CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Todos los números primos conocidos terminan en $1,3,7$ *ó* 9 aunque no todos los números que terminan en $1,3,7$ *ó* 9 son primos. Las terminaciones en $2,5$ *ó* 0 denotan números que son divisibles por $2,5$ *ó* 10 luego, las dudas en la factorización de un número las podemos encontrar en aquéllos que terminan en $1,3,7$ *ó* 9, ya que pueden ser primos o compuestos.
Todo entero positivo N se puede escribir como $N = 10d + u$, dónde d y u representan, respectivamente, las decenas y unidades de N, con $0 \leqq u \leqq 9$.
Para determinar el criterio de divisibilidad de un número podemos utilizar sistemas modulares, de tal forma que $10d + u \equiv 0(mód.N)$.
Empecemos por demostrar los criterios de divisibilidad de los números con terminación en 1, como el $11,21,31,41,51,61,71,81,91,\cdots$.

Un número es divisible por 11 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas con 10 veces sus unidades es 11 o múltiplo de 11.
2. La diferencia entre sus decenas y sus unidades es 0, 11 ó múltiplo de 11.

Sea $10d + u \equiv 0(mód.11)$. Si multiplicamos la ecuación por 10 y sacamos restos respecto al módulo 11, resulta $d + 10u \equiv 0(mód.11)$ o bien $d \equiv u(mód.11)$, por lo que se demuestra que $11 | N$ sí, y sólo sí $11 | (d + 10u)$ *ó* $11 | (d - u)$.

Un número es divisible por 21 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 19 veces sus unidades es 21 o múltiplo de 21.
2. La diferencia entre sus decenas y 2 veces sus unidades es 0, 21 o múltiplo de 21.

Sea $10d + u \equiv 0(mód.21)$. Si multiplicamos la ecuación por 19 y sacamos restos respecto al módulo 21, resulta $d + 19u \equiv 0(mód.21)$ o bien $d \equiv 2u(mód.21)$, por lo que se demuestra que $21 | N$ sí, y sólo si $21 | (d + 19u)$ *ó* $21 | (d - 2u)$.
Dado que el número $21 = 3 \cdot 7$ entonces, también cuando $(3,7 \text{ ó } 21) | N$

Un número es divisible por 31 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 28 veces sus unidades es 31 o múltiplo de 31.
2. La diferencia entre sus decenas y 3 veces sus unidades es 0, 31 o múltiplo de 31.

Sea $10d + u \equiv 0(mód.31)$. Si multiplicamos la ecuación por 28 y sacamos restos respecto al módulo 31, resulta $d + 28u \equiv 0(mód.31)$ o bien $d \equiv 3u(mód.31)$, por lo que se demuestra que $31 | N$ sí, y sólo si $31 | (d + 28u)$ *ó* $31 | (d - 3u)$.
De las tres demostraciones podemos deducir que $9N + 1 = 10k$, ya que se establecen las igualdades $9 \cdot 11 + 1 = 10 \cdot 10 = 100$, $9 \cdot 21 + 1 = 10 \cdot 19 = 190$ *ó* $9 \cdot 31 + 1 = 10 \cdot 28 = 280$. Por otra parte, los inversos de los números $10,19$ *y* 28 respecto a los módulos $11,21$ *y* 31 son 1, 2 *y* 3, que forman una progresión aritmética de razón uno, y que coinciden con el valor de las decenas de N. Si esto es cierto, un número sería divisible por 101 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más $101 - 10 = 91$ veces sus unidades sea 0, 101 o múltiplo de 101.
2. La diferencia entre sus decenas y 10 veces sus unidades sea 0, 101 o múltiplo de 101.

Sea $N = 101^3 + 202 = 1 \cdot 030 \cdot 503$. Como $103050 + 3 \cdot 91 = 103323 = 3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 101$ es múltiplo de 101 o $103050 - 3 \cdot 10 = 103020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 101$ también lo es, lo que demuestra que $101 | N$ sí, y sólo si $101 | (d + 91u)$ *ó* $101 | (d - 10u)$.
Resumimos en el siguiente cuadro lo que acabamos de demostrar.

Criterios de divisibilidad números con terminación en 1			
N	Divisibilidad	**N**	Divisibilidad
11	$11\mid(d+10u)$ *ó* $11\mid(d-u)$	**61**	$61\mid(d+55u)$ *ó* $61\mid(d-6u)$
21	$21\mid(d+19u)$ *ó* $21\mid(d-2u)$	**71**	$71\mid(d+64u)$ *ó* $71\mid(d-7u)$
31	$31\mid(d+28u)$ *ó* $31\mid(d-3u)$	**81**	$81\mid(d+73u)$ *ó* $81\mid(d-8u)$
41	$41\mid(d+37u)$ *ó* $41\mid(d-4u)$	**91**	$91\mid(d+82u)$ *ó* $91\mid(d-9u)$
51	$51\mid(d+46u)$ *ó* $51\mid(d-5u)$	**101**	$101\mid(d+91u)$ *ó* $101\mid(d-10u)$

Criterios de divisibilidad de números con terminación en 9, que son complementarios de los números terminados en 1, tales como $9,19,29,39,49,59,69,79,89,99,\cdots$.

Un número es divisible por 9 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más sus unidades es 9 o múltiplo de 9.
2. La diferencia entre sus decenas y 8 veces sus unidades es 0, 9 o múltiplo de 9.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.9)$. Si sacamos restos de 10 respecto a 9, resulta $d+u\equiv 0(mód.9)$. Si multiplicamos la ecuación por (complemento $9-1=8$) y sacamos restos respecto al módulo 9, resulta $d-8u\equiv 0(mód.9)$ o bien $d\equiv 8u(mód.9)$, por lo que se demuestra que $9\mid N$ sí, y sólo si $9\mid(d+u)$ *ó* $9\mid(d-8u)$.

Dado que se trata de un número compuesto, $9=3\cdot 3$, también cuando $(3$ *ó* $9)\mid N$.

Un número es divisible por 19 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 2 veces sus unidades es 19 o múltiplo de 19.
2. La diferencia entre sus decenas y 17 veces sus unidades es 0, 19 o múltiplo de 19.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.19)$. Si multiplicamos la ecuación por 2 y sacamos restos respecto al módulo 19, resulta $d+2u\equiv 0(mód.19)$ o bien $d\equiv 17u(mód.19)$, por lo que se demuestra que $19\mid N$ sí, y sólo si $19\mid(d+2u)$ *ó* $19\mid(d-17u)$.

Un número es divisible por 29 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 3 veces sus unidades es 29 o múltiplo de 29.
2. La diferencia entre sus decenas y 16 veces sus unidades es 0, 29 o múltiplo de 29.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.29)$. Si multiplicamos la ecuación por 3 y sacamos restos respecto al módulo 29, resulta $d+3u\equiv 0(mód.29)$ ó bien $d\equiv 16u(mód.29)$, por lo que se demuestra que $29\mid N$ sí, y sólo si $29\mid(d+3u)$ *ó* $29\mid(d-16u)$.

Como en el caso anterior, se produce una progresión aritmética de razón *1* en el caso de la suma, $\{1,2,3,\cdots\}$ y una progresión aritmética de razón *9* en el caso de la resta, $\{8,17,26\cdots\}$ como se demuestra en la siguiente tabla:

Criterios de divisibilidad números con terminación en 9			
N	Divisibilidad	**N**	Divisibilidad
9	$9\mid(d+u)$ *ó* $9\mid(d-8u)$	**59**	$59\mid(d+6u)$ *ó* $59\mid(d-53u)$
19	$19\mid(d+2u)$ *ó* $19\mid(d-17u)$	**69**	$69\mid(d+7u)$ *ó* $69\mid(d-62u)$
29	$29\mid(d+3u)$ *ó* $29\mid(d-26u)$	**79**	$79\mid(d+8u)$ *ó* $79\mid(d-71u)$
39	$39\mid(d+4u)$ *ó* $39\mid(d-35u)$	**89**	$89\mid(d+9u)$ *ó* $89\mid(d-80u)$
49	$49\mid(d+5u)$ *ó* $49\mid(d-44u)$	**99**	$99\mid(d+10u)$ *ó* $99\mid(d-89u)$

Criterios de divisibilidad los números terminados en 3, como $3,13,23,33,43,53,63,73,83,93,\cdots$.

Un número es divisible por 3 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más sus unidades es 3 o múltiplo 3.
2. La diferencia entre sus decenas y 2 veces sus unidades es 0, 3 o múltiplo de 3.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.3)$. Si sacamos restos respecto al módulo 3, resulta $d+u\equiv 0(mód.3)$ o bien $d\equiv 2u(mód.3)$, por lo que se demuestra que $3\mid N$ sí, y sólo si $3\mid(d+u)$ *ó* $3\mid(d-2u)$.

Si la suma de sus decenas más sus unidades fuera 9 o múltiplo de nueve, tendríamos el criterio de divisibilidad del 9.

Un número es divisible por 13 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 4 veces sus unidades es 13 o múltiplo 13.
2. La diferencia entre sus decenas y 9 veces sus unidades es 0, 13 o múltiplo de 13.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.13)$. Si multiplicamos la ecuación por 4 y sacamos restos respecto al módulo 13, resulta $d+4u\equiv 0(mód.13)$ ó bien $d\equiv 9u(mód.13)$, por lo que se demuestra que $13|N$ sí, y sólo si $13|(d+4u)$ ó $13|(d-9u)$.

Un número es divisible por 23 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 7 veces sus unidades es 23 o múltiplo 23.
2. La diferencia entre sus decenas y 16 veces sus unidades es 0, 23 o múltiplo de 23.

Sea $10d+u\equiv 0(mód.23)$. Si multiplicamos la ecuación por 7 y sacamos restos, respecto al módulo 23, resulta $d+7u\equiv 0(mód.23)$ o bien $d\equiv 16u(mód.23)$, por lo que se demuestra que $23|N$ sí, y sólo si $23|(d+7u)$ ó $23|(d-16u)$.

En este caso, las progresiones son de razón 3, para la suma y de razón 7 para la resta, como se puede observar en la siguiente tabla:

Criterios de divisibilidad números con terminación en 3			
N	Divisibilidad	**N**	Divisibilidad
3	$3|(d+u)$ ó $3|(d-2u)$	**53**	$53|(d+16u)$ ó $53|(d-37u)$
13	$13|(d+4u)$ ó $19|(d-9u)$	**63**	$63|(d+19u)$ ó $63|(d-44u)$
23	$23|(d+7u)$ ó $23|(d-16u)$	**73**	$73|(d+22u)$ ó $73|(d-51u)$
33	$33|(d+10u)$ ó $33|(d-23u)$	**83**	$83|(d+25u)$ ó $83|(d-58u)$
43	$43|(d+13u)$ ó $49|(d-30u)$	**93**	$93|(d+28u)$ ó $93|(d-65u)$

Criterios de divisibilidad de números con terminación en 7, que son complementarios de los números terminados en 3, como $7,17,37,47,57,67,77,87,97,\cdots$.

Un número es divisible por 7 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 5 veces sus unidades es 7 o múltiplo 7.
2. La diferencia entre sus decenas y 2 veces sus unidades es 0, 7 o múltiplo de 7

Sea $10d+u\equiv 0(mód.7)$. Si multiplicamos la ecuación por 5 y sacamos restos respecto al módulo 7, resulta $d+5u\equiv 0(mód.7)$ o bien $d\equiv 2u(mód.7)$, por lo que se demuestra que $7|N$ sí, y sólo si $7|(d+5u)$ ó $7|(d-2u)$.

Un número es divisible por 17 sí, y sólo sí,

1. La suma de sus decenas más 12 veces sus unidades es 17 o múltiplo 17.
2. La diferencia entre sus decenas y 5 veces sus unidades es 0, 17 o múltiplo de 17

Sea $10d+u\equiv 0(mód.17)$. Si multiplicamos la ecuación por 12 y sacamos restos, respecto al módulo 17, resulta $d+12u\equiv 0(mód.17)$ o bien $d\equiv 5u(mód.17)$, por lo que se demuestra que $17|N$ sí, y sólo si $17|(d+12u)$ ó $17|(d-5u)$.

En este caso, las progresiones son de razón 7, para la suma, y de razón 3, para resta. Ver tabla a continuación:

Criterios de divisibilidad números con terminación en 7			
N	Divisibilidad	**N**	Divisibilidad
7	$7|(d+5u)$ ó $7|(d-2u)$	**57**	$57|(d+30u)$ ó $57|(d-17u)$
17	$17|(d+12u)$ ó $17|(d-5u)$	**67**	$67|(d+47u)$ ó $67|(d-20u)$
27	$27|(d+19u)$ ó $27|(d-8u)$	**77**	$77|(d+54u)$ ó $77|(d-23u)$
37	$37|(d+26u)$ ó $37|(d-11u)$	**87**	$87|(d+61u)$ ó $87|(d-26u)$
47	$47|(d+33u)$ ó $47|(d-14u)$	**97**	$97|(d+68u)$ ó $97|(d-29u)$

Estos criterios de divisibilidad se basan en las terminaciones de los factores primos, siendo complementarios con los criterios posicionales.

Barcelona, Septiembre de 2009

Rafael Parra Machío