1. FUNDAMENTOS DE LOS NÚMEROS

1. 1. *Clasificación de los números.*

1.1 Definición y origen de los números.

Entre los griegos, un número era una cantidad o una medida representada, por un entero natural, o por una relación de dos enteros naturales. Puede considerarse un número como una abstracción ligada a conjuntos de objetos y que se escinde, por consideración de los conjuntos infinitos, en dos conceptos diferentes.
En la actualidad, se define un número como elemento de un conjunto de números que deben verificar ciertas propiedades. Así es como se han definido los conjuntos N, Z, Q, R ó C cuya construcción se hace por etapas sucesivas a partir del conjunto N de los números naturales.
La primera muestra de un registro numérico fue encontrada en $Suazilandia$, en el sur de África; se trata de un hueso, el peroné de un babuino, con veintinueve muescas bien marcadas y data de, aproximadamente, 35000 años a.C. Tiene un parecido extraordinario con el "calendario de varillas" que aún se usa en Namibia para registrar el paso del tiempo. En la República Checa se encontró un radio de lobo que data de, alrededor de 30000 años a.C., marcado con cincuenta y cinco muescas en dos series de grupos de cinco. Posiblemente se trate de una lista de animales cazados. Entre los hallazgos, el más curioso es el hueso conocido como *Ishango*, descubierto en las orillas del lago Edwards, entre Uganda y la República Democrática del Congo, que data de aproximadamente 20000 años a.C., y aparenta ser algo más que un mero recuento, ya que, estudios microscópicos, han demostrado cierta relación con las fases lunares. Debido a la imperiosidad de predecir la luna llena, posiblemente por razones religiosas o pragmáticas que requerían la visibilidad nocturna, no es de extrañar que una de las inquietudes del hombre neolítico fuera observar el ciclo del gran reloj del cielo. De hecho, a través de la astronomía, de la astrología o de la cosmología, la observación de los cielos ha sido, sin duda, la mayor influencia en el descubrimiento de los números.
En su obra $Historia\ Universal\ de\ las\ Cifras$, el profesor *Georges Ifrah* dice que "*hacia el 3300-3200 años a.C., la aparición simultánea de los números sumerios y de los números protoelamitas, constituyen el sistemas más antiguos de numeración escrita actualmente conocidos*. Se trataba de un sistema de numeración posicional de base 60 que contiene el conjunto de números $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, esto es, todos los números naturales excepto el cero. El sistema sexagesimal se utiliza en la actualidad para medidas angulares y de tiempo. En el siglo III a.C. tiene su aparición el primer cero conocido de la historia: el cero de los sabios babilónicos, utilizado exclusivamente en la numeración posicional babilonia para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto orden. El cero, tal y como lo conocemos en nuestros días, fue utilizado por primera vez en la India por el matemático y astrónomo $Brahmagupta$ $(598 - 665)$ que lo menciona en su obra *Brahmasphuta Siddhanta* del año 628 y fue introducido en Europa por los árabes, a los que algunas fuentes atribuyen ser los primeros en desarrollar los conceptos numéricos del 0 hasta el 9, 1000 años a.C.

1.2 Primeras clasificaciones de los números.

Entre las muchas clasificaciones que pueden hacerse de los números, hay dos de universal conocimiento: La $paridad$, que los divide en *pares* e *impares*, y la $primalidad$, que los divide en *primos* y *compuestos*.
Desde la más remota antigüedad, el hombre ha distinguido los números enteros como $pares$, $2,4,6,\ldots$ o como $impares$ $1,3,5,\ldots$
Se dice que un entero n es par si existe otro entero k tal que $n = 2k$.
Se dice que un entero n es impar si existe otro entero k tal que $n = 2k + 1$.

Las leyes de cálculo entre pares e impares se definen como:

$$
\begin{aligned}
&par + par = par = 2k + 2k = 4k \Rightarrow 2(2k) \\
&par + impar = impar = 2k + 2k + 1 \Rightarrow 4k + 1 \\
&impar + impar = par = 2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2 \Rightarrow 2(2k + 1) \\
&par \cdot par = par = 2k \cdot 2k = 4k \Rightarrow 2(2k) \\
&par \cdot impar = par = 2k(2k + 1) = 4k^2 + 2k \Rightarrow 2(2k^2 + k) \\
&impar \cdot impar = impar = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(k^2 + k) + 1
\end{aligned}
$$

Estas leyes definen un dominio de integridad del anillo $\mathbb{Z}_2$ que consta sólo de dos elementos, $0(par)$ y $1(impar)$, con las tablas de adición y multiplicación siguientes:

$+$	1	2
1	0	1
2	1	0

$\bullet$	1	2
1	1	0
2	0	0

Si el simétrico para la suma de un elemento cualquiera x es el opuesto $-x$, y el simétrico para el producto es el inverso x^{-1} cuando $x \neq 0$, se puede demostrar fácilmente que

$$x + (-x) = 0 \;\; y \;\; x \cdot x^{-1} = 1$$

El número par puede ser representado como diferencia de cuadrados,

$$(2k) = \left(\frac{(2k)+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{(2k)-1}{2}\right)^2 = \frac{((2k)+1)^2}{2^2} - \frac{((2k)-1)^2}{2^2}$$

El número impar también puede ser representado como diferencia de cuadrados

$$(2k+1) = \left(\frac{(2k+1)+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{(2k+1)-1}{2}\right)^2 = (k+1)^2 - k^2$$

Un entero b, $b \neq 0$ se llama divisor o factor de un entero a, esto es, $b|a$, si existe un entero c tal que $a = bc$. Cuando $b|a$, se dirá que b es múltiplo de a.
Un entero p, $p \neq 0, \pm 1$, se dice que es primo si, y sólo si, sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$.
Dos números son primos entre sí si el único divisor común es la unidad.
Los números primos de la forma $4k + 1$ son representables como suma de dos cuadrados mientras que los de la forma $4k - 1$ no lo son.
Un número natural n es la suma de dos cuadrados si, y sólo si, la descomposición de n en factores primos no contiene ningún factor primo de la forma $4k + 1$ elevada a potencia de exponente par.
Los números primos están estrechamente ligados con el sistema decimal o de base diez.
La descomposición en factores primos de diez es $10 = 2 \cdot 5$ y el sistema completo de restos, respecto al número diez, es $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. De estos números, son coprimos con diez el $1,3,7 \; y \; 9$. Todos los números primos conocidos terminan en 1, 3, 7, 9, aunque no todos los números que terminan en 1, 3, 7, 9 son primos. Existen dos excepciones con el 2 y el 5 que son primos por sí solos y son compuestos si aparecen como terminación. En el siglo XVIII, Euler

demostró con su función $\varphi(n)$ la cantidad de números coprimos con otro de determinada estructura, que en nuestro caso podemos calcular como

$$\varphi(n)=n\left((1-\frac{1}{p_1}\right)\left((1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left((1-\frac{1}{p_n}\right),$$

esto es

$$\varphi(10)=10\left((1-\frac{1}{2}\right)\left((1-\frac{1}{5}\right)=10\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=4\Rightarrow 1,3,7,9$$

Los pitagóricos definieron otro tipo de números en relación con los divisores o partes alícuotas, término éste acuñado por *Nicómaco de Gerasa* (*siglo I d.C.*), un neopitagórico originario de Judea y autor de la obra *Introducción a la Aritmética*. Estos números son:

Abundantes: Es un número que es mayor a la suma de sus divisores.
Deficientes: Es un número que es menor a la suma de sus divisores.
Perfectos: Es un número que es igual a la suma de sus divisores.
Amigos: Son números en los cuales cada uno es igual a la suma de los divisores del otro.
Oblongos: También llamados *heterómecos*, son números de la forma $n(n+1)$.
Poligonales: Son números figurados representados por conjuntos de puntos repartidos en un polígono regular. Asociados con las formas geométricas permitieron a los pitagóricos la representación visual de los números, al combinar las dos esencias implicadas en las matemáticas: el número y la forma. Los números poligonales pueden ser triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales, octagonales, nonagonales, decagonales, etc.

1.3 Los números cósmicos.

Para los pitagóricos, el gran sistema del mundo reposa sobre la base de que el ser, la forma y la acción de todas las cosas son una consecuencia natural de los números. Quien conoce sus propiedades y sus mutuas relaciones, conoce las leyes merced a las cuales la naturaleza existe. Los números determinan el nexo de unión de todas las cosas y la mecánica del universo entero, son la base del espíritu y el único medio por el que se manifiesta la realidad. La unión de todos los números establece la concordancia de todos los seres con los efectos de sus acciones y constituye la base de la armonía del universo.
Denominaron *década* a los diez primeros números y, en consideración a sus propiedades místicas y cabalísticas así como a sus virtudes mágicas, desarrollaron una *aritmetología* (la palabra número deriva del término griego *aritmo*) y adjudicaron a cada uno de ellos atributos especiales que les dotaban de propiedades vitales.
Muchas civilizaciones primitivas compartieron diversos aspectos de esta numerología que los pitagóricos llevaron al culto más extremo. Estas civilizaciones, como la de los pueblos mesopotámicos, influenciados por los relatos bíblicos, consideraban a los tres primeros números como símbolos de la creación divina. Para ellos, el número **uno** es el generador de los números y el número de la razón; el número **dos** es el primer número par, duplicación del primero, número masculino y de la opinión; **tres** es el número femenino y número de la armonía por estar compuesto por la unidad y la diversidad. El número **cuatro** es el número de la justicia o de la retribución, e indica el arreglo de cuentas; **cinco** es el número del matrimonio, unión de los elementos masculino y femenino y representación del tiempo. **Seis** es el número de la

creación, número perfecto que representa al hijo nacido de la unión entre los elementos masculino y femenino. El número **siete** ha sido destacado desde antiguo por un temor reverente, probablemente debido a que son siete las estrellas errantes o planetas, *(Sol, Luna, Martes, Mercurio, Júpiter, Venus, y Saturno)* de los que se derivó la semana y por lo tanto, los nombres de cada uno de los siete días que la compone. Para los griegos, el **octavo** día era el mejor para encontrarse con los buenos amigos, pero para los egipcios, el día ocho de cada mes era nefasto por estar relacionado con el pago de diezmos o impuestos. El número **nueve** era considerado por los esoteristas como la culminación del tiempo, por el contrario, para el filósofo y matemático Ramón Llull (1232-1316), el nueve era el valor de la división de las figuras concéntricas. El **diez** es el primer número de dos cifras, representa la totalidad del cosmos y los espacios infinitos, el vacío. Es el Dios del Cielo, lo que no se ve. Cuando muere el dios terrenal sube al cielo y se sienta a la diestra del Dios Padre, se unen el uno con el cero que se representa como el número diez.

	atributos
1	*Mónada*. Origen de todas las cosas. Número de la razón. Representa a Demiurgo, Dios creador y ordenador del mundo en la filosofía de los platónicos y alejandrinos
2	*Díada*. Diversidad, opinión y dualidad. Principio masculino.
3	*Tríada*. $Armonía = unidad + diversidad$, $1 + 2 = 3$. Principio femenino.
4	Ley universal e inexorable. Símbolo de la justicia y de sensación. Número de la doble dualidad. Primer cuadrado.
5	Símbolo del matrimonio: $2 + 3 = 5$. El triangulo divino que se representa como $5^2 = 3^2 + 4^2$ y del pentalfa o pentagrama místico que se representa como una estrella de cinco puntas.
6	Símbolo de la procreación: $[2 + 3] + 1 = 6$. Primer número perfecto que representa al hijo.
7	Símbolo de la virginidad, de la voz, de la luz y del arco iris.
8	Símbolo de la amistad, de la plenitud y de la reflexión. Primer cubo.
9	Símbolo del amor y de la gestación. Segundo cuadrado.
10	T*etractys*, símbolo de Dios y del Universo; emblema supremo, suma de las dimensiones geométricas, fundamento de todo. Anagrama místico del juramento pitagórico, depositario de la escala musical. Representa el infinito, aquello que no se ve: la fe.

La numerología cósmica es misógina en la mayoría de sus interpretaciones referente al número tres, número que representa a la mujer. Mientras que el número tres es representado por el trígono, con tres puntos de apoyo y máxima estabilidad y seguridad, el número dos, el hombre, se representa como una línea recta, con dos puntos de apoyo y una personalidad dual e inestable. El hombre necesita el apoyo y consejo de terceros, la doble dualidad representada por el número cuatro, la mujer se basta a sí misma, además en ella recae la responsabilidad de la perpetuación de la especie. En esta tesitura aparecen números que se consideran malditos y que tienen que ver con el número tres.

El número trece es igual a $2^2 + 3^2 = 13$. El número cuatro es la doble dualidad, número que representa al hombre en primera dimensión. El número nueve representa la gestación y también la independencia femenina. Los países que inician la semana en domingo, consideran el martes 13 o el viernes 13 como días aciagos. Desde el domingo hasta el martes hay 3 días, y hasta el viernes hay 6 días, diferencias ambas de tres o múltiplo de tres.

El número 37 es un número que podemos escribir como $6^2 + 1 = 37$. Bajos los auspicios del número 36 los pitagóricos prestaban su juramento; el 37 es el juramento ofrecido a Dios que representa la dimensión sublime. Este número, como múltiplo de tres, puede representar el número de Jesucristo, $2^3 \cdot 3 \cdot 37$ =888 o el número de la Bestia $2 \cdot 3^2 \cdot 37 = 666$.

Para los egipcios el número 152 era un número mágico, ya que $2^3 \cdot 19 = 152$ representaba al hombre (2), la mujer (3) y a Ra, el Dios Sol (19). Para los griegos, el número 152 es el número que representa el nombre de la Virgen María, que como cuadrado mágico, resulta $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.
Cada una de las 3 filas suman 8, al igual que cada una de las 3 columnas. La diagonal principal suma 8 y la secundaria suma 6. Los números 2,3 y 6 representan al hombre, la mujer y el hijo. El $2^3 = 8$ representa al hombre en su más alta dimensión y 888 es el número de Jesucristo. Como matriz, este cuadrado mágico tiene como determinante $104 = 2^3 \cdot 13,$ tres números emblemáticos, 2, 3 y 13 que representan al hombre (2), la mujer (3) y la eterna guerra de sexos, con $2^2 + 3^2 = 13,$ disputándose sus espacios vitales.
Hay muchos números para estudiar. Por ejemplo, el número 17 junto con el 2, es el número más temido después del 13. Viernes y 17 suele ser una combinación fatídica para quienes creen en las supersticiones. Según el escritor, historiador y biógrafo griego Plutarco (49 -119 d. C.), el odio que los egipcios sentían por el número 17 obedecía a que su dios Osiris fue muerto en el día 17 de la luna. Un niño egipcio nacido en 17 se consideraba que llevaba en sí la mala estrella y que su vida sería desafortunada. El número 17, sin embargo, atrae sobre sí las contradicciones. En algunos países de Sudamérica, los números de lotería más vendidos son los que terminan en 17.

1.4 Clasificación general de los números.

Desde Euclides (324-265) hasta Gauss (1777-1855) el avance en el conocimiento de los números fue espectacular y aunque pueden faltar muchas cosas por descubrir, éstas serán siempre sobre la base de la obra de Gauss. Alrededor del año 300 a.C. Euclides de Alejandría recoge todo el saber disponible en ese momento en lo referente a matemática antigua, que plasma en trece libros que denominó los $Elementos$, obra que con el devenir de los siglos ha sido fuente de consulta de muchos sabios. Alrededor del año 1800, Gauss lleva a cabo algo parecido con su obra $Disquisitiones\ Arithmeticae$, que recoge todo el saber que hasta entonces se tenía de la teoría de los números y que no pasaba de ser una mera colección de resultados aislados. En sus Disquisiciones, Gauss introdujo la noción de congruencia y, al hacerlo, unificó la teoría de los números. Dado el número entero $\mathbb{Z}$, $\mathbb{X}\ e\ \mathbb{Y}$ serán congruentes $módulo\ \mathbb{Z}$ sí y sólo si $(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$ es divisible por $\mathbb{Z}$. Esta nomenclatura se puede expresar mediante $x \equiv y(mód. z)$.
Para Gauss, los números se pueden clasificar en:

$\underline{Números\ naturales}$: Son los números que nos sirven para contar. El conjunto formado por estos números se representa por $\mathbb{N}$ y está formado por el conjunto $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\cdots\}$.
$\underline{Números\ enteros}$: Son los números con los que siempre se puede sumar y restar. Los números enteros se representa por $\mathbb{Z}$ y está formado por el conjunto $\mathbb{Z} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \cdots\}$. *Z, del alemán zahlen,* en atención a Gauss.
$\underline{Números\ racionales}$: Son los números con los que siempre se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir por números distintos de cero. El número racional es el cociente de dos números enteros, esto es a/b, con $a, b \in Z$. El conjunto de números racionales se representa por $\mathbb{Q}$, inicial de *quotient*, cociente en inglés.
$\underline{Números\ irracionales}$: Se llaman números irracionales los que no tienen una forma decimal periódica y, por tanto, no pueden expresarse en forma de fracción como $\sqrt{2}$, π, e, etc. El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbb{I}$.
$\underline{Números\ reales}$: Se llaman así al conjunto formado por los números racionales e irracionales y se representan por $\mathbb{R}$. Por definición tenemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, esto es, la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}\ e\ \mathbb{I}$.

$\underline{Números\ complejos}$: Los números complejos se representan como $\mathbb{C}$, y tienen su expresión en $a+bi$, donde ***a*** es la parte real y ***b*** la parte imaginaria, $a, b \in \mathbb{R}$ y $i=\sqrt{-1}$.

1. 2. *Operaciones con los números.*

2.1 Primeras operaciones relacionadas con sumas.

El profesor de matemáticas de la Universidad de San Francisco, David Berlinski, en su obra $Ascenso\ Infinito, Breve\ Historia\ de\ las\ Matemáticas$, dice que la historia de las matemáticas comienza en el año 532 a.C., la fecha que señala el nacimiento de Pitágoras de Samos (579-500?) como matemático. A Pitágoras se le atribuye la suma de los números impares, que tiene la particularidad de ser un cuadrado perfecto, esto es:

Números impares	n^2	n
1	1	1
1+3	4	2
1+3+5	9	3
1+3+5+7	16	4
1+3+5+7+9	25	5
1+3+5+7+9+11	36	6
1+3+5+7+9+11+13	49	7
1+3+5+7+9+11+13+15	64	8

En notación actual, esta suma podemos escribirla como $\sum_{t=1}^{n}(2t-1)=n^2$.

$$\sum_{t=1}^{17}(2t-1)=289=17^2,\quad \sum_{t=1}^{31}(2t-1)=961=31^2,\quad \sum_{t=1}^{47}(2t-1)=2209=47^2$$

También se le atribuye a Pitágoras la suma de los números naturales, $\sum_{t=1}^{n}(t)=\frac{n(n+1)}{2}$.

Al neopitagórico Nicómaco de Gerasa se le atribuye la suma de los números pares

Números pares	n	$n(n+1)$
2	2	1(1+1)
2+4	6	2(2+1)
2+4+6	12	3(3+1)
2+4+6+8	20	4(4+1)
2+4+6+8+10	30	5(5+1)
2+4+6+8+10+12	42	6(6+1)
2+4+6+8+10+12+14	56	7(7+1)
2+4+6+8+10+12+14+16	72	8(8+1)
2+4+6+8+10+12+14+16+18	90	9(9+1)
2+4+6+8+10+12+14+16+18+20	110	10(10+1)

Este tipo de números se denominan $oblongos\ o\ heterómecos$ y son el resultado del producto de dos números consecutivos, esto es $n(n+1)=n^2+n=p$, que en notación actual podemos escribir como $x^2+x-p=0$ en representación de la ecuación de segundo grado. Como ecuación de segundo grado genera dos raíces, x_1, x_2, que son los dos números consecutivos que representan a p. Otra propiedad de los números oblongos es que la *suma de dos números consecutivos es igual a la diferencia de sus cuadrados,* esto es $a+b=a^2-b^2$, *para* $a>b$.

Pitágoras había descubierto que la suma de los cuadrados de los números naturales era, en notación actual:

$$\sum_{t=1}^{n}(t)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

En $Sobre\ las\ espirales\ y\ Sobre\ los\ conoides\ y\ de\ los\ esferoides$, para Arquímedes (287-212 a.C.), la suma de los primeros números cuadrados se podía expresar en la forma especial de

$$3\sum_{t=1}^{n}t^2=n^2(n+1)+\sum_{t=1}^{n}t=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Supongamos que, en lugar de cuadrados, nos interesan los cubos, y planteamos

$$\begin{aligned}
&(1+0)^3=1^3=1\\
&(1+1)^3=2^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1=8\\
&(2+1)^3=3^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1=27\\
&(3+1)^3=4^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1=64 \text{ y,en definitiva,}\\
&(n+1)^3=n^3=3^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=n^3.
\end{aligned}$$

Si escribimos esta igualdad como $(n+1)^3=3\sum_{t=1}^{n}t^2+3\sum_{t=1}^{n}t+1\cdot(n+1)$, obtenemos

$$\sum_{t=1}^{n}t^2=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\sum_{t=1}^{n}t=\frac{n(n+1)(2n+1}{6}$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{n(n+1)^3-(n+1)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

y que

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}$$

podemos establecer

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^{n}t\right)^s}{\sum_{t=1}^{n}t}=\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^s}{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{s-1}$$

para cualquier valor del exponente s y $n>2$.

Por ejemplo:

$\frac{n(n+1)^{s-1}}{2} = \frac{5(5+1)^{2-1}}{2} = 15.$ No es cuadrado perfecto.

$\frac{n(n+1)^{s-1}}{2} = \frac{5(5+1)^{3-1}}{2} = 225 = 15^2$

$\frac{n(n+1)^{s-1}}{2} = \frac{7(7+1)^{5-1}}{2} = 614656 = 784^2$

Al neoplatónico $Teón\ de\ Esmirna$ $(aprox\ 130\ d.C.)$ se le atribuye la suma de los cubos de los números naturales:

$$\sum_{n=1}^{n}(n)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

Nos podríamos plantear la pregunta de si existen números que al mismo tiempo son cuadrados y cubos perfectos. Según dice el profesor *William Dunham* en su obra *El Universo de las Matemáticas,* existen infinitos números de este tipo a los que él denomina $cuadrubos$. Si *n* es un número entero cualquiera, $n^6 = n^3 \cdot n^3 = (n^3)^2$ es un cuadrado perfecto, y como

$$n^6 = n^2 \cdot n^2 \cdot n^2 = (n^2)^3$$

es un cubo perfecto, son al mismo tiempo un cubo y un cuadrado perfecto. De esta forma obtenemos infinidad de $cuadrubos$.

2.2 Operaciones relacionadas con sumas, restas y multiplicaciones.

Si $a\ y\ b$ son dos números que se pueden sumar por agrupación, obtenemos $(a+b)+(a+b) = 2a + 2b$ que podemos escribir como $2(a+b)$. Por el contrario, si hacemos que $(a+b)$ se sume o se reste a $(a-b)$, obtenemos, respectivamente $2a$ y $2b$. Una importante regla utilizada en álgebra dice que, si a la suma de dos números se le añade su diferencia, *resulta el doble del mayor*, si se le resta, *resulta el doble del menor*.
El producto de $a\ y\ b$ se puede relacionar en suma con su suma o con su diferencia para obtener *n*, situación que podemos escribir como $a \cdot b + (a \pm b) = n$, teniendo en cuenta que para la suma resulta $a(b+1) \pm b = n$, podemos obtener fácilmente los valores de $a\ y\ b$ en función de *n,*

Para la $a \cdot b + (a+b) = n$: $a = \frac{n-b}{b+1}$ ó $b = \frac{n-a}{a+1}$

Para la $a \cdot b + (a-b) = n$: $a = \frac{n+b}{b+1}$ ó $b = \frac{n-a}{a-1}$

El producto de $a\ y\ b$ se puede relacionar en diferencia con su suma o con su diferencia para obtener *n*, situación que podemos escribir como $a \cdot b - (a \pm b) = n$, teniendo en cuenta que para la suma resulta $a(b-1) \pm b = n$, podemos obtener fácilmente los valores de $a\ y\ b$ en función de *n:*

Para la $a \cdot b-(a+b)=n$: $a=\frac{n+b}{b-1}$ ó $b=\frac{n+a}{a-1}$

Para la $a \cdot b-(a-b)=n$: $a=\frac{n-b}{b-1}$ ó $b=\frac{n+a}{a+1}$

Las soluciones de estas ecuaciones son paramétricas, por tanto, dichas soluciones serán tantas como valores se le asignen a los parámetros.
Si el producto de a y b se relaciona con su suma, donde *P* es el producto y *S* la suma, podemos establecer

$$P=a \cdot b \text{ y } S=a+b$$

Despejando b en la segunda y sustituyendo su valor en la primera, obtenemos

$$b=S-a \text{ y } a(S-a)=P$$

de donde, haciendo operaciones $a(S-a)=a \cdot S-a^2=P,$ que podemos escribir como

$$a^2-Sa+P=0$$

o como se conoce en matemáticas, $ax^2-bx+c=0.$ Estas ecuaciones eran conocidas por los babilónicos dada la flexibilidad de las operaciones algebraicas que habían desarrollado. Así, podían trasponer términos en una ecuación sumando igualdades, y eliminando fracciones u otros factores multiplicando ambos miembros por cantidades iguales. Sumando $4ab$ a $(a-b)^2$ lo podían transformar en $(a+b)^2=a^2+ab+b^2,$ aprovechando los muchos tipos de factorizaciones simples con los que estaban familiarizados. La solución babilónica se puede establecer cómo $x=\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2+P} \pm \frac{S}{2}$ que es similar a la propuesta por Mohammet ibn Mose Al-Khwarizmi (780-835), matemático árabe, famoso por ser el gobernante que aparece en las *Mil y una noches* y por considerarse, junto con Diofanto de Alejandría (aprox. 350 d.C.), padre del algebra.
Para $xy=65$ y $x-y=8,$ la solución babilónica sería

$$x=\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+65}+\frac{8}{2}=9+4=13, \quad y=\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+65}-\frac{8}{2}=9-4=5$$

Esta segunda raíz no era contemplada por los babilonios.
Sean a y b dos números cualesquiera y *S* y *Q* la suma y el cociente, respectivamente. Sea $a+b=S$ y $\frac{a}{b}=Q$ donde $a=bQ.$ Si despejamos *a* de la primera y sustituimos su valor en la segunda, resulta

$$a=S-b \text{ y } S-b=bQ$$

que es igual a

$$S = bQ + b = b(Q+1)$$

luego

$$b = \frac{S}{(Q+1)}$$

Si tenemos en cuenta que $a = S - b = S - \dfrac{S}{(Q+1)}$ y desarrollamos, obtenemos

$$a = S - \frac{S}{Q+1} = \frac{SQ+S-S}{Q+1} = \frac{SQ}{Q+1}$$

de donde

$$a = \frac{SQ}{Q+1} \; y \; b = \frac{S}{Q+1}$$

Para $x + y = 37$ y $x / y = 13$

$$a = \frac{37 \cdot 13}{13+1} = \frac{481}{14} \; y \; b = \frac{37}{13+1} = \frac{37}{14} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{481}{14} + \dfrac{37}{14} = 37 = S \\ \left(\dfrac{481}{14}\right) / \left(\dfrac{37}{14}\right) = 13 = Q \end{cases}$$

2.3 Fracciones unitarias.

Los hombres de la Edad de Piedra no tenían necesidad de usar fracciones, pero al alcanzar un nivel cultural más avanzado durante la Edad de Bronce, parece haber aparecido por primera vez la necesidad de un concepto más o menos vago de fracción y de un sistema de notación capaz de representar fracciones.
Nuestros conocimientos sobre las matemáticas del Egipto Antiguo están basados principalmente en dos papiros de carácter matemático y en algunos fragmentos pequeños. Uno de de los grandes papiros se denomina el Papiro de Rhind, por el nombre del científico que lo adquirió en 1858 o Papiro de Ahmes en honor al escriba que los copió hacia el año 1650 a.C. Este escriba nos cuenta que el material se deriva de un prototipo del Imperio Medio, de entre el 2000 y el 1800 a.C., y es posible que parte de estos conocimientos provengan, en realidad, de Imhotet, arquitecto y médico del faraón Zoser de la III Dinastía (2800?-2600? a.C.), que dirigió la construcción de su pirámide hacia año 2700 a.C. Este papiro contiene una colección de 84 problemas de carácter aplicado. El otro papiro importante es el llamado Papiro Golenischev o de Moscú, que fue comprado en Egipto el año 1893. El Papiro de Moscú, que es más pequeño que el de Ahmes, contiene 25 problemas y fue copiado, sobre el año 1890 a.C., por un escriba desconocido de la dinastía XII. La presentación de las soluciones es muy parecida a la del Papiro de Ahmes. De menor entidad, existe un rollo de papiro que data de la dinastía XII, hacia 2000 a.C., que se denomina Papiro de Kahun, y que contiene problemas parecidos a los del Papiro de Ahmes; el Papiro de Berlín del mismo periodo; dos tablillas de madera de Akhmim (El Cairo) hacia el año 2000 a.C. y, un rollo de piel que contiene una lista de fracciones unitarias y que data del periodo final de los hicsos, un pueblo originario de Siria, que invadió Egipto en

el siglo XVIII a. C. Sus reyes pertenecieron a las dinastías XV y XVI, desde 1700 a 1580 a. C., en que fueron expulsados.
Todas estas obras basan la solución de los problemas que plantean utilizando fracciones que son inversos de los números que conforman la estructura y determinan su solución..
El problema número 24 del Papiro de Ahmes plantea que *"Una cantidad más su séptima parte es 19"*. La solución actual sería

$$x+\frac{x}{7}=19, \quad 7x+x=133, \quad 8x=133, \quad x=\frac{133}{8}$$

como podemos comprobar,

$$x+\frac{x}{7}=19=\frac{133}{8}+\frac{133/8}{7}=\frac{133}{8}+\frac{19}{8}=\frac{152}{8}=19$$

Ahmes lo plantea de otra forma. Considera que si $19=7+12$ la solución puede establecerse tomando los inversos de 7 y 12, esto es $\frac{1}{7}+\frac{1}{12}=\frac{12+7}{7\cdot 12}=\frac{19}{84}$. Podemos comprobar que $\frac{84}{7}+\frac{84}{12}=19$. Estas soluciones están relacionadas muy estrechamente con el número racional, así $\frac{1}{7}+\frac{1}{12}=\frac{n}{n+1}$ de donde $n=\frac{19}{65}$ y el número buscado es $19+65=84$. Esto nos lleva a plantear una solución literal actualizada donde

Para dos inversos: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{n+1}, \quad \Rightarrow n=\frac{a+b}{ab-(a+b)}$

Para tres inversos: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{n}{n+1}, \quad \Rightarrow n=\frac{ab+ac+bc}{abc-(ab+ac+bc)}$

En su obra *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, edición 1941, el profesor James Joseph Tattersall de la United States Military Academy at West Point, llama a este tipo de ecuaciones *ecuaciones elefantinas*, en atención a los matemáticos indios que las utilizaron, como Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-665) o Bhaskara (1114-1185), entre otros.

2.4 Los números complejos.

En su obra *Ars Magna*, *Girolamo Cardano* $(1501-1576)$ plantea el siguiente problema:
Si nos dicen: divide 10 en dos partes tales que el producto de ambas sea 30 ó 40, es obvio que este caso es imposible. No obstante trabajaremos así: Dividimos 10 en dos partes iguales, haciendo cada una igual a cinco. Lo elevamos al cuadrado teniendo 25. Restamos 40 dejando un resto de -15, cuya raíz cuadrada sumada y restada de 5 produce dos partes cuyo producto es 40. Estas serán $5+\sqrt{-15}$ *y* $5-\sqrt{-15}$.
Sigue una demostración de veracidad de esta afirmación, que consiste en multiplicar las dos partes y comprobar que se obtiene $25-\left(\sqrt{-15}\right)^2=25-(-15)=40$. Y añade, *Esto es verdaderamente sofisticado* $[\cdots]$ *y como hemos dicho, tan refinado como inútil.* Habían nacido los *números imaginarios* para representar las raíces de los números negativos en la solución de las ecuaciones de segundo y tercer grado mediante el símbolo $\sqrt{-n}$, siendo *n* un número positivo cualquiera. En su obra *Algebra*, Rafael Bombelli (1530 -1573) fue el primero en establecer las reglas de los números imaginarios al plantear la solución de la raíz cúbica con raíces de números negativos. Dice que había tenido "*una idea loca*" puesto que todo el proceso "*parecía basarse en un sofisma*". En un manuscrito fechado en 1777, Euler (1707 – 1783) utiliza el

símbolo i para representar $\sqrt{-1}$. Dicho documento no se publicó hasta 1794, por lo que el símbolo fue adoptado por Gauss (1777 -1855) en su obra *Disquisiciones Aritméticas.* Basándose en los trabajos de Wessel (1745 -1818) y Argand (1768 -1822) sobre la interpretación geométrica de los números imaginarios, Gauss continuó estudiando esta interpretación e introdujo la expresión de *número complejo* y demostró que puede escribirse mediante la expresión $a + bi$, siendo a y b dos números reales e i el símbolo de *Euler.* En 1835 el matemático irlandés Hamilton (1805 -1865) estableció la teoría completa de los números complejos, cuya única modificación posterior ha sido su traducción al lenguaje de la teoría de conjuntos.
Después de una aproximación al origen de los números complejos, podemos considerar dicho número como una expresión de la forma $a + bi$, donde *a y b* son números reales, e i, denominada la unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Si $z = a + bi$, *a* se llama la parte real de *z* y *b* la parte imaginaria de z y se denominan $Re(z)$ y $Im(z)$, respectivamente. El símbolo z, que puede representar cualquier elemento del conjunto de números complejos, es llamado una variable compleja. El conjugado de un número complejo $a + bi$ es $a - bi$ y se representa como $\bar{z}$. El valor absoluto o módulo de un número complejo es $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2.5 Operaciones con números complejos.

Las operaciones con los números complejos son análogas a la de los números reales, simplemente teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ por tanto, dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$, se definen las siguientes operaciones:

Suma: $(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i = (5+3i)+(3+2i) = 8+5i$

Resta: $(a+bi)-(c+di) = a-c+(b-d)i = (5+3i)-(3+2i) = 2+i$

Producto: $(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c - bd + (ad+bc)i = (5+3i)\cdot(3+2i) = 9+19i$

Cociente: $\dfrac{(a+bi)}{(c+di)} = \dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i = \dfrac{(5+3i)}{(3+2i)} = \dfrac{21-i}{13}$

Inverso: $(a+bi)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \left(\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)i = (5+3i)^{-1} = \dfrac{5}{34} - \dfrac{3}{34}i$

Cuadrado: $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = (5+3i)^2 = 16+30i$

Cubo: $(a+bi)^3 = a(a^2-3b^2)+(3a^2-b^2)bi = (5+3i)^3 = -10+198i$

Raíz cuadrada: $(a \pm bi)^{1/2} = \dfrac{\left(\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a}\right)}{2} \pm \dfrac{\left(\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)i}{2}$

Otras operaciones de gran interés en la teoría de los números son:

$$N(a,b) = (a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2 = \pm 1.$$

Es la $norma$ de un número algebraico o la ecuación Pell, que es en definitiva, un conjugado. Por ejemplo:

$$(33+8\sqrt{17})(33-8\sqrt{17})=33^2-17\cdot 8^2=1$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})+(a-b\sqrt{D})}{2}=a=\frac{(33+8\sqrt{17})+(33-8\sqrt{17})}{2}=33$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})-(a-b\sqrt{D})}{2\sqrt{D}}=b=\frac{(33+8\sqrt{17})-(33-8\sqrt{17})}{2\sqrt{17}}=8$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})^2+(a-b\sqrt{D})^2}{2}=a^2+b^2D=\frac{(33+8\sqrt{17})^2+(33-8\sqrt{17})^2}{2}=2177$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})^2-(a-b\sqrt{D})^2}{2\sqrt{D}}=2ab=\frac{(33+8\sqrt{17})^2-(33-8\sqrt{17})^2}{2\sqrt{17}}=528$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})^3+(a-b\sqrt{D})^3}{2}=a(a^2+3b^2D)=\frac{(33+8\sqrt{17})^3+(33-8\sqrt{17})^3}{2}=143649$$

$$\frac{(a+b\sqrt{D})^3-(a-b\sqrt{D})^3}{2\sqrt{D}}=b(3a^2+b^2D)=\frac{(33+8\sqrt{17})^3-(33-8\sqrt{17})^3}{2\sqrt{17}}=38840$$

En definitiva, para la ecuación Pell, las soluciones son

$$x=\frac{(a+b\sqrt{D})^n+(a-b\sqrt{D})^n}{2},\quad y=\frac{(a+b\sqrt{D})^n-(a-b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

1. 3. *De Pitágoras a Diofanto.*

3.1 La ecuación $x^2+y^2=z^2$.

En 1945 Neugebauer y Sachs publicaron su desciframiento de una tablilla de arcilla, la número 322 de la colección de G.A. Plimpton en la Universidad de Colombia, fabricada en una época comprendida entre los años 1800 y 1650 a.C. Después de varios años de ardua labor, encontraron la clave. Se trata de $ternas\ pitagóricas$, es decir, C representa la hipotenusa y $A\ y\ B$ representan los catetos de un triangulo rectángulo. Así, si se forman los cuadrados del número de la columna C se restan los cuadrados correspondientes de los números en B, obtenemos el cuadrado de los números en A:

	A	B	C		A	B	C		A	B	C
1	*120*	*119*	*169*	**6**	*360*	*319*	*481*	**11**	*60*	*45*	*75*
2	*3456*	*3367*	*4825*	**7**	*2700*	*2291*	*3541*	**12**	*2400*	*1679*	*2929*
3	*4800*	*4601*	*6649*	**8**	*960*	*799*	*1249*	**13**	*240*	*161*	*289*
4	*13500*	*12709*	*18541*	**9**	*600*	*481*	*769*	**14**	*2700*	*1771*	*3229*
5	*72*	*65*	*97*	**10**	*6480*	*4961*	*8161*	**15**	*90*	*56*	*106*

No es probable que los valores escritos en la tablilla se dedujeran utilizando métodos de ensayo de error, pues este procedimiento hubiera dado ternas más sencillas. Existen dos hipótesis plausibles de cómo los babilonios llegaron a la confección de la tabla. Según Neugebauer y Sachs, fue por el conocimiento que tenían de las relaciones generadoras

$$a = mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

donde m y n son enteros primos entre sí, $m > n$. La otra hipótesis considera que tomando las fórmulas siguientes

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}\left[p - \frac{1}{p}\right], \quad c = \frac{1}{2}\left[p + \frac{1}{p}\right]$$

que determinaron utilizando tablas de inversos y después llevaron a números enteros.
Pero en la tablilla Plimpton 322 la columna *A* tiene otros números fraccionarios que, según el desciframiento de Neugebauer y Sachs, representan el producto de $C^2 \cdot A^{-2}$, lo que muestra mayor sagacidad, tanto de los descifradores, como de los babilonios de hace 4000 años.
Supongamos que la ecuación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$ se normaliza dividiéndola por a^2.
Si hacemos

$$u = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \text{ y } v = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

entonces la relación pitagórica se expresa por $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v) = 1$.
Si $u + v = \frac{m}{n}$ y $u - v = \frac{n}{m}$, donde m y n son enteros y $m > n$, entonces

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right] \;\; y \;\; v = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right]$$

o bien

$$u = \frac{m^2 + n^2}{2mn} \;\; y \;\; v = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$$

Si hacemos que $a = 2mn$ y sabiendo que $b = va$ y $c = uv$ obtenemos la fórmula generadora de las ternas pitagóricas:

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

Este método de generar ternas pitagóricas es el utilizado por Diofanto de Alejandría.
La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es la más antigua e importante que se conoce. Al parecer, y según testimonios de Diógenes Laercio (s.III a.C.), Plutarco(46-119) ó Proclo (410-485), éste filósofo y neoplatónico que dirigió la escuela de Atenas durante 30 años, fue conocida por Tales de Mileto (624-546) allá por el año 600 a.C., en uno de sus viajes a Egipto donde, los monjes de Menfis le hicieron entrega de una cuerda de doce nudos con la que, tomando con una mano los dos extremos y con la otra el nudo número tres, se formaba una figura triangular en donde quedaban tres y cuatro nudos en los dos catetos y cinco para la hipotenusa, de tal forma que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Según algunas fuentes, otras por el contrario las desmienten, Tales de Mileto se habría encargado durante algún tiempo de la educación de Pitágoras, ya que sus familias eran oriundas de Fenicia, por lo que es posible que le hablara de dicha cuerda y de sus posibilidades. Pitágoras realizó varios viajes a Egipto, asumiendo todos los conocimientos que los egipcios tenían de los números y que divulgó a su regreso a Occidente. Entre estos conocimientos

estaba la famosa ecuación que, a partir de entonces ha sido conocida como el *Teorema de Pitágoras*. La traducción de la tablilla Plimpton 322 vino a confirmar que los egipcios también conocieron la forma de crear ternas pitagóricas a partir del 2, 3 y 5, factores primos de 60.
Para los egipcios, según el Papiro encontrado en Kahun hacia el año 2000 a.C. *su triangulo egipcio* tenía

$$1^2 + (3/4)^2 = (1 + 1/4)^2$$

como expresión proporcional a 2, 3 y 5. La formula atribuida a Pitágoras era

$$x = 2n + 1,\ \ y = 2n^2 + 2n \ \text{ y } \ z = 2n^2 + 2n + 1,$$

que para $n = 1, 2, 3, 4$ enteros, sus ternas $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$ y $(9,41,42)$ generaban infinitas soluciones.

3.2 Pitágoras y la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Pitágoras afronta la solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ utilizando las siguientes igualdades:

$$x = a,\ y = \frac{a^2 - 1}{2},\ z = \frac{a^2 + 1}{2}.$$

Considera el caso particular de que si $x^2 + y^2 = 1$, es decir, el caso de un triangulo cuya hipotenusa es igual a la unidad de longitud, entonces los catetos son fracciones propias.
De $x^2 + y^2 = 1$ tenemos $y = \sqrt{1 - x^2}$. Introducimos la notación $\sqrt{1 - x^2} = 1 - xt$, donde t es un número racional, es decir, un número que no tiene raíces.

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= (1 - xt)^2 \\ 1 - x^2 &= t^2x^2 - 2tx + 1 \\ (1 + t^2)x^2 &= 2tx \\ (1 + t^2)x &= 2t \end{aligned}$$

Resulta para $x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ y para

$$y = 1 - tx = 1 - \frac{2t^2}{t^2 + 1} = \frac{2t^2 - t^2 + 1}{t^2 + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}.$$

Si t es un número racional, entonces x también es racional. De este modo, las raíces racionales de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, son

$$x = \frac{2t}{1 + t^2} \ \text{ e } \ y = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}.$$

Conociendo la solución de la ecuación $x^2+y^2=1$, se puede obtener la solución dada por los babilonios para $x^2+y^2=z^2$.

Supongamos que a, b, c son números naturales y que $a^2+b^2=c^2$. Si $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, entonces $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ es una solución de la ecuación $x^2+y^2=1$. Si t es una fracción irreducible, digamos $t=\frac{m}{n}$, donde $m>n$, entonces

$$\frac{a}{b}=\frac{2t}{t^2+1}=\frac{2\left(\frac{m}{n}\right)}{\frac{m^2}{n^2}+1}=\frac{2mn}{m^2+n^2} \text{ y } \frac{b}{c}=\frac{1-t^2}{t^2+1}=\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{\frac{m^2}{n^2}+1}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

Puesto que $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, tenemos

$$\frac{(2mn)^2}{(n^2+m^2)^2}=\frac{(n^2-m^2)^2}{(n^2+m^2)^2}=1 \text{ y}$$

$$(2mn)^2+(n^2-m^2)^2=(n^2+m^2)^2$$

es decir, para la ecuación $x^2+y^2=z^2$ obtenemos como solución

$$x=2mn, \quad y=n^2-m^2, \quad z=n^2+m^2.$$

Este desarrollo se le atribuye a Euclides de Alejandría (324-265).

3.3 Otras soluciones a la ecuación $x^2+y^2=z^2$.

Durante generaciones los pitagóricos buscaron ávidamente el camino para obtener ternas de números x, y, z que cumplieran $x^2+y^2=z^2$.
Los pitagóricos aportaron la formula

$$x=n(a^2-b^2), \; y=n(2ab), \; z=n(a^2+b^2),$$

donde n debe ser entero y $a>b$.
Otra de las formulas atribuida a los pitagóricos es

$$x=m, \; y=1/2\left(m^2-1\right) \text{ y } z=1/2\left(m^2+1\right),$$

para m impar.

Los hindúes confeccionaron, a partir de la terna *3, 4 y 5*, unos manuales que llamaron *shulvasutra* y que se conoce como el *triangulo indio*. Las ternas pitagóricas generadas tienen la particularidad de que $z-y=1,2,3$. Las shulvasutras han sido fechadas por algunos historiadores de una manera muy variada dentro de un intervalo de casi dos mil años, que se extiende desde el siglo VIII a.C. al siglo II de nuestra era.
Algunas de las ternas se recogen en la siguiente tabla:

$z-y=1$			$z-y=2$			$z-y=3$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z
5	12	13	4	3	5	9	12	15
7	24	25	6	8	10	15	36	39
9	40	41	8	15	17	21	72	75
11	60	61	10	24	26	27	120	123

A finales del siglo IV a.C., Platón (428-347), ferviente seguidor de la filosofía de Pitágoras, encontró una ley tal que

$$x=2m,\ \ y=(m^2-1)\ \text{y}\ z=(m^2+1)$$

con las que se conseguían ternas pitagóricas. Se cuenta que en la fachada de la *Academia* había una inscripción que rezaba: "*No entre nadie ignorante en geometría*".
Los chinos Liu Hui (aprox.263), Zu Chongzhi (429-501) y Wang Xiaotong (aprox.625), entre otros, aportaron

$$x=ab,\ \ y=1/2\left(a^2-b^2\right)\ \text{y}\ z=1/2\left(a^2+b^2\right),$$

que permitía calcular ternas pitagóricas. Zu Chongzhi calculó π como $\frac{355}{113}$ por considerar que el valor dado por Arquímedes de $\frac{22}{7}$ era "inexacto"
Euclides de Alejandría (324-265), en la proposición 47 del libro primero de sus Elementos, dice, *"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto."* Sigue una demostración geométrica de lo que es la ecuación $x^2+y^2=z^2$.
A lo largo de la historia han sido famosas las demostraciones de Pappus (hacia 300 a.C.), Thabit Inb Qurra (826-901), Bhaskara (1114-1185), Leonardo da Vinci (1452-1519), Vieta (1540-1603), Fermat (1601-1665), Euler (1707-1783), Garfield (hacia 1879) y muchos más.

3.4 Diofanto y la ecuación $x^2+y^2=z^2$.

Diofanto de Alejandría (sobre 250 d.C.), fue un antiguo matemático griego al que se le considera, junto con el árabe Mohammet ibn Mose Al-Khwarizmi (780 -835), los padres del álgebra.
Nacido en Alejandría, nada se conoce con seguridad sobre su vida salvo la edad a la que falleció, gracias a este epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega: "*Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.*" Planteado en forma de ecuación $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, resulta para $x=84$ años.
Este matemático alejandrino debe su renombre a su *Arithmética*, obra que constaba de trece libros de los que sólo se han hallado seis. Los libros faltantes parece que se perdieron tempranamente ya que no hay razones para suponer que los traductores y comentaristas árabes dispusieran de otros manuscritos además de los que aún se conservan. En esta obra realiza sus estudios de ecuaciones con variables que tienen un valor racional, ecuaciones diofánticas, aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas. En 1621 vio la luz una edición comentada de *Bachet de Meziriac*$(1587-1638)$, edición reimpresa con posterioridad en 1670 por el hijo de Pierre Fermat incluyendo los comentarios que el célebre ma-

temático francés había realizado en los márgenes de un ejemplar de la edición de $Bachet$ que poseía. En una de dichas anotaciones se exponía, sin demostración, *el último teorema de Fermat*.

Don Rafael Rodríguez Vidal, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, en su libro *Enjambre Matemático* dice, refiriéndose a la obra de Diofanto, *es un libro de difícil lectura y entendimiento pero*, sigue siendo la fuente donde todo el que disfrute de los números le gustaría beber.

La solución a la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, Diofanto la plantea desde varios ángulos. Veamos:

"Dividir el número a en dos cuadrados perfectos. Sea x^2 uno de los cuadrados y $a - x^2$ el otro. Tomemos un cuadrado de la forma $(mx - r)^2$, donde m es un entero cualquiera y r la raíz de x. Igualando ambos lados, resulta $(mx - r)^2 = a - x^2$."

Ejemplo. Supongamos que x^2 es el primer cuadrado y $25 - x^2$ el segundo. Tomemos un cuadrado de la forma $(4x - 5)^2$ donde $m = 4$, un entero cualquiera, y $r = 5$, la raíz de 25.

Despejando x de la ecuación $(4x - 5)^2 = 25 - x^2$, resulta $x = \frac{40}{17}$. Como $5^2 - \left(\frac{40}{17}\right)^2 = \left(\frac{75}{17}\right)^2$, tenemos una terna de $\left(\frac{40}{17}\right)^2 + \left(\frac{75}{17}\right)^2 = 5^2$.

Si $(6x - 7)^2 = 49 - x^2$, resultaría para $x = \frac{84}{37}$, y una terna de $\left(\frac{84}{37}\right)^2 + \left(\frac{245}{37}\right)^2 = 7^2$.

En el problema número 8 del libro II de su $Arithmética$, Diofanto plantea

"Dividir un número cuadrado dado en dos cuadrados. Número cuadrado dado el 16. Diofanto plantea la solución como:"

x^2 es uno de los cuadrados buscados, por lo tanto, $16 - x^2$ debe ser igual a un cuadrado. Tomemos un cuadrado de la forma $(mx - 4)^2$, siendo *m* cualquier entero y 4 el número que es la raíz cuadrada de 16; tomemos $(2x - 4)^2$, e igualemos con $16 - x^2$, por tanto $4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, o $5x^2 = 16x$, y $x = \frac{16}{5}$.

Como $4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{144}{25}\right) = \left(\frac{12}{5}\right)^2$, la terna generada resulta $\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 4^2$.

Referente a este problema, $Bachet$ comenta su identificación de la equivalencia entre $16 - a^2$ y $(ma - 4)^2$ y asegura que para $m \neq 1$, resulta $a = \frac{8m}{m^2+1}$ el lado del primer cuadrado y para el segundo $|ma - 4| = \frac{4|m^2-1|}{m^2+1}$, que puede ser cero. En general $x^2 = n^2a^2$ es equivalente a $16 - n^2a^2 \equiv (ma - 4)^2$ con $m \neq n$ arbitrarios, resulta $a = \frac{8m}{m^2+n^2}$ y en el lado del segundo cuadrado $y = \frac{4|m^2-n^2|}{m^2+n^2}$. En resumen, la solución que plantea

$$x = \frac{a(2mn)}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{a(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2} \quad con \quad a > 0 \quad y \quad m \neq n$$

Para $a = \frac{8m}{m^2+1} = \frac{8\cdot 2}{2^2+1} = \frac{16}{5}$, $x = \frac{16/5(2\cdot 2\cdot 4)}{2^2 + 4^2} = \left(\frac{64}{25}\right)^2$, $y = \frac{16/5(2^2 - 4^2)}{2^2 + 4^2} = \left(\frac{48}{25}\right)^2$

De donde, la terna resulta

$$\left(\frac{64}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2.$$

"Dividir un número cuadrado dado en dos partes tales que, si a una parte se suma m y a la otra n, resultan dos cuadrados cuya diferencia es el número dado. Número dado z^2. "

Sea $(a+m)^2-(a+n)^2=z^2$ donde

$$a=\frac{z^2-(m+n)(m-n)}{2(m-n)}$$

Sea 11^2 el número dado, $m=7$ y $n=3$. Como $a=\frac{11^2-(7+3)(7-3)}{2(7-3)}=\frac{81}{8}$, resulta $(81/8+7)^2=(137/8)^2$, $(81/8+3)^2=(105/8)^2$ y por tanto, la terna pitagórica,

$$\left(\frac{105}{8}\right)^2+11^2=\left(\frac{137}{8}\right)^2$$

Leonardo de Pisa (1170 − 1240), más conocido como *Fibonacci*, en su obra *Liber Quadratorum*, estudia una serie de cuestiones entre las que se encuentran las propiedades de los números de la forma $4mn(m^2-n^2)$, con m,n naturales y que le sirvió para plantear la solución de la ecuación $x^2+y^2=z^2$ como

$$x=(m^2+n^2)^2,\ \ y=4mn(m^2-n^2),\ \ z=(m^2-n^2\pm n^2)^2$$

de donde

$$(m^2+n^2)^2\pm(4mn(m^2-n^2))=(m^2-n^2\pm 2mn)^2$$

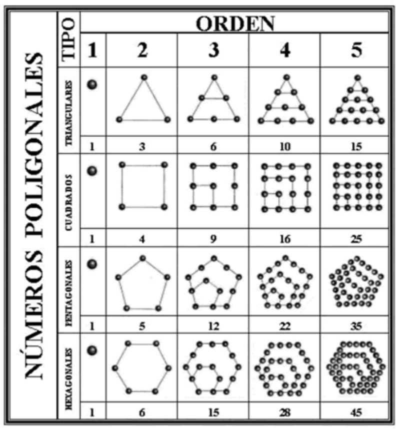
Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x=(10^2+6^2)=136^2=18496 \\ y=4\cdot 10\cdot 6(10^2-6^2)\ =15360 \end{array}\right\}=33856=184^2$$
$$z=((10^2-6^2)+2\cdot 10\cdot 6)^2=184^2$$

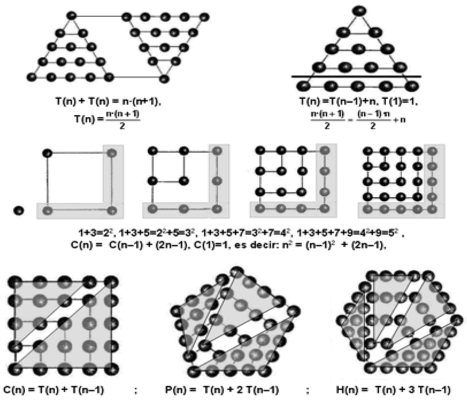
1. 4. *Números figurados.*

4.1 Números poligonales.

En su obra Pitágoras El Filósofo del Número, el profesor Pedro Miguel González Urbaneja, nos cuenta que los pitagóricos solían representar los números mediante puntos en un pergamino o piedrecillas en la arena y los clasificaban según las formas poligonales de estas distribuciones de puntos, es decir, asociaban los números a figuras geométricas obtenidas por la disposición regular de puntos, cuya suma determina el número representado. Así obtenían los diversos tipos de números poligonales o figurados:



***Los número triangulares*: 1, 3, 6, 10, 15, . . .**
***Los número cuadrados*: 1, 4, 9, 16, 25, . ..**
***Los números pentagonales*: 1, 5, 12, 22, 35, .**



Los números poligonales aparecieron en los albores de la Escuela Pitagórica como un elemento esencial de su misticismo numérico: «no sólo las cosas son en esencia números sino que los números son concebidos como cosas», de modo que las expresiones «números triangulares» o «números cuadrados» no son meras metáforas sino que esos números son, efectivamente, ante el espíritu y ante los ojos, triángulos y cuadrados.

La asociación del número con la imagen geométrica permitió a los pitagóricos la representación visual de los números combinando las dos esencias con que tiene que ver la Matemática: el número y la forma, confiriendo a los números propiedades y relaciones entre ellos que son completamente independientes de todo simbolismo introducido para representarlos, otorgándoles de este modo un carácter universal e inmutable.

La consideración de los números poligonales y su representación geométrico-visual permitía, por una parte, constatar que ciertos números tienen características diferentes que otros a tenor de las diferentes configuraciones geométricas a que dan lugar, y por otra, el descubrimiento de forma geométrico-empírica, casi corpórea, de importantes propiedades de los números y la obtención de interesantes relaciones entre ellos. La poli figuración numérica llevaba a extender conceptos de la Aritmética como generalización de la experiencia práctica, desarrollando un atomismo numérico bellamente ilustrado en una geometría de números figurados. Éstos, que son las primeras y las más simples estructuras de la Geometría numérica están en el corazón de las Matemáticas y constituyen la matriz del desarrollo ulterior de la Teoría de los Números.

A partir de las distribuciones geométricas de puntos que hicieron los pitagóricos con los números poligonales, aparecían, como evidencia empírico–visual, numerosas propiedades de los números enteros, al considerar la relación entre órdenes consecutivos de números de un determinado tipo y relaciones entre números poligonales de tipos diferentes. Así por ejemplo, si llamamos $T(n), C(n), P(n), H(n)$ al n-ésimo número triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal, respectivamente, los esquemas gráficos nos proporcionan importantes propiedades aritméticas de los números enteros:

Los números poligonales han sido uno de los tópicos más atractivos de la Historia de la Aritmética tratado por matemáticos de la talla de Nicómaco de Gerasa, Diofanto de Alejandría, Mersenne, Euler, Gauss, Lagrange, Legendre y Cauchy. Forman parte de las raíces históricas de la Teoría de Números, apareciendo en numerosos ámbitos como por ejemplo en el Triángulo de Pascal. Juegan un importante papel en el Análisis Combinatorio, intervienen en el Binomio de Newton y en el Cálculo de Probabilidades y fueron ampliamente utilizados por Fermat, Pascal, Wallis y Roberval para la obtención de sus resultados sobre cuadraturas. En la actualidad el estudio de los números poligonales ha alcanzado un valor práctico en una incipiente aplicación criptográfica a la seguridad en las comunicaciones, de modo que, como en otros muchos otros aspectos, Pitágoras se sitúa en el umbral del pensamiento matemático.

La formación de los números figurados se lleva a cabo mediante las siguientes fórmulas:

$$\textit{Triangular}:\ \frac{n(n+1)}{2} = 1,3,6,10,15,21,28,36,45,\cdots$$

$$\textit{Cuadrado}:\ \mathrm{n}^2 = 1,4,9,16,25,36,49,64,81,\cdots$$

$$\textit{Pentagonal}:\ \frac{n(3n-1)}{2} = 1,5,12,22,35,51,70,92,117,\cdots$$

$$\textit{Hexagonal}:\ \mathrm{n(2n\text{-}1)} = 1,6,15,28,45,66,91,120,153,\cdots$$

$$\textit{Heptagonal}:\ \frac{n(5n-3)}{2} = 1,7,18,34,55,81,112,148,189,\cdots$$

Octagonal: $\text{n(3n-2)} = 1,8,21,40,65,96,133,176,225,\cdots$

Nonagonal: $\dfrac{n(7n-5)}{2} = 1,9,24,46,75,111,154,204,261,\cdots$

Decagonal: $\text{n(4n-3)} = 1,10,27,52,85,126,175,232,297,\cdots$

En la teoría analítica de los números, los números figurados tienen un importante papel a jugar, dada su relación con la función Zeta de Bernhard Riemann (1826-1866). Esta función que se denota como ζ, es de variable compleja y definida como $\zeta(s) = \sum_{n\geqq 1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Para probar la relación de los números figurados con la función *zeta*, operamos con las siguientes igualdades:

$$\textit{Triangular}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)/2}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)+\zeta(s-2)}{2}$$

$$\textit{Cuadrado}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^s} = \zeta(s-2)$$

$$\textit{Pentagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3n-1)/2}{n^s} = \frac{3\zeta(s-2)-\zeta(s-1)}{2}$$

$$\textit{Hexagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n-1)}{n^s} = 2\zeta(s-2)-\zeta(s-1)$$

$$\textit{Heptagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(5n-3)/2}{n^s} = \frac{5\zeta(s-2)-3\zeta(s-1)}{2}$$

$$\textit{Octagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3n-2)}{n^s} = 3\zeta(s-2)-2\zeta(s-1)$$

$$\textit{Nonagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(7n-5)/2}{n^s} = \frac{7\zeta(s-2)-5\zeta(s-1)}{2}$$

$$\textit{Decagonal}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n-3)}{n^s} = 4\zeta(s-2)-3\zeta(s-1)$$

Este tema sera tratado en capítulos posteriores, cuando tengamos un concepto más claro de los números.
Damos a continuación la tabla de los diez primeros números poligonales:

NÚMEROS POLIGONALES										
NÚMERO	***1º***	***2º***	***3º***	***4º***	***5º***	***6º***	***7º***	***8º***	***9º***	***10º***
Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octagonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

1. 5. *Sistemas de Numeración.*

Un *sistema de numeración* es el conjunto de reglas y convenios mediante los cuales pueden representarse todas las cantidades utilizando signos diversos. Sistemas conocidos son, entre otros, el romano y el decimal. El sistema decimal emplea el principio del valor relativo de cada cifra dentro de una cantidad: una cifra representa uno u otro valor según el lugar que ocupe.

El sistema decimal fue ideado en la India y traído a Europa por los árabes en la Edad Media. Recibe el nombre de decimal por estar fundamentado en el número *diez*, es el más utilizado en la vida cotidiana. Sistemas más modernos deben su importancia y utilización a la aparición de la computadora. En particular los ordenadores utilizan notación binaria para realizar cálculos aritméticos y octal o hexadecimal para expresar caracteres o dígitos.
Sean *m* y *b* dos números naturales. Recibe el nombre de sistema de representación posicional del número *m* en base *b*, la sucesión de símbolos $d_n.d_{n-1},d_{n-2},....,d_1,d_o$, tales que $0 \leqq d < b$, y de forma que sea

$$m = d_n \cdot b^n + d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + ... + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0.$$

El número *b* recibe los nombres de **base**, **raíz** o **módulo**.
La base *b* puede ser cualquier número, sin embargo, los principales son,

Sistema	b	Notación
Decimal	*10*	***0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9***
Binario	*2*	***0, 1***
Octal	*8*	***0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8***
Hexadecimal	*16*	***0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.***

5.1. SISTEMA DECIMAL

El sistema decimal de base *10* emplea *10* caracteres o dígitos diferentes para indicar una determinada cantidad 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Esto es así debido al hecho de que los humanos tienen diez dedos. El valor de cada símbolo depende de su posición dentro de la cantidad a la que pertenece. La presentación general de cualquier número se representa como

$$d = \overline{d_n ... d_1 d_0, d_{-1} ... d_{-k}} = d_n \cdot 10^n + ... + d_1 \cdot 10 + d_0 + d_{-1} \cdot 10^{-1} + ... + d_{-k} \cdot 10^{-k} = \sum_{i=-k}^{n} d_i \cdot 10^i$$

Las cifras a la izquierda de la coma decimal representadas por d_0, d_1 y d_2 etcétera toman el valor correspondiente a las potencias positivas de la base b (en decimal, 10) en función de la posición que ocupan en el número y representan respectivamente la cifra de las unidades (10^0=1), las decenas (10^1=10), las centenas (10^2=100), etc., ya que como se indica, están colocadas en las posiciones primera, segunda, tercera y siguientes, a la izquierda de la coma. Las cifras a la derecha de la coma decimal d_{-1} y d_{-2} representan, respectivamente, a la cifra de las décimas (10^{-1}=0,1), las centésimas (10^{-2}=0,01), etc. El valor total del número será la suma de cada cifra multiplicada por la potencia de la base que representa.
Veamos la representación de 2.579,426 en base decimal 10.

$$2579{,}426_{10} = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0, 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

5.2. SISTEMA BINARIO

Es el sistema digital por excelencia, aunque no el único, debido a su sencillez. Su base es 2 y emplea 2 caracteres: 0 y 1. Estos valores reciben el nombre de bits (dígitos binarios). Así, podemos decir que la cantidad 10011 está formada por 5 bits. Veamos con un ejemplo como se representa este número teniendo en cuenta que el resultado de la expresión polinómica dará su equivalente en el sistema decimal:

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 19_{10}$$

5.3. SISTEMA OCTAL

Posee ocho símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Su base es *8.* Este sistema tiene una peculiaridad que lo hace muy interesante y es que la conversión al sistema binario resulta muy sencilla ya que, $8 = 2^3$.

$$2237_8 = 2\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2 + 3\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 1183_{10}$$

5.4. SISTEMA HEXADECIMAL.

Está compuesto por 16 símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$. Su base es *16*. Es uno de los sistemas más utilizados en electrónica, ya que además de simplificar la escritura de los números binarios, todos los números del sistema se pueden expresar en cuatro bits binarios al ser $16 = 2^4$, lo que permite una conversión sencilla entre números hexadecimales y números binarios.

$$2A93D_{16} = 2\cdot 16^4 + 10\cdot 16^3 + 9\cdot 16^2 + 3\cdot 16^1 + 13\cdot 16^0 = 174397_{10}$$

5.5. CONVERSIONES:

5.5.1. CONVERSIÓN ENTRE BINARIO Y DECIMAL

Si la conversión es de binario a decimal, aplicaremos la siguiente regla:
Se toma la cantidad binaria y se suman las potencias de 2 correspondientes a las posiciones de todos sus dígitos cuyo valor sea 1. Veamos dos ejemplos:

$$11011_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 27_{10}$$

$$111011_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 59_{10}$$

Si la conversión es de decimal a binario, aplicaremos la siguiente regla:
Se toma la cantidad decimal dada y se divide sucesivamente entre *2*. Los restos obtenidos en cada división $(0, 1)$, forman la cantidad binaria pedida, leída desde el último cociente al primer resto.

N	b	q	r
27	*2*	*13*	**1**
13	*2*	*6*	**1**
6	*2*	*3*	**0**
3	*2*	*1*	**1**
1	*2*	*1*	**1**

N	b	q	r
59	*2*	*29*	**1**
29	*2*	*14*	**1**
14	*2*	*7*	**0**
7	*2*	*3*	**1**
3	*2*	*2*	**1**
2	*2*	*0*	**1**

En la conversión de base podemos describir un algoritmo para obtener la expresión en base a *b* de un entero **N**. Primero, se divide **N** por *b* para obtener el cociente *q* y el resto *r*, esto es, $N = bq_0 + r_o$, $0 \leqq r_o < b$. El resto r_o, es el dígito situado más a la derecha en la expresión de en base *b* de *N*. Luego, se divide q_0 por b para obtener $q_0 = bq_1 + r_1$, $0 \leqq r_1 < b$. Vemos que r_1 es el segundo dígito por la derecha de la expresión de *N* en base *b*. Este proceso continúa dividiendo sucesivamente el cociente por *b*, obteniendo como restos los dígitos de la representación en base *b*, proceso que concluye cuando obtenemos un cociente igual a cero.

5.5.2. CONVERSIÓN ENTRE OCTAL Y BINARIO

Si la conversión es de octal a binario cada cifra se sustituirá por su equivalente binario. Tendremos en cuenta la siguiente tabla para hacer la conversión de un modo más rápido:

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binario	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Si la conversión es de binario a octal se realiza de modo contrario a la anterior conversión, agrupando los bits enteros y los fraccionarios en grupos de 3. Si no se consiguen todos los grupos de tres, se añadirán los ceros que sean necesarios al último grupo.

Para convertir $73,54_8$ a binario, procedemos como sigue:

Octal	Binario		
0	000	Para $73,54_8$:	
1	001	$7=111$	
2	010	$3=011$	$73,54_8=111011,101100_2$
3	011,	$5=101$	
4	100	$4=100$	
5	101		
6	110		
7	111		

Para convertir $1010011,100101_2$ a octal, procedemos:

Agrupación	Octal	
001	1	
010	2	$1010011,100101_2=123,45_8$
011	3,	
100	4	
101	5	

5.5.3. CONVERSIÓN ENTRE OCTAL Y DECIMAL

Si la conversión es de octal a decimal se puede utilizar la *Regla de Ruffini.* Sabemos que $6753_8=3563_{10}$. Lo que demostramos como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 5 & 3 \\ 8 & & 48 & 440 & 3560 \\ \hline & 6 & 55 & 445 & \mathbf{3563} \end{array}$$

Si la conversión es de decimal a octal se procederá de modo similar a la conversión de decimal a binario, pero dividiendo entre 8.

N	b	q	r	
3563	*8*	*445*	**3**	
445	*8*	*55*	**5**	$6753_8=3563_{10}$.
55	*8*	*6*	**7**	
6	*8*	*0*	**6**	

5.5.4. CONVERSIÓN ENTRE BINARIO Y HEXADECIMAL

Si la conversión entre hexadecimales y binarios es igual al de la conversión octal y binario, pero teniendo en cuenta los caracteres hexadecimales, ya que se deben agrupar de 4 en 4. Para ello utilizaremos la tabla de conversión, descrita anteriormente.

Comprobar que $11001110001_2=671_{16}$.

Agrupación	0110	0111	0001
Hexadecimal	6	7	1

1. 6. *Problemas antiguos resueltos.*

6.1 Si a la suma de dos números se le añade su producto el resultado es 91. ¿De qué números hablamos?

Sea $x\cdot y+x+y=91$.
Despejamos x:

$$x\cdot y+x+y=91,\ \ x(y+1)+y=91,\ \ x=\frac{91-y}{y+1}$$

Despejamos y:

$$x\cdot y+x+y=91,\ \ y(x+1)+x=91,\ \ y=\frac{91-x}{x+1}$$

Dando valores a cualquiera de las variables, despejamos la otra. Como sistema indeterminado puede tener infinitas soluciones, como

x	*1*	*3*	*22*	*-5*	*-47*	*0*	*-2*	$\cdots$	*-3*
y	*45*	*22*	*3*	*-24*	*-3*	*91*	*-93*	$\cdots$	*-47*

6.2 Si a la diferencia de dos números se le añade su producto el resultado es 61. ¿Cuáles son los números?

Sea $x\cdot y+(x-y)=61$.
Despejamos x:

$$x\cdot y+(x-y)=61,\ \ x(y-1)-y=61,\ \ x=\frac{61+y}{y-1}$$

Despejamos y:

$$x\cdot y+(x-y)=61,\ \ y(x-1)-x=61,\ \ y=\frac{61+x}{x-1}$$

Sistema indeterminado que puede tener infinitas soluciones, como

x	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*11*	$\cdots$	*-59*
y	*59*	*29*	*19*	*14*	*11*	*9*	*5*	$\cdots$	*-2*

6.3 Cierta cantidad de monedas se quiere repartir entre cierta cantidad de personas. Si se entregan 12 monedas a cada una, sobran 7, si se entregan 13 monedas, faltan 6. ¿Qué cantidad y cuántas personas?

Sean C la cantidad de monedas y p el número de personas. Los dos intentos de reparto han sido $C=12p+7,\ C=13p-6,\ \Rightarrow\ \ 12p+7=13p-6=C$

Donde $p=13$ es el número de personas y $13\cdot 12+7=13\cdot 13-6=163$ es la cantidad solicitada.

6.4 Cierta cantidad de monedas se quiere repartir entre cierta cantidad de personas. Se establece que la primera reciba una moneda más un séptimo del resto; la segunda dos monedas y un séptimo del resto y, así sucesivamente hasta la última persona que recibirá un número de monedas igual a su número de orden, pero ya no quedará séptimo alguno.
¿Cuántas personas y cuántas monedas?

Dado que el número de orden es infinito, el número de personas también lo será.
Si un número se divide por siete pueden ocurrir dos cosas:

El cociente es exacto, lo que indica que la cantidad a repartir es siete o múltiplo de siete, es de la forma $7k$.

Se produce algún resto, en este caso la cantidad es de la forma $7k + r$ donde r puede tomar los valores de 1,2,3,4,5,6. En este caso el orden es finito.

La cantidad a recibir cada persona está compuesta por la suma de los términos de una progresión aritmética creciente y otra decreciente. Para la primera el número de términos no puede ser superior a seis, luego $S_t = \frac{n(t_1 + t_n)}{2} = \frac{6(1+6)}{2} = 21$. Para la segunda progresión con un término menos, tendremos $S_t = \frac{n(t_n + t_1)}{2} = \frac{5(5+1)}{2} = 15$. La suma $21 + 15 = 36$ sería la cantidad y 6 el número de personas que se repartirían 6 monedas cada uno.

Observar que si la fracción es m, el número de personas será $p = m - 1 = 7 - 1 = 6$ y la cantidad a repartir $C = (m-1)^2 = p^2 = 6^2 = 36$.

<u>*Nota*</u>: *Este problema se le atribuye a $Brahmagupta$ y fue recogido por $Bhaskara$ en su obra Lilavati.*

6.5 Cierta cantidad de monedas debía ser repartida entre siete personas, tres adultos y cuatro niños, de tal forma que los adultos recibieran una cuarta parte cada uno y los niños el resto, que debían repartirse en partes iguales. El reparto se llevó a cabo de acuerdo con lo estipulado pero, de una forma individualizada.

El primer adulto recibió una cuarta parte más una moneda sobrante. El segundo adulto recibió una cuarta parte de lo que quedaba más una moneda sobrante. Al tercer adulto se le aplicó el mismo procedimiento que al segundo. Los niños recibieron, cada uno, la cuarta parte de las monedas que sobraron. De esta manera quedaron repartidas la totalidad de las monedas que no excedían de 100.

¿Cuántas monedas había? ¿Cuántas recibió cada uno? ¿Cuántas deberían haber recibido de haberse hecho el reparto normal?

En todo el proceso de reparto se han estado haciendo operaciones para dividir cierta cantidad entre cuatro que producían resto de uno.

Si dividimos un número entre cuatro pueden ocurrir dos cosas:

El cociente es exacto, lo que indica que la cantidad a repartir es cuatro o múltiplo de cuatro, es de la forma $4k$.

Se produce algún resto, en este caso la cantidad es de la forma $4k + r$ donde r puede tomar los valores de 1,2,3.

El cuatro no es primo, $4 = 2^2$ esto hace que cuando se produce un resto de dos, se modifique el concepto del divisor, ya que el $mcd(2,4) = 2 \neq 1$ luego, para mantener el divisor deben considerarse como restos 1,3.

Buscamos un número de la forma $4k - 3$ que sea equivalente a otro de la forma $4k + 1$ y que no sea mayor de 100. Veamos:

k	$4k-3$	$4k+1$
1	$4^1 - 3 = 1$	$4 \cdot 0 + 1 = 1$
2	$4^2 - 3 = 13$	$4 \cdot 3 + 1 = 13$
3	$4^3 - 3 = 61$	$4 \cdot 15 + 1 = 61$
4	$4^4 - 3 = 253$	$4 \cdot 63 + 1 = 253$

La cantidad que más se aproxima a 100, sin sobrepasarlo, es 61. Veamos el reparto:

A_1	$\frac{61-1}{4}=15$	$15+1=16$	$3\cdot 15=45$
A_2	$\frac{45-1}{4}=11$	$11+1=12$	$3\cdot 13=33$
A_3	$\frac{33-1}{4}=8$	$8+1=9$	$3\cdot 8=24$
N_4	$\frac{24}{4}=6$	$6\ cada\ uno$	0

De haberse producido un reparto normal, $\frac{61-1}{4}=15$ que recibiría cada uno de los adultos, $\frac{61-45}{4}=4$ que recibiría cada uno de los niños.

6.6 Dividir una cantidad en tres partes iguales. Tomar la mitad de la primera parte y sumarla a la segunda parte; tomar la mitad de esta segunda parte y sumarla a la tercera parte, después, tomar la mitad de esta tercera parte y sumarla a la cantidad actual de la primera parte. Si sabemos que la cantidad es $100 \geqq N$, ¿de qué cantidad o cantidades estamos hablando?

Sea N la cantidad que se divide en tres partes iguales A,B,C, y sean x,y,z los valores que toman las distintas estructuras al manipular los valores A,B,C. Sin embargo, partimos de una igualdad en donde $A=B=C \rightarrow x \neq y \neq z$ y desembocamos en que $A+B+C=N \rightarrow x+y+z=N$.

$$Si\ \text{A=}x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\ entonces,\ \text{B=}y+\frac{x}{2}=\frac{x+2y}{2}\ y,\ por\ \text{tanto}\ \left(\frac{x+2y}{2}\right)/2=\frac{x+2y}{4}$$

$$Si\ \text{C=}z+\frac{x+2y}{4}=\frac{x+2y+4z}{4},\ como\ \left(\frac{x+2y+4z}{4}\right)-\left(\frac{x+2y+4z}{4}\right)/2=\frac{x+2y+4z}{8}\quad ahora,$$

$$resulta\ para\ \text{A=}\frac{x}{2}+\frac{x+2y+4z}{8}=\frac{5x+2y+4z}{8}.$$

En resumen:

$$N=A+B+C=\begin{cases} x=\dfrac{5x+2y+4z}{8} \\ y=\dfrac{x+2y}{4} \\ z=\dfrac{x+2y+4z}{8} \end{cases} \qquad con\quad N=3(8k)=24k.$$

Para $N=24\cdot 4=96$,

$$N=\frac{5\cdot 32+2\cdot 32+4\cdot 32}{8}+\frac{32+2\cdot 32}{4}+\frac{32+2\cdot 32+4\cdot 32}{8}=44+24+28=96$$

6.7 Referente al supuesto anterior, ¿cuáles habrían sido los valores de x,y,z y la cantidad mínima si la cesión hubiera sido de $1/5$?

Sea $N=A+B+C$, que inicialmente serán $A=B=C$.

Si $x-\frac{x}{5}=\frac{5x-x}{5}$ entonces, $y+\frac{x}{5}=\frac{x+5y}{5}$; $\left(\frac{x+5y}{5}\right)/5=\frac{x+5y}{25}$ y $\frac{x+5y}{5}-\frac{x+5y}{25}=\frac{4x+20y}{25}$.

Si $z+\frac{x+5y}{25}=\frac{x+5y+25z}{25}$ entonces, $\left(\frac{x+5y+25z}{25}\right)/5=\frac{x+5y+25z}{125}$ y la diferencia es, $\frac{4x+20y+100z}{125}$.

Ahora

$$\frac{4x}{5}+\frac{x+5y+25z}{125}=\frac{101x+5y+25z}{125}$$

En resumen:

$$N=A+B+C=\begin{cases} x=\dfrac{101x+5y+25z}{125} \\ y=\dfrac{4x+20y}{25} \\ z=\dfrac{4x+20y+100z}{125} \end{cases} \quad con \quad N=3(125k)=375k.$$

La cantidad mínima es $N=3\cdot 125=375$ y su distribución,

$$N=\frac{101\cdot 125+5\cdot 125+25\cdot 125}{125}+\frac{4\cdot 125+20\cdot 125}{25}+\frac{4\cdot 125+20\cdot 125+100\cdot 125}{125}=131+120+124=375$$

Observar que la cantidad mínima es el cubo del denominador de la fracción cedida. Si llamamos **k** a dicho número, tenemos $N=k^3$.

Nota: Este tipo de **problemas-juegos** se encuentran recogidos en recopilaciones de Nicolas Chuquet (1484), Estienne de la Roche, conocido como Villefranche (1520) ó Marin Mersenne (1588-1648), entre otros. Este último, bien conocido por los números primos que llevan su nombre, los recoge en su obra Questions Inouyes, ou Récréation des Sçavans.

6.8 Hallar dos números tales que al sumar el cuadrado de cualquiera de ellos con el otro, se obtenga un cuadrado perfecto.

Sea m el primer número y 2m+1 el segundo. La suma de ambos cuadrados es $(m+1)^2=m^2+2m+1$.

La suma del cuadrado del segundo número y el primero, también debe ser cuadrado, es decir $(2m+1)^2+m=4m^2+5m+1=t^2$. Tomemos $t=2m-2$, entonces $t^2=4m^2-8m+4$, expresión que es igual a $4m^2+5m+1$, de manera que $4m^2+5m+1=4m^2-8m+4$. Unificando, $4(m-1)^2=(m+1)(m-1)$ que resulta para $m=3/13$, esto significa que $2m+1=\frac{6}{13}+1=\frac{19}{13}$ entonces, $\left(\frac{3}{13}\right)^2+\frac{19}{13}=\left(\frac{16}{13}\right)^2$ y $\left(\frac{19}{13}\right)^2+\frac{3}{13}=\left(\frac{20}{13}\right)^2$.

Nota: Problema número 20 del II libro de la Aritmética de Diofanto.

6.9 En cierta ocasión preguntaron a Ramanujan si sabría resolver la ecuación $\sqrt{x}+y=7$, $\sqrt{y}+x=11$. Ramanujan dio la respuesta inmediatamente. ¿Puedes hacer lo mismo?

Hagamos que $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$ *donde* $\begin{cases} u+v^2=7 \\ v+u^2=11 \end{cases}$. Restamos una ecuación de la otra y obtenemos $(v+u^2=11)-(u+v^2=7)=(u^2-u)-(v^2-v)=4$. Si sumamos y restamos $\frac{1}{4}$ al primer miembro, $(u^2-4+\frac{1}{4})-(v^2-v+\frac{1}{4})=(u^2-\frac{1}{2})-(v^2-\frac{1}{2})=4=1\cdot 4$. Aplicando la regla de sumas y diferencias de cuadrados, $u+v-1=4,\ u-v=1$, que nos queda $\left.\begin{matrix} u+v=5 \\ u-v=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} u=3 \\ v=2 \end{matrix}$ de donde, $x=9$ e $y=4$.

$\underline{Ramanujan, Srinivasa\ Aiyangar\ (1887-1920).}$ El matemático indio más sobresaliente de este siglo. Siendo oficinista en Madrás comenzó a estudiar y trabajar en matemáticas sin ninguna ayuda. A raíz de su correspondencia con G.H.Hardy fue invitado a visitar Gran Bretaña en 1914, donde colaboró con este último en trabajos sobre particiones y otros temas, principalmente teoría de números. Se consideraba un genio por su inexplicable habilidad en el manejo, por ejemplo, de series y *fracciones continuas*. Debido a su mala salud tuvo que regresar a la India, donde murió un año más tarde.

6.10 El contenido de una bolsa está compuesto por un tercio en monedas de oro, un tercio en monedas de plata y, un tercio en monedas de plástico, sin valor alguno. Con el total se quieren formar grupos de siete piezas que sean de igual valor, teniendo en cuenta que el valor de las monedas de oro y plata está en una relación de 2 a 1. Averiguar cuántas piezas hay en la bolsa y cuál será el número y composición de los grupos.

Razonemos:

El contenido de la bolsa debe ser un número igual o múltiplo de tres.
Los grupos tienen que ser de contenido igual o múltiplo de siete, luego,
El total de piezas debe ser un número igual o múltiplo de $21 = (3 \cdot 7)$.

Supongamos que el contenido de la bolsa es de 21 piezas, entonces

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Piezas de oro}: & 1/3 \cdot 21 = 7 \\ \textit{Piezas de plata}: & 1/3 \cdot 21 = 7 \\ \textit{Piezas de plástico}: & 1/3 \cdot 21 = 7 \end{array}\right\} = 21$$

Con 21 piezas se pueden forma $\frac{21}{7} = 3$ grupos de 7, por tanto, el número y composición de los mismos será:

PIEZAS	I	II	III	VALORES	I	II	III
Piezas de oro:	*3*	*2*	*2*	Valor del oro:	*6*	*4*	*4*
Piezas de plata:	*1*	*3*	*3*	Valor de la plata:	*1*	*3*	*3*
	4	*5*	*5*		*7*	*7*	*7*
Piezas de plástico	*3*	*2*	*2*	Valor del plástico:	*0*	*0*	*0*
Total piezas	*7*	*7*	*7*	Total valor	*7*	*7*	*7*

6.11 Dividir un número en cuatro partes de tal forma que, si se suman, restan, multiplican o dividen por un número dado, resulta un número que es múltiplo de dicho número dado.

Sea x el número a dividir, A, B, C, D los números divididos y $m\ y\ k$ el número dado y el multiplicador de dicho número, entonces $A + B + C + D = x$.

Tenemos que $\left\{\begin{array}{l} A+m \\ B-m \\ C\cdot m \\ D/m \end{array}\right\} = mk$, de donde $\left\{\begin{array}{l} A = mk - m = m(k-1) \\ B = mk + m = m(k+1) \\ C = mk/m \quad = k \\ D = mmk \quad = m^2k \end{array}\right.$

$$Si\ x = A + B + C + D = m(k-1) + m(k+1) + k + m^2k = k(m^2 + 2m + 1),\ resulta$$

$$x = k(m+1)^2$$

Nota: Este problema está recogido por *Liu Hui* (*aprox.* 263) en la refundición de los Nueve Capítulos o Jiuzhang Suanshu, que recogía los conocimientos matemáticos en China, hasta aquella fecha. Los *Nueve Capítulos* eran continuación del *Chua Pei*, un recopilador de leyendas referidas a los números y a la astronomía, que se remontaba, según algunos, hasta el 2750 a.C., según otros, hasta el 1000 a.C.

6.12 Dividir un número en cuatro partes de tal forma que, si se suman, restan, multiplican o dividen por un número dado, resulta un número que es múltiplo de dicho número dado.
Número dado el 13 y múltiplo el 5.

Sabemos que $x=(m+1)^2 \cdot k = (13+1)^2 \cdot 5 = 980$ y, por tanto

$$\left.\begin{cases} A = mk - m = m(k-1) = 13(5-1) = & 52 \\ B = mk + m = m(k+1) = 13(5+1) = & 78 \\ C = mk/m \;\; = k \qquad\qquad\qquad\; k = & 5 \\ D = mmk \;\;\; = m^2k \quad m^2k = 13^2 \cdot 5 = & 845 \end{cases}\right\} = 980$$

6.13 En cierta ocasión, Ramanujan recibió en el hospital la visita de su protector y amigo Hardy. Éste le comentó que había venido en un coche con matrícula 1729, número que consideraba anodino y nada especial. ¿Nada especial? Verás, tiene la particularidad de que es el menor número que puede ponerse como suma de dos cubos de dos formas distintas.
¿Sabes cómo?

El número 1729 es igual a $12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 1729$.
Hardy, a continuación, le preguntó si conocía la respuesta para las cuartas potencias. Ramanujan contestó, tras pensarlo un momento, que no podía ver la respuesta, pero que pensaba debía ser un número extremadamente grande. Esta respuesta tuvo contestación, obtenida mediante cálculos con ordenador, es $635.318.657 = 134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$. De una generalización de esta propiedad surgen los llamados números $taxicab$.
Se dice que un número es el enésimo número $taxicab$ si es el menor número que se puede descomponer como n sumas de dos cubos positivos. Veamos algún ejemplo:

2	$1^3 + 1^3$
1729	$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$
87539319	$167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3$
6963472309248	$2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3$

Puestos a demostrar sobre el número 1729:

Es diferencia de dos cuadrados $\left(\dfrac{1729+1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1729-1}{2}\right)^2 = 865^2 - 864^2 = 1729$

No es suma de dos cuadrados, a pesar de que $1729 = 4 \cdot 432 + 1 = 4k + 1$, ya que de los factores primos que lo componen, $7 \cdot 13 \cdot 19 = 1729$ sólo el 13 es de la forma $4k + 1$.

Es una terna pitagórica, $\left(\dfrac{1729^2 - 1}{2}\right)^2 + 1729^2 = \left(\dfrac{1729^2 + 1}{2}\right)^2$.

Es suma de tres cuadrados, $6^2 + 18^2 + 37^2 = 1729$.
Se puede escribir como, $206^3 + 318^3 - 215^3 - 314^3 = 1729$
Es un número *Harshad*, $1729 : (1+7+2+9) = 91$, porque es divisible por la suma de sus cifras.
Si sumamos todos los números primos comprendidos entre 2 y 130, obtenemos 1807. La diferencia con 1729 es de 78, que podemos factorizar como $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 6 \cdot 13$. La suma de $6 + 13 = 19$ y la diferencia con 78, $78 - 19 = 59$, dos números primos que sobran dentro de la suma inicial luego, el número 1729 es suma de los números primos,

2	*3*	*5*	*7*	*11*	*13*	*17*	*19*	*23*	*29*	*31*	*37*	*41*	*43*	*47*	*53*
59	*61*	*67*	*71*	*73*	*79*	*83*	*89*	*97*	*101*	*103*	*107*	*109*	*113*	*127*	

Nota: Esta última demostración se la dedicamos a $Christian\ Goldbach$ $(1670 - 1764)$, por sus paradojas en las que afirma que todo entero par $n \geq 4$ es suma de dos números primos, y que todo entero par $n \geq 9$ es la suma de tres números primos. A pesar de los importantes progresos debidos especialmente a $Iván\ M. Vinográdov$ $(1891 - 1983)$, $Ching\ Jun\ Chen$ $(1933-)$ o $Robert\ Charles\ Vaughan$ $(1945-)$, estas paradojas siguen abiertas.

6.14 Dos amigos que hace tiempo no se ven deciden, para celebrarlo, disfrutar de una cena acompañados de sus respectivas parejas. A los postres entran en una discusión ya que, cada uno de ellos quiere invitar al otro. La discusión se termina cuando ven la cuenta: cerca de 100 euros y ninguno lleva dinero suficiente para liquidarla por sí sólo. Uno le pide al otro un tercio de lo que lleva que junto a lo que lleva él, atenderá la cuenta; el otro le dice que no puede aceptarlo, y le propone que le entregue una quinta parte de lo que lleva ya que junto a lo que lleva él pagará la minuta. Como no se ponen de acuerdo, finalmente deciden juntar todo el dinero que llevan, pagar la cuenta más dos euros de propina y, el dinero sobrante dividirlo en dos partes iguales.
Calcular el dinero que llevaba cada pareja, el importe de la cuenta, la aportación de cada uno a su liquidación y, el dinero que llevaba cada uno a la salida.

Aunque tiene solución mediante la aplicación de ecuaciones, vamos a utilizar el razonamiento y la lógica para resolverlo.
Sean A y B los sujetos que intervienen en forma de parejas. Razonemos:
Si el sujeto B puede desprenderse de una tercera parte del dinero que lleva, ésta será de la forma $3k$.
Si el sujeto A puede desprenderse de una quinta parte del dinero que lleva, ésta será de la forma $5k$.
Dado que, de dos quebrados que tienen el mismo numerador es mayor el que tiene menor denominador, la cantidad de B es superior a la de A, esto es $B > A$.
Supongamos que A lleva 5 euros: Si A lleva 5 euros, B debe llevar 6, entonces $5+6/3=7$ que debe ser igual a $6+5/5=7$. Como 7=7 luego, las proporciones son correctas.
La cuenta es ≤ 100. El múltiplo más cercano de 7 es $7 \cdot 14 = 98$, que será el importe de la minuta, y el importe a pagar 100 euros, contando la propina.
Las parejas entraron con $5 \cdot 14 = 70$ y $6 \cdot 14 = 84$ euros, respectivamente. La suma de ambas cifras fue de 154 de las que pagaron 100. El resto de 54 lo dividieron en dos partes de 27 euros cada una. En resumen,

Parejas	Llegada	Salida	Cena
A	70	27	43
B	84	27	57
Total	**154**	**54**	**100**

6.15 Cuenta una vieja leyenda que un árabe al morir dejó una reata de camellos que de bían repartirse sus tres hijos a razón de, uno de cada dos para el mayor; uno de cada tres para el mediano y, uno de cada nueve para el menor. La cosa no tendría mayor importancia si no fuera porque el número de camellos era de 17. Por mucho que lo intentaron no encontraron la forma de hacer el reparto sin que alguno de los camellos saliera mal parado. Consultado al sabio de la aldea, éste les recomendó pedir prestado un camello y hacer el reparto, luego devolverían el camello a su legítimo dueño.
¿Cómo lo habrías hecho tú?

Siguiendo las instrucciones del ulema o sabio de la aldea, los herederos pidieron un camello prestado que sumaron a los 17. Los 18 camellos los repartieron $18 \cdot 1/2 = 9$ para el hermano mayor, $18 \cdot 1/3 = 6$ para el mediano y $18 \cdot 1/9 = 2$ para el menor, $9+6+2=17$ camellos distribuidos y el sobrante devuelto a su dueño.
El razonamiento actual sería que, si la suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, bastaría sumarle $\frac{1}{18}$ para obtener la unidad luego, no tendría más interés que la solución de un problema algebraico.
Nota: El profesor *Rafael Rodríguez Vidal*, en su obra *Enjambre Matemático*, cita haber leído este problema en el libro de *Marco Aurel* (1552), *Libro Primero de Aritmética Algebraica.* También es citado este problema por el pro-

fesor de *Tubingen (Alemania)* $Joseph\ Ehrenfried\ Hofmann$ en su obra *Historia de la Matemática desde el comienzo hasta la Revolución Francesa,* atribuyendo la fuente a $Marco\ Aurelio$ (1552). Finalmente, en su obra *A Primer of Analytic Number Theory, from Pythagoras to Riemann*, el profesor $Feffrey\ Stopple$ de la Universidad de Santa Barbara en California, atribuye esta leyenda a algún hecho acaecido a Pitágoras durante su estancia en Babilonia, donde fue retenido por *Cambises II de Persia*. Se basa, para tal afirmación, en la forma de resolución utilizando fracciones unitarias, propias de los papiros de *Rhind* o de *Moscú*, y éstos fueron descifrados hace poco más de cien años. De las civilizaciones antiguas sólo conocíamos el llamado $Teorema\ de\ Pitágoras$, divulgado por Pitágoras a su regreso de Egipto allá por el año 532 a.C. La secta creada por Pitágoras en Crotona prohibía la divulgación de sus descubrimientos, sin embargo, algunos pitagóricos pudieron quebrantar esa norma y dar a conocer conocimientos manejados por los miembros de la secta desde sus comienzo.

Veamos cómo habría sido solucionado este problema en sus inicios utilizando fracciones unitarias:

Planteamos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{Q}{Q+1}$ donde $\frac{17}{18}=\frac{Q}{Q+1}\to 18Q=17(Q+1)=17Q+17$.

Despejamos: $18Q-17Q=17\to Q=17$.

Supongamos que los denominadores son a,b,c. si tomamos sus inversos,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{Q}{Q+1},\quad Q=\frac{ab+ac+bc}{abc-(ab+ac+bc)}=\frac{2(3+9)+3\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 9-(2(3+9)+3\cdot 9))}=\frac{51}{3}=17$$

donde volvemos a obtener el mismo resultado.

Si recordamos que $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=(x-a)(x-b)(x-c)$ es la estructura de una ecuación cúbica, y si ahora sustituimos por sus valores, que no son otros que divisores de un número, tenemos $x^3-14x^2+51x-54=0,\ x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=9$.

No cabe duda de que los babilonios conocían ya las ecuaciones de grado.

6.16 Encontrar un número, si existe, que al ser divido por 3, 5 ó 7 dé como restos 2, 3 y 5, respectivamente.

Si x es el número a buscar, entonces $x=2+3s$, $x=3+5t$ y $x=5+7u$, donde s,t,u son números enteros cualquieras.

Supongamos que $2+3s=3+5t$. Unificando el coeficiente independiente, $3s=1+5t$.

Si multiplicamos por 2 y sacamos restos respecto a 5, $2(3s=1)+5t$, resulta, $s=2+5t$.

Conociendo s, $x=2+3(2+5t)=8+15t$. Podemos comprobar que 8 es el número más pequeño que al ser dividido por $3\ y\ 5$ da como resto $2\ y\ 3$, respectivamente.

Supongamos que $8+15t=5+7u$. Unificando el coeficiente independiente, $t=4+7u$.

Conociendo t, $x=8+15(4+7u)=68+105u$. Por tanto, 68 es el entero positivo más pequeño que es solución simultánea, ya que al dividirlo por $3,5\ y\ 7$, se obtienen los restos respectivos de $2,3\ y\ 5$.

Nota: Este tipo de problemas se encuentran en las obras de $Sun\ Tzi\ (siglo\ III\ d.C.)$, que fueron publicados en 1247 por $Qin\ Jiushao\ o\ Chin\ Kin\ Shao$. También fueron estudiados por $Lin\ Hui$ y $Brahmagupta$ y aparecen en el *Liber Abaci* de $Fibonacci$(1202). Su versatilidad y desarrollo es conocido en la teoría de los números como $Teorema\ Chino\ de\ Restos$.

6.17 Sea m un número entero y positivo. Si $m=x+y+z$ y $x+\frac{y}{3}=y+\frac{x}{5}=z$, calcular $m\leq 100$.

Supongamos que $3\ y\ 5$ los sustituimos por, $a\ y\ b$, entonces $x+\frac{y}{a}=y+\frac{x}{b}=z$. Esta expresión se puede representar en forma de matriz como $\begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & b \end{bmatrix}$ de la que, aplicando la diagonalización de Gauss-Jordan, resulta para $x=ab-b,\ y=ab-a,\ z=ab-1$.

Conocida la estructura, resulta para $x=3\cdot 5-5=10$, $y=3\cdot 5-3=12$, $z=3\cdot 5-1=14$. Como $mcd(10,12,14)=2$, $x=5$, $y=6$, $z=7$ y $m=x+y+z=5t+6t+7t=18t$, donde t es un entero cualquiera. Comprobamos que $5+\frac{6}{3}=6+\frac{5}{5}=7$.

Según el enunciado $m\leq 100$, por lo que tendremos que buscar un múltiplo de 18 cercano a 100, que en nuestro caso es $m=90$, $100=18\cdot 5+10$ y el valor de $t=5$.

Con los datos anteriores, obtendremos:

Valor de la ecuación: $m=x+y+z=25+30+35=90$.

Estructura de la ecuación: $25+\frac{30}{3}=30+\frac{25}{5}=35$.

Nota: Este tipo de problemas se encuentran en la obra *Liber Abaci* de $Fibonacci(1202)$.

6.18 Sea m un número entero y positivo. Si $m=x+y+z+u$ y $x+\frac{y+z}{3}=y+\frac{x+z}{5}=z+\frac{x+y}{7}=u$, calcular $m\leq 150$.

Supongamos que sustituimos $3,5,7$ por a,b,c de donde, $x+\frac{y+z}{a}=y+\frac{x+z}{b}=z+\frac{x+y}{c}=u$. Mediante diagonalización de matrices, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x=abc-2(bc)+b+c-a \\ y=abc-2(ac)+a+c-b \\ z=abc-2(ab)+a+b-c \end{array}\right\}\Rightarrow u=abc-(a+b+c)+2$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\cdot 5\cdot 7-2(5\cdot 7)+5+7-3=44 \\ y=3\cdot 5\cdot 7-2(3\cdot 7)+3+7-5=68 \\ z=3\cdot 5\cdot 7-2(3\cdot 5)+3+5-7=76 \end{array}\right\}\Rightarrow u=3\cdot 5\cdot 7-(3+5+7)+2=92$$

Como $mcd(44,68,76,92)=4$ resulta que

$m=x+y+z+u=11t+17t+19t+23t=70t$, t es un entero cualquiera.

Como *m* debe ser $m\leq 150$, podemos situar su valor en *140* y el valor de *t* en $t=2$ entonces,

$m=x+y+z+u=22+34+38+46=140$

y la estructura de sus variables

$22+\frac{34+38}{3}=34+\frac{22+38}{5}=38+\frac{22+34}{7}=46$.

6.19 Encontrar un número cuyo cuadrado, al sumarle o restarle 5, dé otros cuadrados.

Si pudiéramos encontrar dos números m y n tales que $4mn(m^2-n^2)=5$, el problema tendrá solución entera en la forma $(m^2+n^2)\pm 4mn(m^2-n^2)=(m^2-n^2\pm 2mn)^2$, pero no existen tales números, lo que implica una solución con números racionales. Si dividimos la ecuación por p^2, $\frac{(m^2+n^2)\pm 4mn(m^2-n^2)=(m^2-n^2\pm 2mn)^2}{p^2}$ obtenemos

$$\left(\frac{m^2}{p}+\frac{n^2}{p}\right)^2\pm\left(\frac{4mn(m^2-n^2)}{p^2}\right)=\left(\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{p}\pm\frac{2mn}{p}\right)^2$$

Si hacemos que $4mn(m^2-n^2)=5p^2$, necesariamente p^2 es múltiplo de 4, por tanto $p=2q$ y la última identidad se transforma en $mn(m^2-n^2)=5q^2$, donde uno de los tres factores del primer miembro debe ser múltiplo de 5. Supongamos que $m=5$, entonces $n(25-n^2)=q^2$. El primer valor de *n* que convierte a $n(25-n^2)$ en cuadrado es $n=4$, luego

$$4mn(m^2-n^2)=5p^2=4\cdot 5\cdot 4(5^2-4^2)=5p^2\Rightarrow p=12$$

$$mn(m^2-n^2)=5q^2=5\cdot 4(5^2-4^2)=5p^2\Rightarrow q=6$$

Y en consecuencia, el número buscado es

$$\frac{m^2}{p}+\frac{n^2}{p}=\frac{5^2}{12}+\frac{4^2}{12}=\frac{41}{12}$$

Comprobamos:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{101}{12}\right)^2,\quad \left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(-\frac{19}{12}\right)^2.$$

Nota: Se trata del primer problema resuelto por *Fibonacci* en el llamado *torneo matemático* planteado por Federico II (1194-1250), emperador germano de la dinastía de los Hoenstaufen, en su visita a Pisa en el año 1225. El emperador quería probar si la fama de Fibonacci era cierta.

6.20 Tres hombres cuentan cada uno con una misma cantidad de dinero. Encuentran una bolsa llena de monedas y la reparten de tal modo que la cantidad final del primero (lo que llevaba más lo que le tocó) es triple de lo que obtuvieron el segundo y el tercero en el reparto, la del segundo el cuádruplo de que obtuvieron el primero y tercero y el tercero el quíntuplo de lo que obtuvieron el primero y segundo.
Se trata de saber el capital inicial y lo que les tocó a cada uno en el reparto de la bolsa hallada.

Sea c la cantidad inicial y x, y, z lo que le tocó a cada uno en el reparto, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$c+x=3(y+z);\quad c+y=4(x+z);\quad c+z=5(x+y)$$

Si en cada una de las ecuaciones despejamos c, resulta

$$-x+3y+3z=c;\quad 4x-y+4z=c;\quad 5x+5y-z=c$$

Un sistema de ecuaciones que tiene como solución,

$$x=\frac{7c}{83};\quad y=\frac{13c}{83};\quad z=\frac{17c}{83}$$

Un sistema indeterminado que tendrá tantas soluciones como valores se le asignen a c.

Para $c=83, \quad\rightarrow\quad x=7;\quad y=13;\quad z=17$

Nota: Se trata de una adaptación del cuarto problema resuelto por *Fibonacci* en el llamado *torneo matemático* planteado por Federico II (1194-1250). Estos problemas están recogidos en la obra de Fibonacci Liber Quadratorum.

6.21 Después de un naufragio, tres marineros dan con sus huesos en una isla desierta. En la isla sólo hay cocoteros y monos y, ninguno está al alcance de los recién llegados. Como el hambre agudiza el ingenio, pronto se dan cuenta de que, lanzando piedras a los monos, éstos les devuelven la agresión lanzándoles cocos. Consiguen una cosecha de más o menos un centenar. Cansados y cercana la noche, se van a dormir con la promesa de que, a la mañana siguiente, los cocos serán distribuidos a partes iguales entre los tres. Al cabo de cierto tiempo, uno de los marineros despertó y, pensando en comer, tomó un tercio de los cocos, pero como sobraba uno, se lo comió y guardó el tercio, dejando los restantes dos tercios para sus compañeros. Los otros dos actuaron de la misma manera.
¿Cuántos cocos había al inicio y cuántos cocos guardaron para ser repartidos cuando despertaran?

Supongamos que al inicio había x cocos y quedaron y cocos al final.

Después del primer naufrago, quedaron $\tfrac{2}{3}(x-1)$; después del segundo marinero, quedaron $\tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3}(x-1)-1)$, finalmente, después del tercero, quedaron $\tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3}(x-1)-1)-1)=y$.

Operamos de la siguiente forma,

$$\tfrac{2}{3}(x-1)=\frac{2x-5}{3},\quad \tfrac{2}{3}\left(\frac{2x-5}{3}\right)-1=\frac{4x-19}{9},\quad \tfrac{2}{3}\left(\frac{4x-19}{9}\right)-1=\frac{8x-38}{27}$$

Escribimos la última igualdad como, $8x-27y=38$.

Utilizando el *Algoritmo de Euclides*

$$8x - 27y = 38$$
$$8x = 38 + 27t$$
$$4x = 19 + 27t$$
$$7(4x = 19) + 27t \to x = 25 + 27t$$

donde *t* es un entero cualquiera.

Como la cosecha es de ± 100, para $t = 2$, resulta $x = 25 + 27 \cdot 2 = 79$ cocos repartidos y $\frac{8x - 38}{27} = \frac{8 \cdot 79 - 38}{27} = 22$ cocos sin repartir, en total $79 + 22 = 101$ cocos recolectados.

Veamos el reparto:

$t =$	0	1	2	3
Cocos repartidos:	25	52	79	106
Cocos pendientes:	6	14	22	30
Total	31	66	101	136

Podemos llegar al mismo resultado si aplicamos las propiedades de los números.

Si un número es dividido por tres pueden ocurrir dos cosas:

Que tenga cociente exacto, lo que demuestra que el número es tres o múltiplo de tres, esto es, es de la forma $3k$.

Que no tenga cociente exacto, luego no es divisible por tres y, por tanto, produce un resto r, con lo que el número es de la forma $3k \pm r$.

Que el resto *r* será positivo o negativo dependerá si la división se hace por defecto o por exceso, con lo que produce números de la forma $3k + 1$ o $3k - 2$, ambos equivalente.

Pues bien, la cantidad de cocos inicial es de la forma $3k - 2$ y la que se reparte es su equivalente de la forma $3k + 1$.

Veamos cómo evolucionan:

$3k - 2$	$3k + 1$
$3^1 - 2 = 1$	$3 \cdot 0 + 1 = 1$
$3^2 - 2 = 7$	$3 \cdot 2 + 1 = 7$
$3^3 - 2 = 25$	$3 \cdot 8 + 1 = 25$
$3^4 - 2 = 79$	$3 \cdot 26 + 1 = 79$
$3^5 - 2 = 241$	$3 \cdot 80 + 1 = 241$

Nota: El día 9 de octubre de 1926, en el periódico de Nueva York, *The Saturday Evening Post*, el reportero Ben Ames Williams publicaba la fascinante historia de cinco náufragos que habían sido ayudados por monos. Ver *Elementary Number Theory with Applications*, de Thomas Koshy o Elementary Number Theory in Nine Chapters, de James J.Tattersall. Los profesores Manuel Castellet Solanas e Irene Llerena Rodríguez, de la Universidad de Barcelona, también hacen referencia a este problema en su obra *Álgebra Lineal y Geometría*. Todas estas fuentes citan el artículo de Ben Ames Williams y el problema con tres o cinco marineros.

Bhaskara (1114-1185) en Lilavati, un libro de poemas sobre números que dedicó a su hija, recoge un problema parecido a este sobre tres marineros que en el mar de Ceylan salvaron, con riesgo de sus vidas, un cargamento de especias y el dueño les recompensó con una cantidad de más de 200 monedas pero menos de 300. Michael *Stifel* $(1487 - 1567)$, en su obra *Arithmetica Integra*, recoge este problema con tres galeotes que arriesgaron sus vidas para salvar un barco. La acción la sitúa en el Mar Egeo sobre el año 600 a.C. y el barco sería propiedad de una familia fenicia emparentada, nada menos, que con Tales de Mileto. Sea verdad o mentira la historia, este problema es muy anterior a la fecha de publicación de 1926. Referente a Stifel, Hofmann en su obra *Historia de la Matemática*, dice que este matemático alemán tenía mucho talento para el álgebra, pero al mismo tiempo era muy supersticioso para los números.

6.22 Un profesor diserta sobre el más prolífico y fuera de toda comparación de los matemáticos del siglo XVIII. Un alumno le interpela en el sentido de considerarle muy joven para conocer tan a fondo al personaje. No lo creas, le dijo, nací a mediados de los años cuarenta, un último día del mes. Si tomas la diferencia entre el año de mi nacimiento y el del fallecimiento de quien hablamos y lo multiplicas por su edad y el día de mi nacimiento, obtendrás un resultado de 354844, cifra que te servirá para conocer la fecha exacta de mi nacimiento y el año de nacimiento y fallecimiento de nuestro personaje.
¿De quién estamos hablando?

La descomposición en factores primos de $354844 = 2^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$.
El profesor pudo nacer el 29 o 28, $(2^2 \cdot 7)$. Si consideramos el día 28 nos quedarían $19{,}23{,}29$ que podríamos combinar, 29 para la edad del matemático y 437 $(19 \cdot 23)$ para la diferencia entre años de nacimiento y defunción, pero esto nos llevaría al siglo XVI, $1503 = 1940 - 437$. Nuestro personaje es del siglo XVIII.
Si el profesor hubiera nacido el día 29, sería el $29-2-1944$, único año bisiesto a mediados de los años cuarenta.
Nos quedan 2,2,7,19,23 que podrían corresponder a 38, $(2 \cdot 19)$ o 46, $(2 \cdot 23)$ años para la edad del personaje y 266, $(2 \cdot 7 \cdot 19)$ o 322, $(2 \cdot 7 \cdot 23)$ para la diferencia de años de nuestro profesor y el personaje. Pero ambas diferencias nos llevan al siglo XVII $(1622\ y\ 1678)$, por lo que debemos desecharlas.
Sólo nos queda 76, $(2 \cdot 2 \cdot 19)$ para la edad del matemático y 161, $(7 \cdot 23)$ para la diferencia de años, luego
El profesor había nacido el 29 de febrero de 1944.
El personaje murió el año 1783, $(1944 - 161)$ a los 76 años, nació en 1707, $(1783 - 76)$. En cualquier enciclopedia podremos comprobar que se trata de $Leonhar\ Euler$ $(1707 - 1783)$.
Nota: Este problema quiero dedicarlo a la memoria de Don José Lóbez Urquía, catedrático de la Escuela de Altos Estudios Mercantiles y profesor de matemáticas del Instituto Bancario, que me enseñó a comprender y querer a los números.

6.23 En mi escalera vivimos tres vecinos que tenemos en común el pertenecer a la profesión de banca. Dos ya están jubilados y el otro espera hacerlo cuando cumpla los 60 años, ya que pudo hacerlo cuando cumplió los 50. Mi compañero se jubiló a los 65 y está a punto de cumplir los 70 años. Como somos gentes habituadas a los números, uno me decía que si multiplicaba la edad del otro jubilado por el número de su piso salía la misma cantidad que si multiplicaba su edad por el número del piso del otro. El otro, que no quería ser menos, dijo que la suma de los números de sus respectivos pisos daba como resultado un número primo no superior a diez. Puestos a facilitar datos, les comenté que la diferencia entre sus edades también era un número primo.
¿Qué edad tiene cada uno y en qué piso viven?

Sean A y B las edades de cada uno y P_a y P_b los pisos en que viven. El enunciado dice que $A \cdot P_b = B \cdot P_a$ luego, $A > B$ y $P_a < P_b$. A es menor a 70 y mayor a 65, y B es mayor a 50 y menor a 60.
La diferencia de edades es un número primo, esto es, $A - B = 70 - 50 = 20$. Los números primos hasta 20 son, $2,3,5,7,11,13,17\ y\ 19$, pero sólo nos interesan aquéllos que sumados a la edad del menor, (años 51 al 59) de un resultado comprendido entre 66 y 69, o sea, $13 + 52 = 65$, $17 + 51 = 68$ o $19 + 50 = 69$. Quedan descartados el 65 y el 69 luego, las edades son 68 y 51 años.
Por otra parte, la suma de los números de los pisos es un primo menor a 10, o sea, $2,3,5$ ó 7.
Descartado el 2, las combinaciones que podemos hacer son,
Con el 3: $1+2$. Con el 5: $1+4$ *ó* $2+3$. Con el 7: $1+6$, $2+5$ *ó* $3+4$.

De estas combinaciones, $1+2$, $1+4$, $1+6$ *y* $2+5$ presentan una considerable dispersión, tomamos pues, $2+3$ *y* $3+4$.
El producto de $68\cdot 2=136$ es menor que $51\cdot 3=153$, luego $68\cdot 3=51\cdot 4=204$. Por tanto, viven en los pisos 3º y 4º y tienen 51 y 68 años, respectivamente.

6.24 Tres hombres se reparten al azar un capital. A continuación, el primero aporta a un fondo común la mitad de su porción, el segundo un tercio y el tercero un sexto. Después hacen con el fondo tres partes iguales y cada cual toma una parte para sí. ¿Cuánto tuvo cada uno en el primer reparto, si la cantidad final fue, para el primero, la mitad del capital inicial, para el segundo la tercera parte y para el tercero la sexta parte?

Sea u una de las tres partes en que se ha dividido el fondo formado por las fracciones de las partes tomadas al azar y c el total, entonces $x+y+z=c$.
Tenemos,

$$u+\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{c}{2},\ u+\left(y-\frac{y}{3}\right)=\frac{c}{3},\ u+\left(z-\frac{z}{6}\right)=\frac{c}{6}.$$

Despejando las variables principales,

$$x=2\left(\frac{c}{2}-u\right)=c-2u,\ y=3/2\left(\frac{c}{3}-u\right)=\frac{c-3u}{2},\ z=6/5\left(\frac{c}{6}-u\right)=\frac{c-6u}{5}.$$

Sumando todos los miembros,

$$c-2u+\frac{c-3u}{2}+\frac{c-6u}{5}=\frac{17c-47u}{10}=c$$

Si resolvemos la ecuación $\frac{17c-47u}{10}=c$

$$\frac{17c-47u}{10}=c\rightarrow c=\frac{47u}{7}\ \ y\ \ u=\frac{7c}{47}\rightarrow 7^2c=47^2u.$$

Esta ecuación, que podemos escribir como $c=47^2t\ y\ u=7^2t$, ya que se trata de un sistema indeterminado, tendrá tantas soluciones como valores se le asignen a t.
Para $t=1$ tenemos,

$$x=2\left(\frac{c}{2}-u\right)=c-2u=2209-2\cdot 49=2111$$

$$y=3/2\left(\frac{c}{3}-u\right)=\frac{c-3u}{2}=\frac{2209-3\cdot 49}{2}=1031$$

$$z=6/5\left(\frac{c}{6}-u\right)=\frac{c-6u}{5}=\frac{2209-6\cdot 49}{5}=383$$

$$u+\left(x-\frac{x}{2}\right)=\frac{c}{2}=49+(2111-2111/2)=\frac{2209}{2}$$

$$u+\left(y-\frac{y}{3}\right)=\frac{c}{3}=49+(1031-1031/3)=\frac{2209}{3}$$

$$u+\left(z-\frac{z}{6}\right)=\frac{c}{3}=49+(383-383/6)=\frac{2209}{6}$$

Nota: Se trata del tercer problema planteado por Federico II (1194-1250), resuelto por Fibonacci y recogido en su obra Líber Quadratorum.

BIBLIOGRAFIA

BERLINSKI, David, Ascenso Infinito, Breve Historia de las Matemáticas, ISNB: 84-8306-676-9
BOYER, Carl B., Historia de la Matemática, ISBN: 84-206-8186-5
DEPMAN, Iván. I., Del Álgebra Clásica al Álgebra Moderna, ISBN: 978-5-484-01047-9
DIOFANTO, La Arithmética, ISNB: 978-84-96566-73-6
GEORGES, Ifrah, Historia Universal de las Cifras, ISBN: 84-239-9730-8
GOBERNA, JORNET, PUENTE y RODRIGUEZ, Álgebra y Fundamentos, ISNB: 84-344-8026-3
GONZALEZ URBANEJA, P.M. Pitágoras el filósofo del número, ISBN: 84-95599-08-2
HAWKING, Stephen, Dios Creó los Números, ISNB: 978-84-8432-753-1
HOFMANN, Joseph E., Historia de la Matemática, ISBN: 968-18-6286-4
MANKIEWICZ, Richard, Historia de las Matemáticas, ISNB: 84-493-1787-8
MILLA GASCA, Ana, Euclides la fuerza del razonamiento matemático, ISBN: 84-955599-85-6
PLA CARRERA, Josep, Liu Hui Nueve Capítulos de la Matemática China, ISBN: 978-84-92493-43-2
REY PASTOR, Julio, Historia de la Matemática, ISBN: 84-7432-807-1
SANCHEZ FERNANDEZ, C., y otro, Las Funciones, un paseo por la Historia, ISBN: 978-84-96566-57-6
TATTERSALL, James, Elementary Number Theory in Nine Chapters, ISBN: 0-521-61524-0
WALKER, J.M., Antiguas Civilizaciones Mesopotámicas, ISNB: 84-8403-310-4

APOYO INTERNET

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero
http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_natural
http://www.sectormatematica.cl/historia.htm
http://www.slideshare.net/acsa/matematicas-china-e-india-presentation
http://es.wikipedia.org/wiki/Pitag%C3%B3ricos
http://www.google.es/#hl=es&source=hp&q=origen+de+los+numeros&aq=f&aqi=g10&aql=&oq=&gs_rfai=&fp=6215056f63dbb911
http://html.rincondelvago.com/origen-y-significado-de-los-numeros.html
http://es.wikilingue.com/pt/Matem%C3%A1tica_griega
http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_matem%C3%A1tica
http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas_en_el_Antiguo_Egipto
http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Las_matem%C3%A1ticas_en_la_China_antigua_y_cl%C3%A1sica_(c._550_a.C.-1300_d.C)
http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_hel%C3%A9nica