 + 1/12 + 1/23 + 1/69 + 1/276$$

4. LAS FRACCIONES UNITARIAS

4.1 Primeras manifestaciones y métodos de cálculo

Los hombres de la Edad de Piedra no tenían necesidad de usar fracciones, pero al alcanzar un nivel cultural más avanzado durante la Edad de Bronce, parece haber aparecido por primera vez la necesidad de un concepto más o menos vago de fracción y de un sistema de notación capaz de representar fracciones. Aparecen las fracciones unitarias o fracciones mesopotámicas, como algunos las llaman.

La mera posibilidad de descomponer una fracción común en suma de números finitos de fracciones unitarias distintas, es por sí un problema matemático interesante y nada obvio. Dos matemáticos de primera línea como lo fueron Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido como Fibonacci, y James Joseph Sylvester (1814-1897), matemático ingles que junto con Arthur Cayley (1821-1895) que fue el creador de la teoría de los invariantes algebraicos, estudiaron el tema y dieron con el método conocido como Fibonacci-Sylvester, un algoritmo extremadamente simple.

En su obra Liber Abaci, Fibonacci incluye diversas tablas de fracciones comunes convertidas a fracciones unitarias. He aquí algunos ejemplos:

$$11\,{}^{5}\!/_{6} = 11(1/2 + 1/3) = {}^{55}\!/_{6}$$
$$28\,{}^{5}\!/_{12} = 28(1/3 + 1/12) = {}^{35}\!/_{3}$$
$${}^{99}\!/_{100} = 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/25$$
$${}^{98}\!/_{100} = 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/50 + 1/100 = {}^{49}\!/_{50}$$

Sylvester en su algoritmo propone:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \cdots$$

Las sumas parciales de esta serie tienen una forma simple

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{s_i} = + \frac{s_j - 2}{s_j - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{s_i} = \frac{1}{s_j - 1} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{s_i} = \frac{1}{s_j - 1} + \frac{s_{j-1} - 2}{s_{j-1} - 1} = \frac{s_{j-1}(s_{j-1} - 1) - 1}{s_{j-1}(s_{j-1} - 1)} = \frac{s_j - 2}{s_j - 1}$$

donde $(s_{j-2})/(s_{j-1})$ converge a uno. La serie global forma una representación infinita en fracciones unitarias de la unidad.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\cdots$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42},\ 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}+,\ldots$$

El algoritmo Fibonacci-Sylvester produce la representación de un número racional $r=a/b$ comprendido entre 0 y 1 como una fracción unitaria.
Para las fracciones de la forma $2/q,$ si q es par, la forma de la fracción es unitaria ya que el denominador se escribe como $q=2n$ y la fracción $1/n.$ Si q es impar, la forma del impar se escribe como $q=2n\pm1$ y la fracción unitaria como

$$\frac{2}{2n\pm1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2\pm3n\pm1}$$

Ejemplo, transformar la fracción $2/5$ en una fracción unitaria. Procedemos de la siguiente forma:
Se invierte la fracción común, se suma la unidad y se obtiene el valor decimal

$$5/2+1=7/2=3,5$$

Se toma la parte entera como fracción $(1/3)$ y se resta de la fracción inicial $(2/5)$

$$2/5-1/3=1/15$$

La fracción $1/15$ es unitaria ya que tiene como numerador la unidad, por tanto

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

Aplicando la igualdad anterior, para $n=3$

$$\frac{2}{2\cdot3-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(2\cdot3-1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$$

La conversión de una fracción común a una unitaria no tiene por qué ser única
Ejemplo, dividir 63 entre 98.
Como $63/98=9/14,$ procedemos como en casos anteriores

$$14/9+1=23/9\neq2,\hat{5}\ \rightarrow\ 1/2$$

restamos $1/2$ de $9/14$ y obtenemos

$$9/14-1/2=1/7$$

al ser $1/7$ fracción unitaria

$$\frac{63}{98}=\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

esto lo podemos comprobar, ya que

$$63/(1/2+1/7)=98$$

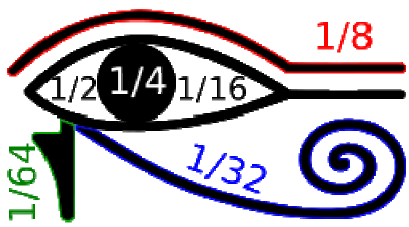
y, por tanto

$$98(1/2+1/7)=63$$

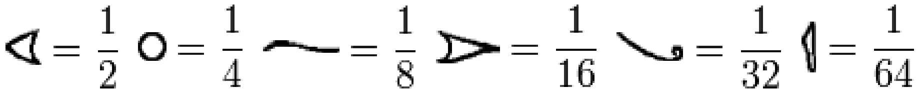
Utilizando el mismo procedimiento, podemos encontrar

$$\frac{63}{98}=\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$$
$$\frac{63}{98}=\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}$$
$$\frac{63}{98}=\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3193}+\frac{1}{10192056}$$

4.2. La Mitología



Horus era hijo de Isis y Osiris. Osiris fue asesinado por su hermano Set. Para vengar a su padre, Horus mantuvo un encarnizado combate contra Set. En el transcurso de esta lucha los contendientes sufrieron múltiples heridas y algunas pérdidas vitales, como la mutilación del ojo izquierdo de Horus. Pero, gracias a la intervención de Thot, el ojo de Horus fue sustituido por el oudjat, para que el dios pudiera recuperar la vista. Este ojo, que era a la vez el ojo de un ser humano y el de un halcón peregrino, estaba dotado de cualidades mágicas.
Los egipcios utilizaron un sistema muy antiguo para representar fracciones en medidas agrarias de superficie y volumen, basado en las divisiones por dos de 1/2. Los signos de las fracciones mayores fueron tomados de las partes que componían el jeroglífico del Ojo de Horus.
Cada fracción se representaba mediante una grafía del jeroglífico del ojo:



Cuenta la leyenda que un aprendiz de escriba señaló a su maestro que el total de las fracciones del ojo de Horus no sumaba una unidad, sino $63/64$. La respuesta del maestro fue que Thot restituiría la parte restante de $1/64$ a cualquier escriba que buscara y aceptara su protección.
El historiador griego Heródoto (484-425 a. C.) cuenta en su *Historia,* que el rey dividió el país entre todos los egipcios dando a cada uno una parcela de tierra de iguales proporciones y lo convirtió en su propia fuente de ingresos, fijando el pago de un impuesto anual. Y cualquier hombre que perdiera parte de su tierra debido al río, iría a Sesostris o Senusret (*con estos nombres se conocían a los tres faraones de la XII dinastía*) (Faraón Ramsés II, alrededor del

1300 a.C.) para declarar qué le había pasado; entonces el rey enviaba algunos hombres para comprobar y medir el espacio de tierra perdido y de ahí en adelante pagaría al perjudicado proporcionalmente al impuesto originariamente establecido. De aquí, conforme a mi pensamiento, es de donde los griegos aprendieron el arte de la geometría; el reloj de sol y las doce divisiones del día llegaron la Hélade no de Egipto sino de Babilonia.
La suma de las fracciones, arriba indicadas, genera fracciones comunes donde la diferencia entre el denominador y el numerador es la unidad.

$$3/4 = 1/2 + 1/4$$
$$7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8$$
$$15/16 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$$
$$31/32 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32$$
$$63/64 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64$$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES

5.1 Tablas y estudios para la resolución de problemas

Al principio del papiro de Rhind el escriba Ahmes propone una tabla de descomposición de $n/10$ para $n = 1,\ 2, \ldots, 8,\ 9,$ que facilita los cálculos de los siguientes problemas y otra en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 3 y 101 como fracciones unitarias. Estas tablas son:

Tabla $1/10$	
$1/10$	$1/10$
$2/10$	$1/5$
$3/10$	$1/5 + 1/10$
$4/10$	$1/3 + 1/15$
$5/10$	$1/2$
$6/10$	$1/2 + 1/10$
$7/10$	$2/3 + 1/30$
$8/10$	$2/3 + 1/10 + 1/30$
$9/10$	$2/3 + 1/5 + 1/30$

Tabla $2/n$									
3	2,6	29	24,58,174,232	55	30,330	81	54,162
5	3,15	31	20,124,155	57	38,114	83	60,332,415,498
7	4,28	33	22,66	59	36,236,531	85	51,255
9	6,18	35	30,42	61	4,244,488,610	87	58,174
11	6,66	37	24,111,296	63	42,126	89	60,356,534,890
13	8,52,104	39	26,78	65	39,195	91	70,130
15	10,30	41	24,246,328	67	40,335,536	93	62,186
17	12,51,68	43	42,86,129,301	69	46,138	95	60,380,570
19	12,76,114	45	30,90	71	40,568,710	97	56,679,776
21	14,42	47	30,141,470	73	60,219,292,365	99	66,198
23	12,276	49	28,196	75	50,150	101	101,202,303,606
25	15,75	51	34,102	77	44,308		
27	18,54	53	30,318,795	79	60,237,316,790		

En los años 60, y mediante un programa de ordenador, estas tablas fueron comparadas con los 22295 posibles resultados obtenidos, imponiendo como condición única que en las igualdades halladas, las sumas de fracciones tuvieran, a lo sumo, cuatro términos, con lo que pudieron estudiar las razones que dieron lugar a la elección de las igualdades escritas por el escriba y enunciar interesantes teorías al respecto. En el año 1972, el profesor de la Universidad de Dover Richard J. Gillings en su obra Mathematics in the Time of the Pharaohs, recoge esta teoría por su alto porcentaje de aceptación entre los estudiosos.
Dicha teoría describe cinco principios básicos que podrían haber sido usados por los escribas a la hora de elegir la suma de fracciones más idónea, más concretamente:

1. De las posibles igualdades, la que tenga denominadores más pequeños es preferible, sin exceder ninguno el número 1000.
2. Una igualdad con dos términos es preferible a una de tres; una con tres a una con cuatro y jamás se usan igualdades en las que aparezcan más de cuatro fracciones.
3. Las fracciones se escriben en orden ascendente de denominador y nunca se repite la misma dos veces.
4. La primera fracción marca la elección, esto es, de todas las igualdades posibles, se escoge la que tenga el primer denominador más pequeño; salvo que el coger una con denominador más grande implique una reducción sustancial en los posteriores denominadores.
5. Son preferibles denominadores con números pares a aquellos números impares.

5.2 Ecuaciones lineales

En este apartado y los que siguen iremos resolviendo ejemplos propios y problemas de los distintos papiros, con solución actual y la dada por el escriba o calculista.
Ejemplo: Si a un número le añadimos su $1/2, 1/3$ y $1/4$ obtenemos 7. De qué número estamos hablando.
En notación actual tendríamos

$$\begin{aligned} &x/2 + x/3 + x/4 = 7 \\ &12x + 8x + 6x = 7 \cdot 24 \\ &x = 84/13 \end{aligned}$$

Como $1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12$ y $7 - 13/12 = 71/12,$ resulta que

$$71/12 = 5 + 1/2 + 1/3 + 1/12$$

entonces

$$13/12 + 71/12 = 7 \quad \Rightarrow \quad 1/2 + 1/3 + 5 + 1/2 + 1/3 + 1/12 = 7$$

También

$$84/13 = 6 + 1/3 + 1/8 + 1/132$$

y por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{6+1/3+1/8+1/132}{2}=\dfrac{42}{13}\\[2mm] \dfrac{6+1/3+1/8+1/132}{3}=\dfrac{28}{13}\\[2mm] \dfrac{6+1/3+1/8+1/132}{4}=\dfrac{21}{13}\end{array}\right\}=\frac{42}{13}+\frac{28}{13}+\frac{21}{13}=7$$

El problema 63 del papiro de Rhind plantea repartir 700 panes entre 4 hombres de tal forma que, el primero reciba $2/3$, el segundo $1/2$, el tercero $1/3$ y $1/4$ para el cuarto.
Como $2/3+1/2+1/3+1/4=7/4=1+1/2+1/4$, por lo que $1+1/2+1/4$ es a 700 como 1 es a x. De aquí se obtiene para $x=400$, por lo que cada hombre recibirá

$$2/3\cdot 400=266+2/3$$
$$1/2\cdot 400=200$$
$$1/3\cdot 400=133+1/3$$
$$1/4\cdot 400=100$$

Como podemos comprobar

$$\left.\begin{array}{r}266+200+133+100=699\\ 2/3+1/3=1\end{array}\right\}\ 699+1=700$$

En el Papiro de Rhind, el problema 24 nos propone que un número más su $1/7$ parte es igual a 19.

En resolución actual, resolveríamos como

$$x+x/7=19,\ \Rightarrow\ 7x+x=7\cdot 19\ \Rightarrow\ x=\frac{133}{8}$$

El escriba Ahmes supone un valor para $x=7$, por lo que $7+7/7=8$. Ahora basta con calcular un número n tal que $19=8n$, y el valor buscado será $x=7n$. Dividiendo por $19/8$, obtenemos

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

Como $16+2+1=19$ y $n=2+1/4+1/8=19/8$ la solución es

$$x=7\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{133}{8}=16+1/2+1/8$$

El problema número 30 del papiro de Rhind plantea encontrar un número tal que al sumarle $2/3, 1/2$ y $1/7$ resulte 37.

En notación actual, la solución viene determinada como:

$$x + 2/3x + 1/2x + 1/7x = 37$$
$$97/42x = 37$$
$$x = 1554/97$$

En la solución original, Ahmes factoriza el primer miembro de la ecuación que divido a 37.

$$1 + 2/3 + 1/2 + 1/7 = 97/42$$
$$\frac{37}{97/42} = 1554/97 = 16 + 1/56 + 1/679 + 1/776$$

De donde:

$$1554/97 + 1036/97 + 777/97 + 222/97 = 37$$

Ejemplo: Un campo con una extensión total de 1800 está compuesto por dos parcelas, en cada una de las cuales el rendimiento del grano por unidad de área está afectado por coeficientes diferentes de $2/3$ y $1/2$. Se desea conocer la extensión de cada parcela sabiendo que la diferencia de producción es de 500.
En notación actual es

$$x + y = 1800, \quad 2/3x - 1/2y = 500$$

que tiene como solución:

$$x = 1200, \quad y = 600$$

El escriba admite que las dos parcelas son iguales a la semisuma, $1800/2 = 900$ y con esta hipótesis falsa llega al valor erróneo de que la diferencia de producción es de $150 = 900(2/3 - 1/2)$. Para compensar el error de $350 = 500 - 150$, reconoce que el error es de $2/3 + 1/2 = 7/6$, valor que sumado y restado al dato inicial dará el valor de las parcelas. Para obtener este valor debería dividirse 350 por $7/6$ para obtener $350/(7/6) = 300$, pero el escriba obvia esta operación y se pregunta por cuánto debe multiplicar $7/6$ para obtener 350, y opera:

$$6/7 = 1/2 + 1/3 + 1/42$$

y multiplica

$$350(1/2 + 1/3 + 1/42) = 300$$

Ahora sólo tiene que sumar y restas 300 a la semisuma 900:

$$x = 900 + 300 = 1200, \quad y = 900 - 300 = 600$$

Ejemplo, dividir cien panes entre cinco personas, siguiendo una progresión aritmética, de tal manera que la parte de las dos últimas sea $1/7$ de las tres partes primeras. El papiro dice:

"Toma como diferencia $5+1/2$, de donde $23,\ 17+1/2,\ 12,\ 6+1/2,\ 1.$ Aumenta esos números en la proporción de $1+2/3$ y obtendrás las partes que corresponden a cada persona."
En efecto, el número $5+1/2$ es la razón entre la diferencia de la progresión y la parte de la última persona, que puede deducirse de los datos del problema, pues las dos últimas personas reciben dos de esas partes más una diferencia, mientras que los tres siguientes reciben tres de esas partes más nueve diferencias, que han de ser equivalentes a catorce partes y siete diferencias, de ahí la razón de $11/2$ ó $5+1/2.$ Admitiendo que la última parte es un pan, la suma, de acuerdo con diferencia de $5+1/2,$ daría sesenta panes y no cien como exige el problema: de ahí la última parte de la solución al elevar los valores anteriores en una proporción de sesenta a cien, es decir, en la proporción de tres a cinco.
Efectivamente:

$$\left.\begin{array}{r} 23+17+\frac{1}{2}+12=\frac{105}{2} \\ 6+\frac{1}{2}+1=\frac{15}{2} \end{array}\right\} = \frac{105}{2}+\frac{15}{2}=60 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} \frac{5}{3}\cdot\frac{105}{2}=\frac{175}{2} \\ \frac{5}{3}\cdot\frac{15}{2}=\frac{25}{2} \end{array}\right\} = \frac{175}{2}+\frac{25}{2}=100$$

Ejemplo: Un grupo de personas sacan agua de un pozo que vierten en un pilón. El proceso seguido es el siguiente: El primero duplica la cantidad de agua que hay en el pilón y llena una vasija de siete litros. El segundo duplica la cantidad de agua que queda en el pilón y llena una vasija de siete litros. Así, sucesivamente, el proceso se repite hasta el quinto, que duplica la cantidad de agua que queda en el pilón y llena una vasija de siete litros. En ese momento ya no queda agua en el pilón.
Calcular la cantidad de agua que había inicialmente en el pilón y la cantidad de agua extraída del pozo por cada una de las cinco personas.
En notación actual, procedemos:
Sea n la cantidad de agua que había inicialmente en el pilón, entonces
Agua inicial: n

El primero aporta n litros de agua y retira 7, quedan $2n-7$
El segundo aporta $2n-7$ y retira 7, quedan $4n-21$
El tercero aporta $4n-21$ y retira 7, quedan $8n-49$
El cuarto aporta $8n-49$ y retira 7, quedan $16n-105$
El quinto aporta $16n-105$ y retira 7, quedan $32n-217$

Para n resulta un valor de $n=217/32=6+25/32,$ que es la cantidad de agua que había inicialmente en el pilón, por tanto

	Agua inicial	Agua pozo	Agua disponible	Agua vasijas	Agua en pilón
	6+25/32				6+25/32
1º	6+25/32	6+25/32	13+9/16	7	6+9/16
2º	6+9/16	6+9/16	13+1/8	7	6+1/8
3º	6+1/8	6+1/8	12+1/4	7	5+1/4
4º	5+1/4	5+1/4	10+1/2	7	3+1/2
5º	3+1/2	3+1/2	7	7	0

El escriba hace el camino inverso. Considera que los 7 litros que recibe la última persona proceden de dos mitades de 3+1/2. Los 7 litros que recibe la cuarta persona proceden de la mitad de $7+(3+1/2)=10+1/2,$ esto es $5+1/4.$ Así, sucesivamente, va confeccionando los valores que le llevan a conocer que la cantidad inicial es de $217/32=6+25/32.$

5.3 Ecuaciones de segundo grado

Aunque no conocían las fórmulas que se utilizan en la actualidad los mesopotámicos resolvían la ecuación de segundo grado en un contexto de dos ecuaciones.
Ejemplo: Un rectángulo de área 16 tiene de perímetro 10. Determinar ancho y alto.
En notación actual, planteamos

$$x+y=10,\quad xy=16$$

Haciendo operaciones, obtenemos

$$x=2,8\quad y=8,2$$

Como $x+y=10,$ el calculista considera que $x=y=5,$ lo que equivale a suponer que el rectángulo es un cuadrado. Pero no es así ya que $xy=25\neq 16.$ La anchura x será 5 más algo y la altura será 5 menos algo, para compensar y mantener la suma igual a 10. Ese algo supone que conocían la identidad algebraica "*suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados*" entonces, denotando ese algo como $n,$ opera

$$xy=(5+n)(5-n)=5^2-n^2=16$$

entonces

$$n^2=25-16=9=3^2$$

y en consecuencia, el resultado final es:

$$x=8\quad y=2$$

El papiro sólo aporta una solución.
Otro ejemplo sobre el mismo tema: La suma de dos números es 20 y su producto 96.
El escriba se plantea que, si la diferencia de dos números es $2n,$ entonces $10+n$ es el mayor y $10-n$ es el menor. El producto es

$$(10+n)(10-n)=10^2-n^2=96$$

de donde

$$n^2=4 \text{ y } n=2$$

por tanto

$$x=10-2=8 \text{ e } y=10+2=12$$

es la solución propuesta.
En una tablilla babilónica el escriba dice: *He multiplicado largo y ancho y he obtenido el área. He agregado al área el exceso del largo sobre el ancho, 183, además he sumado largo y ancho 27. Así he obtenido largo, ancho y área.*

En notación actual procederíamos como sigue:

$$\begin{aligned} &xy + x - y = 183 \\ &x + y = 27 \end{aligned}$$

y obtendríamos

$$x = 14{,}15,\quad y = 12{,}13$$

El escriba comienza por sumar los dos datos numéricos $183 + 27 = 210,$ $x(y+2) = 210$ y agrega 2, $x + y + 2 = 29,$ con lo que obtiene los valores de dos números, $(x, y+2)$ conociendo la suma 29 y su producto 210, esto es $x^2 - (y+2)^2$. Toma la mitad de $29/2 = 14 + 1/2,$ de cuyo cuadrado resta 210, $(14+1/2)^2 - 210 = 1/4,$ de cuya raíz cuadrada $\sqrt{1/4} = 1/2,$ suma y resta $14 + 1/2$ y obtiene 15 y 14. A este último resta 2 y obtiene como solución 15, 12, 180, esto es

$$(14+1/2)^2 - 210 = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = (1/2)^2$$

Largo: $(14+1/2)^2 + 1/2 = 15$

Ancho: $(14+1/2)^2 - 1/2 = 14 \quad \rightarrow \quad 14 - 2 = 12$

Área: $15 \cdot 12 = 180$

En este caso, el escriba ignora la segunda solución.
Ejemplo, repartir 13 huevos entre tres personas de tal forma que reciban $1/2,$ $1/3$ y $1/4$, respectivamente.
Si hacemos

$$\frac{13}{2} = 6 + 1/2,\quad \frac{13}{3} = 4 + 1/3,\quad \frac{13}{4} = 3 + 1/4$$

podemos establecer que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \quad y \quad 6 + 4 + 3 = 13$$

Si hacemos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{Q}{Q+1},$$

donde Q es un racional, tenemos

$$Q = \frac{2(3+4) + 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4 - 26} = \frac{26}{-2} = \frac{13}{-1}$$

resulta que

$$x = 13 - 1 = 12$$

Este valor nos va a permitir resolver la ecuación

$$\frac{12}{2}+\frac{12}{3}+\frac{12}{4}=6+4+3=13$$

sin romper ningún huevo.
Esta fracción genera una ecuación cúbica de la forma

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$$

donde $x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c.$ En nuestro caso, la ecuación es

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

con soluciones de

$$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4.$$

En su obra Elementary Number Theory in Nine Chapters, el profesor de matemáticas del Providence College del estado de Rhode Island James J. Tattersall, llama elefantina a la ecuación

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{Q}{Q+1}$$

en atención a los matemáticos hindúes como Aryabhata (476-550), Brahmagupta(598-670) o Bhaskara (1114-1185), que las utilizaron para resolver problemas de grado y otras aplicaciones a partir de las fracciones egipcias, proponiendo como solución

$$Q=\frac{a(b+c)+bc}{abc-(ab+ab+bc)}=\frac{p}{r}$$

donde, si $mcd(p,r)=1,$ el valor de x viene determinado por $x=p\pm r.$
Ejemplo: Si 4 y 7 son factores de un número y raíces de una ecuación cuadrática, determinar dicho número y su descomposición en suma de números primos.
En notación de fracciones unitarias, tomamos los inversos de 4 y 7

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{Q}{Q+1},\quad \Rightarrow \quad Q=\frac{4+7}{4\cdot 7-(4+7)}=\frac{11}{17}$$

como el $mcd(11,17)=1,$ el número buscado es $11+17=28$ que es factor de 4 y 7.
Supongamos una estructura cuadrática de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0,$ que admite las raíces a y $b.$
Conociendo la suma 11 y el producto 28, la ecuación generada es

$$x^2-11x+28=0$$

donde

$$\frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 28}}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \end{cases}.$$

Este procedimiento admite la solución de ecuaciones de cualquier grado a partir de un número, donde el grado vendrá determinado por el número de factores de dicho número.
Desde la época antigua hasta prácticamente la edad moderna, las ecuaciones cuadráticas eran clasificadas en tres tipos que, reducidas a sus formas canónicas, son

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 = px + q$
3) $x^2 + q = px$

La ecuación anterior corresponde al tercer tipo y la solución que podría haber planteado Al Khowarizmi (783-835) habría sido

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \pm \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 28} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Podemos comprobar la similitud que guarda con las fórmulas actuales, aunque antiguamente no tenían en cuenta las raíces negativas.

5.4 Sistemas

En el papiro de Berlín encontramos el siguiente problema: El área de un cuadrado de 100 codos cuadrados es igual a la suma de la de otros dos cuadrados más pequeños. El lado de uno de ellos es $1/2 + 1/4$ del otro. Calcular los lados de los cuadrados.
En notación actual, planteamos

$$x^2 + y^2 = 100, \quad (1/2 + 1/4)x = y$$

Haciendo operaciones, obtenemos:

$$x = \pm 8, \quad y = \pm 6$$

Para el escriba, supone que uno de los cuadrados tiene lado de 1 codo y el otro $1/2 + 1/4$ de codo. Las áreas son: para el primero un codo cuadrado y para el segundo el resultado de elevar al cuadrado $1/2 + 1/4$:

1	$1/2$	$1/4$
$1/2$	$1/4$	$1/8$
$1/4$	$1/8$	$1/16$

Como $1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 = 1/2 + 1/16$, la suma de las áreas de los cuadrados es $1 + 1/2 + 1/16 = 25/16$ de codo cuya raíz cuadrada $\sqrt{25/16} = 5/4 = 1 + 1/4$. La raíz cuadrada de

100 es 10, ahora debemos encontrar un número tal que al multiplicarlo por $1+1/4$ nos de 10, es decir, hay que dividir $10/(1+1/4)=8$. El escriba opera de la siguiente forma:

	1	$1+1/4$
	2	$2+1/2$
	4	5
x	8	10

El número buscado es 8. Ahora, para calcular el otro cuadrado se multiplica por $1/2+1/4$

1	8
$1/2$	4
$1/4$	2

El otro cuadrado será $4+2=6$, esto es, 6 codos.
En su obra Del Álgebra Clásica Al Álgebra Moderna, el profesor ruso Iván Iákovlievich Depman (1885-1970), recoge el siguiente problema atribuido a Diofanto de Alejandría (250? d.C.): Encontrar dos números cuya suma sea 10 y la suma de sus cuadrados 68.
La solución planteada por Depman es la siguiente:

$$x+y=10,\quad x^2+y^2=68$$

Si

$$\frac{x+y}{2}=\frac{10}{2}=5 \text{ y } \frac{x-y}{2}=d$$

entonces

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x=5+d \quad y \quad \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y=5-d$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$x^2+y^2=(5+d)^2+(5-d)^2=50+2d^2=68$$

de donde

$$d^2=9=3^2$$

y así:

$$x=8,\quad y=2$$

El profesor Julio Rey Pastor, en su obra Historia de la Matemáticas, plantea la solución de un problema parecido, pero indicando se trata de problemas “fabricados” para ejercicios de prácticas. Efectivamente. Si partimos del sistema

$$x^2+y^2=z,\quad x+y=w$$

haciendo operaciones, encontramos

$$x = \frac{w + \sqrt{2z - w^2}}{2}, \quad y = \frac{w - \sqrt{2z - w^2}}{2}$$

que es la solución a este tipo de problemas.
Por ejemplo: para

$$x + y = 10, \quad x^2 + y^2 = 68$$

la solución resulta

$$x = \frac{10 + \sqrt{2 \cdot 68 - 10^2}}{2} = 8, \quad y = \frac{10 - \sqrt{2 \cdot 68 - 10^2}}{2} = 2$$

En función de los signos se pueden encontrar tres tipos más de estos sistemas, a saber

$$x^2 - y^2 = z, \quad x + y = w$$
$$x^2 - y^2 = z, \quad x - y = w$$
$$x^2 + y^2 = z, \quad x - y = w$$

que tienen como solución, respectivamente

$$x = \frac{w^2 + z}{2w}, \quad y = \frac{w^2 - z}{2w}$$

$$x = \frac{w^2 + z}{2w}, \quad y = \frac{z - w^2}{2w}$$

$$x = \frac{w + \sqrt{2z - w^2}}{2}, \quad y = \frac{w - \sqrt{2z - w^2}}{2}$$

Les invito a resolver sistemas utilizando esta formulación.

5.5 Método de los cuadrados repetidos

Los procedimientos reseñados anteriormente para el cálculo de operaciones con fracciones egipcias o unitarias, también se aplican en la actualidad en el campo de la criptografía y tránsito de datos por Internet, entre otros. Para el cálculo de x^n, cuando n es suficientemente grande, se puede simplificar utilizando la descomposición de n en factores binarios, tales como

$$n = x^1 + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots + x^n.$$

Ejemplo: Calcular $19^{21} \equiv r(mód.17)$. Observamos que $19^{21} \equiv 2^{21} \equiv r(mód.17)$ y la descomposición del exponente resulta $21 = 2^4 + 2^2 + 1$. Ahora planteemos la solución de la ecuación $2^{21} \equiv r(mód.17)$ de la siguiente forma:

$$2^1 \equiv 2(m\acute{o}d.17)$$
$$2^2 \equiv 2^2 \equiv 4(m\acute{o}d.17)$$
$$2^4 \equiv 4^2 \equiv 16(m\acute{o}d.17)$$
$$2^8 \equiv 16^2 \equiv 1(m\acute{o}d.17)$$
$$2^{16} \equiv 1^2 \equiv 1(m\acute{o}d.17)$$
$$2^{21} \equiv 2^{16+4+1} \equiv 1 \cdot 16 \cdot 2 \equiv 32 \equiv 15(m\acute{o}d.17)$$

Como podrán comprobar, el método es bastante fácil de asimilar.
Teniendo en cuenta que, por la función de Euler $\varphi(17) = 17 - 1 = 16,$ la ecuación también se podría haber resuelto como $2^{21} \equiv 2^{21\text{-}16=5} \equiv r(m\acute{o}d.17),$ de donde $2^5 \equiv (m\acute{o}d.17) = 15.$

Ejemplo: Calcular $31^{73} \equiv r(m\acute{o}d.101).$ La descomposición del exponente es $73 = 2^6 + 2^3 + 1$ y la solución la planteamos como:

exp	**Cuadrados sucesivos**
1	$31^1 \equiv 31(m\acute{o}d.101)$
	$31^2 \equiv 31^2 \equiv 52(m\acute{o}d.101)$
	$31^4 \equiv 52^2 \equiv 78(m\acute{o}d.101)$
8	$31^8 \equiv 78^2 \equiv 24(m\acute{o}d.101)$
	$31^{16} \equiv 24^2 \equiv 71(m\acute{o}d.101)$
	$31^{32} \equiv 71^2 \equiv 92(m\acute{o}d.101)$
64	$31^{64} \equiv 92^2 \equiv 81(m\acute{o}d.101)$
73	$31^{73} \equiv 31^{64+8+1} \equiv 81 \cdot 24 \cdot 31 \equiv 60264 \equiv 68(m\acute{o}d.101)$

La solución de este supuesto es muy difícil aplicando métodos normales ya que el resultado de

$$31^{73} = 740293012043518230983806106799997754133884765529386757798846011573318280908863981366643514765081420527415939 1$$

sería imposible de manejar.

BIBLIOGRAFÍA

ELEMENTARY NUMBER THEORY IN NINE CHAPTERS, James J. Tattersall, ISBN 0-521-61524-0
HISTORIA DE LA MATEMATICA. Carl B. Boyer, ISBN 84-206-8186-5
HISTORIA DE LA MATEMATICA. J.Rey Pastor, ISBN 84-7432-809-8
HISTORIA UNIVERSAL DE LAS CIFRAS, Georges Ifrah, edición Espasa Calpe, ISBN: 84-2399730-8
LA HISTORIA DE LAS MATEMATICA PARA JOVENES. R.Moreno y J.M.Vegas, profesores de la Universidad Complutense de Madrid.
LAS FUNCIONES un paseo por su historia, Carlos Sánchez y Concepción Valdés, catedráticos de historia de las matemáticas en la Universidad de La Habana. Editorial Nivola, edición 2007.
MATEMATICAS EN EL ANTIGUO EGIPTO. Ainhoa Berciano Alcaraz, Universidad del País Vasco.
MATHEMATICS IN THE TIME OF THE PHARAOHS. R.J.Gillings, Universidad de Dover.

INTERNET (Páginas consultadas)

www.ciencia.astrositi.org
www.egiptologia.org
www.hojamat.es
www.maths.surry.ac.uk (Recomendamos por sus generadores de fracciones unitarias)
www.personal.us.es