## *4. FRACCIONES CONTINUAS*

### 4. 1*. Fracciones continuas: preliminares*

### 1.1 Demostrar el Algoritmo de Euclides.

Sea $a$ cualquier número real. Designamos con la letra $q_1$ el mayor entero que no supere a $a$. Si $a$ no es entero, se tiene $a = q_1 + \frac{1}{a_2}$; $a_2 > 1$. Exactamente igual, si $a_2, \cdots a_{n-1}$ no son enteros, se tiene $a_2 = q_2 + \frac{1}{a_3}; a_3 > 1; \cdots; a_{n-1} = q_2 + \frac{1}{a_n}; a_n > 1$, en virtud de lo cual tenemos el siguiente desarrollo de $a$ en fracción continua:

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

Si $a$ es racional o irracional, todos los números $a_n$ son racionales o irracionales, con lo cual el proceso puede prolongarse indefinidamente.
Si $a$ es racional y puede expresarse mediante una fracción racional irreducible con denominador positivo $\alpha = \frac{a}{b}$, el proceso indicado será finito y podrá efectuarse mediante el *Algoritmo de Euclides*, esto es:

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1, \quad con \quad 0 \leq r_1 < b.\\
&b = r_1 q_2 + r_2, \quad con \quad 0 \leq r_2 < r_1.\\
&r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad con \quad 0 \leq r_3 < r_2.\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_{n-1} = r_{n-1} q_s + r_n, \quad con \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}.\\
&r_{n-1} = r_n q_{n-1} + r_n.
\end{aligned}$$

donde $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, que se llaman *cocientes incompletos*, son números naturales distintos de cero, salvo $q_1$, que puede ser cero y pueden expresarse entre paréntesis como $[q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n]$.
Se llaman *reducidas* a los valores que resultan de efectuar las operaciones parciales, esto es:

$$r_1 = q_1;\ r_2 = q_1 + \frac{1}{q_2};\ r_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \ldots\ldots, \ r_n = q_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Fácilmente se halla una ley muy simple de formación de las reducidas, observando que $r_n (n > 1)$ se obtiene de de $r_{n-1}$ sustituyendo los números $q_{n-1}$ por $q_{n-1} + \frac{1}{n}$ en la expresión literal $r_{n-1}$. En efecto, haciendo para unificar $P_o = 1\ y\ Q_o = 0$ y escribiendo $\frac{A}{B} = \frac{Pn}{Q_n}$ para designar A con la notación $P_n$ y B con la notación $Q_n$, podemos representar, sucesivamente, las fracciones reducidas en la forma siguiente:

$$r_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}, \quad r_2 = \frac{q_1 + \frac{1}{q_2}}{1} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2 \cdot 1 + 0} = \frac{q_2 P_1 + P_o}{q_2 Q_1 + Q_o} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$r_3 = \frac{\left((q_2 + \frac{1}{q_3}\right) P_1 + P_o}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right) Q_1 + Q_o} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}, \cdots, r_s = \frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}$$

por tanto, los numeradores y denominadores de las fracciones reducidas los podemos calcular sucesivamente por las formulas:

$$P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

La solución a la fracción propuesta es:

$$\frac{26}{7} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = [3,1,2,2]$$

donde las reducidas son:

$$r_1 = 3\,.\; r_2 = 3 + \frac{1}{1} = 4\,.\; r_3 = 3 + \frac{1}{\frac{2+1}{2}} = 3 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}$$

y, finalmente,

$$r_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{5}} = 3 + \cfrac{1}{\frac{7}{5}} = 3 + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}.$$

El procedimiento expuesto recoge la ortodoxia más tradicional o *científica* del cálculo de fracciones continuas, sin embargo en la práctica la aplicación del *Algoritmo de Euclides* nos permite una solución mucho más sencilla.

## 1.2 Calcular la fracción continua de la fracción $\frac{972}{421}$.

Utilizando el *Algoritmo de Euclides*, calculamos los cocientes incompletos:

$$\left|\begin{array}{l} 972 = 421 \cdot 2 + 130 \\ 421 = 130 \cdot 3 + 31 \\ 130 = 31 \cdot 4 + 6 \\ 31 = 6 \cdot 5 + 1 \\ 6 = 1 \cdot 6 + 0 \end{array}\right| \quad \frac{972}{421} = [2,3,4,5,6]$$

Obtenemos las reducidas por el procedimiento tradicional:

$$r_1 = 2 = \frac{2}{1} \quad r_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad r_3 = \frac{4 \cdot 7 + 2}{4 \cdot 3 + 1} = \frac{30}{13} \quad r_4 = \frac{5 \cdot 30 + 7}{5 \cdot 13 + 3} = \frac{157}{68}$$

$$r_5 = \frac{6 \cdot 157 + 30}{6 \cdot 68 + 13} = \frac{972}{421}$$

y ahora, las reducidas utilizando el Algoritmo de Euclides:

| n | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| $P_n$ | 0 1 | 2 | 7 | 30 | 157 | 972 |
| $Q_n$ | 1 0 | 1 | 3 | 13 | 68 | 421 |

Hemos operado de la siguiente forma:

$$\frac{1 \cdot 2 + 0}{0 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{1}. \ \frac{2 \cdot 3 + 1}{1 \cdot 3 + 0} = \frac{7}{3}. \ \frac{7 \cdot 4 + 2}{3 \cdot 4 + 1} = \frac{30}{13}. \ \frac{30 \cdot 5 + 7}{13 \cdot 5 + 3} = \frac{157}{68}. \ \frac{157 \cdot 6 + 30}{68 \cdot 6 + 13} = \frac{972}{421}.$$

Si relacionamos $\frac{157}{68}$ con $\frac{972}{421}$, esto es, $421 \cdot 157 - 972 \cdot 68 = 1$, obtenemos una diferencia que es el $mcd\ (972{,}421) = \ 1 = 421(+157) + 972(-68)$ y también conocida como *Identidad de Bézout*, herramienta imprescindible para la resolución de ecuaciones tanto modulares como diofánticas.

## 1.3 Calcular la fracción continua de la fracción $\frac{103993}{33102}$.

El desarrollo de la fracción es:

$$\frac{103993}{33102} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}} = [3,7,15,1,292,\cdots].$$

Por el Algoritmo de Euclides, calculamos las reducidas:

| n | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | | *3* | *7* | *15* | *1* | *292* |
| $P_n$ | 0 1 | 3 | 22 | 333 | 355 | 103993 |
| $Q_n$ | 1 0 | 1 | 7 | 106 | 113 | 33102 |

Se trata de una fracción infinita de un número irracional, como es $\pi$, donde se alcanza una exactitud de $\frac{103993}{33102}$= 3,14159265, ocho cifras.

## 1.4 Calcular la fracción continua de la fracción $\frac{3803}{3607}$.

Utilizando el Algoritmo de Euclides, desarrollamos la fracción:

$$
\begin{aligned}
3803 &= 3607 \cdot 1 + 196 \\
3607 &= 196 \cdot 18 + 79 \\
196 &= 79 \cdot 2 + 38 \\
79 &= 38 \cdot 2 + 3 \\
38 &= 3 \cdot 12 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0
\end{aligned}
\qquad q_n = [1,18,2,2,12,1,2]
$$

Calculamos las reducidas:

| n | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | | *1* | *18* | *2* | *2* | *12* | *1* | *2* |
| $P_n$ | 0 1 | 1 | 19 | 39 | 97 | 1203 | 1300 | 3803 |
| $Q_n$ | 1 0 | 1 | 18 | 37 | 92 | 1141 | 1233 | 3607 |

Hemos calculado la relación que existe entre los dos mayores primos que resultan de la factorización de $123456789 = 3^2 \cdot 3607 \cdot 3803$.

## 1.5 Calcular la fracción continua de $\frac{1457}{536}$.

El desarrollo de la fracción es

$$\frac{1457}{536} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1}}}}}}}}} = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,\cdots]$$

y las reducidas las obtenemos,

| n | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | | *2* | *1* | *2* | *1* | *1* | *4* | *1* | *1* | *6* | *1* |
| $P_n$ | 0 1 | 2 | 3 | 8 | 11 | 19 | 87 | 106 | 193 | 1264 | 1457 |
| $Q_n$ | 1 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 7 | 32 | 39 | 71 | 465 | 536 |

Se trata de una fracción infinita de un número irracional transcendente, como es $e$, donde se alcanza una exactitud de $\frac{1457}{536}$= 2,71828, cinco cifras.

## 4. 2. *Fracciones continuas y las ecuaciones lineales.*

### 2.1 Calcular coeficientes Bézout de $1785x + 719y = 1$

Según la *Identidad de Bézout*, dados dos números naturales ***a*** y ***b*** donde el $mcd\ (a, b)\ =\ d$, existen dos números enteros ***s*** y ***t*** tales que $d = as + bt$, es decir, $mcd(a,b) = as + bt$. *Etienne Bézout (1730-1783),* militar y matemático francés, seguidor y ferviente admirador de Euclides a partir del que, sobre la base de su algoritmo, desarrolla su propio teorema.
A partir del teorema expuesto, por el *Algoritmo de Euclides:*

$$\begin{aligned} 1785 &= 719\cdot 2 + 347 \\ 719 &= 47\cdot 2 + 25 \\ 347 &= 25\cdot 13 + 22 \\ 25 &= 22\cdot 1 + 3 \\ 22 &= 3\cdot 7 + 1 \\ 3 &= 1\cdot 3 + 0 \end{aligned} \qquad mcd(1785, 719) = 1$$

Calculamos las reducidas:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | *2* | *2* | *13* | *1* | *7* | *3* |
| 0 1 | 2 | 5 | 67 | 72 | 571 | 1785 |
| 1 0 | 1 | 2 | 27 | 29 | 230 | 719 |

Los coeficientes Bézout son el $230\ y\ 571$, ya que $1785(+230) + 719(-571) = 1$. El desarrollo completo sería,

$$mcd(1785,719) = 1 = 1785(+230) + 719(-571) = 1785(230 + 719t) + 719(-571 - 1785t)$$

De donde, la solución a la ecuación:

$$1785(230 + 719t) + 719(-571 - 1785t) = 1$$

### 2.2 Calcular coeficientes Bézout de $1223x + 197y = 1$

El desarrollo de la fracción $\frac{1223}{197}$, es, $\dfrac{1223}{197} = 6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8}}}} = q_n = [6,4,1,4,8]$.

Los convergentes son:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | *6* | *4* | *1* | *4* | *8* |
| 0 1 | 6 | 25 | 31 | 149 | 1223 |
| 1 0 | 1 | 4 | 5 | 24 | 197 |

Teniendo en cuenta que $mcd = (1223{,}195) = 1 = 1223(-24) + 197(149)$, la solución vendrá determinada por $1223(-24 - 197t) + 197(149 + 1223t) = 1$.

### 2.3 Calcular coeficientes Bézout de $4057x + 1151y = 1$

Para el desarrollo utilizamos el Algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned} 4057 &= 1151\cdot 3 + 604 \\ 1151 &= 604\cdot 1 + 547 \\ 604 &= 547\cdot 1 + 57 \\ 547 &= 57\cdot 9 + 34 \\ 57 &= 34\cdot 1 + 23 \\ 34 &= 23\cdot 1 + 11 \\ 23 &= 11\cdot 2 + 1 \\ 11 &= 1\cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

De donde obtenemos $q_n = [3,1,1,9,1,1,2,11]$ y los convergentes

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | *3* | *1* | *1* | *9* | *1* | *1* | *2* | *11* |
| 0 1 | 3 | 4 | 7 | 67 | 74 | 141 | 356 | 4057 |
| 1 0 | 1 | 1 | 2 | 19 | 21 | 40 | 101 | 1151 |

Como los coeficientes Bézout son $101\ y\ 356$, tenemos

$$4057(101 + 1151t) + 1151(-356 - 4057t) = 1.$$

### 2.4 Resolver la ecuación $3751x + 131y = 5$

Calculamos los coeficientes para $3751x + 131y = 1$ utilizando la fracción $\frac{3751}{131}$.

$$\frac{3751}{131} = 28 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}}} = [28,1,1,1,2,1,2,4].$$

y los convergentes

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | *28* | *1* | *1* | *1* | *2* | *1* | *2* | *4* |
| 0 1 | 28 | 29 | 57 | 86 | 229 | 315 | 859 | 3751 |
| 1 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 8 | 11 | 30 | 131 |

Donde los coeficientes de Bézout son el $30\ y\ el\ 859$.
Aplicados a la solución de la ecuación $3751x + 131y = 5$, tenemos
Despejamos *x*:

$$3751x = 5 + 131t,\ \ 30\cdot(3751x = 5 + 131t),\ \ x = 19 + 131t.$$

Por sustitución, despejamos *y*:

$$131y = 5 - 3751(19 + 131t) = -71264 - 491381t$$
$$y = -544 - 3751t$$

luego, la ecuación tiene como solución:

$$3751(19 + 131t) + 131(-544 - 3751t) = 5$$

### 2.5 Resolver la ecuación $12347x + 9773y = 1.000.000$

Aplicando métodos anteriores, tenemos $\frac{12347}{9773} = [1,3,1,3,1,11,1,3,10]$ y los convergentes son:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | *1* | *6* | *1* | *3* | *1* | *11* | *1* | *3* | *10* |
| 0 1 | 1 | 4 | 5 | 19 | 24 | 283 | 307 | 1204 | 12347 |
| 1 0 | 1 | 3 | 4 | 15 | 19 | 224 | 243 | 953 | 9773 |

Donde los coeficientes Bézout son el 953 $y\ el$ 1204 y la solución de la ecuación resulta:
Despejando *y*:

$$9773y \equiv 1000000(\acute{m}\acute{o}d.\,12347)$$
$$1204 \cdot 9773y \equiv 1204 \cdot 1000000(m\acute{o}d.\,12347)$$
$$y \equiv 6989(m\acute{o}d.\,12347)$$

Despejamos *x*:

$$12347x = 1000000 - 9773 \cdot 6989 - 9773t$$
$$12347x = -67303497 - 9773t$$
$$x = -5451 - 9773t$$

Luego, la solución de la ecuación,

$$12347(-5451 - 9773t) + 9773(6989 + 12347t) = 1.000.000$$

## 4. 3. *Fracciones continuas y las ecuaciones cuadráticas.*

### 3.1 Desarrollar la fracción continua $\sqrt{19}$.

La relación de las fracciones continuas con los cuerpos cuadráticos se basa en que los desarrollos de los irracionales cuadráticos son periódicos.
Un número irracional $\alpha$ es cuadrático si, y sólo si, los coeficientes de su fracción continua se repiten periódicamente a partir de un cierto término.
Para desarrollar el irracional cuadrático $\alpha$ vamos a calcular los coeficientes $a_n$ al mismo tiempo que los restos $\alpha_n$. Concretamente $a_n$ es la parte entera de $\alpha_n$ y $\alpha_{n+1} = 1/(\alpha_n - a_n)$.
En la fracción planteada, la $\sqrt{19}$ está comprendida entre 4 y 5, esto es, $a_0 = 4$. Para $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3}$ y $a_1 = 2$. Para $\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}} = \frac{\sqrt{19}+2}{5}$ y $a_2 = 1$. Así, sucesivamente,

llegaríamos a la conclusión de que $\sqrt{19}=\left[4,\overline{2,1,3,1,2,8}\right]$, donde la barra indica el periodo que se repite:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *4* | *2* | *1* | *3* | *1* | *2* | *8* | *8* |
| $P_n$ | 4 | 9 | 13 | 48 | 61 | 170 | 1421 | 3012 |
| $Q_n$ | 1 | 2 | 3 | 11 | 14 | 39 | 326 | 691 |

Con lo que $\frac{3012}{691} = 4{,}3589\ y\ 4{,}389^2 =\ 19{,}00001047$, prácticamente un cuadrado exacto.

## 3.2 Mediante fracción continua, resolver $x^2+3x-1=0$.

Como el discriminante es $\Delta = B^2-4AC=3^2-4\cdot 1(-1)=13$, desarrollando la fracción continua de $\sqrt{13}$, obtenemos:

$$\alpha_0=\sqrt{13}\to a_0=3,\quad \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}\to a_1=1,\quad \alpha_2=\frac{1}{4-\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}\to a_2=1$$

$$\alpha_3=\frac{3}{\sqrt{13}-2}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}\to a_3=1,\quad \alpha_4=\frac{3}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{4}\to a_4=1$$

$$\alpha_5=\frac{4}{\sqrt{13}-3}=\sqrt{13}+3\to a_5=6,\quad \alpha_6=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}\to a_6=1$$

Los convergentes del discriminante son:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *3* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *6* |
| $P_n$ | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 119 | 137 |
| $Q_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 33 | 38 |
| $P_n/Q_n=\sqrt{\Delta}$ | 3,000 | 4,000 | 3,500 | 3,666 | 3,606 | 3,606 | 3,606 |

Como $3{,}606^2 =\ 13{,}0032$, las dos raíces de la ecuación vendrán determinadas por

$$\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-3+3{,}606}{2}=0{,}303 \\ x_2=\dfrac{-3-3{,}606}{2}=-3{,}303\end{cases}$$

Para más exactitud, debe ampliarse el número de coeficientes.

## 3.3 Mediante fracción continua, resolver $x^2-5x-7=0$.

El discriminante es $\Delta = 5^2-4\cdot 1(-7)=53$, que genera dos raíces reales de la forma

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1(-7)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{53}}{2}.$$

Utilizando las fracciones continuas, obtenemos

$$\sqrt{53}=7\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}}}}\quad a_n=[7,3,1,1,3,14,3,1,1,3,\cdots]$$

Ahora calculamos la fracción convergente

$$\left\{\frac{7}{1},\frac{22}{3},\frac{29}{4},\frac{51}{7},\frac{182}{25},\frac{2599}{357},\frac{7979}{1096},\frac{10578}{1453},\frac{18557}{2549},\frac{66249}{9100}\right\}$$

Con la que conseguimos $\frac{66249}{9100}=7{,}28011\ y\ 7{,}28011^2=\ 53{,}0000161$, con un error insignificante, luego, las raíces primitivas de la ecuación, serán $x_1$ =6,14005 y $x_2$ =-1,14005.

## 3.4 Mediante fracción continua, resolver $x^2+3x+11=0$.

La ecuación tiene como discriminante $3^2-4\cdot 1\cdot 11=-35$, por lo que sus dos raíces complejas, son,

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{35}i}{2}\begin{cases}x_1=-1{,}5-2{,}958039i\\x_2=-1{,}5+2{,}958039i\end{cases}$$

Utilizando las fracciones continuas, desarrollando los primeros 15 restos de $\sqrt{35i}$ y $\sqrt{35}$, obnemos $[5i,-2i,-2i,\cdots,-2i\cdots]$ y $[5,1,10,1,10,\cdots,1,10,\cdots]$ que nos permite conocer las fracciones $\frac{775i}{131}=5{,}916030$ y $\frac{203253121}{34356048}=5{,}916079$ que divididas por dos resultan los coeficientes 2,958015 y 2,958039, más exacta la segunda.

## 3.5 Mediante fracción continua, resolver $3x^2+7x+17=0$.

El discriminante de la ecuación es $7^2-4\cdot 3\cdot 17=-155$, por lo que sus dos raíces complejas son:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{155}i}{6}\begin{cases}x_1=-1{,}\hat{6}-2{,}0749833i\\x_2=-1{,}\hat{6}+2{,}0749833i\end{cases}$$

Para $\sqrt{155}$ obtenemos $[12,2,4,2,24,2,4,2,24,\cdots]$ y una fracción de $\frac{1509836288}{121272969}=12{,}4498996$ que dividida por 6 tenemos 2,07498326, prácticamente la misma que se da en la solución anterior.

De haberse utilizado $\sqrt{155i}$, habríamos conseguido una fracción de $\frac{4096i}{329} = 12{,}449848i$ que dividida por 6 resultaría $2{,}0749747i$, algo menos exacta que la anterior.

## 4. 4. *Fracciones continuas y la ecuación Pell.*

### 4.1 Mediante fracción continua, resolver $x^2 - 11y^2 = 1$.

Si $\alpha = a + b\sqrt{D}$ es un entero perteneciente al cuerpo cuadrático $K = \mathbb{Q}\sqrt{D}$ y $N(\alpha) = \left(a + b\sqrt{D}\right)\left(a - b\sqrt{D}\right) = a^2 - Db^2 = \pm 1$, siendo *N*(*a*,*b*) la norma del conjugado $a - b\sqrt{D}$, para la $Ecuación\ Pell$ una solución sería $\left(x + y\sqrt{D}\right)\left(x - y\sqrt{D}\right) = x^2 - Dy^2 = 1$, donde el valor de ***D*** podemos calcularlo mediante fracciones continuas.
Para $\sqrt{11}$ obtenemos $a_n = \left[3, \overline{3}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{6}, \cdots\right]$ que generan las siguientes reducidas o convergentes:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *3* | *3* | *6* | *3* | *6* | *3* | *6* | *3* | *6* | *3* |
| x | 3 | 10 | 63 | 199 | 1257 | 3970 | 25077 | 79201 | 500283 | 1580050 |
| y | 1 | 3 | 19 | 60 | 379 | 1197 | 7561 | 23880 | 150841 | 476403 |
| $x^2 - Dy^2$ | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 |

Por el desarrollo anterior podemos constatar que $10^2 - 11 \cdot 3^2 = 1$ es una solución que satisface a la ecuación planteada. También para las reducidas $4{,}6{,}8\ y\ 10$

$$199^2 - 11 \cdot 60^2 = 3970^2 - 11 \cdot 1197^2 = 79201^2 - 11 \cdot 23880^2 = 1580050^2 - 11 \cdot 476403^2 = 1$$

Si hacemos que

$$x = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^1 + (10 - 3\sqrt{11})^1}{2} = 10, \quad y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^1 - (10 - 3\sqrt{11})^1}{2\sqrt{11}} = 3$$

$$x = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^2 + (10 - 3\sqrt{11})^2}{2} = 199, \quad y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^2 - (10 - 3\sqrt{11})^2}{2\sqrt{11}} = 60$$

$$x = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^3 + (10 - 3\sqrt{11})^3}{2} = 3970, \quad y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^3 - (10 - 3\sqrt{11})^3}{2\sqrt{11}} = 1197$$

$$x = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^4 + (10 - 3\sqrt{11})^4}{2} = 79201, \quad y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^4 - (10 - 3\sqrt{11})^4}{2\sqrt{11}} = 23880$$

$$x = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^5 + (10 - 3\sqrt{11})^5}{2} = 1580050, \quad y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^5 - (10 - 3\sqrt{11})^5}{2\sqrt{11}} = 476403$$

obtenemos para la $Ecuación\ Pell$ la siguiente solución:

$$x = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{D})^n + (\alpha - \beta\sqrt{D})^n}{2}, \quad y = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{D})^n - (\alpha - \beta\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.$$

## 4.2 Mediante fracción continua, resolver $x^2 - 31y^2 = 1$.

Para $\sqrt{31}$, tenemos $a_n = [5,1,1,3,5,3,1,1,10,1,\cdots]$, que nos proporcionan los siguientes pares de convergentes

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *5* | *1* | *1* | *3* | *5* | *3* | *1* | *1* | *10* | *1* |
| x | 5 | 6 | 11 | 39 | 206 | 657 | 863 | 1520 | 16063 | 17583 |
| y | 1 | 1 | 2 | 7 | 37 | 118 | 155 | 273 | 2885 | 3158 |
| $x^2 - Dy^2$ | -6 | 5 | -3 | 2 | -3 | 5 | -6 | 1 | -6 | 5 |

De las parejas calculadas, la única que satisface a la ecuación es la ***8***, de la que se comprueba que una solución es $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = 1$.
Dado lo elevado de los números que conforman la estructura cuadrática, la utilización de exponentes nos lleva cifras muy elevadas, por ejemplo:

$$x = \frac{(1520+273\sqrt{31})^2 + (1520-273\sqrt{31})^2}{2} = 4620799$$

$$y = \frac{(1520+273\sqrt{31})^2 - (1520-273\sqrt{31})^2}{2\sqrt{31}} = 829920$$

$$x = \frac{(1520+273\sqrt{31})^3 + (1520-273\sqrt{31})^3}{2} = 14047227440$$

$$y = \frac{(1520+273\sqrt{31})^3 - (1520-273\sqrt{31})^3}{2\sqrt{31}} = 2522956527$$

## 4.3 Mediante fracción continua, resolver $x^2 - 37y^2 = 1$.

Referente a $\sqrt{37}$, tenemos $a_n = [6,12,12,\cdots]$, que nos proporcionan los siguientes pares de convergentes:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *6* | *12* | *12* | *12* | *12* | *12* | *12* | *12* |
| x | 6 | 73 | 882 | 10657 | 128766 | 1555849 | 18798954 | 227143297 |
| y | 1 | 12 | 145 | 1752 | 21169 | 255780 | 3090529 | 37342128 |
| $x^2 - Dy^2$ | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |

Algunas de las parejas corresponden a las siguientes potencias:

$$x = \frac{(73+12\sqrt{37})^2 + (73-12\sqrt{37})^2}{2} = 10657,$$

$$y = \frac{(73+12\sqrt{37})^2 - (73-12\sqrt{37})^2}{2\sqrt{37}} = 1752$$

$$x = \frac{(73+12\sqrt{37})^3 + (73-12\sqrt{37})^3}{2} = 1555849,$$

$$y=\frac{(73+12\sqrt{37})^3-(73-12\sqrt{37})^3}{2\sqrt{37}}=255780$$

$$x=\frac{(73+12\sqrt{37})^4+(73-12\sqrt{37})^4}{2}=227143297,$$

$$y=\frac{(73+12\sqrt{37})^4-(73-12\sqrt{37})^4}{2\sqrt{37}}=37342128$$

## 4.4 Mediante fracción continua, resolver $x^2-21y^2=1$.

Aplicando métodos anteriores, obtenemos:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *4* | *1* | *1* | *2* | *1* | *1* | *8* | *1* |
| x | 4 | 5 | 9 | 23 | 32 | 55 | 472 | 527 |
| y | 1 | 1 | 2 | 5 | 7 | 12 | 103 | 115 |
| $x^2-Dy^2$ | -5 | 4 | -3 | 4 | -5 | 1 | -5 | 4 |

De las parejas calculadas, sólo una satisface a la ecuación: $55^2-21\cdot 12^2=1$. Podemos obtener otras soluciones utilizando exponentes:

$$x=\frac{(55+12\sqrt{21})^2+(55-12\sqrt{21})^2}{2}=6049,\quad y=\frac{(55+12\sqrt{21})^2-(55-12\sqrt{21})^2}{2\sqrt{21}}=1320$$

$$x=\frac{(55+12\sqrt{21})^3+(55-12\sqrt{21})^3}{2}=665335,$$

$$y=\frac{(55+12\sqrt{21})^3-(55-12\sqrt{21})^3}{2\sqrt{21}}=145188$$

$$x=\frac{(55+12\sqrt{21})^4+(55-12\sqrt{21})^4}{2}=73180801,$$

$$y=\frac{(55+12\sqrt{21})^4-(55-12\sqrt{21})^4}{2\sqrt{21}}=15969360$$

En esta ecuación, $21=3\cdot 7$ que generan desarrollos de:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *1* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* |
| x | 1 | 2 | 5 | 7 | 19 | 26 | 71 | 97 | 265 |
| y | 1 | 1 | 3 | 4 | 11 | 15 | 41 | 56 | 153 |
| $x^2-Dy^2$ | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 |
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| $\alpha_n$ | *2* | *1* | *1* | *1* | *4* | *1* | *1* | *1* | *4* |
| x | 2 | 3 | 5 | 8 | 37 | 45 | 82 | 127 | 590 |
| y | 1 | 1 | 2 | 3 | 14 | 17 | 31 | 48 | 223 |
| $x^2-Dy^2$ | -3 | 2 | -3 | 1 | -3 | 2 | -3 | 1 | -3 |

En el caso de $\sqrt{3}$, satisfacen la ecuación las parejas $2{,}4{,}6, y\ 8$ y, referente a $\sqrt{7}$, las parejas $4\ y\ 8$.
Si utilizamos congruencias para resolver estas ecuaciones, obtenemos:

$x^2 \equiv 1(mód.3)$, con soluciones, $x_1$ =1+3t y $x_2 = 2 + 3t$
$x^2 \equiv 1(mód.7)$, con soluciones, $x_1$ =1+7t y $x_2 = 6 + 3t$

Aplicando el $Teorema\ Chino\ de\ Restos$, para la ecuación planteada:

$x^2 \equiv 1(mód.21)$,

con soluciones

$x_1$ = 1+21t, $x_2 = 8 + 21t, x_3 = 13 + 21t, x_4 = 20 + 21t.$

Estos valores de $x$ nos permiten dar solución a la $Ecuación\ de\ Pell$, por ejemplo:

$$x = 3 \cdot 0 + 2 = 2,\ x = 3 \cdot 2 + 1 = 7, x = 3 \cdot 8 + 2 = 26,\ x = 3 \cdot 32 + 1 = 97$$
$$x = 7 \cdot 1 + 1 = 8,\ x = 7 \cdot 18 + 1 = 127, x = 7 \cdot 289 + 1 = 2024$$
$$x = 21 \cdot 2 + 13 = 55,\ x = 21 \cdot 288 + 1 = 6049.$$

Conociendo los valores de $x$ es fácil deducir el valor de $y$.

## 4.5 Mediante fracción continua, resolver $x^2 - 105y^2 = 1$.

Por desarrollo de la fracción continua, obtenemos:

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *10* | *4* | *20* | *4* | *20* | *4* | *20* | *4* |
| x | 10 | 41 | 830 | 3361 | 68050 | 275561 | 5579270 | 22592641 |
| y | 1 | 4 | 81 | 328 | 6641 | 26892 | 544481 | 2204816 |
| $x^2 - Dy^2$ | -5 | 1 | -5 | 1 | -5 | 1 | -5 | 1 |

Satisfacen a la ecuación las parejas pares, siendo el número algebraico $41 + 4\sqrt{105}.$
Como $105\ =\ 3 \cdot 5 \cdot 7$, podemos obtener valores parciales empleando congruencias.
Ya conocemos las soluciones del 3 y del 7, en cuanto al 5, $x^2 \equiv 1(mód.5)$, sus dos raíces primitivas son $x_1 = 1 + 5t$ y $x_2 = 4 + 5t$.
El $Teorema\ Chino\ de\ Restos$ nos proporciona las 8 raíces de 105, que son:

$x^2 \equiv 1(mód.105), x\ \equiv$ 1,29,34,41,64,71,76,104$(mód.105)$.

Algunos valores de $x$ son:

$$x = 105 \cdot 0 + 41 = 41,\ \ x = 105 \cdot 32 + 1 = 3361, x = 105 \cdot 2624 + 41 = 275561.$$

## 4. 5. *Fracciones continuas y las formas cuadráticas.*

### 5.1 Mediante fracción continua, resolver $x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

La solución de una forma cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = m$, requiere los siguientes pasos:

Calcular el discriminante: $D = B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$.
Calcular la estructura del número algebraico: $\mathbb{Z}\sqrt{D} = \sqrt{12}$ =$2\sqrt{3}$.
Calcular la norma: $\left(\alpha + \beta\sqrt{D}\ \right)(\alpha - \beta\sqrt{D})$ =$\left(2 + 1\sqrt{3}\ \right)(2 - 1\sqrt{3})$ =1.
Calcular una de las variables: $\left[(\alpha + \beta\sqrt{D}) - \left(\alpha - \beta\sqrt{D}\right)\right]/(\sqrt{D}) = \frac{[(2+1\sqrt{3})-(2-1\sqrt{3})]}{2\sqrt{3}} = \pm 1$.
Calcular la otra variable, como: $x^2 + Bx + C = 0 = x^2 + x4(-1) + 1^2 - 1 = 0$.

Los datos utilizados corresponden a $\sqrt{3} = [1,1,2,1,2,\cdots]$, fracción continua desarrollada anteriormente.
La estructura $\left(\alpha+\beta\sqrt{D}\right)-\left(\alpha-\beta\sqrt{D}\right)=\pm 2\beta\sqrt{D}=\alpha^2-D\beta^2=1$ que, utilizando exponentes, podemos escribir como:

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{D})^n-(\alpha-\beta\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}}=\begin{cases}\pm X\\ \pm Y\end{cases}$$

calcula una de las variables dependiendo del valor que adopte $A\ y\ C$, esto es:

$Si\ A\ = 1\ \ y\ \ B > 1\ calcula\ el\ valor\ de\ Y,$
$Si\ B = 1\ \ y\ A > 1\ calcula\ el\ valor\ de\ X,$
$Si\ B \geq 1\ \ y\ A \geq 1\ calcula\ el\ valor\ de\ X\ o\ Y\ con\ signos\ opuestos.$

La ecuación planteada corresponde al caso último, por lo que tiene raíces iguales con signos contrarios para ambas variables, veamos:

$$\frac{(2+1\sqrt{3})^1-(2-1\sqrt{3})^1}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\pm 1\\ \pm 1\end{cases}, \quad \frac{(2+1\sqrt{3})^2-(2-1\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\pm 4\\ \pm 4\end{cases},$$

$$\frac{(2+1\sqrt{3})^3-(2-1\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\pm 15\\ \pm 15\end{cases}, \quad \frac{(2+1\sqrt{3})^4-(2-1\sqrt{3})^4}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\pm 56\\ \pm 56\end{cases},$$

$$\frac{(2+1\sqrt{3})^5-(2-1\sqrt{3})^5}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\pm 209\\ \pm 209\end{cases}.$$

Estos resultados se pueden comprobar mediante a la aplicación de $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

### 5.2 Mediante fracción continua, resolver $x^2 + 5xy + 5y^2 = 1$.

El discriminante es $D = B^2 - 4AC = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$.
Si desarrollamos la fracción continua de $\sqrt{5}$, con $\sqrt{5} = [2,4,4,\cdots]$ obtenemos $\left(9 + 4\sqrt{5}\right)$, que es el número algebraico necesario para dar solución a esta ecuación.

El conjugado o $norma$ de este número es $N(\alpha,\beta)=(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=1$. Esta $norma$ debe tener valor de $\pm1$, caso contrario, *D* no sería invertible para el producto, no sería un dominio de integridad y, por tanto, no sería solución del cuerpo cuadrático. Observar que esta $norma$ no es más que la solución de la $Ecuación\ Pell$.
Como $C=5$, por tanto mayor que 1, calculamos $Y$ mediante la aplicación de

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{D})^n-(\alpha-\beta\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}}=\pm Y$$

$$\frac{(9+4\sqrt{5})^1-(9-4\sqrt{5})^1}{\sqrt{5}}=\pm 8,\quad \frac{(9+4\sqrt{5})^2-(9-4\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}}=\pm 144,$$

$$\frac{(9+4\sqrt{5})^3-(9-4\sqrt{5})^3}{\sqrt{5}}=\pm 2584,\quad \frac{(9+4\sqrt{5})^4-(9-4\sqrt{5})^4}{\sqrt{5}}=\pm 46368$$

$$\frac{(9+4\sqrt{5})^5-(9-4\sqrt{5})^5}{\sqrt{5}}=\pm 832040.$$

El valor de $Y$ lo sustituimos en la ecuación y despejamos $X$ en $x^2+Bx+C=0$, esto generará dos raíces que se irán combinando hasta alcanzar infinitas soluciones.
De los valores calculados para $Y$, veamos cuales son los que corresponden a $X$:

$$x^2+Bx+C=0$$

$$x^2+5x(+8)+5(+8)^2-1=\begin{cases}x_1=-11\\x_2=-29\end{cases},\quad x^2+5x(-8)+5(-8)^2-1=\begin{cases}x_1=11\\x_2=29\end{cases},$$

$$x^2+5x(+144)+5(+144)^2-1=\begin{cases}x_1=-199\\x_2=-521\end{cases},$$

$$x^2+5x(-144)+5(-144)^2-1=\begin{cases}x_1=199\\x_2=521\end{cases},$$

y, en definitiva:

$$x^2+5x(\pm2584)+5(\pm2584)^2-1=\begin{cases}x_1=\pm3571\\x_2=\pm9394\end{cases},$$

$$x^2+5x(\pm46368)+5(\pm46368)^2-1=\begin{cases}x_1=\pm167761\\x_2=\pm64079\end{cases},$$

$$x^2+5x(\pm832040)+5(\pm832040)^2-1=\begin{cases}x_1=\pm1149851\\x_2=\pm3010349\end{cases}.$$

## 5.3 Mediante fracción continua, resolver $3x^2+5xy+y^2=1$.

El valor del discriminante es $D=5^2-4\cdot3\cdot1=13$ y, mediante fracción continua, obtenemos el valor para $\sqrt{13}=[3,1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,\cdots]$ que, con el desarrollo:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n$ | *3* | *1* | *1* | *1* | *1* | *6* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| x | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 119 | 137 | 256 | 393 | 649 |
| y | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 33 | 38 | 71 | 109 | 180 |
| $x^2-Dy^2$ | -4 | 3 | -3 | 4 | -1 | 4 | -3 | 3 | -4 | 1 |

descubrimos la $norma\ N(\alpha,\beta)=\left(649+180\sqrt{13}\right)\left(649-180\sqrt{13}\right)=1$, a partir de la cual calculamos el valor de $X$, ya que $A=3$, distinto de uno:

$$\frac{(\alpha+\beta\sqrt{D})^n-(\alpha-\beta\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}}=\pm X$$

$$\frac{(649+180\sqrt{13})^1-(649-180\sqrt{13})^1}{\sqrt{13}}=\pm 360$$

$$\frac{(649+180\sqrt{13})^2-(649-180\sqrt{13})^2}{\sqrt{13}}=\pm 467280$$

$$\frac{(649+180\sqrt{13})^3-(649-180\sqrt{13})^3}{\sqrt{13}}=\pm 606529080$$

$$\frac{(649+180\sqrt{13})^4-(649-180\sqrt{13})^4}{\sqrt{13}}=\pm 2598560160$$

Sustituimos estos valores en la ecuación planteada y obtenemos por $y^2+By+C=0$:

$$y^2+11y(\pm 40)+5(\pm 40)^2-1=\begin{cases} y_1=\pm 19 \\ y_2=\pm 421 \end{cases},$$

$$y^2+11y(\pm 16080)+5(\pm 16080)^2-1=\begin{cases} y_1=\pm \quad 7639 \\ y_2=\pm 169241 \end{cases},$$

$$y^2+11y(\pm 6464120)+5(\pm 6464120)^2-1=\begin{cases} y_1=\pm 3070859 \\ y_2=\pm 68034461 \end{cases},$$

$$y^2+11y(\pm 2598560160)+5(\pm 2598560160)^2-1=\begin{cases} y_1=\pm 1234477679 \\ y_2=\pm 27349684081 \end{cases}.$$

Como hemos podido comprobar, estas ecuaciones generan infinitas soluciones pero, si la estructura del número algebraico es alta como en este caso, su consecución es difícil si no se cuenta con instrumentos informáticos. En este caso hemos utilizado la calculadora de $Windows\ 7$.

## 5.4 Mediante fracción continua, resolver $x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$.

Para el discriminante $D = 8^2 - 4\cdot1\cdot5 = 44$, donde $\sqrt{44} = 2\sqrt{11} = [3,3,6,3,6...]$ con desarrollo de la fracción continua:

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| | *3* | *3* | *6* | |
| 01 | 3 | 10 | 63 | … |
| 10 | 1 | 3 | 19 | … |
| | -2 | 1 | -2 | |

donde el número algebraico es $10 + 3\sqrt{11}$ y la $norma$ $(10 + 3\sqrt{11})(10 - 3\sqrt{11}) = 1$. Calculamos el valor de $Y$, ya que $C = 5$:

$$\frac{(\alpha + \beta\sqrt{D})^n - (\alpha - \beta\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}} = \pm Y$$

$$\frac{(10+3\sqrt{11})^1 - (10-3\sqrt{11})^1}{2\sqrt{11}} = \pm 3, \quad \frac{(10+3\sqrt{11})^2 - (10-3\sqrt{11})^2}{2\sqrt{11}} = \pm 60,$$

$$\frac{(10+3\sqrt{11})^3 - (10-3\sqrt{11})^3}{2\sqrt{11}} = \pm 1197, \quad \frac{(10+3\sqrt{11})^4 - (10-3\sqrt{11})^4}{2\sqrt{11}} = \pm 23880,$$

$$\frac{(10+3\sqrt{11})^5 - (10-3\sqrt{11})^5}{2\sqrt{11}} = \pm 476403.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación principal, las raíces de $X$ son:

$$x^2 + 8x(\pm 3) + 5(\pm 3)^2 - 1 = \begin{cases} x_1 = \pm 2 \\ x_2 = \pm 22 \end{cases}, \quad x^2 + 8x(\pm 60) + 5(\pm 60)^2 - 1 = \begin{cases} x_1 = \pm 41 \\ x_2 = \pm 439 \end{cases},$$

$$x^2 + 8x(\pm 1197) + 5(\pm 1197)^2 - 1 = \begin{cases} x_1 = \pm 818 \\ x_2 = \pm 8758 \end{cases},$$

$$x^2 + 8x(\pm 23880) + 5(\pm 23880)^2 - 1 = \begin{cases} x_1 = \pm 16319 \\ x_2 = \pm 174721 \end{cases},$$

$$x^2 + 8x(\pm 476403) + 5(\pm 476403)^2 - 1 = \begin{cases} x_1 = \pm 325562 \\ x_2 = \pm 3485662 \end{cases}.$$

## 5.5 Mediante fracción continua, resolver $2x^2 + 13xy + 3y^2 = 8$.

El discriminante $D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 145$ con, $\sqrt{145} = [12,24,24 \cdots]$, que genera el número algebraico $289 + 24\sqrt{145}$ y la $norma$ $N(\alpha,\beta) = (289 + 24\sqrt{145})(289 - 24\sqrt{145}) = 1$, nos revela que la ecuación planteada tiene solución.

La ecuación tiene $A$ y $C$ distintos a uno, además, el coeficiente independiente es también distinto a uno, lo que nos obligaría a utilizar ideales para resolver dicha ecuación, no obstante, podemos despejar $Y$ de la forma siguiente:

$$\frac{m((\alpha+\beta\sqrt{D})^n-(\alpha-\beta\sqrt{D})^n)}{2\sqrt{D}}=\pm Y,$$

donde $m$ es el coeficiente independiente.

$$\frac{8((289+24\sqrt{145})^1-(289-24\sqrt{145})^1)}{2\sqrt{145}}=\pm 192,$$

$$\frac{8((289+24\sqrt{145})^2-(289-24\sqrt{145})^2)}{2\sqrt{145}}=\pm 110976,$$

$$\frac{8((289+24\sqrt{145})^3-(289-24\sqrt{145})^3)}{2\sqrt{145}}=\pm 64143936.$$

Ahora, sustituimos estos valores en la ecuación planteada y obtenemos para $X$:

$$2x^2+13x(\pm 192)+3(\pm 192)^2-8=\begin{cases} x_1=\pm \quad 46 \\ x_2=\pm 1202 \end{cases},$$

$$2x^2+13x(\pm 110976)+3(\pm 110976)^2-8=\begin{cases} x_1=\pm \quad 26590 \\ x_2=\pm 694754 \end{cases},$$

$$2x^2+13x(\pm 64143936)+3(\pm 64143936)^2-8=\begin{cases} x_1=\pm \quad 15368974 \\ x_2=\pm 4015666610 \end{cases}.$$

## 5.6 Mediante fracción continua, resolver $3x^2+7xy+y^2=9$.

El discriminante es $7^2-4\cdot 1\cdot 3=37$ que, aplicando fracciones continuas, genera una norma de $(73+12\sqrt{37}\ )(73-12\sqrt{37}=1$, con lo que obtenemos:

$$x=\frac{9(73+12\sqrt{37})-(73-12\sqrt{37})}{3\sqrt{37}}=72$$

Ahora, en función de este resultado, podemos obtener algunas soluciones como:

| $x$ | 7 | 72 | 737 | 737 | 107597 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -3 y -46 | -33 y -471 | -338 y 4821 | -4821 | -49346 y 703833 | $\cdots$ |

Se pueden obtener infinitas soluciones.

## 4. 6. *Fracciones continuas y los cuerpos cuadráticos.*

### 6.1 Definición de los cuerpos cuadráticos

Sea $K = Q(\alpha)$ un cuerpo cuadrático donde $\alpha$ es un entero algebraico y raíz de un polinomio $x^2 + bx + c \in Z[x]$. Sea $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ y $K = Q\sqrt{b^2 - 4c}$. Podemos establecer que $b^2 - 4ac = m^2 d$, donde $d$ es libre de cuadrados, es $K = Q\left(m\sqrt{d}\right) = Q\left(\sqrt{d}\right)$. Tenemos pues que todo cuerpo cuadrático es de la forma $K = Q\left(\sqrt{d}\right)$ donde $d$ es un entero libre de cuadrados, $d \neq 1$. Como en el polinomio mínimo $\left(\sqrt{d}, Q\right) = x^2 - d = \left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right)$ resulta que los elementos de $K$ son de la forma $a + b\sqrt{d}$, donde $a, b \in Q$, la extensión $K/Q$ es una extensión de Galois y sus automorfismos son la identidad y el determinado por $\sigma\left(\sqrt{d}\right) = -\sqrt{d}$. A este automorfismo le llamaremos simplemente conjugado de $K$, y lo representaremos como una norma, donde

$N\left(a + b\sqrt{-D}\right) = a^2 + Db^2$, si es un cuerpo cuadrático imaginario ó

$N\left(a + b\sqrt{D}\right) = a^2 - Db^2$, si es un cuerpo cuadrático real

Así, la diferencia entre un cuerpo cuadrático imaginario o complejo y un cuerpo cuadrático real es que, el discriminante del primero es negativo y el del segundo positivo. Cuando $D < 0$ hay una cantidad finita de valores de $a$ y $b$, si $D > 0$, los valores de $a$ y $b$ son infinitos.

### 6.2 A partir del número 69, calcular una representación en cuerpos cuadráticos imaginarios.

Sabemos que la raíz cuadrada de 69 está comprendida entre $8^2 < 69 < 9^2$. Las diferencias de cuadrados iguales o menores a 8 con 69, son:

$$69 - 1^2 = 68 = 2^2 \cdot 17,\ \ 69 - 2^2 = 65 = 5 \cdot 13,\ \ 69 - 3^2 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$69 - 4^2 = 53,\ \ 69 - 5^2 = 44 = 2^2 \cdot 11,\ \ 69 - 6^2 = 33 = 3 \cdot 11$$
$$69 - 7^2 = 20 = 2^2 \cdot 5,\ \ 69 - 8^2 = 5$$

Aunque de todas estas diferencias podemos crear representaciones, vamos a elegir la penúltima: $69 - 7^2 = 20 = 2^2 \cdot 5$.

Calculamos la norma : $N\left(7 + 2\sqrt{-5}\right) = 7^2 + 5 \cdot 2^2 = 69$

Calculamos el producto de: $a \cdot b = C = \left(7 + 2\sqrt{-5}\right)\left(7 - 2\sqrt{-5}\right) = 69$

Calculamos la suma de: $a + b = B = \left(7 + 2\sqrt{-5}\right) + \left(7 - 2\sqrt{-5}\right) = 14$

El polinomio mínimo será: $x^2 - 14x + 69 = 0$

Mediante el discriminante comprobamos si es cierto:

$$D=b^2-4ac=14^2-4\cdot1\cdot69=-80=-5\cdot2^4$$

donde $d=-5$ que es libre de cuadrados.

La ecuación generada tiene como solución:

$$x_1=7+2\sqrt{5}i \text{ y } x_2=7-2\sqrt{5}i$$

Podemos utilizar la fracción continua de $\sqrt{5}$ que es:

$$\sqrt{5}=\left[2,\{4,4,\ldots\}\right]=2,\frac{9}{4},\frac{38}{17},\frac{161}{72},\frac{682}{305},\frac{2889}{1292},\frac{12238}{5473},\frac{51841}{23184},\frac{219602}{98209},\frac{930249}{416020}$$

donde

$$\sqrt{5}=\frac{930249}{416020}=2,236068...$$

que es una buena aproximación.

## 6.3 A partir del número 69, calcular una representación en cuerpos cuadráticos reales.

Como estas representaciones se encuentran en diferencias de cuadrados iguales o superiores a 9 con el número 69, los resultados pueden ser infinitos. Por ejemplo:

$$9^2-69=12=2^2\cdot3,\ 10^2-69=31,\ 11^2-69=52=2^2\cdot13,\ 12^2-69=75=3\cdot5^2,$$
$$13^2-69=100=2^2\cdot5^2,\ 14^2-69=127,\ 15^2-69=156=2^2\cdot3\cdot13$$

Vamos a tomar la última representación: $15^2-69=156=2^2\cdot3\cdot13.$

Calculamos la norma : $N\left(15+2\sqrt{39}\right)=15^2-39\cdot2^2=69$

Calculamos el producto de : $a\cdot b=C=\left(15+2\sqrt{39}\right)\left(15-2\sqrt{39}\right)=69$

Calculamos la suma de: $a+b=B=\left(15+2\sqrt{39}\right)+\left(15-2\sqrt{39}\right)=30$

El polinomio mínimo será: $x^2-30x+69=0$

Mediante el discriminante comprobamos si es cierto:

$$D=b^2-4ac=30^2-4\cdot1\cdot69=624=3\cdot13\cdot2^4$$

donde $d=39$ que es libre de cuadrados.
La ecuación generada tiene como solución:

$x_1 = 15 + 2\sqrt{39}$ y $x_2 = 15 - 2\sqrt{39}$

Podemos utilizar la fracción continua de $\sqrt{39}$ que es

$$\sqrt{39} = \left[6, \{4, 12, \ldots\}\right] = \left[6, \frac{25}{4}, \frac{306}{49}, \frac{1249}{200}, \frac{15294}{2449}, \frac{62425}{9996}, \frac{764394}{122401}, \frac{3120001}{499600}\right]$$

donde

$$\sqrt{39} = \frac{764394}{122401} = 6{,}244998...$$

es una buena aproximación.

## 6.4 Crear un sistema con la ecuación $x^2 - 14x + 69 = 0.$

Aparte de la factorización de enteros cuadráticos, una ecuación generada puede servir para crear un sistemas algebraico destinado, por ejemplo, a una aplicación informática.
Supongamos que transformamos la ecuación $x^2 - 14x + 69 = 0$ en una función multivariable $f(x, y) = x^2 - 14y + 69 = 0.$ La solución de este sistema, si la tiene, pasa por encontrar cuatro valores, dos para $x$ y dos para $y,$ dado su carácter de cuadrático. El procedimiento es muy simple: Calculamos el valor de $x$ en función de $y$ utilizando modulares y, calculamos $y$ mediante sustitución. Por ejemplo:

$$x^2 - 14x + 69 \equiv 0(mód.14)$$

que es equivalente a $x^2 \equiv 1(mód.14)$ y que tiene como soluciones $x_1 = 1 + 14t$ $x_2 = 13 + 14t$
Ahora, por sustitución, calculamos $y$.

$(1 + 14t)^2 - 14y + 69 = 0$ que resulta para $y_1 = 5 + 2t + 14t^2$

$(13 + 14t)^2 - 14y + 69 = 0$ que resulta para $y_2 = 17 + 26t + 14t^2$

con lo que tenemos, para el sistema propuesto, la siguiente solución:

$$f(x, y) = x^2 - 14y + 69 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 1 + 14t, \ y_1 = \ \ 5 + 2t + 14t^2 \\ x_2 = 13 + 14t, \ \ y_2 = 17 + 26t + 14t^2 \end{cases}$$

### 6.5 Crear un sistema con la ecuación $x^2 - 30x + 69 = 0$.

Transformamos la ecuación $x^2 - 30x + 69 = 0$ en una función multivariable de la forma $f(x, y) = x^2 - 30y + 69 = 0$. Calculamos $x$ en función de $y$:

$$x^2 - 30x + 69 \equiv 0(mód.30)$$

ecuación que es equivalente a $x^2 \equiv 21(mód.30)$ que tiene como soluciones:

$$x_1 = 9 + 30t,\ x_2 = 21 + 30t$$

Por sustitución, calculamos $y$:

$(9+30t)^2 - 30y + 69 = 0$ que resulta para $y_1 = 5 + 18t + 30t^2$

$(21+30t)^2 - 30y + 69 = 0$ que resulta para $y_2 = 17 + 42t + 30t^2$

Con lo que, la solución de este segundo sistema, resulta

$$f(x, y) = x^2 - 30y + 69 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 9 + 30t,\ y_1 = \ \ 5 + 18t + 30t^2 \\ x_2 = 21 + 30t,\ \ y_2 = 17 + 42t + 30t^2 \end{cases}$$

## 4. 7. *Fracciones continuas y los números especiales.*

### 7.1 Calcular la fracción continua de Pi.

El número Pi con 150 decimales es:

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940813

La fracción continua es:

$$\{3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4\}$$

y los convergentes:

$$\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}\}$$

## 7.2 Calcular la fracción continua de e.

El número e con 150 decimales es:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526

La fracción continua es:

$$\{2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,14,1,1,16,1,1,18,1,1,20\}$$

y los convergentes:

$$\{2,3,\frac{8}{3},\frac{11}{4},\frac{19}{7},\frac{87}{32},\frac{106}{39},\frac{193}{71},\frac{1264}{465},\frac{1457}{536},\frac{2721}{1001},\frac{23225}{8544},\frac{25946}{9545},\frac{49171}{18089},\frac{517656}{190435}\}$$

## 7.3 Calcular la fracción continua de la proporción áurea.

La proporción áurea con 150 decimales es:

1.61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693179318006077

La fracción continua es:

$$\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$$

y los convergentes:

$$\{1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\frac{89}{55},\frac{144}{89},\frac{233}{144},\frac{377}{233},\frac{610}{377},\frac{987}{610}\}$$

**BIBLIOGRAFIA**

ALACA, S. Y VILLIEAMS, K., Introductory Algebraic Number Theory, ISBN: 0-521-54011-9
HARDY, G.H. and WRIGHT,E.M., An Introduction to the Theory of Numbers, ISBN: 19-853171-0
IVORRA CASTILLO, Carlos, Teoría de Números, (apuntes en PDF)
KOSHY, Thomas, Elementary Number Theory with Aplications, ISBN: 978-0-12-372487-8
VERA LÓPEZ, Antonio, Problemas y Ejercicios de Matemáticas Discreta, ISBN: 84-605-4351-X

**APOYO INTERNET**

http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html
http://mathworld.wolfram.com/Convergent.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n_continua
http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/diccio/diccarit.htm#fraccont
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfCALC.html (Calculadora)
http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html