7. ECUACIONES CÚBICAS

7.1 Ecuación de la forma: $x^3+ax^2+bx+c\equiv 0(mód.p)$, con $p\in$ primo.

1.1 Hallar un procedimiento para resolver la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Sea ax^3+bx^2+cx+d un polinomio que dividido por a, $a\neq 0$, resulta otro representativo de la ecuación cúbica y que podemos escribir como $x^3+ax^2+bx+c=0$.
El teorema de Gauss determina que, *toda ecuación posee tantas raíces como unidades contenga su grado*. El grado de la ecuación cúbica es *tres* luego, tendrá *tres raíces* que representaremos como x_1,x_2,x_3.
Si x_1 es raíz de una ecuación cúbica, $(x-x_1)$ es divisor de x^3+ax^2+bx+c, por lo que se puede reducir la solución de la misma a otra cuyo grado será inferior en una unidad.
En toda ecuación de la forma $x^3+ax^2+bx+c=0$, *las leyes de coeficientes ideadas por Descartes y Newton,* contienen las siguientes propiedades:

1. La suma de las raíces x_1,x_2,x_3 es igual al coeficiente ax^2 con signo contrario, esto es, $x_1+x_2+x_3=-a$.
2. La suma de los productos posibles de cada dos raíces es igual al coeficiente de x con el mismo signo, esto es, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$.
3. El producto de las raíces con signo contario es igual al coeficiente independiente, esto es, a $x_1x_2x_3=-c$.

Si en una ecuación cúbica falta el término ax^2, la suma de las tres raíces es nula, en cuyo caso se dice que la ecuación está reducida.
Si en la forma normal de una ecuación falta el término independiente, una de las raíces es nula.
Para resolver la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$, considerando el coeficiente de $x=1$, deberemos transformarla introduciendo una nueva variable $x=z+n$, siendo *n* una constante a determinar $x_1=z_1+n,\ x_2=z_2+n,\ x_3=z_3+n$ que, igualando, podemos escribir como $x_1+x_2+x_3=z_1+z_2+z_3+3n$, con lo cual eliminaremos el término x^2.
Sabemos que $x_1+x_2+x_3=-a$, si la ecuación en *z* no ha de tener término x^2, es preciso que $z_1+z_2+z_3=0$ luego, $-a=3n$, de donde $n=-\frac{a}{3}$. Sustituyendo en $x^3+ax^2+bx+c=0$, $x=z-\frac{a}{3}$ resulta $z^3+z\left(b-\frac{a^2}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$, equivalente a $x^3+Px+Q=0$, ecuación libre del término x^2. Esta es la ecuación descubierta por *Scipione del Ferro (1465-1526)* que tiene como solución:

$$x=\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}=\left(\frac{Q}{2}+\sqrt{\frac{Q^2}{4}-\frac{P^3}{27}}\right)^{1/3}+\left(\frac{Q}{2}-\sqrt{\frac{Q^2}{4}-\frac{P^3}{27}}\right)^{1/3}$$

Dado que la ecuación cúbica tiene tres raíces, éstas dependerán del valor que tome la expresión Q^2-P^3, que es el discriminante:

1. Si el valor de Q^2-P^3 es positivo, $Q^2>P^3$, la ecuación tendrá una raíz real y dos complejas.
2. Si el valor de Q^2-P^3 es igual a cero, $Q^2-P^3=0$, la ecuación tiene tres raíces reales y dos iguales. Esto se demuestra fácilmente ya que si $Q^2=P^3$, se tendrá que $\omega_1=\omega_2$ y por tanto, $\omega_1-\omega_2=0$.
3. Si Q^2-P^3 es negativo, $Q^2<P^3$, la ecuación tendrá tres raíces reales distintas.

La ecuación descubierta por de *Ferro* podemos desglosarla como

$$\omega_1 = \left(\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3}, \ \omega_2 = \left(\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}} \right)^{1/3} \ \textit{donde} \ \varepsilon_1 = \omega_1 + \omega_2$$

Si las raíces segunda y tercera son complejas, al ser $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = 1$ y ya que $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = e^{2\pi i/3} \cdot e^{4\pi i/3}$, entonces

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1$$

son las raíces de la unidad que se pueden escribir como

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\varepsilon_3} \ \text{y} \ \varepsilon_3 = \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Ahora substituyendo $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ y $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, obtendremos:

$$\varepsilon_1 = \omega_1 + \omega_2, \ \ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{\sqrt{D}}{2} i(\omega_1 - \omega_2), \ \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{\sqrt{D}}{2} i(\omega_1 - \omega_2).$$

que permiten resolver la ecuación cúbica de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

1.2 Resolver la ecuación $x^3 - 15x^2 + 83x - 261 \equiv 0 (m\acute{o}d. 23)$.

Si $-15x^2$ lo escribimos como $x = z + \frac{15}{3} = z + 5$ y este valor lo sustituimos en la ecuación propuesta para eliminar el término $-15x^2$ obtenemos

$$(x + 5)^3 - 15(x + 5)^2 + 83(x + 5) - 261 = x^3 + 8x - 96 = 0$$

que es la ecuación reducida de tercer grado.
Calculamos los coeficientes ω_1 y ω_2 de la forma siguiente:

$$\omega_1 = \left(\frac{96}{2} + \sqrt{\frac{96^2}{4} - \frac{(-8)^3}{27}} \right)^{1/3} = 4{,}582.., \ \omega_2 = \left(\frac{96}{2} - \sqrt{\frac{96^2}{4} - \frac{(-8)^3}{27}} \right)^{1/3} = -0{,}582..$$

donde $\varepsilon_1 = \omega_1 + \omega_2 = 4{,}582 - 0{,}582 = 4$, que para la raíz de la ecuación propuesta resulta:

$$x_1 = 4 + 5 = 9$$

Las dos raíces primitivas son:

$$\varepsilon_2 = -\frac{4}{2} + i\sqrt{5}(\frac{4}{2}) = -2 + 2\sqrt{5} i \quad y \quad \varepsilon_3 = -\frac{4}{2} - i\sqrt{5}(\frac{4}{2}) = -2 - 2\sqrt{5} i$$

que son equivalentes a, $x_2 = 3 + 2\sqrt{5} i \quad y \quad x_3 = 3 - 2\sqrt{5} i$.

Estas dos últimas raíces son fáciles de calcular aplicando la Regla de Ruffini, ya que conocemos una de las raíces. Veamos:

	+1	-15	+83	-261
9		+9	-54	+261
	+1	-6	+29	0

La ecuación de segundo grado que genera es $x^2 - 6x + 29 = 0$, tiene como soluciones:

$$x_2 = 3 + 2\sqrt{5}i \quad y \quad x_3 = 3 - 2\sqrt{5}i$$

Estas raíces cumplen la ley de coeficientes, esto es:

$ax^2 = 9 + (3 + 2i\sqrt{5}) + (3 - 2i\sqrt{5}) = 15$, como $-15x^2$
$bx = 9(3 + 2i\sqrt{5}) + 9(3 - 2i\sqrt{5}) + (3 + 2i\sqrt{5})(3 - 2i\sqrt{5}) = 83$, como $83x$
$c = 9(3 + 2i\sqrt{5})(3 - 2i\sqrt{5}) = 261$, como -261

Comprobadas las raíces que dan solución a la ecuación algebraica, pasamos a la solución modular.
La transformación de la ecuación $x^3 - 15x^2 + 83x - 261 = 0$ respecto al módulo 23, resulta:

$$x^3 + 8x^2 + 14x + 15 \equiv 0(\text{mód}.23)$$

Conocemos la raíz entera 9, que aplicando la *Regla de Ruffini*, resulta:

	+1	+8	+14	+15
9		+9	+153	+1503
	+1	+17	+167	+1518

El resto final de 1518 es múltiplo del módulo, $1518 = 66 \cdot 23$ luego, la ecuación de segundo grado obtenida es $x^2 + 17x + 167 \equiv 0(\text{mód}.23)$, que podemos escribir como $x^2 + 17x + 6 \equiv 0(\text{mód}.23)$ y que tiene como raíces, $x \equiv 10,19(mód.23)$.
La ecuación planteada por tanto, tiene como soluciones $x \equiv 9,10,19(mód.23)$, esto es:

$$x_1 = 9 + 23t, x_2 = 10 + 23t \text{ y } x_3 = 19 + 23t$$

Hemos convertido una ecuación con tres raíces, una real y dos complejas, en un sistema con tres raíces enteras y múltiples soluciones.

1.3 Resolver la ecuación $x^3 - 30x^2 + 160x - 384 \equiv 0(mód.11)$.

Ya que $-30x^2$ se puede escribir como $x = z + \frac{30}{3} = z + 10$, podemos sustituirlo en la ecuación propuesta y obtener:

$$(x + 10)^3 - 30(x + 10)^2 + 160(x + 10) - 384 = x^3 - 140x - 784 = 0$$

Calculamos los coeficientes ω_1 y ω_2 de la forma siguiente:

$$\omega_1=\left(\frac{784}{2}+\sqrt{\frac{784^2}{4}-\frac{140^3}{27}}\right)^{1/3}=8{,}5275..,\ \omega_2=\left(\frac{784}{2}-\sqrt{\frac{784^2}{4}-\frac{140^3}{27}}\right)^{1/3}=5{,}4725...$$

de donde $\varepsilon_1=\omega_1+\omega_2=8{,}5275+5{,}4725=14$ que para la raíz de la ecuación propuesta será:

$$x_1=14+10=24$$

con

$$x_2=-7+\sqrt{7}i \quad y \quad x_3=-7-\sqrt{7}i$$

Conocida la raíz real, mediante la Regla de Ruffini, transformamos la ecuación cúbica en una cuadrática:

	+1	-30	+160	-384
24		+24	-144	+384
	+1	-6	+16	0

La ecuación $x^2-6x+16=0$ tiene como raíces:

$$x_2=3+\sqrt{7}i \text{ y } x_3=3-\sqrt{7}i$$

La ecuación, respecto al módulo es $x^3+3x^2+6x+1\equiv 0(mód.11)$.
Como la raíz conocida es 24, superior al módulo, con respecto a éste es 2, y aplicando la Regla de Ruffini:

	1	3	6	1
2		2	10	32
	1	5	16	33

Ya que 33 es múltiplo de 11, $33=11\cdot 3$ la ecuación cuadrática que genera es:

$$x^2+5x+5\equiv 0(mód.11)$$

que tiene como raíces:

$$x\equiv 1{,}5(mód.11)$$

La solución a la ecuación planteada es:

$$x_1=1+11t, x_2=2+11t \text{ y } 3=5+11t$$

1.4 Resolver la ecuación $x^3-9x^2+18x-28\equiv 0(mód.5)$.

Si aplicamos $x=z+\frac{9}{3}=z+3$, transformamos la ecuación planteada en $x^3-9x-28\equiv 0,mód.5)$ que tiene como solución:

$$\omega_1=\left(\frac{28}{2}+\sqrt{\frac{28^2}{4}-\frac{9^3}{27}}\right)^{1/3}=3\,,\ \omega_2=\left(\frac{28}{2}-\sqrt{\frac{28^2}{4}-\frac{9^3}{27}}\right)^{1/3}=1$$

La solución general de $x^3-9x-28=0$ es:

$$x_1=4,\ x_2=-2+\sqrt{3}i,\ x_3=-2-\sqrt{3}i$$

La raíz real, por tanto, es x_1=3+1+3=7. Mediante la Regla de Ruffini:

	+1	-9	+18	-28
7		7	-14	+28
	+1	-2	+4	0

La ecuación $x^2-2x+4=0$ tiene como raíces:

$$x_2=1+\sqrt{3}i \text{ y } x_3=1-\sqrt{3}i$$

Respecto al módulo obtenemos:

$$x^3+x^2+3x+2\equiv 0(mód.5)$$

que tiene como única solución:

$$x\equiv 2(mód.5)$$

1.5 Resolver la ecuación $x^3-15x^2+71x-105\equiv 0(mód.31)$.

Como $x=z+\frac{15}{3}=z+5$, la ecuación se transforma en $x^3-4x=0$, que carece de coeficiente independiente y que podría ser debido a que 5 es una raíz de la ecuación. Esta ecuación tiene como soluciones $x_1=0$ y $x_{2,3}=\pm 2$.
El coeficiente independiente es $105=3\cdot 5\cdot 7$ y el coeficiente de x^2 : $15=3+5+7$, lo que nos lleva a pensar que las raíces de la ecuación son $x_1=3$, $x_2=5$ y $x_3=7$.
Respecto al módulo, la ecuación simplificada resulta:

$$x^3+16x^2+9x+19\equiv 0(mód.31)$$

que tiene como soluciones:

$$x\equiv 3,5,7(mód.31)$$

1.6 Resolver la ecuación $x^3-18x^2+117x-296\equiv 0(mód.19)$.

Aplicando $x=z+\frac{18}{3}=z+6$ obtenemos:

$$x^3+9x-26\equiv 0(mód.19)$$

con soluciones:

$$\omega_1=\left(\frac{26}{2}+\sqrt{\frac{26^2}{4}-\frac{(-9)^3}{27}}\right)^{1/3}=3\,,\ \omega_2=\left(\frac{26}{2}-\sqrt{\frac{26^2}{4}-\frac{(-9)^3}{27}}\right)^{1/3}=-1$$

esto es:

$$x_1=2,\quad x_2=-1+2\sqrt{3}i,\quad x_3=-1-2\sqrt{3}i$$

Como $x_1=2+6=8$, para:

$$x^3-18x^2+117x-296=0$$

las soluciones resultan ser

$$x_1=8,\quad x_2=5+2\sqrt{3}i,\quad x_3=5-2\sqrt{3}i$$

y para la ecuación transformada respecto al módulo

$$x^3+x^2+3x+8\equiv 0(mód.19)$$

tiene como soluciones:

$$x\equiv 8,13,16(mód.19)$$

7.2 Ecuación de la forma: $x^3+ax^2+bx+c\equiv 0(mód.m)$, con m compuesto.

2.1 Resolver la ecuación $x^3+9x-20\equiv 0(mód.85)$.

El módulo de la ecuación es $85=5\cdot 17$ luego, la ecuación tendrá solución si, y sólo si tiene soluciones con los módulos 5 y 17.
Empecemos por determinar que $P=\frac{9}{3}=3$ y $Q=-\frac{20}{2}=-10$.
Calculamos la raíz entera:

$$\omega_1=\left(10+\sqrt{10^2-(-3)^3}\right)^{1/3}=2{,}77067\ \text{y}\ \omega_2=\left(10-\sqrt{10^2-(-3)^3}\right)^{1/3}=-1{,}08276$$

que resulta:

$$x_1=2{,}77067-1{,}08276=1{,}66791$$

raíz que como se aprecia, no es entera.
Dado que el sistema completo de restos, respecto al módulo 5 es $\{1,2,3,4\}$, probamos con la ecuación $x^3+9x-20\equiv 0(mód.5)$, equivalente a $x^3+4x\equiv 0(mód.5)$, donde los números $0,1\ y\ 4$ son raíces, luego:

$$x\equiv 0,1,4(mód.5)$$

es solución de la ecuación.

Para $x^3 + 9x - 20 \equiv 0(mód. 17)$, equivalente a $x^3 + 9x + 14 \equiv 0(mód. 17)$, la única raíz que admite es la 3, esto es $x \equiv 3(mód. 17)$. Por todo lo expuesto, la ecuación planteada tiene solución.
Utilizando el Teorema Chino de Restos, obtenemos:

$$x_1 = 0 + 5t, x_2 = 1 + 5t \text{ y } x_3 = 4 + 5t$$

por una parte

$$x_4 = 3 + 17t$$

y por otra, en general, 20,54 y 71 son las raíces que satisfacen a:

$$x \equiv 20,54,71(mód. 85)$$

2.2 Resolver la ecuación $x^3 - 9x^2 + 31x - 39 \equiv 0(mód. 493)$.

Esta ecuación tiene como soluciones $x_1 = 3,\ x_2 = 3 + 2i\ y\ x_3 = 3 - 2i$.
La factorización del módulo es $493 = 17 \cdot 29$ luego, la ecuación tendrá solución si a su vez la tiene con los módulos 17 y 29.
Si observamos que el coeficiente independiente es $39 = 3 \cdot 13$ y el coeficiente de x^2 es 9, múltiplo de 3, podríamos considerar que 3 es una raíz de la ecuación. Veamos:

	+1	-9	+31	-39
3		3	-18	+39
	1	-6	+13	0

La ecuación cuadrática resulta $x^2 - 6x + 13 = 0$ que tiene como solución dos raíces complejas:

$$x_2 = 3 + 2i\ y\ x_3 = 3 - 2i$$

por lo que podemos asegurar que la ecuación planteada tiene, al menos, una raíz entera, la $x_1 = 3$.
Para la ecuación $x^2 - 6x + 13 \equiv 0(mód. 17)$, que es equivalente a

$$x^2 + 11x + 13 \equiv 0(mód. 17)$$

si

$$z^2 \equiv 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13(mód. 17)$$
$$\mathrm{z}^2 \equiv 69(\mathrm{mód}. 17)$$
$$\mathrm{z}^2 \equiv 1(\mathrm{mód}. 17)$$

tiene como raíces

$$z \equiv 1,16(mód. 17)$$

y escribimos como

$$z_1 = 1 + 17t \text{ y } z_2 = 16 + 17t$$

Conocidos los valores de z, los valores de x serán:

$2x+11 \equiv 1(mód.17)$, $2x+12 \equiv 0(mód.17)$, o sea $x \equiv 12(mód.17)$
$2x+11 \equiv 16(\text{mód}.17)$, $2x \equiv 5(\text{mód}.17)$, o sea $x \equiv 11(\text{mód}.17)$

De donde, para el módulo 17, la solución es:

$$x \equiv 3{,}11{,}12(mód.17)$$

Para la ecuación $x^2-6x+13 \equiv 0(mód.29)$ que es equivalente a:

$$x^2+23x+13 \equiv 0(mód.29)$$

si

$$z^2 \equiv 23^2-4\cdot 1\cdot 13(mód.29)$$
$$z^2 \equiv 477(mód.29)$$
$$z^2 \equiv 13(mód.29)$$

tiene como raíces

$$z \equiv 10{,}19(\text{mód}.29)$$

que escribimos como:

$z_1=10+29t$ y $z_2=19+29t$

Conocidos los valores de z, los valores de x serán:

$2x+23 \equiv 10(\text{mód}.29)$, $2x+13 \equiv 0(\text{mód}.29)$, o sea $x \equiv 8(\text{mód}.29)$
$2x+23 \equiv 19(\text{mód}.17)$, $2x+4 \equiv 0(\text{mód}.29)$, o sea $x \equiv 27(\text{mód}.29)$

De donde, para el módulo 29, la solución es:

$$x \equiv 3{,}8{,}27(\text{mód}.29)$$

Para la ecuación $x^3-9x^2+31x-39 \equiv 0(mód.493)$, por el *Teorema Chino de Restos* encontramos las soluciones:

$$x \equiv 3{,}37{,}114{,}148{,}182{,}317{,}351{,}385{,}462(\text{mód}.493)$$

2.3 Resolver la ecuación $x^3-15x^2+49x-55 \equiv 0(mód.30)$.

El coeficiente independiente es $55=5\cdot 11$ luego, una de las raíces podría ser o el 5 o el 11. Para $f(5)=5^3-15\cdot 5^2+49\cdot 5-55=60$, no es raíz. Para el 11

	+1	-15	+49	-55
11		11	-44	+55
	1	-4	5	0

admite la raíz y genera la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 5 = 0$, con dos raíces complejas que son x_2 =2+i y x_3 =2-i.
La raíz 11, respecto a los módulos $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, tiene como restos 1, 2, y 1 que son raíces generales de $x^2 - 4x + 5 = 0$. Otras raíces distintas las calculamos a continuación:

Para $x^2 - 4x + 5 \equiv 0(mód. 2)$, equivalente a $x^2 + 1 \equiv 0(mód. 2)$, tiene como única raíz, $x_1 = 1 + 2t$ que es solución general.

Para $x^2 - 4x + 5 \equiv 0(mód. 3)$, equivalente a $x^2 + 2x + 2 \equiv 0(mód. 3)$, tiene como única solución, $x_1 = 2 + 3t$ que también es raíz de la ecuación principal.

Para $x^2 - 4x + 5 \equiv 0(mód. 5)$, equivalente a $x^2 + x \equiv 0(mód. 5)$, tiene dos raíces $x_2 = 0 + 5t$, $x_3 = 4 + 5t$ que son distintas a $x_1 = 1 + 5t$ raíz principal.

Por el *Teorema Chino de Restos*, las raíces para la ecuación planteada serán:

$1 + 2t \equiv 2(mód. 3)$ resulta $t \equiv 2(mód. 3)$ de donde, $x = 1 + 2(2 + 3t) = 5 + 6t$.
$5 + 6t \equiv 0(mód. 5)$ resulta $t \equiv 0(mód. 6)$ de donde, $x = 5 + 6(0 + 6t) = 5 + 30t$.
$5 + 6t \equiv 1(mód. 5)$ resulta $t \equiv 1(mód. 6)$ de donde, $x = 5 + 6(1 + 6t) = 11 + 30t$.
$5 + 6t \equiv 4(mód. 5)$ resulta $t \equiv 4(mód. 6)$ de donde, $x = 5 + 6(4 + 6t) = 29 + 30t$.

La solución de la ecuación planteada es

$$x \equiv 5,11,29(mód. 30)$$

Puestos a buscar caminos para obtener soluciones de las ecuaciones modulares, si $x^3 - 15x^2 + 49x - 55 = 0$ se transforma en $x^3 + 15x^2 + 19x + 5 \equiv 0(mód. 30)$ y sabemos que tiene como raíz 11, tenemos:

	+1	+15	+19	+5
11		+11	+286	+3355
	+1	+26	+305	+3360

Como $3360 = 30 \cdot 112$, podemos decir que una de las raíces es 11 y que las otras dos son las que genera la modular $x^2 + 26x + 5 \equiv 0(mód. 30)$, como puede comprobarse fácilmente, ya que:

Para $x^2 + 26x + 5 \equiv 0(mód.2)$, obtenemos $x_1 = 1 + 2t$.
Para $x^2 + 26x + 5 \equiv 0(mód.5)$, obtenemos $x_1 = 0 + 5t$, $x_2 = 4 + 5t$.
Para $x^2 + 26x + 5 \equiv 0(mód.10)$, obtenemos $x_1 = 5 + 10t$, $x_2 = 9 + 10t$.

El resto lo dejo en manos del lector.

2.4 Resolver la ecuación $x^3 - 47x - 136 \equiv 0(mód. 4433)$.

Se trata de una ecuación reducida con módulo $4433 = 11 \cdot 13 \cdot 31$.
La ley de coeficientes en una ecuación cúbica reducida es:

$P = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ y $Q = x_1x_2x_3$.

Como el coeficiente independiente se factoriza $136 = 2^3 \cdot 17$, uno de estos números debería ser una raíz de la ecuación. La diferencia del coeficiente 47 con 17 es 10, lo que nos lleva a pensar que 17 es un conjugado de las raíces complejas, por lo que probaremos con 8.

	+1	0	-47	-136
8		+8	+64	+136
	+1	+8	+17	0

La primera raíz es:

$$x_1 = 8$$

y $x^2 + 8x + 17 = 0$ nos proporciona las otras dos complejas que son:

$$x_2 = -4 + i \text{ y } x_3 = -4 - i$$

Se cumple la ley de coeficientes ya que:

$$8(-4 + \mathrm{i}) + 8(-4 - \mathrm{i}) + (-4 + \mathrm{i})(-4 - \mathrm{i}) = -47$$
$$8(-4 + \mathrm{i})(-4 - \mathrm{i}) = -136$$

siendo el conjugado $(-4 + i)(-4 - i) = 17$.
Como la raíz real es menor que cualquiera de los módulos propuestos es, por tanto, raíz de la ecuación propuesta con dichos módulos.

Para $x^2 + 8x + 17 \equiv 0(mód. 11)$, equivalente a $x^2 + 8x + 6 \equiv 0(mód. 11)$, salvo la raíz principal $x_1 = 8 + 11t$, no tiene más soluciones.

Si $z^2 \equiv 8^2 - 4 \cdot 6 \equiv x_1 = 8 + 13t \equiv 40(mód. 11)$, $z^2 \equiv 7(mód. 11)$ no tiene solución, ya que en el conjunto de restos, respecto al módulo $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, no existe ningún número que satisfaga a $z^2 \equiv 7(mód. 11)$ por tanto, tampoco habrá ninguno que satisfaga la ecuación propuesta.

Para $x^2 + 8x + 17 \equiv 0(mód. 13)$, equivalente a $x^2 + 8x + 4 \equiv 0(mód. 13)$, tiene dos raíces $x_2 = 1 + 13t$, $x_3 = 4 + 13t$, que son distintas a la raíz principal $x_1 = 8 + 13t$.

Para $x^2 + 8x + 17 \equiv 0(mód. 31)$ tampoco tiene solución, salvo $x_1 = 8 + 31t$ raíz principal, tiene otras soluciones.

Conociendo las raíces de los números primos que componente la factorización del módulo, por cualquiera de los métodos utilizados, podemos comprobar que la solución a la ecuación propuesta es:

$$x \equiv 8{,}690{,}1031(mód. 4433)$$

2.5 Resolver la ecuación $x^3 - 2x + 74 \equiv 0(mód.403)$.

La factorización del módulo es $403 = 13 \cdot 31$. Si hacemos que $P = \frac{2}{3}$ y $Q = \frac{74}{2} = 37$, resulta:

$$\omega_1 = \left(-37 + \sqrt{37^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{1/3} = -4{,}1982 \text{ y } \omega_2 = \left(-37 - \sqrt{37^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{1/3} = -0{,}1588$$

lo que hace que $x_1 = \omega_1 + \omega_2 = (-4.1982) + (-0{,}1588) = -4{,}357$, número racional.
Para calcular las otras dos raíces, utilizamos la *Regla de Ruffini*:

	+1	0	-2	+74
-4,357		-4,357	+18,9834	-73,9967
	+1	-4,357	+16,9834	

Tenemos la ecuación cuadrática $x^2 - 4{,}357x + 16{,}9834 = 0$, que tiene como solución:

$$x_2 = 2{,}179 + 3{,}499i \text{ y } x_3 = 2{,}179 - 3{,}499i$$

dos raíces complejas.
Si comparamos la raíz real $x_1 = -4{,}357$ con los módulos 13 y 31, observaremos que sus inversos son el 8,643 y 26,643 y su semisuma interna $\frac{26{,}643 - 8{,}643}{2} = 9$ esto nos lleva a pensar que la raíz, para la ecuación modular, puede estar comprendida entre ± 9.
Para la ecuación $x^3 - 2x + 74 \equiv 0(mód.13)$ probamos que:

$$f(9) = x^3 - 2x + 74 = 785 = 5 \cdot 157, f(10) = x^3 - 2x + 74 = 1054 = 2 \cdot 17 \cdot 31$$
$$f(8) = x^3 - 2x + 74 = 570 = 5 \cdot 6 \cdot 19, f(11) = x^3 - 2x + 74 = 1383 = 3 \cdot 461$$
$$f(7) = x^3 - 2x + 74 = 403 = 13 \cdot 31, f(12) = x^3 - 2x + 74 = 1778 = 2 \cdot 7 \cdot 127$$

Podemos comprobar que 7 es raíz de la ecuación para los dos módulos.
Si ahora reducimos la ecuación cúbica a cuadrática:

	+1	0	-2	+74
7		+7	+49	+329
	+1	+7	+47	+403

Como $403 = 13 \cdot 31$, tenemos la cuadrática $x^2 + 7x + 47 = 0$.

Para $x^2 + 7x + 47 \equiv 0(mód.13)$, con raíces 2, 4 y 7.
Para $x^2 + 7x + 47 \equiv 0(mód.31)$, con raíces 7, 10 y 14.

Utilizando el Teorema Chino de Restos, para la ecuación $x^2 + 7x + 47 \equiv 0(mód.403)$ obtenemos las siguiente solución:

$$x \equiv 7{,}41{,}69{,}72{,}134{,}262{,}293{,}355{,}379(mód.403)$$

7.3 Ecuación de la forma: $x^3 + ax^2 + bx + c \equiv 0\left(mód.p^n\right)$, con $n > 1$.

3.1 Resolver la ecuación $x^3 - 22x + 39 \equiv 0(mód.1183)$.

La descomposición del módulo es $1183 = 7 \cdot 13^2$.

Para $x^3 - 22x + 39 \equiv 0(mód.7)$, equivalente a $x^3 + 6x + 4 \equiv 0(mód.7)$ encontramos como única solución $x_1 = 3 + 7t$.

Para $x^3 - 22x + 39 \equiv 0(mód.13)$, equivalente a $x^3 + 4x \equiv 0(mód.13)$ tiene como soluciones $x_1 = 0 + 13t$, $x_2 = 3 + 13t$ y $x_3 = 10 + 13t$. Los valores de sus raíces, para la ecuación y su derivada, son:

$$f(x) = x^3 - 22x + 39 = \begin{cases} f(0) = 9 \\ f(3) = 0 \\ f(10) = 819 \end{cases}, \quad f'(x) = 3x^2 - 22 = \begin{cases} f'(0) = -22 \\ f'(3) = 5 \\ f'(10) = 278 \end{cases}$$

Aplicando estos valores a la ecuación $f(x) + f'(x) \cdot p \cdot t_1 \equiv 0(mód.p^n)$, resulta:

Para $39 - 22 \cdot 13t_1 \equiv 0(mód.13^2)$ que, dividida por 13, $3 - 22t_1 \equiv 0(mód.13)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 9(mód.13)$. Ahora, $x = 0 + 13(9 + 13t) = 117 + 13^2t$.

Para $0 + 5 \cdot 13t_1 \equiv 0(mód.13^2)$ que, dividida por 13, $51t_1 \equiv 0(mód.13)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 0(mód.13)$. Ahora, $x = 3 + 13(0 + 13t) = 3 + 13^2t$.

Para $819 + 278 \cdot 13t_1 \equiv 0(mód.13^2)$ que, dividida por 13, $63 + 278t_1 \equiv 0(mód.13)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 3(mód.13)$. Ahora, $x = 10 + 13(3 + 13t) = 49 + 13^2t$.
La solución para la ecuación $x^3 - 22x + 39 \equiv 0(mód.13^2)$, es

$$x \equiv 3{,}49{,}117(mód.13^2)$$

y la solución a la ecuación propuesta:

$$x \equiv 3{,}556{,}962(mód.7 \cdot 13^2)$$

3.2 Resolver la ecuación $x^3 - 78x + 113 \equiv 0\left(mód.5 \cdot 19^2\right)$.

Para $x^3 - 78x + 113 \equiv 0(mód.5)$, equivalente a $x^3 + 2x + 3 \equiv 0(mód.5)$, tiene como raíces $2\ y\ 4$.

Para $x^3 - 78x + 113 \equiv 0(mód.19)$, equivalente a $x^3 + 17x + 18 \equiv 0(mód.19)$, tiene como raíces $5{,}15\ y\ 18$.

Para $x^3 - 78x + 113 \equiv 0(mód.19^2)$, debemos conocer los valores de de la ecuación anterior y los de su derivada y luego aplicar $f(x) + f'(x) \cdot p \cdot t_1 \equiv 0(mód.p^n)$.

$$f(x)=x^3-78x+113=\begin{cases} f(5)=152 \\ f(15)=2318 \\ f(18)=4541 \end{cases}, \quad f'(x)=3x^2-78=\begin{cases} f'(5)=-3 \\ f'(15)=597 \\ f'(118)=894 \end{cases}$$

Para $152-3\cdot 19t_1 \equiv 0(mód.\,19^2)$ que, dividida por 19, $8-3t_1 \equiv 0(mód.\,19)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 10(mód.\,19)$.

Ahora, $x=5+19(10+19t)=195+19^2t$.

Para $2318+597\cdot 19t_1 \equiv 0(mód.\,19^2)$ que, dividida por 19, $122+597t_1 \equiv 0(mód.\,19)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 18(mód.\,19)$.

Ahora, $x=15+19(18+19t)=357+19^2t$.

Para $4541+894\cdot 19t_1 \equiv 0(mód.\,19^2)$ que, dividida por 19, $239+894t_1 \equiv 0(mód.\,19)$ y haciendo operaciones resulta para $t_1 \equiv 8(mód.\,19)$.

Ahora, $x=18+19(8+19t)=170+19^2t$.

La solución de $x^3-78x+113 \equiv 0(mód.\,19^2)$ es:

$$x \equiv 170, 195{,}357(mód.\,19^2)$$

Aplicando el *Teorema Chino de Restos*, la solución para la ecuación planteada resulta:

$$\mathrm{x} \equiv 357{,}892{,}917{,}1079{,}1614{,}1639(\mathrm{mód.}\,1805)$$

3.3 Resolver la ecuación $x^3+17x+1 \equiv 0(mód.\,11\cdot 17^2)$.

La ecuación $x^3+17x+1 \equiv 0(mód.\,11)$ admite las raíces $6\ y\ 8$.
La ecuación $x^3+17x+1 \equiv 0(mód.\,17)$ la única raíz que admite es 16.
El valor de la ecuación, respecto a esta raíz, es:

$$f(16)=x^3+17x+1=4369$$

y los valores de su derivada

$$f'(16)=3x^2+17=785$$

Ahora podemos resolver la ecuación con módulo 17^2:

Para $x^3+17x+1 \equiv 0(mód.\,17^2)$, si $4369+785\cdot 17t_1 \equiv 0(mód.\,17^2$ la dividimos por 17 obtenemos $257+785t_1 \equiv 0(mód.\,17)$ y operando, $t_1 \equiv 5(mód.\,17)$.

Resulta para $x=16+17(5+17t)=101+17^2t$, única raíz de la ecuación.

Por el *Teorema Chino de Restos* la solución de $x^3+17x+1 \equiv 0(mód.\,11\cdot 17^2)$ es:

$$x \equiv 679{,}1546(mód.\,11\cdot 17^2)$$

3.4 Resolver la ecuación $x^3 - 23x - 328 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 5 \cdot 13^2)$.

Esta ecuación admite $x_1 = 8,\ x_2 = -4 + 5i,\ x_3 = -4 - 5i$ como solución.

La ecuación $x^3 - 23x - 328 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 5)$, equivalente a $x^3 + 2x + 2 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 5)$ admite las raíces $1\ y\ 3$.

La ecuación $x^3 - 23x - 328 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13)$, equivalente a $x^3 + 3x + 10 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13)$ admite las raíces 8 y 10.

Los valores de esta ecuación respecto a sus raíces, son:

$f(8) = x^3 - 23x - 328 = 0$ y $f(10) = x^3 - 23x - 328 = 442$.

En cuanto a su derivada:

$f'(8) = 3x^2 - 23 = 169$ y $f'(10) = 3x^2 - 23 = 277$

Con estos datos ya podemos resolver la ecuación $x^3 - 23x - 328 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13^2)$ como sigue:

$0 + 169 \cdot 13t_1 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13^2)$ dividida por 13, $169t_1 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13)$ que no tiene solución, por tanto $x = 8 + 13(0 + 13t) = 8 + 13^2 t$.

$442 + 277 \cdot 13t_1 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13^2)$ dividida por 13, $34 + 277t_1 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 13)$ que tiene como solución $x_2 = 11 + 13t$ por tanto $x = 10 + 13(11 + 13t) = 153 + 13^2 t$.

Si aplicamos el Teorema Chino de Restos, esta ecuación genera bastantes más soluciones, que dejamos en manos del lector. La solución a la ecuación planteada es:

$x \equiv$ 8,21,73,86,138,151,153,203,216,268,281,333,346,398,411,463,476,491, 528,541,593,606,658,671,723,736,788,801$(m\acute{o}d.\, 5 \cdot 13^2)$

3.5 Resolver la ecuación $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 7 \cdot 31^4)$.

La ecuación $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(m\acute{o}d.\, 7)$ no tiene solución, ya que dentro del conjunto completo de restos respecto al módulo 7 {0,1,2,3,4,5,6}, no existe ningún número que satisfaga a dicha ecuación y por tanto, la ecuación planteada no tiene solución.
Demostremos que la ecuación $x^3 + 6x + 2 = 0$ no tiene solución.
Si tenemos en cuenta que:

$P = \frac{6}{3} = 2$ y $Q = \frac{2}{2} = 1$, $\omega_1 = \left(1 + \sqrt{1^2 + 2^3}\right)^{1/3} = 1{,}5874$ y $\omega_2 = \left(1 - \sqrt{1^2 + 2^3}\right)^{1/3} = -1{,}2600$

el valor de una raíz resulta

$x_1 = 1{,}5874 + (-1{,}2600) = 0{,}3274$, con $x_1 \in \mathbb{R}$.

Para las otras dos raíces:

	+1	0	+6	+2
-0,3274		-0,3274	+0,1072	-2
	+1	-0,3274	+6,1072	0

La cuadrática generada es $x^2 - 0{,}3274x + 6{,}1072 = 0$, con $x_2, x_3 = 0{,}1637 \pm 2{,}4659i$ donde $x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

La ecuación $x^2 + 0{,}3274x + 6{,}1072 \equiv 0(mód.31)$ la satisfacen el 21 y 24 y la semisuma de estos números es $\frac{21+24}{2}$ = 22,5 que podría aproximarse a alguna de las raíces que satisfaga a $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31)$.

Veamos:

$$f(22) = x^3 + 6x + 2 = 10782 = 2 \cdot 3^2 \cdot 599$$
$$f(23) = x^3 + 6x + 2 = 12307 = 31 \cdot 397$$

El número 23 es raíz de $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31)$ entonces:

	+1	0	+6	+2
23		+23	+529	+12305
	+1	+23	+535	+12307

Como $12397 = 31 \cdot 397$ es raíz de $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31)$, las otras dos raíces serán las que satisfagan a $x^2 + 23x + 535 \equiv 0(mód.31)$, ecuación que podemos escribir como $x^2 + 23x + 8 \equiv 0(mód.31)$ y que tiene como raíces 19 y 20.
Esto confirma que la solución de $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31)$ es $x \equiv 19{,}20{,}23(mód.31)$.
Aplicando métodos utilizados anteriormente, obtenemos:

$x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31^2)$, con solución $x \equiv 485{,}519{,}918(mód.31^2)$
$x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31^3)$, con solución $x \equiv 6251{,}11090{,}12450(mód.31^3)$
$x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.31^4)$, con solución $x \equiv 453116{,}696283{,}697643(mód.31^4)$

Para la ecuación $x^3 + 6x + 2 \equiv 0(mód.7 \cdot 31^4)$ no existe solución:

$$x \not\equiv (mód.7 \cdot 31^4)$$

7.4 Ecuación de la forma: $x^{\varphi(p)+3} + ax^{\varphi(p)+2} + bx^{\varphi(p)+1} + c \equiv 0(mód.p)$, con $p \in$ primo.

4.1 Resolver la ecuación $x^{\varphi(5)+3} - 15x^{\varphi(5)+2} + 71x^{\varphi(5)+1} - 105 \equiv 0(mód.5)$.

Empecemos calculando la función de Euler, $\varphi(5) = 5\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) = 4$.
Como $\frac{15}{3} = 5$

$$(x+5)^3 - (x+5)^2 + 71(x+5) - 105 = x^3 - 146x - 710 = 0$$

Para $x^3 - 146x - 710 = 0$, equivalente a $x^3 + 4x \equiv 0(mód.5)$ tiene como soluciones modulares $x \equiv 0{,}1{,}4(mód.5)$.

En cuanto a la solución algebraica:

$$\omega_1=\left(355+\sqrt{3552-\left(\frac{146}{3}\right)^3}\right)^{1/3}=7,7124 \text{ y } \omega_2=\left(355-\sqrt{3552-\left(\frac{146}{3}\right)^3}\right)^{1/3}=6,3102$$

con lo que

$$x_1=\omega_1+\omega_2=7,7114+6,3102=14,0226$$

Como

	+1	0	-146	-710
14,0226		+14,0226	+196,6333	+710
	+1	+14,0226	+50,6333	0

luego:

$$x^2+14{,}0226x+50{,}6333=0 \quad x_2=-7,0113+1,2143i \text{ y } x_3=-7,0113-1,2143i$$

En cuanto a $x^3-15x^2+71x-105=0$, por la ley de coeficientes sabemos que, si $105=3\cdot5\cdot7$ son raíces de la ecuación, debe cumplirse:

Que $3+5+7=15$ sea igual a $-15x^2$.
Que $3\cdot5+3\cdot7+5\cdot7=15+21+35=71$ sea igual a $71x$.

por tanto

$$\mathrm{x}^3-15\mathrm{x}^2+71\mathrm{x}-105=0$$

tiene como raíces:

$$x_1=3, x_2=5 \text{ y } x_3=7$$

Para $x^3-15x^2+71x-105\equiv 0(mód.5)$, equivalente a $x^3+x\equiv 0(mód.5)$ la solución será $x\equiv 0,2,3(mód.5)$ ya que, respecto al módulo 5, 3 se mantiene, 5 tiene resto 0 y 7 tiene resto 2.

Para la ecuación planteada que escribimos $x^7-15x^6+71x^5-105\equiv 0(mód.5)$ equivalente a $x^7+x^5\equiv 0,2,3(mód.5)$, tiene la misma solución que $x^3+x\equiv 0,2,3(mód.5)$.

Para la ecuación reducida $x^7-146x^5-710\equiv 0(mód.5)$ equivalente a $x^7+4x^5\equiv 0(mód.5)$, tiene la misma solución que $x^3+4x\equiv 0(mód.5)$.

Para $\varphi(p)=s$ y t un entero cualquiera, esta situación se producirá siempre que los exponentes tengan la forma:

$$x^{st+3},\ a^{st+2} \text{ ó } bx^{st+1}$$

4.2 Resolver la ecuación $x^{75} - 12x^{110} + 22x^{145} - 20 \equiv 0(mód.37)$.

Empecemos por resolver la ecuación $x^3 - 12x^2 + 22x - 20 = 0$. Se trata de una ecuación cúbica con todos sus términos, por tanto completa.
Por la *Ley Simétrica del los Coeficientes,* descubierta por Isaac Newton (1642-1717) y recogida en su obra Arithmética Universalis publicada en 1707, la ecuación cúbica normal o completa, con raíces a, b, c, tiene como estructura:

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$$

Como

$$abc = -20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \text{ y } (a+b+c)x^2 = -12x^2 \neq (2+2+5)x^2 = 9x^2$$

no son coincidentes, algunas de las raíces pueden ser complejas.
Las raíces complejas son dobles ya que son raíces de la unidad y de la forma

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = e^{2\pi i/3} \cdot e^{4\pi i/3} = 1$$

por tanto conjugadas. Si una de las raíces complejas es $2+i$ la otra debe ser $2-i$ y su conjugado $(2+i)(2-i) = 5$ pero entonces, la suma sería 10 y el producto 25, que nada tienen que ver con 12 y con 20. Si consideramos 4 como raíz real:

$$f(4) = x^3 - 12x^2 + 22x - 20 = -60 \neq 0$$

ésta no satisface a la ecuación.
Consideremos $1+i$ y $1-i$ raíces complejas con $(1+i)(1-i) = 2$, esto nos lleva a que la raíz real sea 10. Comprobamos:

$$(a+b+c)x^2 = 10 + (1+i) + (1-i) = 12x^2$$
$$(ab+ac+bc)x^2 = 10(1+i) + 10(1-i) + (1+i)(1-i) = 22x$$
$$abc = 10(1+i)(1-i) = 20$$

Tenemos por tanto, las raíces $x_1 = 10$, $x_2 = 1+i$, $x_3 = 1-i$.
La ecuación $x^3 - 12x^2 + 22x - 20 \equiv 0(mód.37)$ admite 10 como raíz entera, cosa que podemos comprobar mediante la Regla de Ruffini:

	+1	-12	22	-20
10		+10	-20	+20
	+1	-2	+2	0

Ahora resolvemos $x^2 - 2x + 2 \equiv 0(mód.37)$, equivalente a $x^2 + 35x + 2 \equiv 0(mód.37)$. Sabemos que $z^2 \equiv 35^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \equiv 1217 \equiv 33(mód.37)$ que le satisfacen 12 y 25.

Para $2x + 35 \equiv 12(mód.37)$ resulta $x \equiv 7(mód.37)$
Para $2x + 35 \equiv 25(mód.37)$ resulta $x \equiv 32(mód.37)$

Por tanto, la solución general es:

$$\mathrm{x} \equiv 7,10,32(\mathrm{mód}.37)$$

Para que la ecuación $x^{75} - 12x^{110} + 22x^{145} - 20 \equiv 0(m\acute{o}d.37)$ tenga solución, teniendo en cuenta que $\varphi(37) = 37\left(1 - \frac{1}{37}\right) = 37\left(\frac{36}{37}\right) = 36$, los exponentes deben ser de la forma $n = 36s + t$, donde t admitirá sólo valores de 3, 2 ó 1, dependiendo del grado del monomio y su ubicación dentro de la ecuación. En nuestro caso:

$$75 = 36 \cdot 2 + 3,\ 110 = 36 \cdot 3 + 2 \text{ y } 145 = 36 \cdot 4 + 1$$

se ajustan a lo exigido y en este sentido, la ecuación tendrá soluciones y serán las mismas que las obtenidas en operaciones anteriores. Para

$$x^{75} - 12x^{110} + 22x^{145} - 20 \equiv 0(m\acute{o}d.37) \text{ es } x \equiv 7,10,32(m\acute{o}d.37).$$

4.3 Resolver la ecuación $x^{51} - 2x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$.

La ecuación planteada con exponentes normales es $x^3 - 2x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$ y la factorización del módulo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Empecemos por resolver la ecuación en relación con cada uno de los módulos 3,5,7.

Para $x^3 - 2x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.3)$, equivalente a $x^3 + x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.3)$, tiene como solución $x \equiv 1(m\acute{o}d.3)$ igual que la ecuación $x^{51} + x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.3)$.

Para $x^3 - 2x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.5)$, equivalente a $x^3 + 3x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.5)$, tiene como solución $x \equiv 1,2(m\acute{o}d.3)$ igual que la ecuación $x^{51} + 3x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.5)$.

Para $x^3 - 2x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$, equivalente a $x^3 + 5x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$, tiene como solución $x \equiv 1(m\acute{o}d.7)$ igual que la ecuación $x^{51} + 5x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$.

Para $x^3 - 2x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$, equivalente a $x^3 + 103x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$, tiene como solución $x \equiv 1,22(m\acute{o}d.105)$ igual que la ecuación $x^{51} + 103x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$ ya que esta última es equivalente a $x^{51} - 2x^{49} + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.105)$.

4.4 Resolver la ecuación $x^{45} - 3x^7 + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.49)$.

Para $x^3 - 3x + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$, equivalente a $x^3 + 4x + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$, tiene como solución $x \equiv 4(m\acute{o}d.7)$ igual que la ecuación $x^{45} + 4x^7 + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$.

Para $x^3 - 3x + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.49)$, equivalente a $x^3 + 46x + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.49)$, tiene como solución $x \equiv 18(m\acute{o}d.49)$ igual que la ecuación $x^{45} + 46x^7 + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.49)$ ya que esta última es equivalente a $x^{45} - 3x^7 + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.49)$.

4.5 Resolver la ecuación $x^{99} - 15x^{49} + 30 \equiv 0(m\acute{o}d.104)$.

Como la factorización del módulo es $104 = 2^3 \cdot 13$ y la ecuación normal es equivalente a $x^3 - 15x + 30 = 0$, resolveremos en función de cada uno de los módulos anteriores:

Para $x^3 - 15x + 30 \equiv 0(m\acute{o}d.2)$, equivalente a $x^3 + x \equiv 0(m\acute{o}d.2)$, tiene como solución $x \equiv 0,1(m\acute{o}d.2)$, igual que la ecuación $x^{99} + x^{49} \equiv 0(m\acute{o}d.2)$.

Para $x^3 - 15x + 30 \equiv 0(mód.4)$, equivalente a $x^3 + x + 2 \equiv 0(mód.4)$, tiene como solución $x \equiv 1,2,3(mód.4)$. Sin embargo, $x^{99} + x^{49} + 2 \equiv 0(mód.4)$ tiene como solución $x \equiv 1,3(mód.4)$, desaparece la raíz 2 por no ser congruente con 4.

Para $x^3 - 15x + 30 \equiv 0(mód.8)$, equivalente a $x^3 + x + 6 \equiv 0(mód.8)$, tiene como solución $x \equiv 1,2,5(mód.8)$. Sin embargo, $x^{99} + x^{49} + 6 \equiv 0(mód.8)$ tiene como solución $x \equiv 1,5(mód.5)$, desaparece la raíz 2 por no ser congruente con 8.

Para $x^3 - 15x + 30 \equiv 0(mód.13)$, equivalente a $x^3 + 11x + 4 \equiv 0(mód.13)$, tiene como solución $x \equiv 6,9,11(mód.13)$, igual que la ecuación $x^{99} + 11x^{49} + 4 \equiv 0(mód.13)$.

Para $x^3 - 15x + 30 \equiv 0(mód.104)$, equivalente a $x^3 + 89x + 30 \equiv 0(mód.104)$, tiene como solución $x \equiv 9,37,45,50,58,61,74,89,97(mód.104)$.

Sin embargo la solución de $x^{99} + 89x^{49} + 30 \equiv 0(mód.104)$ es:

$$\mathrm{x} \equiv 9,37,45,61,89,97(\mathrm{mód.}104)$$

donde desaparecen las raíces *50, 58 y 74*, que no son congruentes con 104 por tanto, ésta es la solución a la ecuación planteada.

7.5 Ecuación cúbica a partir de un número dado.

5.1 A partir del número 21 se ha generado la ecuación: $x^3 - 13x^2 + 61x - 105 = 0$. ¿Cómo se ha realizado?

El coeficiente independiente se factoriza como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Uno de estos números o los tres pueden ser raíces primitivas de la ecuación propuesta.
Utilizando la Ley de Ruffini, obtenemos:

	1	-13	+61	-105
3		+3	-30	+93
	1	-10	+31	-12

El coeficiente 12 es distinto a cero, luego 3 no es raíz de la ecuación.

	1	-13	+61	-105
5		+5	-30	+105
	1	-8	+21	0

El 5 sí es raíz de la ecuación.
La ecuación $x^2 - 8x + 13 = 0$ tiene como solución $x = 4 \pm \sqrt{5}i$, luego las raíces de la ecuación indicada serán:

$$x_1 = 5 \text{ y } x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{5}i$$

Utilizando la Ley de Coeficientes, comprobamos que:

$$-13x^2 = 5 + \left(4 + \sqrt{5}i\right) + \left(4 - \sqrt{5}i\right) = 13$$

$$61x = 5 \cdot \left(4+\sqrt{5}i\right) \cdot \left(4-\sqrt{5}i\right) = 105$$

Vamos a utilizar los módulos 13, 61 y 793 para resolver $x^3 - 13x^2 + 61x - 105 \equiv 0(mód.793).$ Como $793 = 13 \cdot 61,$ resolvemos los siguientes sistemas:

Para $x^3 - 13x^2 + 61x - 105 \equiv 0(mód.13),$ obtenemos como soluciones:
$x \equiv 5(mód.13)$

Para $x^3 - 13x^2 + 61x - 105 \equiv 0(mód.61),$ obtenemos como soluciones:
$x \equiv 5, 23, 46(mód.61)$

Para $x^3 - 13x^2 + 61x - 105 \equiv 0(mód.793),$ obtenemos como soluciones:
$x \equiv 5, 473, 694(mód.793)$

Esta última solución es fácil de obtener mediante la aplicación de *Teorema Chino de Restos*.

5.2 A partir del número 9 se ha generado la ecuación: $x^3 - 7x^2 + 21x - 27 \equiv 0(mód.189)$ ¿Cómo se ha realizado?

No cabe duda de que una de las raíces es el 3, por lo que si dividimos la ecuación por $x-3$ obtendremos la cuadrática inicial.
Por la Ley de Ruffini:

	1	-7	+21	-27
3		+3	-12	+27
	1	-4	+9	0

El 3 es raíz de la cúbica y genera la cuadrática $x^2 - 4x + 9 = 0,$ con solución $x = 2 \pm \sqrt{3}i.$
La ecuación propuesta admite tres raíces: $x_1 = 3$ y $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}i.$
Teniendo en cuenta que las raíces son complejas, los cuadrados utilizados serán menores a 9, por lo que:

$$9 - 1^2 = 8 = 2 \cdot 2^2, \quad 9 - 2^2 = 5, \quad 9 - 3^2 = 0$$

Luego se utilizó:

$$P = \left(2+\sqrt{-5}\right)\left(2-\sqrt{-5}\right) = 9 \text{ y } S = \left(2+\sqrt{-5}\right) + \left(2-\sqrt{-5}\right) = 4$$

para confeccionar la cuadrática origen.

El módulo propuesto se factoriza como $189 = 7 \cdot 3^3,$ por lo que deberemos resolver previamente los módulos parciales. Veamos:

Para $x^3 - 7x^2 + 21x - 27 \equiv 0(mód.3),$ obtenemos como solución:
$x \equiv 0, 1(mód.3)$

Para $x^3-7x^2+21x-27\equiv 0(mód.7)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 3,5,6(mód.7)$

Para $x^3-7x^2+21x-27\equiv 0(mód.3^2)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 0,3,4,6(mód.3^2)$

Para $x^3-7x^2+21x-27\equiv 0(mód.21)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 3,6,10,12,13,19(mód.21)$

Para $x^3-7x^2+21x-27\equiv 0(mód.3^3)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 0,3,9,12,18,21,22(mód.3^3)$

Utilizando el *Teorema Chino de Resto*, la solución a la ecuación es:

$$x\equiv 3,12,27,45,48,54,66,75,76,90,103,108,111,117,129,138,153,157,171,174,180(mód.189)$$

5.3 A partir del número 13 se ha generado la ecuación cúbica que tiene como soluciones: $x_1=5,\ x_{2,3}=5\pm 2\sqrt{3}.$ Demostrar cómo.

Hay dos ecuaciones reales, por lo que el cuadrado utilizado tiene que ser mayor a 13. De hecho, a partir del conjugado obtenemos:

$$P=\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)=13 \text{ y } S=\left(5+2\sqrt{3}\right)+\left(5-2\sqrt{3}\right)=10$$

de donde la ecuación cuadrática es $x^2-10x+13=0.$
Utilizando la *Ley de Coeficientes* obtenemos la cúbica de la siguiente forma:

$$5+\left(5+2\sqrt{3}\right)+\left(5-2\sqrt{3}\right)=15\rightarrow -15x^2$$
$$5\left[\left(5+2\sqrt{3}\right)+\left(5-2\sqrt{3}\right)\right]+\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)=63\rightarrow +63x$$
$$5\cdot\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)=65\rightarrow -65$$

y por tanto:

$$x^3-15x^2+63x-65=0$$

ecuación a la que satisfacen las raíces indicadas.
Vamos a utilizar los módulos 15, 63 y su producto 945 para resolver un sistema.

Para $x^3-15x^2+63x-65\equiv 0(mód.15)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 5(mód.15)$

Para $x^3-15x^2+63x-65\equiv 0(mód.63)$, obtenemos como solución:
$x\equiv 5,26,47(mód.63)$

Para $x^3 - 15x^2 + 63x - 65 \equiv 0(\text{mód}.945)$, obtenemos como solución:
$x \equiv 5, 320, 635(\text{mód}.945)$

5.4 A partir del número 45 genere una ecuación cúbica que tenga soluciones enteras y reales.

El cuadrado de 45 está comprendido entre $7^2 > 45 > 6^2$. Para obtener soluciones reales, los cuadrados deben ser igual o mayor a 7^2. Las diferencias con 45 de los números cuadrados 7,8,9,10,11 son:

$$7^2 - 45 = 4 = 2^2,\ 8^2 - 45 = 19,\ 9^2 - 45 = 36 = 6^2,\ 10^2 - 45 = 55,\ 11^2 - 45 = 76 = 19 \cdot 2^2$$

Vamos a tomar el último, esto es

$$\left(11 + 2\sqrt{19}\right)\left(11 - 2\sqrt{19}\right) = 11^2 - 19 \cdot 2^2 = 45$$

Si tomamos como raíz entera la suma $4 + 5 = 9$ podemos crear una ecuación cúbica que tendrá como soluciones:

$$x_1 = 9 \text{ y } x_{2,3} = 11 \pm 2\sqrt{19}$$

La ecuación a la que satisfacen estas raíces es:

$$(x - 9)\left(x - \left(11 + 2\sqrt{19}\right)\right)\left(x - \left(11 - 2\sqrt{19}\right)\right) = x^3 - 31x^2 + 243x - 405 = 0$$

Por la *Ley de Coeficientes*:

$$9 + \left(11 + 2\sqrt{19}\right) + \left(11 - 2\sqrt{19}\right) = 9 + 11 + 11 = 31$$
$$9\left(\left(11 + 2\sqrt{19}\right) + \left(11 - 2\sqrt{19}\right)\right) + \left(11 + 2\sqrt{19}\right)\left(11 - 2\sqrt{19}\right) = 9(11 + 11) + 45 = 243$$
$$9\left(11 + 2\sqrt{19}\right)\left(11 - 2\sqrt{19}\right) = 9 * 45 = 405$$

Si esta ecuación la trasformamos en sistema con módulos 31, 243 ó 405, encontraremos infinidad de soluciones, por ejemplo:

Para $x^3 - 31x^2 + 243x - 405 \equiv 0(\text{mód}.31)$, genera las siguientes soluciones:
$x \equiv 9, 24, 29(\text{mód}.31)$

Para $x^3 - 31x^2 + 243x - 405 \equiv 0(\text{mód}.243)$, genera las siguientes soluciones:
$x \equiv 9, 18, 36, 45, 63, 72, 90, 99, 117, 126, 144, 153, 171, 180, 193, 198, 207, 225, 234(\text{mód}.243)$

Para el módulo 405, si utilizan el *Teorema Chino de Restos*, encontrarán algunas más.

5.5 Sea P un número primo y sean a,b,c su mitad, tercio y quinto que representan las raíces primitivas de una ecuación cúbica. Sean $b, c\pm\sqrt{-6}$ las raíces de una segunda ecuación cúbica. Determinar dichas ecuaciones.

Sabemos que la estructura de una cúbica es:

$$x^3+B(a+b+c)x^2+C(ab+ac+bc)x+D(abc)$$

Mediante fracciones unitarias determinamos esta estructura:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{Q}{Q+1}, Q=\frac{ab+ac+bc}{abc-(a(b+c)+bc)}=\frac{Cx}{D-Cx}$$

Aplicando los datos aportados:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{Q}{Q+1},\ Q=\frac{2\cdot3+2\cdot5+3\cdot5}{2\cdot3\cdot5-31}=\frac{31}{-1}\rightarrow 31-1=30$$

Las raíces primitivas son 2, 3 y 5 y el número primo es $P=31,$ ya que

$$30/2+30/3+30/5=15+10+6=31$$

y la primera ecuación cúbica que admite como solución 2,3 y 5 es:

$$(x-2)(x-3)(x-5)=x^3-10x^2+31x-30$$

La segunda ecuación tiene como soluciones $b, c\pm\sqrt{-6}$ o sea:

$$x_1=3,\ x_{2,3}=5\pm\sqrt{6}i$$

y la ecuación que las genera:

$$(x-3)(x-(5+\sqrt{-6}))(x-(5-\sqrt{-6}))=x^3-13x^2+61x-93=0$$

A partir del módulo 93 creamos el siguiente sistema:

Para $x^3-13x^2+61x-93\equiv 0(mód.93),$ genera las siguientes soluciones:
$x\equiv 0,3,41,62,65,72(mód.93)$

7.6 Algunas aplicaciones: Código de PRODUCTO.

6.1 Código de Producto.

El Código EAN, ***E**uropean **A**rticle **N**umber* es un sistema de códigos de barras adoptado por más de 100 países y cerca de un millón de empresas (2003). En el año 2005, la asociación EAN se fusionó con la UCC (*Uniform Code Council*) para formar una nueva y única organización identificada como GS1, con sede en Bélgica.

La combinación del código de barras EAN, del Intercambio Electrónico de Datos (EDI) y de los Identificadores de Aplicación para el código de barras constituye la mejor oferta que la Organización EAN Internacional y AECOC, como representante de España, hacen a las empresas usuarias.

El código EAN más usual es EAN13, constituido por 13 dígitos y con una estructura dividida en cuatro partes:

- **Prefijo**: El prefijo asignado por EAN Internacional a AECOC es el 84. Todas las empresas que forman parte del sistema EAN a través de AECOC codifican sus artículos con el 84 como primeras cifras. Esto no significa necesariamente que el artículo haya sido fabricado en España, sino simplemente que la empresa, independientemente de su nacionalidad y de la ubicación territorial de sus factorías, utiliza el sistema EAN mediante el código asignado por AECOC.
- **Código de Empresa**: AECOC asignará a las empresas registradas un número de entre 5 y 8 dígitos, en función de sus necesidades. Este número precedido del Prefijo formará el Código de Empresa. Este código no identifica al fabricante del producto, sino que representa al propietario de la marca.
- **Código de Producto**: El propietario de la marca dispone de una serie de dígitos en blanco en función del Código de Empresa que le ha sido asignado. El Código EAN 13 de producto se obtendrá completando estos dígitos en blanco y calculando el Dígito de Control.
- **Dígito de Control**: El último dígito que compone un código es el Dígito de Control. El cálculo correcto de este dígito libera al código de barras de cualquier error de impresión en el momento de su lectura.

El proceso de cálculo del Dígito de Control es muy sencillo, basta con seguir tres puntos:

1. Numerando el código de derecha a izquierda, se multiplican por 1 los dígitos que ocupan posición par, y por 3 los dígitos que ocupan posición impar.
2. Se suman los valores de los productos obtenidos.
3. Se busca la decena superior al resultado de la suma anterior y se restan los dos valores. El resultado obtenido es el Código de Control.

Ejemplo:

Numeración	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Código	**8**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	2
	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
Producto	8	12	1	6	3	12	5	18	7	24	9	3	
Suma	8+12+1+6+3+12+5+18+7+24+9+3												108
Dígito	110-108												2

6.2 Codificar en EAN-8.

El código EAN-8 está compuesto por 8 dígitos y es utilizado en productos que por sus dimensiones no es posible asignarle un código EAN-13. Su estructura viene determinada por:

Código de País	**Código de Producto**	**Dígito de Control**

Veamos dos ejemplos de aplicación:

Numeración	7	6	5	4	3	2	1
Código	**8**	**4**	**0**	**1**	**9**	**3**	**0**
	3	1	3	1	3	1	3
Producto	24	4	0	1	27	3	0

Una vez obtenido los productos, operamos:

$$24+4+0+1+27+3+0=59=4+1+3+3(8+0+9+0)=8+3\cdot 17=59$$

Si llamamos c al código de control:

$$c+59\equiv 0(mód.60)\rightarrow c\equiv 1(mód.60)\rightarrow c=\boxed{1}$$

La codificación del producto será:

84-01930-1

Numeración	7	6	5	4	3	2	1
Código	**8**	**4**	**0**	**1**	**9**	**3**	**8**
	3	1	3	1	3	1	3
Producto	24	4	0	1	27	3	24

$$c+8+3\cdot 25\equiv 0(mód.90)\rightarrow c\equiv 7(mód.60)\rightarrow c=\boxed{7}$$

84-01938-7

Aplicando el generador de códigos de barras, obtenemos para estos productos:

8401 9301

8401 9387

6.3 Comprobar códigos de control con GTIN-8.

Una empresa nos ha ofrecido una gama de productos que los tiene codificados como:

84-01930-2 84-01932-5 84-01934-9 84-01936-3 84-01938-7
84-01931-8 84-01933-2 84-01935-5 84-01937-0 84-01939-4

Al intentar generar el código de barras mediante el procedimiento GTIN-8, se detectan errores en la digitalización. Se pide subsanar los errores y generar el correspondiente código de barras.

6.4 Codificar en EAN-13.

El código EAN-13 está compuesto por 13 dígitos y es utilizado para cualquier tipo de producto. Su estructura viene determinada por:

Código País	**Código de Empresa**	**Código Producto**	**Dígito de Control**

Veamos dos ejemplos de aplicación:

Numeración	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Código	**8**	**4**	**9**	**3**	**9**	**1**	**2**	**1**	**7**	**0**	**6**	**5**
	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Producto	8	12	9	9	9	3	2	3	7	0	6	15

$$9+12+9+9+9+3+2+3+7+0+6+15=83=8+9+2+7+6+3(4+3+1+1+0+5)$$

$$41+3\cdot 14=83$$

$$c+83\equiv 0(m\acute{o}d.90)\rightarrow c\equiv 7(m\acute{o}d.90)\rightarrow c=\boxed{7}$$

Producto codificado:

84-939121-7065-7

Numeración	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Código	**8**	**4**	**9**	**3**	**9**	**1**	**2**	**1**	**7**	**0**	**7**	**3**
	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
Producto	8	12	9	9	9	3	2	3	7	0	7	9

$$8+9+9+9+2+7+7+3(4+3+1+1+0+3)=42+3\cdot 12=78$$

$$c+78\equiv 0(m\acute{o}d.80)\rightarrow c\equiv 2(m\acute{o}d.80)\rightarrow c=\boxed{2}$$

Producto codificado:

84-939121-073-2

Aplicando el generador de códigos de barras, obtenemos para estos productos:

8 493912 170657 8 493912 170732

6.5 Comprobar códigos de control con GTIN-13.

Una empresa nos ha ofrecido una gama de productos que los tiene codificados como:

84-9391217-065-7	**84-9391217-070-1**
84-9391217-066-2	**84-9391217-071-8**
84-9391217-067-1	**84-9391217-072-5**
84-9391217-068-8	**84-9391217-073-2**
84-9391217-069-5	**84-9391217-074-9**

Como podrá comprobar, alguno de los dígitos de control son erróneos. Le pedimos subsanar los errores y generar el correspondiente código de barras. Aunque es bastante más rápido la utilización de GTIN-13, deben utilizar el procedimiento de cálculo descrito anteriormente.

AYUDA INTERNET (Codificación EAN)

http://barcode.tec-it.com/barcode-generator.aspx?LANG=es (Generador de código barra)
http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_de_barras
http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_electr%C3%B3nico_de_producto
http://www.achilles.com/Documents/Scheme%20Documents/EPI/Spain/proTRANS/guia-cod%20PROTRANS_28.09.09.pdf
http://www.aecoc.es/calculodc/gtins.htm#gtin (Generador dígito de control)

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, Tom M., Cálculus I,ISBN: 84-291-5002-1
CHICA BLAS, Ángel, Descartes: Geometría y método, ISBN: 84-95599-07-4
DUNHAM, William, Euler El Maestro de todos los Matemáticos, ISBN: 84-930719-6-X
EDWARDS, Harold M., Galois Theory, ISBN: 0-38790-980-X
LOBEZ URQUÍA, José, Análisis Matemático II, Edición 1966.
MARGALEF y OUTERELO, Matemáticas al alcance de todos, ISBN: 978-84-205-5011-4
MARTIN CASALDERREY, F., Cardano y Tartaglia, Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano, ISBN: 84-930719-5-1
MEAVILLA SEGUI, Vicente, Ruffini: popular y desconocido, ISBN: 84-96566-09-9
SWOKOWSKI y COLE, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, ISBN: 968-7529-26-1

AYUDA INTERNET

http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_tercer_grado
http://enciclopedia.us.es/index.php/Ecuaci%C3%B3n_de_tercer_grado
http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html
http://mendozza.org/sergio/degreethesis/tesislatex2html/node26.html
http://translate.google.es/translate?hl=es&langpair=en%7Ces&u=http://www.sosmath.com/algebra/factor/fac11/fac11.html
http://www.akiti.ca/Quad3Deg.html (Programa resolución ecuación cúbica)
http://www.wolframalpha.com/examples/ (Resoluciones matemáticas)
http://www.vadenumeros.es/actividades/division-por-ruffini.htm (Soluciones Ruffini)
http://es.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1ticas/%C3%81lgebra/Ecuaciones/Ecuaciones_de_tercer_grado