11. ECUACIONES DIOFANTICAS

11.1 Ecuaciones diofánticas de grado dos

1.1 Números de la forma $4k+1$ y $4k+3$.

Aunque de los números pueden hacerse todas las clasificaciones que se nos ocurran, todos se encuentran bajo dos patrones bien diferenciados: los de la forma $4k+1$, llamados de Fermat en honor a *Pierre de Fermat (1601-1665)* y los de la forma $4k+3$, llamados de Mersenne en honor a *Marín Mersenne (1588-1648)*. El que se les llame de Fermat o de Mersenne no significa que tengan que ser de uno o del otro, como ya quedó demostrado en el *capítulo II*, la clasificación es más por la forma que toman.
Cuando un número de la forma $4k+1$ es primo, tiene la particularidad de que es suma de dos cuadrados, esto es, $4k+1=x^2+y^2$. Por ejemplo, $4\cdot 7+1=5^2+2^2=29$. No ocurre así si el número no es primo. Por ejemplo, $4\cdot 8+1=5^2+2^3=33$ es suma de un cuadrado y un cubo, pero no de dos cuadrados, ya que $4\cdot 8+1=33=32+1^2=29+2^2=24+3^2=14+4^2=2^3+5^2$.
Un número de la forma $4k+3$, tanto si es primo como compuesto, nunca será suma de dos cuadrados. Por ejemplo, $4\cdot 11+3=47=46+1^2=43+2^2=38+3^2=31+4^2=2^2+3^2+3^2+5^2$.
Las dos formas anteriores de representar a los números nos llevan a lo que se ha venido en llamar la ecuación de Fermat generalizada que representamos como $x^2\pm 2y^2=N$ donde N es primo. De hecho esta ecuación se conoce como *conjetura de Albert Girard* que dice que *todo número primo mayor que dos, de las formas $4k+1$ ó $4k+3$, se puede obtener como resultado de la suma ó diferencia, según sea el valor de k, de un cuadrado y un doble cuadrado*.
Albert Girard (1595-1632) fue un matemático francés que demostró la existencia de las raíces imaginarias y calculó el área de las figuras poligonales trazadas sobre una superficie plana. También hizo aportaciones en la teoría de los números. Además, fue el introductor de los signos numéricos *sin, cos, tan*, en representación del seno, coseno y tangente.

1.2 Ecuaciones de la forma $x^2\pm 2y^2=N$.

En la solución de la ecuación de la forma $x^2\pm 2y^2=N$ influye la paridad de k y el valor de N. Si k es par, como $x^2+2(-1)^{2k}y^2=N$, la ecuación es suma de un cuadrado y el doble de otro que denotamos como $x^2+2y^2=N$. Si k es impar, como $x^2+2(-1)^{2k+1}y^2=N$, la ecuación es diferencia de un cuadrado y el doble de otro que denotamos como $x^2-2y^2=N$.
En cuanto al valor de N, si es primo la ecuación tendrá siempre solución, salvo en el caso de los de la forma $4k+1$, si es compuesto puede que no tenga solución o que la solución sea con un valor de y distinto a 2.
Hemos llevado a cabo un estudio sobre los 200 primeros números, 100 de la forma $4k+1$ y 100 de la forma $4k+3$, donde se incluyen números primos y compuestos, y los resultados quedan reflejados en los cuadros que detallamos a continuación.
La muestra recoge los siguientes números en donde los primos están sombreados:

Números de la forma $4k+1$

5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121
125	129	133	137	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177	181
185	189	193	197	201	205	209	213	217	221	225	229	233	237	241
245	249	253	257	261	265	269	273	277	281	285	289	293	297	301
305	309	313	317	321	325	329	333	337	341	345	349	353	357	361
365	369	373	377	381	385	389	393	397	401					

Números primos

Números de la forma $4k+3$

3	*7*	*11*	*15*	*19*	*23*	*27*	*31*	*35*	*39*	*43*	*47*	*51*	*55*	*59*
63	*67*	*71*	*75*	*79*	*83*	*87*	*91*	*95*	*99*	*103*	*107*	*111*	*115*	*119*
123	*127*	*131*	*135*	*139*	*143*	*147*	*151*	*155*	*159*	*163*	*167*	*171*	*174*	*179*
183	*187*	*191*	*195*	*199*	*203*	*207*	*211*	*215*	*219*	*223*	*227*	*231*	*235*	*239*
243	*247*	*251*	*255*	*259*	*263*	*267*	*271*	*275*	*279*	*283*	*287*	*291*	*295*	*299*
303	*307*	*311*	*315*	*319*	*323*	*327*	*331*	*335*	*339*	*343*	*347*	*351*	*355*	*359*
363	*367*	*371*	*375*	*379*	*383*	*387*	*391*	*395*	*399*					

Números primos

El resumen de los resultados ha sido el siguiente:

	Ecuación	$4k+1$	$4k+3$	*Total*
Primos que admiten la ecuación	$x^2 \pm 2y^2 = P$	14	40	54
Primos que no admiten la ecuación	$x^2 \pm 2y^2 = P$	24	0	24
Compuestos que admiten la ecuación	$x^2 \pm 2y^2 = C$	21	24	45
Compuestos que no admiten la ecuación	$x^2 \pm 2y^2 = C$	41	36	77
	Totales	**100**	**100**	**200**

Si partimos de que la ecuación $x^2 \pm Dy^2 = N$ con $N > 0$ y donde N puede ser primo o compuesto, tiene otra ecuación equivalente con distinto signo y con igual o distinto D, los resultados obtenidos en todos los números han sido de la forma $x^2 \pm Dy^2 = x^2 \pm D'y^2 = N$. Así, para el número 13 hemos obtenido $1^2 + 3 \cdot 2^2 = 7^2 - 4 \cdot 3^2 = 13$ ó $19^2 - 2 \cdot 5^2 = 6^2 + 11 \cdot 5^2 = 311$. El valor más alto para D ha sido 34, obtenido para los números 255 y 395, $15^2 + 30 \cdot 1^2 = 17^2 - 34 \cdot 1^2 = 255$ y $20^2 + 5 \cdot 1^2 = 19^2 - 34 \cdot 1^2 = 395$.
De un total de 78 números primos, 24 correspondientes a la forma $4k+1$ no admiten la conjetura de Girard contra 54, 14 de la forma $4k+1$ y 40 de la forma $4k+3$, que sí que la admiten.
De un total de 122 números compuestos, 45, 21 de la forma $4k+1$ y 24 de la forma $4k+3$, admiten la conjetura de Girard, por el contrario, de los 77 números restantes, 41 de la forma $4k+1$ y 36 de la forma $4k+3$, no admiten dicha conjetura.
Números primos como $23, 31, 47, 103, 139, 199, 211, 251, 307, 399$ de la forma $4k+3$, o números compuestos como $15, 27, 63, 75, 159, 203, 231, 275, 319, 387$ de la forma $4k+3$, no admiten la conjetura de Girard, ¿por qué? Influye la estructura del número, su forma, su composición, ¿qué? Girard se adelantó en su tiempo a las formas cuadráticas dentro de los campos complejos y reales, o sea, cuerpos algebraicos cuyo estudio lo abordaremos más adelante. Mientras tanto, es un tema que dejo al lector para que lo investigue.

1.3 Ecuaciones de la forma $x^2 + 3y^2 = z^3$.

François Viète (1540-1603) fue un matemático francés impulsor de un avance importante hacia la moderna notación algebraica, representando las incógnitas mediante vocales y las constantes mediante consonantes. También fue uno de los primeros en crear generadores para resolver ecuaciones de más de una variable. Para las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + 3y^2 = z^2$ tomó dos números enteros a y b, primos entre sí, con $a^3 > 9ab^2$, y creó el siguiente generador para el cálculo de las variables x, y, z,

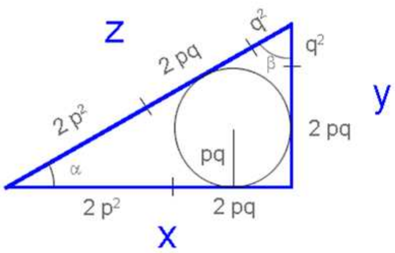
$$x = a^3 - 9ab^2,\ y = 3a^2b - 3b^3 \text{ y } z = a^2 + 3b^2.$$

Para $a = 3$ y $b = 2$, obtenemos: $x = 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 2^2 = -81, y = 3 \cdot 3^3 \cdot 2 - 3 \cdot 2^3 = 30$ y $z = 3^2 + 3 \cdot 2^2 = 21$ por lo que, la solución resulta $(-81)^2 + 3 \cdot 30^2 = 21^3 = 9261$. Observar que uno de los componentes es negativo, esto es debido a que $3^3 = 27$ y $9 \cdot 3 \cdot 2^2 = 108$ donde $27 < 108,$ y no al revés, como recomienda Viète.

Para $a = 7$ y $b = 2,$ resulta $91^2 + 3 \cdot 270^2 = 61^3 = 226981.$ Esta ecuación también admite la solución de $x = 427,$ $y = 122$ y $z = 61.$

1.4 Ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 = z^2.$

El conocimiento del teorema de Pitágoras es milenario y no obstante haber sido demostrado en muchas formas diferentes y de que, aparentemente, ya se conoce todo con respecto a este teorema, muchas propiedades sorprendentes siguen estando ocultas.
Una terna pitagórica consiste en tres enteros positivos a, b y c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2.$
El nombre deriva del teorema de Pitágoras, el cual plantea que cualquier triángulo rectángulo con una longitud entera de sus lados forma una terna pitagórica. Lo inverso también es verdadero, cualquier terna pitagórica forma un triángulo rectángulo.
Si (a, b, c) es una terna pitagórica, también lo es (da, db, dc) para cualquier número entero positivo d. Una terna pitagórica primitiva es aquella en la que el máximo común divisor de a, b y c es 1. Si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, entonces el número d es el máximo común divisor de los tres números $mcd(da, db, dc) = d$. Los triángulos que se forman con una terna pitagórica no primitiva son siempre proporcionales a otro triángulo cuyos lados forman una terna pitagórica primitiva.
Si $m > n$ son enteros positivos, entonces $a = m^2 - n^2,$ $b = 2mn,$ $c = m^2 + n^2$ *es una terna pitagórica.* Es primitiva si y sólo si m y n son coprimos y solamente uno de ellos es par (si ambos m y n son impares, entonces a, b y c serán pares, y la terna no será una terna pitagórica primitiva). No todas las ternas pitagóricas pueden ser generadas con las expresiones anteriores, pero todas las ternas *primitivas* surgen de este modo de un único par de números coprimos $m > n.$ Así pues, existe un número infinito de ternas pitagóricas primitivas.



También se puede considerar la siguiente, que señala que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par es siempre un número impar al cuadrado; y con el cateto impar, el doble de otro número al cuadrado.
Sean p, q dos números naturales $a = 2pq + q^2,$ $b = 2pq + 2p^2,$ $c = 2pq + p^2 + q^2.$
Se observa que si p=q se obtiene la terna más conocida $(3, 4, 5)$ o cualquiera de sus derivadas.
Aquí tenemos la fórmula original de los pitagóricos para generar ternas primitivas:
Para cualquier par de números enteros positivos $y > x$ impares y coprimos, donde el producto $xy = i$ es el cateto impar y $(y^2 - x^2)/2 = p$ es el cateto par, siendo $(y^2 + x^2)/2 = h$ la hipotenusa y el radio del encentro $x(y - x)/2 = r,$ teniendo además que $y(x + y)$ ó $y^2 + (xy)$ es igual al perímetro del triángulo y si sabemos que el perímetro por el radio del encentro es el duplo de su área, podemos deducir que $xy(x + y)(y - x)/2^2$ será igual al área del triángulo, recordando que $h - p = x^2$ es fácil obtener $h + p = x^2$ de cualquier terna primitiva.
Para m y n coprimos, $m - n = x$ y $m + n = y$ ó $(y - x)/2 = n$ y $(y + x)/2 = m$ donde $n(m - n) = r$ y $(m - n)(m + n)mn = A,$ entonces $A/(r/2)$ es igual al perímetro.
Si consideramos (x, y, z) como una terna pitagórica, podemos establecer la siguiente relación: $r = x + y - z,$ $a = x - r,$ $b = y - r.$ De la ecuación $(a + b + r)^2 = (r + a)^2 + (r + b)^2$ se desprende que $r^2 = 2ab.$ Ahora podemos plantear $s = a + b - r,$ $j = a - s,$ $k = b - s$ y sustituyendo en

$r^2 = 2ab$ obtenemos $(j+k+s)^2 = 2(j+s)(k+s)$ y $s^2 = j^2 + k^2$. De donde se deduce que todas las ternas pitagóricas están relacionadas entre sí. La fórmula resultante es la siguiente:
Para toda terna que cumpla $s^2 = j^2 + k^2$, se pueden hallar hasta otras 8 ternas combinando números positivos y negativos del tipo (x, y, z) tal que

$$x = \pm 2k \pm 2s \pm j,\;\; y = \pm 2j \pm 2s \pm k,\;\; z = \pm 2s \pm 2(j+k) \pm s.$$

Los generadores de ternas pitagóricas más habituales son:

1. Para $\underline{z - y = 2}$: $x = 2n,\; y = (n^2 - 1)\; y\; z = (n^2 + 1)$, con n de cualquier paridad. Por ejemplo, para $n = 7,\; 14^2 + 48^2 = 50^2$ y para $n = 8,\; 16^2 + 63^2 = 65^2$.
2. Para $\underline{z - y = 1}$: $x = n,\; y = 1/2\,(n^2 - 1)\; y\; z = 1/2\,(n^2 + 1)$, con n impar ya que de ser par, las ternas serían racionales. Por ejemplo, para $n = 7,\; 7^2 + 24^2 = 25^2$ y para $n = 8$, $8^2 + (63/2)^2 = (65/2)^2$ aparecen los racionales.
3. Para $\underline{z - y = d^2}$: $x = 2mn,\; y = (m^2 - n^2)\; y\; z = (m^2 + n^2)$, con n de cualquier paridad donde, la diferencia de $m - n = d$, para $m > n$, genera el cuadrado de d. Por ejemplo, para $m = 8,\; n = 7$, tenemos $112^2 + 15^2 = 113^2$, con $m - n = d = 8 - 7 = 1$ y $z - x = 113 - 112 = 1 = 1^2$. Para $m = 17,\; n = 6$, tenemos $204^2 + 253^2 = 325^2$, con $17 - 6 = 11$ y $325 - 204 = 121 = 11^2$.

Resultando que todas las posibles soluciones están relacionadas entre sí en forma de árbol, tal como muestra la tabla siguiente:

				9,40,41
			7,24,25	105,88,137
				60,67,109
				84,187,205
		5,12,13	48,55,73	297,304,425
				105,208,233
				44,117,125
			28,45,53	207,224,305
				95,168,193
				57,176,185
			39,80,89	377,336,505
				180,299,349
				217,456,505
1,0,1	3,4,5	20,21,29	119,120,139	696,697,985
				220,459,509
				52,165,173
			36,77,85	319,360,481
				175,288,337
				120,209,241
			33,56,65	252,275,373
				51,140,149
				115,252,277
		8,15,17	65,72,97	396,403,565
				136,273,305
				85,132,157
			12,35,37	133,156,205
				16,63,65

1.5 Las ternas de Alhacen.

Abu Ali al-Hasan Ibn al Haytam, más conocido en Occidente por Alhazén ó Alhacen, nació en Basora en el año 965, cuando ya declinaba el liderazgo científico de Bagdad, si bien allí comenzó sus estudios. Pero la mayor parte de su vida transcurrió en Egipto, donde el califa fatimí al-Hakim había fundado una Casa del Saber, y allí hizo sus más importantes descubrimientos,

interesándose por la física y por la parte más aplicada de la ciencia matemática, por eso es conocido por Alhacen el egipcio. Falleció en el año 1040. Su obra más importante titulada *Tratado sobre la resolución de un problema numérico*, dedicada a la teoría de números, resuelve mediante aplicación de congruencias y utilizando el Teorema Chino de Restos y el Teorema Wilson. El algebrista Al-Samawal Ibn Yakya Al-Magreb (1130-1180) asegura que Alhacen se interesó por las ternas pitagóricas, e ideó un sistema para resolver triángulos rectángulos numéricos. Es verdad que el mismo Al-Samawal critica a Alhacen porque sólo encuentra una solución al problema.
Partiendo de la diofántica $x^2+y^2=z^2,$ Alhacen resuelve la ecuación mediante la igualdad

$$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

Por ejemplo, para $a=7,\ 7^2+\left(\frac{7^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{7^2+1}{2}\right)^2 \ \rightarrow\ 7^2+24^2=25^2$

A partir de esta fórmula, Al-Samawal propone

$$a^2+\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \text{ y } b^2+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2$$

donde cada valor racional de a y $b,\ a>b,$ proporcionan un triangulo con infinitas soluciones.
Por ejemplo, para $a=7\ y\ b=5$

$$7^2+\left(\frac{7^2-5^2}{2\cdot 5}\right)^2=\left(\frac{7^2+5^2}{2\cdot 5}\right)^2 \ \rightarrow\ 7^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\left(\frac{37}{5}\right)^2$$
$$5^2+\left(\frac{7^2-5^2}{2\cdot 7}\right)^2=\left(\frac{7^2+5^2}{2\cdot 7}\right)^2 \ \rightarrow\ 5^2+\left(\frac{12}{7}\right)^2=\left(\frac{37}{7}\right)^2$$

1.6 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2+y^2=z^2+u^2.$

A partir de $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\pm bc)^2,$ recogido por *Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)* como proposición III-7 de sus Purismas, lo aplica en el siguiente caso para dar solución a una ecuación de la forma $x^2+y^2=z^2+u^2$:

$$(3^2+2^2)(2^2+1^2)=(6+2)^2+(3-4)^2=8^2+1^2 \text{ y}$$
$$(3^2+2^2)(2^2+1^2)=(6-2)^2+(3+4)^2=4^2+7^2 \text{ donde}$$
$$65=8^2+1^2=7^2+4^2$$

En la Aritmética de Diofanto de Alejandría, que Bachet comenta, se plantea la siguiente descomposición a partir de $65=8^2+1^2=7^2+4^2$

$$65^2=(8^2+1^2)(8^2+1^2)=(49-16)^2+(28+28)^2=33^2+56^2$$
$$65^2=(7^2+4^2)(7^2+4^2)=(64-1)^2+(8+8)^2=63^2+16^2$$
$$65^2=(7^2+4^2)(8^2+1^2)=\begin{cases}(56+4)^2+(32-7)^2=60^2+25^2\\(56-4)^2+(32+7)^2=52^2+39^2\end{cases}$$

de donde

$$\left.\begin{matrix}33^2+56^2=63^2+16^2\\60^2+25^2=52^2+39^2\end{matrix}\right\}=65^2$$

1.7 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2\pm y^2=c$ ó $x^2-y^2=z^3$.

La ecuación $x^2+y^2=c$ tendrá solución si, y sólo si, *c* es primo de la forma $4k+1.$ Si $c=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n,$ la ecuación tendrá solución si, y sólo si, $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ son de la forma $4k+1,$ caso de que alguno no lo sea, la ecuación no tendrá solución.
Por ejemplo:

Para $x^2+y^2=149=7^2+10^2$ ya que $149=4\cdot 37+1.$

Para $x^2+y^2=65=1^2+8^2=4^2+7^2$ ya $65=4\cdot 21+1$ y factoriza como $65=4\cdot 21+1$, dos números de la forma $4k+1$

Para $x^2+y^2=91$ no existe solución ya que $91=7\cdot 13=4\cdot 22+3$ donde $13=4\cdot 3+1$ y $7=4\cdot 1+3.$ Este último no es de la forma $4k+1.$

Para la ecuación diofántica del tipo $x^2-y^2=c$ con $c>0$ y $a>b,$ tiene solución si, y sólo si *c* se puede factorizar como $c=a\cdot b$ siendo $a,\ b$ números de la misma paridad, es decir, ambos pares o impares. Si existe solución ésta será de la forma $x=(a+b)/2$ e $y=(a-b)/2.$
Por ejemplo:

Para $x^2-y^2=17,$ si $17=1\cdot 17,$ resulta $x=(1+17)/2=18/2=9$ e $y=(1-17)/2=16/2=8$ luego $9^2-8^2=17.$

Recordemos la ecuación descubierta por los mesopotámicos en donde para un número n resulta que $n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$. Si n es impar, $n=\left(\frac{17+1}{2}\right)^2-\left(\frac{17-1}{2}\right)^2=9^2-8^2=17$ la solución es entera, si n es par, $n=\left(\frac{20+1}{2}\right)^2-\left(\frac{20-1}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-\left(\frac{19}{2}\right)^2=20$ la solución es entera pero sobre bases racionales.
La solución de la diofántica $x^2-y^2=z^3$ se basa en que la diferencia entre dos números triangulares consecutivos es un cubo, esto es

$$x^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4},\quad y^2=\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\ \text{y}\ z^2=n.$$

Esto lo podemos escribir como

$$x^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad y^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

y, por tanto $z = n^3$.
Con lo que resulta

$$x^2 - y^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} = z^3$$

Por ejemplo, para $n = 7$, $28^2 - 21^2 = 7^3$.

Basándose en esta propiedad, Euler crea el siguiente generador utilizando los enteros m y n

$$\begin{aligned}(m^2+n^2)^3 &= (m^2+n^2)^2(m^2+n^2)\\ &= (m^3+mn^2)^2 + (m^2n+n^3)^2\\ &= (m^3-3mn^2)^2 + (3m^2n-n^3)^2\end{aligned}$$

de donde

$$x = m^3+mn^2,\ y = m^2n+n^3,\ z = m^2+n^2\ ó$$
$$x = m^3-3mn^2,\ y = 3m^2n-n^3,\ z = m^2+n^2$$

Por ejemplo, para $m = 3$ y $n = 2$, $39^2 + 26^2 = 13^3$.

1.8 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 \cdots$.

Sea $n(2n+1)$, donde n es un entero cualquiera. Si $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ obtenemos

Para $n = 1$, $1\cdot(2+1) = 3$ donde $x^2 + y^2 = a^2 \to 3^2 + 4^2 = 5^2 \to \sum_{k=3}^{4} k^2 = 25$

Para $n = 2$, $2\cdot(4+1) = 10$ donde $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 \to 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \to \sum_{k=10}^{12} k^2 = 365$

La ecuación $n(2n+1) = 2n^2 + n$, es una parábola que tiene como raíces $n_1 = 0\ y\ n_2 = -1/2$. Si sacamos su derivada, resulta $2n^2 + n = 4n + 1$, estructura que permite la suma de cuadrados.

1.9 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Sean m, n, s tres enteros cualesquiera a partir de los cuales se puede establecer un generador que permita la solución de $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Veamos:

$$x = 2ms,\ y = 2ns,\ z = s^2 - (m^2+n^2)\ y\ t = s^2 + (m^2+n^2)$$

Para $m = 2$, $n = 3$, $s = 5$, tenemos

$$x = 2\cdot 2\cdot 5 = 20,\ y = 2\cdot 3\cdot 5 = 30,\ z = 5^2 - (2^2+3^2) = 12\ y\ t = 2^2 + (2^2+3^2) = 38$$

que tiene como solución $20^2+30^2+12^2=38^2.$

Para $m=3,\ n=7,\ s=13,$ obtenemos $78^2+182^2+111^2=227^2.$

Para $m=11,\ n=13,\ s=19,$ obtenemos $418^2+494^2+71^2=651^2.$

Si m,n,p,q son enteros cualesquiera, podemos obtener el siguiente generador:

$$x=(m^2-n^2)-(p^2+q^2),\ y=2mn-2pq,\ z=2mp-2nq\ y\ t=(m^2+n^2)+(p^2+q^2).$$

Para $m=3,\ n=3,\ p=1,\ q=2,$ obtenemos $3^2+14^2+18^2=23^2.$

Diofanto de Alejandría resuelve esta ecuación creando un generador a partir de los enteros r,s,t donde

$$x=-r^2+s^2+t^2,\ y=2rs,\ z=2rt\ y\ t=r^2+s^2+t^2$$

Para $r=-7,\ s=6,\ t=5,$ obtenemos $12^2+84^2+70^2=110^2.$

Fermat, por el contrario, resuelve la diofántica a partir de la propiedad numérica $4k+1$ y su representación mesopotámica $n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$. Resolvamos por vía de ejemplo.

Sea $n=4k+1=4\cdot7+1=29=2^2+5^2$. Como $2\left(\frac{29+1}{2}\right)=15\ y\ \left(\frac{29-1}{2}\right)=14,$ resulta la solución $14^2+5^2+2^2=15^2.$

1.10 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2+y^2+z^2=(x^2-y^2)+(y^2-z^2)+(x^2-z^2).$

Supongamos que la suma de las diferencias es igual al doble de la diferencia entre el mayor y el menor, y es también igual, por hipótesis, a la suma de los tres cuadrados.
Sea $z^2=1$ el menor cuadrado y $x^2=(a+1)^2=a^2+2a+1$ el mayor. El doble de la diferencia entre éstos es $2a^2+4a$ y la suma de los tres cuadrados es $a^2+2a+2+y^2$ luego, el cuadrado mediano será $y^2=a^2+2a-2,$ que debe ser un cuadrado. Por ejemplo, de la ecuación $a^2+2a-2=(a-9)^2,$ resulta para $a=83/20,$ entonces

$$x^2=(83/20+1)^2=(103/20)^2$$
$$y^2=(83/20)^2+2(83/20)-2=(97/20)^2$$
$$z^2=400=20^2$$

de donde

$$103^2+97^2+20^2=(103^2-97^2)+(97^2-20^2)+(103^2-20^2)$$

es la solución a la ecuación.

11.2 Ecuaciones diofánticas de grado tres

2.1 Números que generan series de cubos.

Como ya que se comentó en el Capítulo I, al neoplatónico *Teón de Esmirna (aprox.130 d.C.)* se le atribuye la suma de los cubos que, en notación actual podemos expresar como

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{4}\right)^2$$

y que como se puede comprobar, la suma es un cuadrado. Por ejemplo:

Para $m=5,\ \sum_{n=1}^{5} n^3 = 225 = 15^2$ ó para $m=13,\ \sum_{n=1}^{13} n^3 = 8281 = 91^2.$

Por otra parte, la suma de cubos genera números de la forma $4k+1,$ lo que nos permite desglosar dicha suma en suma de más de un cuadrado, así $\sum_{n=1}^{5} n^3 = 225 = 15^2 = 9^2 + 12^2,$ que podemos representar como $1^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + 5^3 = 9^2 + 12^2.$

Para $\sum_{n=1}^{7} n^3 = 784 = 28^2,$ la serie de cubos puede tener una equivalente en otra de cuadrados

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 &= 28^2 \\ &= 0^2 + 28^2 \\ &= 8^2 + 12^2 + 24^2 \\ &= 14^2 + 14^2 + 14^2 + 14^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 7^2 + 14^2 + 23^2 \end{aligned}$$

Recordemos que un número perfecto es un entero natural igual a la suma de sus divisores que son estrictamente inferiores a él. Algunos de estos números son:

$$\begin{aligned} &6 = 1 + 2 + 3 \\ &28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \\ &496 = 1+2+4+8+16+31+62,+124+248 \\ &8128 = 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 \end{aligned}$$

Estos números se forman mediante suma de cubos de números impares. Veamos:

$$\sum_{k=1}^{2} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 = 28$$

$$\sum_{k=1}^{4} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 = 496$$

$$\sum_{k=1}^{8} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 = 8128$$

Otros números perfectos son

$$\sum_{k=1}^{64}(2k-1)^3=33.550.336$$
$$\sum_{k=1}^{256}(2k-1)^3=8.589.869.056$$
$$\sum_{k=1}^{512}(2k-1)^3=137.438.691.328$$
$$\sum_{k=1}^{32768}(2k-1)^3=2.305.843.008.139.952.128$$

A *Platón (428-347 a.C.)* se le atribuye la suma de los cubos de tres números que es cubo de un cuarto número. Platón se basó en que el cubo, cuya arista es igual a 6, equivalen a la suma de los volúmenes de 3 cubos, en los que sus aristas que son $3,4\ y\ 5$, resulta $3^3+4^3+5^3=6^3$. De esta igualdad se desprende una propiedad que podemos expresar en la tabla siguiente y que desarrollaremos más adelante.

1^3	$1^3+23^3+26^3=14^3+30^3$
2^3	$2^3+5^3+30^3=14^3+29^3$
3^3	$3^3+0^3+4^3=3^3+4^3$
4^3	$4^3+18^3+41^3=9^3+42^3$
5^3	$5^3+0^3+9^3=5^3+9^3$
6^3	$6^3+36^3+36^3=35^3+37^3$
7^3	$7^3+61^3+83^3=52^3+87^3$
8^3	$8^3+14^3+55^3=23^3+54^3$
9^3	$9^3+117^3+238^3=121^3+237^3$

2.2 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^3+y^3+z^3=t^3$.

En el 1591 François Viète desarrolla una fórmula para poder generar suma de cubos. El generador que permite dar solución a la ecuación $x^3+y^3+z^3=t^3$.
Sean m,n dos enteros cualesquiera, para los valores de $x,y,z\ y\ t$ resulta

$$x=m(m^3-2n^3),\quad y=n(m^3-n^3),\quad z=n(m^3+n^3),\quad t=m(m^3+n^3)$$

Por ejemplo, para $m=2\ y\ n=1$, obtenemos $12^3+15^3+9^3=18^3$.

Por ejemplo, para $m=3\ y\ n=2$, obtenemos $33^3+70^3+92^3=105^3$.

Euler y *Jacques Binet (1789-1856)* propusieron el siguiente generador

$$x=-(m-3n)(m^2+3n^2)+1,\quad y=(m+3n)(m^2+3n^2)-1\,,$$
$$z=-(m^2+3n)^2+(m+3n),\quad t=(m^2+3n)^2-(m-3n)$$

Que claramente se nota su similitud con el de Viète.

Por ejemplo, para $m=5\ y\ n=3$, obtenemos $209^3+727^3+2690^3=2708^3$.

Por ejemplo, para $m=2$ y $n=7$, obtenemos $2870^3+3472^3+22778^3=22820^3$.

2.3 Diofanto y la ecuación cúbica.

En los problemas uno y dos del libro IV de su obra Aritmética, Diofanto de Alejandría aborda la solución de la ecuación cúbica que ha servido de referencia para todos aquellos que han creado generadores posteriormente. Veamos la solución de estos problemas.

Ecuación $x^3+y^3=a,\ x+y=b$:

Sean $a=370,\ b=10$ y $x=\alpha+5,\ y=\alpha-5$, entonces $(\alpha+5)^3+(\alpha-5)^3=30\alpha^2+250=370$ donde $\alpha=2,\ x=7,\ y=3$ y la solución resulta $7^3+3^3=370,\ 7+3=10.$

Según *Bachet de Méziriac (1581-1638)*, para a,b arbitrarios, $x=\alpha+b/2$ e $y=b/2-\alpha$ siendo condición necesaria que $\alpha^2=\dfrac{4a-b^3}{12b}$ donde $\dfrac{4a-b^3}{3b}$ debe ser cuadrado. Para el supuesto planteado, $x=\alpha+b/2=2+10/2=7,\quad y=b/2-\alpha=10/2-2=3,$ siendo la condición necesaria $\alpha^2=\dfrac{4a-b^3}{12b}=\dfrac{4\cdot 370-10^3}{12\cdot 10}=4=2^2,\ \dfrac{4a-b^3}{3b}=\dfrac{4\cdot 370-10^3}{3\cdot 10}=16=4^2.$

Ecuación $x^3-y^3=a,\ x-y=b$:

Sean $a=504,\ b=6$ y $x=\alpha+3,\ y=\alpha-3$, entonces $(\alpha+3)^3-(\alpha-3)^3=18\alpha^2+54=504$ donde $\alpha=5,\ x=8,\ y=2$ y la solución resulta $8^3-2^3=504,\ 8-2=6.$

Según Bachet, $x=\alpha+b/2=5+6/2=8,\quad y=\alpha-b/2=5-6/2=2,$ siendo la condición necesaria $\alpha^2=\dfrac{4a-b^3}{12b}=\dfrac{4\cdot 504-6^3}{12\cdot 6}=25=5^2,\ \dfrac{4a-b^3}{3b}=\dfrac{4\cdot 504-6^3}{3\cdot 6}=100=10^2.$

Ecuación $x^3+y^3=a^3-b^3$, para $a^3>2b^3$:

Sean $a=2,\ b=1$ y $x=\dfrac{3a^3b}{a^3+b^3}-b,\ y=a-\dfrac{3ab^3}{a^3+b^3}$. Si aplicamos los datos facilitados, obtenemos $x=\dfrac{3a^3b}{a^3+b^3}-b=\dfrac{3\cdot 2^3\cdot 1}{2^3+1^3}-1=5/3,\quad y=a-\dfrac{3ab^3}{a^3+b^3}=2-\dfrac{3\cdot 2\cdot 1^3}{2^3+1^3}=4/3$ y la solución resulta $(5/3)^3+(4/3)^3=2^3-1^3.$

Ecuación $x^3-y^3=a^3+b^3$, para $a^3<2b^3$:

Sean $a=2,\ b=1$ y $x=\dfrac{3ab^3}{a^3-b^3}+a,\ y=\dfrac{3a^3b}{a^3-b^3}-b$. Si aplicamos los datos facilitados, obtenemos $x=\dfrac{3ab^3}{a^3-b^3}+a=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1^3}{2^3-1^3}+2=20/7,\quad y=\dfrac{3a^3b}{a^3-b^3}-b=\dfrac{3\cdot 2^3\cdot 1}{2^3-1^3}-1=17/7$ y la solución resulta $(20/7)^3-(17/7)^3=2^3+1^3.$

Ecuación $x^3 - y^3 = a^3 - b^3$, para $a^3 < 2b^3$:

Sean $a = 5,\ b = 4$ y $x = \dfrac{3a^3b}{a^3+b^3} - b,\ y = \dfrac{3ab^3}{a^3+b^3}$-a . Si aplicamos los datos facilitados, obtenemos $x = \dfrac{3a^3b}{a^3+b^3} - b = \dfrac{3\cdot 5^3\cdot 4}{5^3+4^3} - 4 = 248/63,\ y = \dfrac{3\cdot 5\cdot 4^3}{5^3+4^3}$-5=5/63 donde la solución resulta $(248/63)^3 - (5/63)^3 = 5^3 - 4^3.$

2.4 Ecuación diofántica $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw.$

Probablemente, las más elegantes de las ecuaciones de tercer grado son

$$x^3 + y^3 = u^3,$$
$$x^3 + y^3 = u^3 + v^3$$

La solución de la primera es imposible en números enteros diferentes de cero, de la segunda ya vimos su solución en un apartado anterior.
Para la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw,$ si denotamos como miembros de la solución $P(r,s,t)\cdot P(m,n,p) = P(x,y,z)$ desarrollando, obtenemos las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} x &= mr + nt + ps \\ y &= ms + nr + pt \\ z &= mt + ns + pr \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} u &= mr + ns + pt \\ v &= mt + nr + ps \\ w &= ms + nt + pr \end{aligned}$$

Ejemplo, para $P(r,s,t) = (2,3,5),\ P(m,n,p) = (7,5,11),$ tenemos

$$\begin{aligned} x &= 7\cdot 2 + 5\cdot 5 + 11\cdot 3 = 72 \\ y &= 7\cdot 3 + 5\cdot 2 + 11\cdot 5 = 86 \\ z &= 7\cdot 5 + 5\cdot 3 + 11\cdot 2 = 72 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} u &= 7\cdot 2 + 5\cdot 3 + 11\cdot 5 = 84 \\ v &= 7\cdot 5 + 5\cdot 2 + 11\cdot 3 = 78 \\ w &= 7\cdot 3 + 5\cdot 5 + 11\cdot 2 = 68 \end{aligned}$$

por lo que resulta como solución

$$72^3 + 86^3 + 72^3 - 3(72\cdot 86\cdot 72) = 84^3 + 78^3 + 68^3 - 3(84\cdot 78\cdot 68) = 45.080$$

2.5 Ecuación diofántica $x^3 + y^3 = u^3 + w^3.$

A partir de la ecuación de Platón $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, matemáticos de todas las épocas han creado generadores que dan solución a la ecuación $x^3 + y^3 = u^3 + w^3.$ Para r, s enteros cualesquiera, tenemos:

$$x = 28r^2 + 11rs - 3s^2$$
$$y = 21r^2 - 11rs - 4s^2$$
$$u = 35r^2 + 7rs + 6s^2$$
$$v = -42r^2 - 7rs - 5s^2$$

Para valores de $r, s,$ he aquí algunos resultados:

r	s	Ecuación
1	2	$38^3+73^3=17^3+76^3$
1	3	$17^3+55^3=24^3+54^3$
2	5	$147^3-126^3=363^3-360^3$

Para la solución de la ecuación $x^3+y^3+z^3=t^3,$ el generador resulta:

$$x=20r^2+10rs-3s^2$$
$$y=12r^2-10rs-5s^2$$
$$u=16r^2+8rs+6s^2$$
$$v=-24r^2-8rs-4s^2$$

Tenemos para $r=1,\ s=5,\ 5^3+163^3+164^3=206^3,$ o para $r=1, s=-3,\ 3^3+36^3+37^3=46^3.$ Atribuyendo a r y s diversos valores enteros podemos obtener toda clase de soluciones a la ecuación. Si en estas circunstancias los números obtenidos tienen un factor común, podemos dividir o multiplicar las ternas. Por ejemplo, cuando $r=1$ y $s=1,$ las variables x, y, z, t equivaldrán a $36, 6, 48, -54$ o que, al dividirlas por $6,$ darán valores de $6,1,8,-9.$ Por consiguiente, si partimos de la ecuación $3^3+4^3+5^3=6^3,$ multiplicándola por un entero, podemos obtener

$$6^3+8^3+10^3=12^3,\ 12^3+16^3+20^3=24^3,\ 30^3+40^3+50^3=60^3,\ 60^3+80^3+100^3=120^3$$

2.6 Ecuaciones diofánticas y método de Demjanenko.

El Método de Demjanenko encuentra la descomposición de cualquier número entero, no congruente con 4 ó 5 $módulo\ 9,$ esto es, $n \not\equiv \pm 4, \pm 5 (mód.9),$ para determinar la suma de cuatro cubos. Para ello utiliza las siguientes fórmulas:

- 6x= $(x-1)^3+(-x)^3+(-x)^3+(x+1)^3$
- 6x+3 = $x^3+(-x+4)^3+(2x-5)^3+(-2x+4)^3$
- 18x+1 = $(2x+14)^3+(-2x-23)^3+(-3x-26)^3+(3x+30)^3$
- 18x+7 = $(x+2)^3+(6x-1)^3+(8x-2)^3+(-9x+2)^3$
- 18x+8 = $(x-5)^3+(-x+14)^3+(-3x+29)^3+(3x-30)^3$
- 54x+20 = $(3x-11)^3+(-3x+10)^3+(x+2)^3+(-x+7)^3$
- 72x+56 = $(-9x+4)^3+(x+4)^3+(6x-2)^3+(8x-4)^3$
- 108x+2 = $(-x-22)^3+(x+4)^3+(-3x-41)^3+(3x+43)^3$
- 216x+92 = $(3x-164)^3+(-3x+160)^3+(x-35)^3+(-x+71)^3$
- 270x+146 = $(-60x+91)^3+(-3x+13)^3+(22x-37)^3+(59x-89)^3$

Si n es equivalente a $n \equiv 164, 96, 1892, 2324, 2756, 4052, 4484 (mód.6480),$ se utilizará la fórmula 54x+2 = $(29484x^2+2211x+43)^3+(-29484x^2-2157x-41)^3+(9828x^2+485x+4)^3+(-9828x^2-971x-22)^3$
Si $n \equiv 254, 902, 1442, 1874, 1982, 2414, 3062, 3494, 3602, 4034, 4142, 5114, 5222, 5654, 5762, 6302 (mód.6480),$ se utilizará el método debido a *Demjanenko* que puede dar resultados de cientos de dígitos.
En el resto de los casos se reemplaza n por $-n$ y luego se multiplican las soluciones por $-1.$

Para $x=1,$ obtenemos los siguientes resultados:

Fórmula	Valor ecuación	Igualdad de cubos
$6x$	$0^3+(-1)^3+(-1)^3+2^3=6$	$6+1^3+1^3=0^3+2^3=8$
$6x+3$	$1^3+3^3+(-3)^3+2^3=9$	$9+3^3=1^3+2^3+3^3=36$
$18x+1$	$16^3+(-25)^3+(-29)^3+33^3=19$	$19+25^3+29^3=16^3+33^3=40.033$
$18x+7$	$3^3+5^3+6^3+(-7)^3=25$	$25+7^3=3^3+5^3+6^3=368$
$18x+8$	$(-4)^3+13^3+26^3+(-27)^3=26$	$26+4^3+27^3=13^3+26^3=19.773$
$54x+20$	$(-8)^3+7^3+3^3+6^3=74$	$74+0^3+8^3=3^3+6^3+7^3=586$
$72x+56$	$(-5)^3+5^3+4^3+4^3=128$	$128+0^3+5^3=4^3+4^3+5^3=253$
$108x+2$	$(-23)^3+5^3+(-44)^3+46^3=110$	$110+23^3+44^3=5^3+46^3=97.461$
$216x+92$	$(-161)^3+157^3+(-34)^3+70^3=308$	$308+34^3+161^3=70^3+157^3=4.212.893$
$270x+146$	$31^3+10^3+(-15)^3+(-30)^3=416$	$416+0^3+41^3=9^3+28^3+36^3=69.337$

Para $n\equiv 6,9,19,25,26,74,128,110,308,416(mód.9)=6,0,1,7,8,2,2,2,2,2$

Para $n\equiv 8,36,40033,368,19773586,253,97461,4212893,69337(mód.9)=8,0,1,8,1,1,0,2,1$

En ninguno de los casos los restos, respecto al *módulo* 9 son ± 4 ó ± 5, de acuerdo con las indicaciones del método.
Estos números nos permiten ampliar el número de cubos en la ecuación, como podemos comprobar en la tabla siguiente:

Fórmula	Igualdad de cubos
$6x$	$0^3+0^3+0^3+2^3=8=0^3+0^3+0^3+0^3+2^3$
$6x+3$	$0^3+1^3+2^3+3^3=36=0^3+0^3+1^3+2^3+3^3$
$18x+1$	$2^3+15^3+19^3+31^3=40.033=3^3+14^3+15^3+16^3+31^3$
$18x+7$	$0^3+3^3+5^3+6^3=368=3^3+3^3+4^3+5^3+5^3$
$18x+8$	$1^3+17^3+19^3+20^3=19.773=5^3+11^3+13^3+19^3+21^3$
$54x+20$	$0^3+3^3+6^3+7^3=586=3^3+3^3+4^3+5^3+7^3$
$72x+56$	$0^3+4^3+4^3+5^3=253=1^3+1^3+2^3+3^3+6^3$
$108x+2$	$11^3+27^3+31^3+36^3=97.461=2^3+3^3+7^3+26^3+43^3$
$216x+92$	$19^3+100^3+115^3+119^3=4.212.893=0^3+7^3+54^3+57^3+157^3$
$270x+146$	$11^3+12^3+25^3+37^3=69.337=13^3+13^3+26^3+26^3+31^3$

Nota: El Método Demjanenko está desarrollado en la obra de Henri Cohen, Number Theory Volumen I: Tools and Diophantine Equations y en http://www.alpeltron.com, Darío Alejandro Alpern tiene habilitados programas para facilitar los cálculos de estas fórmulas.

2.7 Ecuaciones diofánticas y método de Ramanujan.

La anécdota que se cuenta sobre el número 1729, matricula del taxis que trajo a Hardy a ver a Ramanujan al hospital, en donde Hardy considera lo anodino del número y Ramanujan le contesta que era el menor número que podía ser representado como suma de dos cubos de dos formas diferentes, esto es $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$, dio pié a una generación de números de estas características denominados *números taxicap*.
Aunque, sin saberlo, Ramanujan mezcla el método ideado por Viète y el ideado por Euler.
Para resolver la ecuación $x^3+y^3=u^3-v^3$, Viète emplea el siguiente generador:

$$x=2m^3n-n^4,\ \ y=m^4-2mn^3,\ \ u=m(m^3-n^3),\ \ v=n(m^3-n^3)$$

Por ejemplo, para $m=3,\ n=2 \ \rightarrow\ 92^3+33^3=105^3-70^3$

Por ejemplo, para $m=7,\ n=3 \ \rightarrow\ 1977^3+2023^3=2590^3-1110^3$

Para resolver la ecuación $x^3+y^3+z^3=w^3$, Euler utiliza el siguiente generador:

$$x=m(m^3-2n^3),\ \ y=n(2m^3-n^3), z=n(m^3+n^3), w=m(m^3+n^3)$$

que es una modificación del anterior.

Por ejemplo, para $m=2,\ n=1 \ \rightarrow\ 12^3+15^3+9^3=18^3$

Por ejemplo, para $m=3,\ n=2 \ \rightarrow\ 33^3+70^3+92^3=105^3$

11.3 Ecuaciones diofánticas de grado cuatro

3.1 Ecuaciones diofánticas y método de Euler.

Euler, a partir de la terna pitagórica $x^2+y^2=z^2$, resuelve mediante el generador primitivo $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$, y establece la igualdad:

$$x=(xy),\ \ y=(yz),\ \ z=(zx),\ \ w=(z^4-x^2y^2)$$

que le permite resolver la ecuación $x^4+y^4+z^4=w^2$.

Por ejemplo, para $m=3, n=2 \ \rightarrow\ x=3^2-2^2=5,\ y=2\cdot 3\cdot 2=12,\ z=3^2+2^2=13$ que da solución a $5^2+12^2=13^2$. Si ahora sustituimos en la igualdad, obtenemos:

$$x=5\cdot 12=60,\ \ y=12\cdot 13=156,\ \ z=13\cdot 5=65,\ \ w=13^4-5^2\cdot 12^2=24961$$

que nos permite resolver $60^4+156^4+65^4=24961^2$.
Por ejemplo: para $m=5,\ n=4 \ \rightarrow\ 360^4+1640^4+369^4=2696161^2$
Este método fue modificado posteriormente creando el siguiente generador:

$$x=2mn(m^2-n^2),\ y=2mn(m^2+n^2),\ z=(m^4-n^4),\ w=m^8+14m^4n^4+n^8$$

Por ejemplo, para $m=3,\ n=2 \ \rightarrow\ 60^4+156^4+65^4=2496161^2$.

Por ejemplo, para $m=2,\ n=1 \ \rightarrow\ 12^4+20^4+15^4=481^2$.

3.2 Ecuaciones diofánticas de la forma $x^4+y^4+z^4=2w^4$..

El profesor Robert Daniel Carmichael *(1879-1967)*, en su obra Diophantine Analysis*,* comenta que es fácil encontrar bicuadrados de tres números cuya suma sea igual al doble de un cuadrado, de hecho, éstas son ofrecidas por la igualdad $x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$. Ahora, la relación $x^2+xy+y^2=(a^2+ab+b^2)^2$ se cumple para $x=a^2-b^2$, $y=2ab+b^2$.

Si sustituimos los valores de x e y en la primera ecuación, obtenemos la igualdad:

$$(a^2-b^2)^4+(2ab+b^2)^4+(a^2+2ab)^4=2(a^2+ab+b^2)^4$$

Esto permite una solución con dos parámetros bicuadrados en tres números cuya suma es igual al doble de un número bicuadrado. Como caso particular tenemos, $3^4+5^4+8^4=2\cdot 7^4$.
El profesor Carmichael dice, que con la igualdad $x^2+xy+y^2=(a^2+ab+b^2)^k$ se puede encontrar la solución de $4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4$.
A partir de la igualdad de Carmichael, en el Congreso Internacional de Procedimientos Matemáticos celebrado en 1912, el profesor Martin presenta el siguiente generador que resuelve la ecuación $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4=w^4$:

$$x=8s^2+40st-24t^2,\ \ y=6s^2-44st-18t^2,\ \ z=14s^2-4st-42t^2,$$
$$u=9s^2+27t^2,\ \ v=4s^2+12t^2,\ \ w=15s^2+45t^2$$

Ejemplo, para $m=4,\ n=2\ \ \rightarrow\ 352^4+(-328)^4+24^4+252^4+112^4=420^4$.

La igualdad anterior fue modificada posteriormente convirtiéndola en el siguiente generador:

$$x=4m^2-12n^2,\ \ y=2m^2-12mn-6n^2,\ \ z=4m^2-12n^2,$$
$$u=2m^2+12mn-6n^2,\ \ v=3m^2+9n^2,\ \ w=5m^2+15n^2$$

Ejemplo, para $m=4,\ n=2\ \ \rightarrow\ 16^4+(-88)^4+112^4+104^4+84^4=140^4$.

3.3 Ecuaciones diofánticas y método de Hardy.

A partir de la solución de Euler, en su obra An Introduction to the Theory of Numbers, G.H. Hardy *(1877-1947)*, propone otra solución de la ecuación $x^4+y^4=u^4+v^4$ mediante el siguiente razonamiento:

Sean $x=a+b,\ y=c-d,\ u=a-b,\ v=c+d$, entonces

$$a=n(m^2+n^2)(-m^4+18m^2n^2-n^4),\ \ b=2m(m^6+10m^4n^2+m^2n^4+4n^6)$$
$$c=2n(4m^6+m^4n^2+10m^2n^4+n^6),\quad d=m(m^2+n^2)(-m^4+18m^2n^2-n^4)$$

Que es un generador que permite soluciones de la ecuación $x^4+y^4=u^4+v^4$, como por ejemplo:

$$59^4+158^4=133^4+134^4,\ \ 7^4+239^4=157^4+227^4,\ \ 193^4+292^4=256^4+257^4$$

11.4 Ecuaciones diofánticas de cualquier grado.

4.1 Ecuaciones diofánticas de grado cinco.

En 1967, los profesores Lander y Parkin, crearon el siguiente generador para dar solución de la ecuación de quinto grado $x^5+y^5+z^5+u^5+v^5=w^5$

$$x=-a^5+75b^5,\ \ y=a^5+25b^5,\ \ z=a^5-25b^5$$
$$u=10a^3b^2,\ \ v=50ab^4,\ \ w=a^5+75b^5$$

Por ejemplo, para $a=2,\ \mathrm{b}=1\ \ \rightarrow\ 43^5+57^5+7^5+80^5+100^5=107^5.$

Por ejemplo, para $a=5,\ \mathrm{b}=3\ \ \rightarrow\ 15100^5+9200^5+(-2950)^5+11250^5+20250^5=21350^5.$

Estos mismos profesores crearon, en 1997, otro generador que ofrece la solución a la ecuación $x^5+y^5+2z^5=t^5+u^5+v^5+w^5$:

$$x=-a^2+4ab+9b^2,\ y=a^2+8ab+3b^2,\ \ z=3a^2+12ab+21b^2,$$
$$t=a^2+12ab+23b^2,\ \ u=3a^2+16ab+17b^2,\ \ v=-a^2+13b^2,\ \ w=3a^2+8ab+b^2$$

Por ejemplo, para $a=2,\ \mathrm{b}=1\ \ \rightarrow\ 13^5+23^5+2(57)^5=51^5+61^5+9^5+29^5.$

Por ejemplo, para $a=3,\ \mathrm{b}=2\ \ \rightarrow\ 51^5+69^5+2(183)^5=173^5+191^5+43^5+79^5.$

Los profesores Kuosa, Meyrigna, Shuwen, Sastry y Chowla encontraron la solución para la ecuación de quinto grado con el siguiente generador:

$$(m^5+25n^5)^5+(m^5-25n^5)^5+(10m^3n^2)^5=(m^5+75n^5)^5+(m^5-75n^5)^5+(-50mn^4)^5$$

Que como podemos comprobar, es una modificación del generador de Lander y Parkin.

Por ejemplo, para $m=2,\ \mathrm{n}=1\ \ \rightarrow\ 57^5+7^5+80^5=107^5+(-43)^5+(-100)^5.$

Por ejemplo, para $m=3,\ \mathrm{n}=1\ \ \rightarrow\ 268^5+218^5+270^5=318^5+168^5+(-150)^5.$

4.2 Ecuaciones diofánticas de grado sexto

Los profesores Lander y Parkin proponen el siguiente generador para la solución de la ecuación de sexto grado:

$$x=3a^4+9a^3b+18a^2b^2+21ab^3+9b^4,\ \ y=2a^4+4a^3b-5a^2b^2-12ab^3-9b^4$$
$$z=-a^4-10a^3b-17a^2b^2-12ab^3,\ \ u=a^4-3a^3b-14a^2b^2-15ab^3-9b^4$$
$$v=3a^4+8a^3b+9a^2b^2,\ \ w=2a^4+12a^3b+19a^2b^2+18ab^3+9b^4$$

Por ejemplo, para $a=2,\ n=b\ \ \rightarrow\ 243^6+11^6+188^6=103^6+148^6+249^6.$

Por ejemplo, para $a=3,\ \mathrm{b}=2\ \ \rightarrow\ 2025^6+234^6+1521^6=1089^6+999^6+2070^6.$

En el año 1937, el profesor Chernick propone el siguiente generador:

$$x=-10-9k-5k^2,\ \ y=-4+7k+9k^2,\ \ z=-8-5k+7k^2,\ \ s=-6-13k+k^2,$$
$$t=4+5k+9k^2,\ \ u=-6+5k+7k^2,\ \ v=-10-7k+5k^2,\ \ w=-8-15k-k^2.$$

Por ejemplo, para $k=2, \quad \rightarrow \quad 48^6+46^6+10^6+28^6=50^6+32^6+4^6+42^6.$

Por ejemplo, para $k=2, \quad \rightarrow \quad 24^6+23^6+5^6+14^6=25^6+16^6+2^6+21^6.$

Observar este segundo ejemplo, cuyas bases son la mitad del primero, ya que el máximo común divisor de éste es 2.
Poco después, este generador fue modificado en los dos casos siguientes:

<u>Primer caso</u>: Las bases son coprimos

$$x=-3k^2-20-11k,\ \ y=4k^2-12+k,\ \ z=2k^2-16-11k,\ \ s=-k^2-8-15k,$$
$$t=4k^2+8+3k,\ \ u=3k^2-16-k,\ \ v=k^2-20-13k,\ \ w=-2k^2-12-17k,$$

Por ejemplo, para $k=2, \quad \rightarrow \quad 9^6+1^6+5^6+7^6=5^6+1^6+7^6+9^6.$

Por ejemplo, para $k=8, \quad \rightarrow \quad 25^6+21^6+2^6+16^6=24^6+14^6+5^6+23^6.$

<u>Segundo caso</u>: Las bases no son coprimos

$$x=-3k^2-80-22k,\ \ y=4k^2-48+2k,\ \ z=2k^2-64-22k,\ \ s=-k^2-32-30k,$$
$$t=4k^2+32+6k,\ \ u=3k^2-64-2k,\ \ v=k^2-80-26k,\ \ w=-2k^2-48-34k.$$

Por ejemplo, para $k=2, \quad \rightarrow \quad 34^6+7^6+25^6+24^6=15^6+14^6+32^6+31^6.$

Por ejemplo, para $k=10, \quad \rightarrow \quad 50^6+31^6+7^6+36^6=41^6+18^6+20^6+49^6.$

En el primer ejemplo las bases han sido divididas por 4, que es su máximo común divisor, en el segundo caso, las bases han sido divididas por 12.

4.3 Ecuaciones diofánticas de grado séptimo.

Para dar solución a la ecuación de séptimo grado $x^7+y^7+z^7+q^7+r^7=s^7+t^7+u^7+v^7+w^7$, en 1966 el profesor Sinha propuso el siguiente generador:

$$x=45-184k+177k^2,\ \ y=25-152k+201k^2,\ \ z=35-92k+39k^2,$$
$$q=105-426k+423k^2,\ r=95-382k+393k^2,$$
$$s=35-192k+243k^2,\ \ \mathrm{t}=45-132k+81k^2,\ \ u=25-102k+99k^2,$$
$$v=105-424k+429k^2,\ w=95-386k+381k^2.$$

Por ejemplo, para $k=2, \quad \rightarrow \quad 55^7+75^7+1^7+135^7+129^7=89^7+15^7+31^7+139^7+121^7.$

Por ejemplo, para $k=1, \quad \rightarrow \quad 38^7+74^7+(-18)^7+102^7+106^7=86^7+(-6)^7+22^7+110^7+90^7.$

Observar que, en este último ejemplo, todas las bases son divisibles por 2 por tanto, también podemos dar solución como $19^7+37^7+(-9)^7+51^7+53^7=43^7+(-3)^7+11^7+55^7+45^7.$

4.4 Ecuaciones diofánticas de grado octavo.

En el año 1911, Barisien y Visschers propusieron la solución de $x^8 + y^8 + z^8 = 2(w)^8$ mediante el siguiente razonamiento:

Para a y b, $a > b$, dos enteros cualesquiera, tenemos $x = a^2 - b^2$, $y = a^2 + b^2$ y $z = 2ab$. Si sumamos $(a^2 - b^2)^8 + (a^2 + b^2)^8 + (2ab)^8 = 2(a^8 + 14a^4b^4 + b^8)^2$ resulta como valor para $w = a^8 + 14a^4b^4 + b^8$.

Por ejemplo, para $a = 4,\ b = 2 \ \rightarrow\ 12^8 + 20^8 + 16^8 = 2(123136)^2$

Por ejemplo, para $a = 5,\ b = 3 \ \rightarrow\ 16^8 + 34^8 + 30^8 = 2(1105936)^2$

Estos mismos autores crearon una variante de esta ecuación a partir de la igualdad

$$x^8 + y^8 + (x^2 \pm y^2)^4 = 2(x^4 \pm x^2y^2 + y^4)^2$$

Por ejemplo, para $x = 5,\ y = 3 \ \rightarrow\ 5^8 + 3^8 + (5^2 + 3^2)^4 = 2(5^4 + 5^2 \cdot 3^2 + 3^4)^2$

Por ejemplo, para $x = 7,\ y = 5 \ \rightarrow\ 7^8 + 5^8 + (7^2 - 5^2)^4 = 2(7^4 - 7^2 \cdot 5^2 + 5^4)^2$

Por su parte, en 1967 Lander propuso la siguiente solución para la ecuación de octavo grado:

$$(2^{8k+4} - 1)^8 + (2^{7k+4})^8 + (2^{k+1})^8 + 7\left[(2^{5k+3})^8 + (2^{3k+2})^8\right] = (2^{8k+1} + 1)^8$$

Por ejemplo, para $k = 1 \ \rightarrow\ 4095^8 + 2048^8 + 4^8 + 7(256^8 + 32^8) = 4097^8$

Por ejemplo, para $k = 2 \ \rightarrow\ 1048575^8 + 262144^8 + 8^8 + 7(8192^8 + 256^8) = 1048577^8$

4.5 Ecuaciones diofánticas y el método de Chen Suwen.

En 1997, un joven estudiante de matemáticas de la República Popular China llamado Chen Suwen, presentó la siguiente ecuación diofántica con resolución para $k = 1, 2, 3, 4, 5\ y\ 6$

$$1^k + 19^k + 20^k + 51^k + 57^k + 80^k + 82^k = 2^k + 12^k + 31^k + 40^k + 69^k + 71^k + 85^k$$

Dos años después, presento esta otra para $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\ y\ 11$

$$\begin{aligned} &1^k + 12^k + 25^k + 66^k + 91^k + 130^k + 174^k + 213^k + 238^k + 279^k + 292^k + 303^k \\ &= 4^k + 6^k + 31^k + 58^k + 105^k + 117^k + 187^k + 199^k + 246^k + 273^k + 298^k + 300^k \end{aligned}$$

4.6 Ecuaciones diofánticas y la serie de Weisstein.

Eric Weisstein nació en Indiana EE.UU. en 1969. Profesor de matemáticas y enciclopedista, es cofundador de la National Sciencie Digital Library de la Universidad de Illinois y es creador de MathWorld, perteneciente al grupo Wolfram Research, creadores del programa *Mathematicas.* Junto con el profesor de matemáticas John E. Schoenfield nacido en 1948 y creador de

Advanced Encryption Standard, descubrieron una serie de los menores números cuya n-ésima potencia es suma de menores números con potencias distintas. La serie es

$$1,3,5,6,15,12,25,40,84,47,63,...$$

cuyos resultados son:

$$3^1 = 2^1 + 1^1, \quad 5^2 = 4^2 + 3^2, \quad 6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3, \quad 15^4 = 14^4 + 9^4 + 8^4 + 6^4 + 4^4$$
$$12^5 = 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5$$
$$25^6 = 1^6 + 2^6 + 3^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 + 9^6 + 10^6 + 12^6 + 13^6 + 15^6 + 16^6 + 17^6 + 18^6 + 23^6$$
$$40^7 = 1^7 + 3^7 + 5^7 + 9^7 + 12^7 + 14^7 + 16^7 + 17^7 + 18^7 + 20^7 + 21^7 + 22^7 + 25^7 + 28^7 + 39^7$$
$$84^8 = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 5^8 + 7^8 + 9^8 + 10^8 + 11^8 + 12^8 + 13^8 + 14^8 + 15^8 + 16^8 + 17^8 + 18^8 + 19^8 +$$
$$21^8 + 23^8 + 24^8 + 25^8 + 26^8 + 27^8 + 29^8 + 32^8 + 33^8 + 35^8 + 37^8 + 38^8 + 39^8 + 41^8 + 42^8 + 43^8 +$$
$$45^8 + 46^8 + 47^8 + 48^8 + 49^8 + 51^8 + 52^8 + 53^8 + 57^8 + 57^8 + 58^8 + 59^8 + 61^8 + 63^8 + 69^8 + 73^8$$
$$47^9 = 1^9 + 2^9 + 4^9 + 7^9 + 11^9 + 14^9 + 15^9 + 18^9 + 26^9 + 27^9 + 30^9 + 31^9 + 32^9 + 33^9 + 36^9 + 38^9 +$$
$$39^9 + 43^9$$
$$63^{10} = 1^{10} + 2^{10} + 4^{10} + 5^{10} + 6^{10} + 8^{10} + 12^{10} + 15^{10} + 16^{10} + 17^{10} + 20^{10} + 21^{10} + 25^{10} +$$
$$26^{10} + 27^{10} + 28^{10} + 30^{10} + 36^{10} + 37^{10} + 38^{10} + 40^{10} + 51^{10} + 62^{10}$$

El resto lo dejamos como ejercicio que pueden comprobar http://www.research.att.com, secuencia A030052.

4.7 Ecuaciones diofánticas multigrados.

Sea $1+5=2+4=6$ donde $1^1+5^1=2^1+4^1=6$ es verdadero. Si sumamos 5 a cada uno de estos números, $6+10>7+9 \rightarrow 16>15$ donde $6^1+10^1=7^1+9^1$ también es verdadero.
Si ahora cambiamos el orden de los lados, $1^k+5^k+7^k+9^k=2^k+4^k+6^k+10^k$, admite para $k=1,2.$ Supongamos que a la ecuación anterior le sumamos $10,$ obtenemos

$$11^k + 15^k + 17^k + 19^k = 12^k + 14^k + 16^k + 20^k.$$

esta ecuación sigue admitiendo $k=1,2$ como exponentes. Si intercambiamos los lados

$$1^k + 5^k + 7^k + 9^k + 12^k + 14^k + 16^k + 20^k = 2^k + 4^k + 6^k + 10^k + 11^k + 15^k + 17^k + 19^k$$

ahora la ecuación admite para k los valores de $k=1,2,3.$
Supongamos ahora que la igualdad $1^k+5^k+8^k+12^k=2^k+3^k+10^k+11^k$ admite valores para el exponente de $k=1,2,3.$ Si incrementamos sus cifras en 2 unidades, obtenemos

$$3^k + 7^k + 10^k + 14^k = 4^k + 5^k + 12^k + 13^k,$$

que, como se puede comprobar, también admite para $k=1,2,3.$
Todas estas manipulaciones nos han llevado a la consecución de series de números *multigrados*.
En el año 1944, en su obra *Einige Zahlenthecretische Untersuchungen und Resultate* y basándose en las estructuras de los cuadrados mágicos, los profesores A. Moessner y A. Gloden dieron a conocer los números multigrados.

La ecuación multigrado es una ecuación diofántica de la forma $\sum_{i=1}^{l} m_i^j = \sum_{i=1}^{l} n_i^j$ con $j = 1, 2, \dots k,$ siendo m y n los l vectores. Las identidades de los vectores siguen siendo válidas si se agrega una constante a cada elemento de m y $n,$ de modo multigrado siempre se puede poner en una forma en que el componente mínimo de uno de los dos vectores sea $1.$
Moessner y Gloden en 1944, dan un grupo de ecuaciones multigrado de orden $k = 1, 2, 3\ y\ 4$ con los vectores $m = [1, 6, 8]$ y $n = [2, 4, 9].$ El cálculo lo llevaron a cabo mediante los sumatorios siguientes:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i^1 = \sum_{i=1}^{3} n_i^1 = 15 \;\rightarrow\; 1^1 + 6^1 + 8^1 = 2^1 + 4^1 + 9^1$$
$$\sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 101 \;\rightarrow\; 1^2 + 6^2 + 8^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2$$

De los mismos autores, siguen dos grupos más

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^1 = \sum_{i=1}^{4} n_i^1 = 26 \;\rightarrow\; 1^1 + 5^1 + 8^1 + 12^1 = 2^1 + 3^1 + 10^1 + 11^1$$
$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i^2 = 234 \;\rightarrow\; 1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 11^2$$
$$\sum_{i=1}^{4} m_i^3 = \sum_{i=1}^{4} n_i^3 = 2366 \;\rightarrow\; 1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3 = 2^3 + 3^3 + 10^3 + 11^3$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^1 = \sum_{i=1}^{6} n_i^1 = 63 \;\rightarrow\; 1^1 + 5^1 + 8^1 + 12^1 + 18^1 + 19^1 = 2^1 + 3^1 + 9^1 + 13^1 + 16^1 + 20^1$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^2 = \sum_{i=1}^{6} n_i^2 = 919 \;\rightarrow\; 1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 + 18^2 + 19^2 = 2^2 + 3^2 + 9^2 + 13^2 + 16^2 + 20^2$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^3 = \sum_{i=1}^{6} n_i^3 = 15057 \;\rightarrow\; 1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3 + 18^3 + 19^3 = 2^3 + 3^3 + 9^3 + 13^3 + 16^3 + 20^3$$
$$\sum_{i=1}^{6} m_i^4 = \sum_{i=1}^{6} n_i^4 = 260755 \;\rightarrow\; 1^4 + 5^4 + 8^4 + 12^4 + 18^4 + 19^4 = 2^4 + 3^4 + 9^4 + 13^4 + 16^4 + 20^4$$

Reconociendo que Moessner y Gloden dieron una forma *científica* a las ecuaciones multigrados, entre 1912 y 1913, G. Tarry propuso dos vectores $m = n,$ que satisfacen valores de k entre 1 y $7.$

<u>En 1912</u>: $a_1^k + \ldots + a_6^k$ con $m = n = [87, 233, 264, 396, 496, 540] = [90, 206, 309, 366, 522, 523]$ que satisfacen valores de $k = 1, 2, 3, 5, 7.$

<u>En 1913</u>: $a_1^k + \ldots + a_8^k$ con $m = n = [0, 4, 9, 23, 27, 41, 46, 50] = [1, 2, 11, 20, 30, 39, 48, 49]$ que satisfacen $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

En el año 2000, Perter Borwien, Petr Lisonet y Colin Percival, crean $a_1^k + \ldots + a_{10}^k$ con dos vectores $m = n = [0, 12, 125, 213, 214, 412, 413, 501, 614, 626] = [5, 6, 133, 182, 242, 384, 444, 493, 620, 621]$ que satisfacen $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$

11.5 Ecuaciones y Demostraciones.

5.1 Solución de la ecuación $x^3+y^3=z^2$.

Presentamos a continuación algunos generadores que resuelven esta ecuación:

$$x=s^4+6s^2t^2-3t^4,\quad y=-s^4+6s^2t^2+3t^4,\quad z=6st(s^4+3t^4)$$

Ejemplo, para $s=3,\ t=2\ \rightarrow\ 249^3+183^3=4644^2$

Ejemplo, para $s=4,\ t=5\ \rightarrow\ 781^3+4019^3=255720^2$

$$x=s^4+8st^3,\quad y=-4s^3t+4t^4,\quad z=s^6-20s^3t^3-8t^6$$

Ejemplo, para $s=3,\ t=2\ \rightarrow\ 273^3+(-152)^3=4103^2$

Ejemplo, para $s=4,\ t=5\ \rightarrow\ 4256^3+1220^3=280904^2$

5.2 Solución de la ecuación $x^4+y^2=z^3$.

El siguiente generador da solución a esta ecuación:

$$x=6st(3s^4-4t^4),\quad y=(3s^4+4t^4)(9s^8-408s^4t^4+16t^8),\quad z=9s^8+168s^4t^4+16t^8$$

Ejemplo, para $s=3,\ t=2\ \rightarrow\ 6444^4+142946261^2=280873^3$

Ejemplo, para $s=1,\ t=1\ \rightarrow\ 6^4+2681^2=193^3$

5.3 Solución de la ecuación $xy=15^n$.

Se trata de una ecuación trivial. Usando la factorización $15=3\cdot 5$, se tiene que, dado n, todas las soluciones son de la forma $\pm 3^{n-a}\cdot 5^{n-b}$, con $0\leqq a,b\leqq n$ y un total de $2(n+1)^2$ soluciones. Para la solución numérica podemos establecer

$$x=\pm 3^a\cdot 5^b,\ y=\pm 3^{n-a}\cdot 5^{n-b}\ \ con\ n\geqq b\ y\ a\geqq 0.$$

Ejemplo, para $a=1,\ b=2,\ n=6\ \rightarrow\ 15^6=75\cdot 151875=11390625$

Ejemplo, para $a=4,\ b=6,\ n=7\ \rightarrow\ 15^7=135\cdot 1265625=170859375$

5.4 Solución de la ecuación $x^2+y^2=15^n$.

Como $x^2+y^2=(x+y)(x-y)$, podríamos despejar $x-y=\pm 3^a5^b$, $x+y=\pm 3^{n-a}5^{n-b}$, con $2(n+1)^2$ soluciones. También se puede probar la forma $x^2+y^2=(x+yi)(x-yi)$, esto significa trabajar en el anillo de enteros algebraicos $Z[i]$ y nos arriesgamos a que la factorización de 15 no sea 35, de hecho, $15=3(2+i)(2-i)$, en el sentido de que $3,\ 2+i\ y\ (2-i)$ no se puedan escribir como producto, sin tener en cuenta las unidades $\pm 1,\ \pm i,$ así tenemos que $(x+yi)(x-yi)=3^n(2+i)^n(2-i)^n$.

La propiedad de que $x+yi$ y $x-yi$ sean conjugados restringe mucho las posibilidades, de hecho, para n impar no hay ninguna solución, y para n par nos vemos obligados a escoger $3^{n/2}(2+i)^a(2-i)^{n-a}$ para un factor y el resto para el otro, salvo multiplicar por unidades.

En resumen, para n par las soluciones son:

$$x=3^{n/2}\Re[\varepsilon(2+i)^a(2-i)^{n-a}],\ \ x=3^{n/2}\Im[\varepsilon(2+i)^a(2-i)^{n-a}]$$

Con $\varepsilon\in\{1,-1,i,-i\}$ y $0\leqq a\leqq n,$ en total $4(n+1)$ soluciones.

Ejemplo, para $n=4\ \rightarrow\ 135^2+180^2=15^4$

Ejemplo, para $n=6\ \rightarrow\ 3240^2+945^2=15^6$

5.5 Solución de la ecuación $x^2-y^2=z^n$.

Sean n,k dos enteros cualesquiera. Si hacemos que $x=\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)$ y $y=\left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)$, resulta la ecuación $\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)^2=n^{k+1}$, con $z=n^{k+1}$

Ejemplo, para $k=2,\ n=2\ \rightarrow\ 3^2\text{-}1^2=2^3=2^{2+1}=8=2^3$

Ejemplo, para $k=3,\ n=7\ \rightarrow 175^2\text{-}168^2=7^4=7^{3+1}=2401=7^4$

Si hacemos $x=\left(\dfrac{n^{k-1}+n}{2}\right)$ y $y=\left(\dfrac{n^{k-1}-n}{2}\right)$, resulta $\left(\dfrac{n^{k-1}+n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n^{k-1}-n}{2}\right)^2=n^k$, con $z=n^k$.

Ejemplo, para $k=3,\ n=5\ \rightarrow\ 15^2\text{-}10^2=5^3=125$

Ejemplo, para $k=5,\ n=3\ \rightarrow 42^2\text{-}39^2=3^5=243$

Para $x=\left(\dfrac{n^k+n^{k-1}}{2}\right)$ y $y=\left(\dfrac{n^k-n^{k-1}}{2}\right)$, resulta $\left(\dfrac{n^k+n^{k-1}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n^k-n^{k-1}}{2}\right)^2=n^{2k-1}$, con $z=n^{2k-1}$.

Ejemplo, para $k=3,\ n=3\ \rightarrow\ 18^2\text{-}9^2=3^5=3^{2\cdot3-1}=243$

Ejemplo, para $k=4,\ n=8\ \rightarrow 2304^2\text{-}1792^2=8^7=8^{2\cdot4-1}=2097152$

5.6 Solución de la ecuación $x^3 - y^3 = z^n$.

Planteamos el sistema $\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)^3 = \dfrac{3n^{2k+1}+n^3}{4}$ que nos permitirá resolver la ecuación $x^3 - y^3 = z^n$.

Ejemplo, para $k=2,\ n=3 \ \rightarrow\ 6^3\text{-}3^3 = 3^3 + 2\cdot 3^4 = (3\cdot 3^{2\cdot 2+1} + 3^3)/4 = 189 = 4^3 + 5^3$

Ejemplo, para $k=3,\ n=5 \ \rightarrow\ 65^3\text{-}60^3 = 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^4 + 3\cdot 5^5 + 3\cdot 5^6 = 58625 = 5^3 + 25^3 + 35^3$

Para $\left(\dfrac{n^k+n^{k-1}}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{n^k-n^{k-1}}{2}\right)^3 = \dfrac{n^{3k-3}(3n^2+1}{4}$, obtenemos los siguientes resultados.

Ejemplo, para $k=3,\ n=2 \ \rightarrow\ 6^3\text{-}3^3 = 2^4 + 2^6 + 2^7 = (2^{3\cdot 3-3}(3\cdot 2^2+1))/4 = 208 = 8^2 + 12^2$

Ejemplo, para $k=3,\ n=6 \ \rightarrow\ 126^3\text{-}90^3 = 3^6 + 2\cdot 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{11} + 2\cdot 3^{12} = 1271376 = 324^2 + 1080^2$

5.7 Solución de la ecuación $x^k - y^k = z^n \ \ para\ \ k = 4,5.$

Resolvemos la ecuación $\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)^4 - \left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)^4 = \dfrac{n^{3k-1}+n^{k+3}}{2}$.

Ejemplo, para $k=2,\ n=3 \ \rightarrow\ 6^4\text{-}3^4 = 2\cdot 3^5 + 3^6 = (3^{3\cdot 2+1} + 3^{2+3})/2 = 1215$

Para $k=4,\ n=5 \ \rightarrow\ 315^4\text{-}310^4 = 3\cdot 5^5 + 2\cdot 5^6 + 2\cdot 5^7 + 2\cdot 5^8 + 2\cdot 5^9 + 2\cdot 5^{10} + 2\cdot 5^{11} + 2\cdot 5^{12} = 610353125$

Resolvemos la ecuación $\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)^5 - \left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)^5 = \dfrac{5n^{4k-1}+10n^{2k+3}+n^5}{16}$.

Ejemplo, para $k=2,\ n=3 \ \rightarrow\ 6^5\text{-}3^5 = 3^5 + 3^6 + 3^8 = (5\cdot 3^{4\cdot 2+1} + 10^{3\cdot 2+3} + 3^5)/16 = 7533$

Ejemplo, para $k=2,\ n=7 \ \rightarrow\ 28^5\text{-}21^5 = 4\cdot 7^5 + 6\cdot 7^6 + 7^7 + 2\cdot 7^8 = 13126267$

Es de observar que, en estas últimas ecuaciones, el valor de z se desglosa en una serie de potencias que tienen como base n, bien sólo o bien con coeficiente dependiente.

5.8 Solución de la ecuación $x^n - y^n = z^n$.

Como en casos anteriores, planteamos la ecuación $\left(\dfrac{n^k+n}{2}\right)^n - \left(\dfrac{n^k-n}{2}\right)^n = n^e q$, donde n es el entero utilizado, si es primo, o uno de sus factores, si es compuesto; q es el coeficiente dependiente de n y e, el primer exponente de los conforman el valor de z.

Ejemplo, para $k=2,\ n=3 \ \rightarrow\ 6^3\text{-}3^3 = 3^3.7 = 3^3 + 2\cdot 3^4 = 189 = 0^3 + 4^3 + 5^3$

Ejemplo, para $k=2,\ n=4\ \rightarrow\ 10^4\text{-}6^4=2^9.17=2^9+2^{13}=8704=8^3+16^3+16^3$

Ejemplo, para $k=2,\ n=5\ \rightarrow\ 15^5\text{-}10^5=5^5.211=5^5+2\cdot 5^6+3\cdot 5^7+5^8=659375=2^3+16^3+63^3+74^3$

Observar que en el segundo ejemplo, al ser n compuesto, la base 2 es un factor de 4.

Para el caso de $\left(\dfrac{n^k+n^{k-1}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{n^k-n^{k-1}}{2}\right)^n=n^e q,$ tenemos

Ejemplo, para $k=3,\ n=3\ \rightarrow\ 18^3\text{-}9^3=3^6\cdot 7=3^6+2\cdot 3^7=5103=12^3+15^3$

Ejemplo, para $k=3,\ n=7\ \rightarrow\ 196^7\text{-}147^7=7^{14}\cdot 14197=7^{14}+5\cdot 7^{15}+2\cdot 7^{16}+6\cdot 7^{17}+5\cdot 7^{18}$

5.9 Demostrar la solución de la ecuación $x^2-Dy^2=z^2$.

En su obra Diophantine Analysis publicada en 1915, el profesor Robert Daniel Carmichael (1879-1967) partiendo de las ternas pitagóricas, propone para la solución de $x^2-Dy^2=z^2$ el siguiente generador:

$$x=m^2+Dn^2,\ y=2mn,\ z=m^2-Dn^2$$

Por ejemplo, para

$$m=5,\ n=3,\ D=7\ \rightarrow\ x=5^2+7\cdot 3^2=88,\ y=2\cdot 5\cdot 3=30,\ z=5^2-7\cdot 3^2=-38$$
$$88^2-7\cdot 30^2=38^2$$

Por ejemplo, para

$$m=6,\ n=3,\ D=11\ \rightarrow\ x=6^2+11\cdot 3^2=135,\ y=2\cdot 6\cdot 3=36,\ z=6^2-11\cdot 3^2=-63$$
$$135^2-11\cdot 36^2=63^2$$

En el primer caso la solución, mediante números algebraicos, podemos plantearla como

$$\left(5+3\sqrt{7}\right)^2\left(5-3\sqrt{7}\right)^2=\left(88+30\sqrt{7}\right)\left(88-30\sqrt{7}\right)=88^2-7\cdot 30^2=38^2$$

Esto es una forma cuadrática dentro de los campos reales. Si tenemos en cuenta que la suma de $\left(5+3\sqrt{7}\right)+\left(5-3\sqrt{7}\right)=10$, el polinomio mínimo resulta $\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}+38=0$ que tiene como solución $x=5\pm\sqrt{13}\mathrm{i}$, y teniendo en cuenta que esto es una cuadrática

$$\left(5+\sqrt{-13}\right)^2\left(5-\sqrt{-13}\right)^2=\left(5^2+13\cdot 1^1\right)^2=38^2$$

Hemos transformado la ecuación pasando de una solución en campo real a una en campo complejo.
Dejamos en manos del lector la transformación de la segunda ecuación.

5.10 Demostrar que existe un entero n para el cual $2^8+2^{11}+2^n$ es un cuadrado.

Sea $k^2=2^8+2^{11}+2^n=2^n+2304=2^n+48^2$, entonces $k^2-48^2=(k-48)(k+48)=2^n$.
Si $k-48=2^p$ y $k+48=2^q$, $p+q=n$, entonces tenemos $2^q-2^p=96=3\cdot 2^5$ ó $2^p(2^{q-p}-1)=3\cdot 2^5$.
Por factorización única, $p=5$ y $q-p=2$, luego $p+q=n=12$, de donde

$$2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$$

es la solución a la ecuación.

11.6 Conjeturas y Teoremas

6.1 Conjetura de Fermat-Catalán.

Sea la ecuación $x^p+y^q=z^r$ con x,y,z coprimos y $p,q,r>1$. Tomando fracciones unitarias, se plantean los siguientes casos:

Caso 1:

$1/p+1/q+1/r>1$, donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}>1$.

Las soluciones son infinitas y se pueden expresar en función de parámetros, como ocurre en las ternas pitagóricas. En este caso comprenden aquellas en las que (p,q,r) toman los valores de las ternas $(2,2,k)$, con $k\geqq 2$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ y $(2,3,5)$, en cualquier orden.
Ecuaciones descubiertas:

$1^2+2^3=3^2$, descubierta por Catalán.
$8^3+28^2=36^2$, $12^3+104^2=112^2$, $24^3+76^2=140^2$ descubierta por Catalán.

Caso 2:

$1/p+1/q+1/r=1$, donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}=1$.

Catalán consiguió la terna $(2,3,6)$, y existen otras como $(2,4,4)$ y $(3,3,3)$, encontradas por Fermat y Euler. Son soluciones finitas.

Caso 3:

$1/p+1/q+1/r<1$, donde $\dfrac{p(q+r)+qr}{pqr}<1$.

Mediante la aplicación de la Conjetura ABC, propuesta por Joseph Oesterlé y David Masser en 1985, se pueden generar infinitas soluciones. Para las ternas (p,q,r), algunos valores son $(2,3,7),(2,3,8),(2,3,9),(2,4,5),(2,4,6),(2,4,7),(3,3,4),(3,3,5)$, *etc.*

Utilizando distintas ternas, a continuación les ofrecemos algunas de las soluciones a la ecuación $x^p + y^q = z^r$.

Terna	*Algunas soluciones encontradas*
(2,2,3)	$1^2 + 2^3 = 3^2$, $1^2 + 2^3 = 3^2$, $12^3 + 104^2 = 112^2$, $24^3 + 76^2 = 140^2$
(2,3,3)	$249^3 + 183^3 = 4644^2$, $4256^3 + 1220^3 = 280904^2$
(2,3,4)	$3^4 + 46^2 = 13^3$, $351^4 + 17766^2 = 2493^3$
(2,3,5)	$10^2 + 3^5 = 7^3$, $654^2 + 127^3 = 19^2$, $1^5 + 2^3 = 3^2$
(2,3,7)	$1^7 + 2^3 = 3^2$, $2^7 + 17^3 = 71^2$, $1414^3 + 2213459^2 = 65^7$, $9262^3 + 15312283^2 = 113^7$, $17^7 + 76271^3 = 21063928^2$
(2,3,8)	$1^8 + 2^3 = 3^2$, $33^8 + 1549034^2 = 15613^3$, $43^8 + 96222^3 = 30042907^2$
(2,3,9)	$13^2 + 7^3 = 2^9$
(2,4,5)	$2^5 + 7^2 = 3^4$, $3^5 + 11^4 = 122^2$
(2,4,6)	$3^6 + 6^4 = 45^2$
(3,3,4)	$2^3 + 2^3 = 2^4$
(3,3,5)	$3^3 + 6^3 = 3^5$

Aunque son difíciles de encontrar, les invitamos a buscar nuevas soluciones.

6.2 Conjetura de Erdos - Straus.

En 1948, los matemáticos Paul Erdös (1913-1996) y Ernest G. Straus (1922-1983) conjeturaron que, para cualquier entero n con $n \geq 2$, el número racional $4/n$ puede ser expresado como suma de tres fracciones de la unidad. Para todo entero $n \geq 4$, existen números enteros positivos x, y, z con $x > 0, y > 0, z > 0$ tales que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Se trata de una fracción unitaria o egipcia para representar al número $4/n$. Por ejemplo, para $n = 83$, existe una solución donde $x = 28$, $y = 83$, $z = 2324$ que expresamos como

$$\frac{4}{83} = \frac{1}{28} + \frac{1}{83} + \frac{1}{2324}$$

Haciendo operaciones obtenemos para n el valor de

$$n = \frac{4(xyz)}{xy + xz + yz} = \frac{4(28 \cdot 83 \cdot 2324)}{28(83 + 2324) + 83 \cdot 2324} = \frac{21603904}{260288} = 83$$

o bien

$$\frac{4}{n} = \frac{28(83 + 2324) + 83 \cdot 2324}{28 \cdot 83 \cdot 2324} = \frac{260288}{5400976} = \frac{4}{83}$$

La conjetura también exige que $n \equiv 2(mód.3)$ y establece una estructura de cuáles serán los denominadores, a saber:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{(n-2)/3+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n((n-2)/3)+1}=\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{3}{n(n+1)}$$

Para nuestro ejemplo, hemos operado como sigue:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{(83-2)/3+1}+\frac{1}{83}+\frac{1}{83((83-2)/3)+1}=\frac{3}{83+1}+\frac{1}{83}+\frac{3}{83(83+1)}=\frac{1}{28}+\frac{1}{83}+\frac{1}{2324}=\frac{4}{83}$$

Podemos respetar el que n sea de la forma $n=3k+2,$ pero los valores de x,y y z no tienen por qué seguir esta estructura. Veamos otra solución para el ejemplo anterior.

Sea $\frac{4}{83}=\frac{1}{28}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ donde $\frac{4}{83}-\frac{1}{28}=\frac{29}{2324},$ diferencia que no es una fracción unitaria, por lo que operamos: *

$$\frac{2324}{29}+1=81{,}1379...\ \rightarrow 1/81:\ \frac{29}{2324}-\frac{1}{81}=\frac{25}{188244},$$ que no es fracción unitaria.
$$\frac{2324}{29}+1=81{,}1379...\ \rightarrow 1/82:\ \frac{29}{2324}-\frac{1}{82}=\frac{27}{95284},$$ que no es fracción unitaria.
$$\frac{2324}{29}+1=81{,}1379...\ \rightarrow 1/83:\ \frac{29}{2324}-\frac{1}{81}=\frac{1}{2324},$$ que sí es fracción unitaria.
$$\frac{2324}{29}+1=81{,}1379...\ \rightarrow 1/84:\ \frac{29}{2324}-\frac{1}{84}=\frac{1}{1743},$$ que sí es fracción unitaria.

donde encontramos dos representaciones para la ecuación:

$$\frac{4}{83}=\frac{1}{28}+\frac{1}{81}+\frac{1}{2324}\quad y\quad \frac{4}{83}=\frac{1}{28}+\frac{1}{84}+\frac{1}{1743}$$

* ver http://hojamat.es/parra/mat_antig.pdf

En un estudio titulado On Expanding $4/n$ into Three Egyptian Fractions, el profesor del Austin College, de Sherman USA, John H. Jaroma, considera la posibilidad de que la ecuación admita una de las fracciones como negativas, y propone la siguiente estructura:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}-\frac{1}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Como ejemplos resuelve, para $n=109{,}1001$

$$\frac{4}{109}=\frac{1}{54}+\frac{1}{55}-\frac{1}{323730}\quad y\quad \frac{4}{1001}=\frac{1}{462}+\frac{1}{539}-\frac{1}{42042}$$

Allan Swett, profesor de teoría de números de la Universidad de Indiana, plantea la variación donde, para $n>0,$ si $S_{(n)}$ denota un conjunto de enteros $A=\{0,1,2,3,...,4n-2\}$ tal que $Ax+W\equiv 0(mód.4n-1),$ podemos encontrar los siguientes valores:

n	**Módulo:** $4n-1$	**Conjunto** $S_{(n)}$
1	3	{2}
2	7	{3,5,6}
3	11	{7,8,10}
4	15	{7,11,13,14}
5	19	{14,15,18}
6	23	{7,10,11,15,17,19,20,21,22}
7	27	{20,23,26}
8	31	{15,23,27,29,30}
9	35	{2326313234}
10	39	{17,19,23,29,31,34,35,37,38}

6.3 Conjetura de Ramanujan donde $x^4+y^4+z^4=t^4+u^4+3^4.$

El matemático Srinivasa Ramanujan (1887-1920) ha sido el más sobresaliente del pasado siglo. Se le considera un genio por su inexplicable habilidad en el manejo de los números, atribuyéndosele importantes series y funciones que tienen relación con cualquier tipo de número.
La conjetura que nos ocupa es la suma de tres cuartas potencias iguales a otras dos cuartas potencias más $3^4,$ con bases distintas. La solución planteada originalmente fue de

$$(4n^5-5n)^4+(6n^4-3)^4+(4n^4+1)^4-(4n^5+n)^4-(2n^4-1)^4=81$$

modificada posterior como

$$(4n^5-n)^4+(6n^4+3)^4+(4n^4-1)^4-(4n^5+5n)^4-(2n^4+1)^4=81$$

en ambos casos, la conjetura se cumple para cualquier valor de $n\le 20.$ Por ejemplo:

n	x^4	y^4	z^4	=	t^4	u^4	3^4
1	3	9	3	=	3	9	3
2	126	99	63	=	138	33	3
3	969	489	323	=	987	163	3
4	4092	1539	1023	=	4116	513	3
5	12495	3753	2499	=	12525	1251	3

6.4 Conjetura de Diofanto donde $x^2+y^2+z^2=c,\ c\neq 7.$

Supongamos que sabemos que la ecuación $x^2+y^2+z^2=c$ tiene solución para valores de $c=0,1,2,3,4,5,6,8,9,10$ y no solución cuando $c=7.$
Como $0^2=0$ y $1^2=0,$ podemos obtener algunas soluciones rápidas según sea el valor de *c*, por ejemplo:

$$11=3^2+1^2+1^2 \qquad 16=4^2+0^2+0^2 \qquad 21=4^2+2^2+1^2$$
$$12=2^2+2^2+2^2 \qquad 17=4^2+1^2+0^2 \qquad 22=3^2+3^2+2^2$$
$$13=3^2+2^2+0^2 \qquad 18=4^2+1^2+1^2 \qquad 23\neq x^2+y^2+z^2$$
$$14=3^2+2^2+1^2 \qquad 19=3^2+3^2+1^2$$
$$15\neq x^2+y^2+z^2 \qquad 20=4^2+2^2+0^2$$

Para $c \leqslant 23$, la ecuación $x^2+y^2+z^2=c$ no tiene solución cuando $c=7,15,23$, esto es, cuando *c* es de la forma $8k+7$.
Los números de la forma $8k+7$ donde $c \leqslant 100$ son, $c=31,39,47,55,63,71,79,87,95$ y *todos*, *positivos y negativos*, dan como $x^2+y^2+z^2 \neq c$. Podemos decir que, la ecuación $x^2+y^2+z^2=c$ tendrá solución si, y sólo si, *c* no es de la forma $8k+7$ y coincidiríamos con Diofanto que ya lo conoció en su momento.

6.5 Conjetura de Bachet donde $y^2=y^3+k$.

Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) fue un matemático francés que tradujo la Aritmética de Diofanto mejorando notablemente las soluciones planteadas por éste. La dificultad a la resolución de esta ecuación es que carece de solución cuando k es de la forma $k=(4n-1)^3-4m^2$, en donde m y n son enteros tales que ningún primo $p \equiv -1(mód.4)$ divide a m. Para su solución se han creado distintos generadores, tales como

$$y=8-12a+12a^2,\ x=4a;\quad y=12a(a-1),\ x=4a-4;\quad y=12(a-1)(a-2),\ x=8-8a$$

que son fáciles de calcular.
Vamos a intentar resolver esta ecuación para k primo. He aquí algunas representaciones:

$$2^2=1^3+3,\ \ 3^2=2^3+1,\ \ 5^2=2^3+17,\ \ 7^2=2^3+41,\ \ 8^2=3^3+37,\ \ 9^2=2^3+73$$
$$9^2=4^3+17,\ \ 10^2=3^3+73,\ \ 11^2=2^3+113,\ \ 12^2=5^3+19,\ \ 14^2=5^3+71$$

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T.M., Introducción a la Teoría Analítica de Números, ISBN: 84-292-5006-4
CARMICHAEL, Robert D. Diophantine Analysis, Edición 1915 por Mathematical Monographs
COHEN, Henri, Number Theory: Tools and Diophantine Equations, ISBN: 978-0-387-49922-2
DIOFANTO DE ALEJANDRÍA, La Aritmética: tomos I y II, ISBN: 978-84-96566-73-6
HARDY and WRIGHT, An Introduction to the Theory of Number, ISBN: 0-19-853171-0
HOFMANN, Joseph E., Historia de la Matemática, ISBN: 968-18-6286-4
KOSHY, Thomas, Elementary Number Theory with Applications, ISBN: 978-0-12-372487-8
MORENO CASTILLO, Ricardo, Alhacén: el Arquímedes Árabe, ISBN: 978-84-96566-41-5
NATHANSON, Melvyn B., Elementary Methods in Number Theory, ISBN: 0-387-98912-9
SANCHEZ Y ROLDÁN, Goldbach: una Conjetura Indomable, ISBN: 978-84-92493-44-9
TATTERSALL, James J., Elementary Number Theory in Nine Chapters, ISBN: 0-521-61524-0

APOYO INTERNET

http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/ (Calculadora)
http://hojamat.es/parra/iniparra.htm
http://hojamat.es/sindecimales/sindec.htm
http://mathworld.wolfram.com/
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?lang=es&+session=LR02239D88.1 (Calculadora)
http://www.research.att.com
http://www.wolframalpha.com/examples/ (Calculadora)
http://www3.alpha-net.ne.jp/users/fermat/eindex.html