8. ECUACIONES CUARTICAS

8.1*. Ecuación de la forma:* $x^4+ax^3+bx^2+cx+d\equiv 0(mód.p)$*, con p primo*

1.1 Hallar un procedimiento para resolver la ecuación $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Una **ecuación cuartica** con una incógnita es una ecuación que puede escribirse bajo la forma canónica de

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$$

donde a,b,c,d,e con $a\neq 0$, estos son números que pertenecen a un cuerpo, usualmente a los reales $\mathbb{R}$ o a los complejos $\mathbb{C}$.
Salvo excepciones puntuales, consideraremos para $a=1$ y

$$x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$$

la forma canónica de representación completa de la ecuación de cuarto grado.
Si la ecuación $x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ admite las raíces $a,b,c\ y\ d$, lo que podríamos representar como

$$x^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

la estructura de la ecuación, de acuerdo con la *Ley de Coeficientes*, sería:

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0$$

En su obra *Ars Magna, Girolamo Cardano (1501-1576)* dice que el primero que consiguió la solución de una ecuación de cuarto grado fue Ludovico Ferrari (1522-1565) ya que aquél acepto el desafío de *Zuanne di Tonini da Coi* para resolver un problema que éste, finalmente, dio solución utilizando un procedimiento parecido al aplicado para resolver la ecuación de tercer grado.
Leonhard Euler (1707-1783), que según el Diccionario Oxford-Complutense de Christopher Clapham*, fue el más prolífico y fuera de toda comparación de los grandes matemáticos,* también intervino en la solución de las ecuaciones de cuarto grado.
Partiendo de la solución de *Ludovico Ferrari*, amigo y protegido de Cardano, Euler, a la vista de la ecuación $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ dice que *"debemos empezar destruyendo el segundo término"*. Significa que quiere eliminar el monomio de tercer grado Bx^3. Según él, esto se consigue dividiendo la ecuación por A y haciendo la sustitución $y=x-\frac{B}{4A}$, agrupando términos y simplificando. El resultado es

$$x^4-ax^2-bx-c=0$$

que es una ecuación incompleta de cuarto grado equivalente a la ecuación incompleta de tercer grado que vimos en el capítulo anterior.
Euler admite que la solución de una ecuación de cuarto grado incompleta es de la forma

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$$

donde los coeficientes p, q y r, han de ser calculados en función de a, b, c.
Eleva al cuadrado la forma anterior

$$x^2 - (p+q+r) = 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$$

Eleva al cuadrado nuevamente

$$x^4 - 2(p+q+r)x^2 + (p+q+r)^2 = 4(pq+pr+qr) + 8\sqrt{pqr}x$$

Introduce variables auxiliares

$$f = p+q+r,\ g = pq+pr+qr,\ h = pqr$$

y consigue una ecuación como

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x - (4g - f^2) = 0$$

que al compararla con la ecuación $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, revela que:

(a) $2f = a$ o sea, $f = \dfrac{a}{2}$

(b) $8\sqrt{h} = b$ luego, $h = \dfrac{b^2}{64}$

(c) $4g - f^2 = c$ donde, $g = \dfrac{4c + a^2}{16}$

Por tanto, la ecuación reducida de cuarto grado es:

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$$

Para demostrar este planteamiento, Euler propone la solución del siguiente supuesto:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$$

Dado que $y = x + \dfrac{-8x^3}{4} = x + 2$, la reducida de $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$ resulta:

$$(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 14(x+2)^2 + 4(x+2) - 8 = x^4 + 10x^2 - 4x + 8 = 0$$

Si p, q, r son raíces de

$$z^3 - (p+q+r)z^2 + (pq+pr+qr)z - pqr = (z-p)(z-q)(z-r) = 0$$

entonces

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0$$

que es una ecuación equivalente a $x^4+10x^2-4x+8=0$.
Si ahora sustituimos

$$f=\frac{p}{d}=\frac{10}{2}=5,\ \ g=\frac{4r+p^2}{16}=\frac{4(-8)+10^2}{16}=\frac{17}{4},\ \ h=\frac{q^2}{64}=\frac{4^2}{64}=\frac{1}{4}$$

encontramos que, $p, q\ y\ r$ son las soluciones de la ecuación de tercer grado auxiliar

$$z^3-5z^2+{}^{17}\!/_{4}\,z-{}^{1}\!/_{4}=0,\quad p=1,\ \ q=\frac{4+\sqrt{15}}{2},\ \ r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$$

por lo que

$$\sqrt{p}=\pm 1,\ \ \sqrt{q}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{2}},\ \ \sqrt{r}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{2}}$$

Pero Euler se percató de que $15=3\cdot 5$ y que $\left(\sqrt{5}\pm\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{8\pm 2\sqrt{15}}$ por tanto, esto le permitió simplificar las soluciones a

$$\sqrt{p}=\pm 1,\ \ \sqrt{q}=\pm\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2},\ \ \sqrt{r}=\pm\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

Por otra parte, si

$$\frac{q}{8}=\sqrt{h}=\sqrt{pqr}=\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r},$$

y como $q=4>0$, había que atribuir signos a las tres raíces cuadradas de forma que sus productos fueran positivos, por tanto, las cuatro soluciones serían:

$$x_1=+\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=+1+\sqrt{5}$$

$$x_2=+\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=+1-\sqrt{5}$$

$$x_3=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{5}$$

$$x_4=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{5}$$

Finalmente, y a partir de la relación $y=x+2$, la solución a la ecuación inicial vendría determinada por:

$$x=3\pm\sqrt{5},\ \ x=1\pm\sqrt{3}$$

Esta es la solución que Euler propuso para la ecuación cuartica reducida de la forma

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$$

la más compleja de todas las reducidas.
Algunos autores plantean para la ecuación reducida $x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$ otra forma de solución distinta.
Supongamos que esta ecuación se factoriza como

$$(z^2 + \alpha z + \beta)(z^2 - \alpha z + \gamma)$$

lo que es posible porque no hay z^3 en el polinomio. Desarrollando la expresión, obtenemos

$$z^4 + (-\alpha^2 + \beta + \gamma)z^2 + \alpha(\gamma - \beta) + \beta\gamma = 0$$

equivalente a

$$z^4 + Pz^2 + Qz + R = 0$$

donde

$$\beta + \gamma - \alpha^2 = P \text{ (coeficiente de x}^2\text{)}$$

$$\alpha(\gamma - \beta) = Q \text{ (coeficiente de x)}$$

$$\beta\gamma = R \text{ (constante independiente)}$$

La solución de $z^4 + Pz^2 + Qz + R = 0$ vendrá determinada por:

$$z_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} - \alpha}{2}; \quad z_2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma} + \alpha}{2}$$

$$z_3 = \frac{-\left(\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} + \alpha\right)}{2}; \quad z_4 = \frac{-\left(\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma} - \alpha\right)}{2}$$

Si hacemos que $y = \alpha^2$, entonces $y^3 + 2Py^2 + (P - 4R)y - Q^2 = 0$ es una ecuación de tercer grado, luego se encuentra $\alpha, \beta \text{ y } \gamma$, y se resuelve $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ y $z^2 - \alpha z + \gamma = 0$, para rematar con que $x = z - \frac{Bx^3}{4}$.

1.2 Solución de la ecuación cuartica reducida.

La transformación de ecuaciones se debe al científico alemán *Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708)* que, en las *Acta Eruditorum de 1683,* propuso un método con el que pretendía transformar cualquier ecuación polinómica de grado *n* en otra del mismo grado sin términos intermedios. Esta idea ya era conocida por *François Viête (1540-1603)*.

Aparte de la ecuación transformada y reducida a la forma $x^4+Px^2+Qx+R=0,$ se pueden dar otras, tales como

$$x^4+Px^2+R=0$$

dónde $q=0$ y se trata de una ecuación cuadrática, o

$$x^4+Px^2+Qx=0$$

donde $r=0$ y se reduce a una ecuación de tercer grado.
Son las formas más habituales de la transformación de las ecuaciones cuarticas.
Para la forma $x^4+Px^2+R=0,$ si tenemos en cuenta que se trata de una ecuación cuadrática, al tener los exponentes pares y por tanto, equivalente a $x^2+Px+R=0,$ como $x^4=(x^2)^2,$ tan solo hay que hacer el cambio de variable a $x^2=u$ para obtener la ecuación $u^2+Pu+R=0$ que tiene como solución

$$u=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4r}}{2}$$

y cuatro soluciones de la forma:

$$x_1=+\sqrt{u_1}+\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4r}}{2}\right)^{1/2}, \quad x_2=-\sqrt{u_2}-\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4r}}{2}\right)^{1/2}$$

$$x_3=+\sqrt{u_3}+\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4r}}{2}\right)^{1/2}, \quad x_4=-\sqrt{u_4}-\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4r}}{2}\right)^{1/2}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4-13x^2+36=0.$
Como la ecuación $x^4-13x^2+36=0$ es equivalente a $u^2-13u+36=0,$ ésta tiene como solución:

$$u=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}=\begin{cases} u_1=\dfrac{13+5}{2}=9 \\ u_2=\dfrac{13-5}{2}=4 \end{cases}$$

Ahora, a partir del resultado anterior, obtenemos las cuatro raíces de la cuartica:

$$x_1=+\sqrt{9}=+\left(\frac{13+\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}\right)^{1/2}=+3, \quad x_2=+\sqrt{4}=+\left(\frac{13-\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}\right)^{1/2}=+2$$

$$x_3 = -\sqrt{4} = -\left(\frac{13-\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}\right)^{1/2} = -2,\ \ x_4 = -\sqrt{9} = -\left(\frac{13+\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}\right)^{1/2} = -3$$

Para la ecuación $x^4+Px^2+Qx=0,$ donde $r=0,$ una de las raíces es $x=0$ y las otras tres vendrán determinadas por $x(x^2+P)+Q=0,$ que podemos escribir como $x^3+Px+Q=0,$ una cúbica cuya solución es:

$$x_1 = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q} = \left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} = \omega_1+\omega_2$$

Dos módulos de la forma

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q2}{4}+\frac{p3}{27}}$$

que podemos resolver separadamente. Caso de dudas, ver capítulo anterior.
Conocida una de las raíces de la ecuación cúbica, resta conocer las raíces de la ecuación cuadrática que se genera.
Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4+68x^2-336x=0.$
Sabemos que una de las soluciones es cero, por tanto, nos queda por resolver la ecuación cúbica $x^3+68x-336=0$ para determinar las restantes soluciones. Recordemos que

$$x_1 = \left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} = \omega_1+\omega_2$$

Sustituyendo valores:

$$x_1 = \left(-\frac{-336}{2}+\sqrt{\frac{336^2}{4}+\frac{68^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{-336}{2}-\sqrt{\frac{336^2}{4}+\frac{68^3}{27}}\right)^{1/3} = 7{,}164-3{,}164=4$$

Mediante la aplicación de la *Regla de Ruffini* podremos obtener las dos raíces restantes:

	1	0	68	-336
4		4	+16	+336
	1	+4	+84	0

Esta operación genera la ecuación de segundo grado $x^2+4x+84=0$ que tiene como solución $x_1=-2+4\sqrt{5}i$ y $x_2=-2-4\sqrt{5}i$ luego, la solución general de la ecuación resulta

$$x_1=4,\ \ x_2=0,\ \ x_3=-2+4\sqrt{5}i \text{ y } x_4=-2-4\sqrt{5}i.$$

1.3 Discriminantes en la ecuación cuartica.

El valor del discriminante de una ecuación cuartica, aunque difícil de calcular, podemos determinarlo según el esquema del siguiente cuadro:

$x^4+Px^2+R=0$	$D=16R(4R-P^2)^2$
$x^2+Px+R=0$	$D=P^2-4R$
$x^4+Px^2+Qx=0$	$D=-Q(4QP^3+27Q^3)$
$x^3+Px+Q=0$	$D=-4P^3-27Q^2$
$x^4+Px+Q=0$	$D=-27P^4+256Q^3$
$x^4+Px^2+Qx+R=0$	$D=16RP^4-4Q^2P^3-128R^2P^2+144Q^2RP-27Q^4+256R^3$

En toda ecuación polinómica de grado *n*, el discriminante está directamente relacionado con las raíces que genera.

1.4 Resolver la ecuación $x^4-20x^3+155x^2-550x+714\equiv 0(m\acute{o}d.29)$.

Dado que $y=x+\dfrac{20x^3}{4}=x+5,$ podemos reducirla de la forma siguiente:

$$(x+5)^4-20(x+5)^3+155(x+5)^2-550(x+5)-24=0$$

de cuyo proceso se genera la reducida $x^4+5x^2-36=0$.
Como $x^4=(x^2)^2$, podemos considerar la ecuación $x^2+5x-36=0$ que tiene como solución:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 36}}{2}=\frac{-5\pm 13}{2}=\begin{cases}x_1=+4\\ x_2=-9\end{cases}$$

y cuatro soluciones de la forma:

$$x_1=+\left(\frac{-5+13}{2}\right)^{1/2}=+\sqrt{4}=+2,\quad x_2=+\left(\frac{-5-13}{2}\right)^{1/2}=+\sqrt{-9}=+3i$$

$$x_3=-\left(\frac{-5+13}{2}\right)^{1/2}=-\sqrt{4}=-2,\quad x_4=-\left(\frac{-5-13}{2}\right)^{1/2}=-\sqrt{-9}=-3i$$

Si tenemos en cuenta que la reducida ha sido $x+5$, podemos establecer las soluciones de la ecuación $x^4-20x^3+155x^2-550x+714=0$ de la forma siguiente:

$$x_1=5+2=+7;\quad x_2=5-2=+3;\quad x_3=5+3i;\quad x_4=5-3i$$

Otra forma de llegar al mismo resultado. El coeficiente independiente de la ecuación es $714=2\cdot 3\cdot 7\cdot 17$. Por la *Ley de Coeficientes* suponemos que el *7* y el *3* son raíces de la ecuación, cosa que podemos averiguar si aplicamos la Regla de Ruffini:

	+1	-20	+155	-550	+714
7		+7	-91	+448	-714
	+1	-13	+64	-102	0
	+1	-13	+64	-102	
3		+3	-30	+102	
	+1	-10	+34	0	

Esta última genera la ecuación de segundo grado $x^2-10x+34=0$ que tiene como solución:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 34}}{2}=\frac{10\pm 6i}{2}=\begin{cases}x_1=5+3i\\ x_2=5-3i\end{cases}$$

Por tanto, la solución de la ecuación original es:

$$\begin{cases}x_1=7, & x_3=5+3i\\ x_2=3, & x_4=5-3i\end{cases}$$

Ecuación	Solución	Discriminante
$x^4-20x^3+155x^2-550x+714=0$	$x_1=7$, $x_2=3$, $x_3=5+3i$, $x_4=5-3i$	$D=$ -16451136
$x^4+5x^2-36=0$	$x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3i$, $x_4=-3i$	$D=$ -16451136

Es de observar que el discriminante es igual tanto para la ecuación principal como para la reducida.
El discriminante de la ecuación principal es *$D=-27D^2A^4-4C^3A^3+18BCDA^3+B^2C^2A^2+144BD^2A^2-4B^3DA^2-6C^2DA^2+18BC^3A-192CD^2A-80B^2CDA-27C^4+256D^3-4B^3C^2-128B^2D^2+16B^4D+144BC^2D$.*
Planteemos ahora la solución de la ecuación $x^4-20x^3+155x^2-550x+714\equiv 0(mód.29)$ que podemos escribir como $x^4+9x^3+10x^2+x+18\equiv 0(mód.29)$ y que tiene como soluciones:

$$x\equiv 3,7,12,27(mód.29)$$

Para $x^4+5x^2-36\equiv 0(mód.29)$ que escribimos como $x^4+5x^2+22\equiv 0(mód.29)$, tiene como soluciones:

$$x\equiv 2,7,22,27(mód.29)$$

Destacar que a pesar de que las soluciones iniciales son enteras o complejas, las soluciones modulares o en el anillo $\mathbb{Z}_{29}$ son todas enteras.

1.5 Resolver la ecuación $x^4+4x^3-46x^2-4x+45\equiv 0(mód.23)$.

Dado que $y=x-\dfrac{4x^3}{4}=x-1,$ la ecuación reducida resulta:

$$(x-1)^4+4(x-1)^3-46(x-1)^2-4(x-1)+45=x^4-52x^2+96x=0$$

En los apartados anteriores hemos descrito como una ecuación de la forma $x^4+Px^2+Qx=0$ que es equivalente a $x^3+Px+Q=0,$ ya que en la primera existe una raíz igual a cero. Aplicado a nuestro caso, $x^4-52x^2+96x=0$ es equivalente a $x^3-52x+96=0$ y como ecuación cúbica se resuelve de la forma:

$$x_1=\left(-\frac{96}{2}+\sqrt{\frac{96^2}{4}+\frac{(-52)^3}{27}}\right)^{1/3}+\left(-\frac{96}{2}-\sqrt{\frac{96^2}{4}+\frac{(-52)^3}{27}}\right)^{1/3}=3+3=6$$

Aplicando la Regla de Ruffini:

	1	0	-52	+96
6		+6	+36	-96
	1	+6	-16	0

Obtenemos la ecuación de segundo grado $x^2+6x-16=0$ que tiene como solución:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2+4\cdot 16}}{2}=\frac{-6\pm 10}{2}=\begin{cases}x_1=+2\\ x_2=-8\end{cases}$$

y para la ecuación reducida obtenemos $x_1=6,\ \ x_2=2,\ \ x_3=0,\ \ x_4=-8.$
Conocidas las soluciones de la reducida, teniendo en cuenta que dicha reducción ha sido de $x-1,$ las soluciones de la ecuación original serán:

$$x_1=5,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=-9$$

Para la ecuación

$$x^4+4x^3-46x^2-4x+45=0$$

previamente la transformada en

$$x^4+4x^3+19x+22\equiv 0(mód.23)$$

tiene como soluciones:

$$x\equiv 1,5,14,22(mód.23)$$

Los discriminantes resultan:

$x^4-52x^2+96x=0$	$-Q(27Q^3-4P^3Q)$	2890137600
$x^3-52x+96=0$	$4P^3-27Q^2$	313600

En este caso los discriminantes son distintos porque las ecuaciones son distintas. Sin embargo, el discriminante de $x^4+4x^3-46x^2-4x+45=0$ es igual a $2\cdot 890\cdot 137\cdot 600,$ como puede comprobarse, es igual al de la ecuación cuartica:

$B^2C^2D^2+4C^3D^2+4B^3D^3+18BCD^3-27D^4+4B^2C^3F+16C^4F+18B^3CDF+80BC^2DF-6B^2D^2F-144CD^2F-27B^4F^2-144B^2CF^2-28C^2F^2+192BDF^2+256F^3$

1.6 Resolver la ecuación $x^4-20x^3+127x^2-338x+330\equiv 0(mód.17)$.

Dado que $y=x+\dfrac{-20x^3}{4}=x+5,$ obtenemos la reducción mediante el desarrollo siguiente:

$$(x+5)^4-20(x+5)^3+127(x+5)^2-338(x+5)x+330=x^4-23x^2-68x-60=0$$

Esta ecuación de la forma $x^4+Px^2+Qx+R=0$, tiene como solución las cuatro raíces siguientes:

$$x_1=6,\ x_2=\text{-}2, x_3=\text{-}2+i\ y\ x_4=\text{-}2\text{-}i$$

Si comparamos estas soluciones con la reducción llevada a cabo en la ecuación original, $x+5$, resulta para ésta:

$$\begin{cases} x_1=5+6=+11, & x_3=5+(-2+i)=3+i \\ x_2=5-2=+3 & x_4=5+(-2-i)=3-i \end{cases}$$

y para $x^4-20x^3+127x^2-338x+330=0$ son:

$$x_1=11, x_2=3, x_3=3+i\ y\ x_4=3\text{-}i$$

Como se trata de la solución de una reducida de la forma $x^4+Px^2+Qx+R=0$, veamos cómo lo hemos conseguido.

Factorizamos el coeficiente independiente y obtenemos $60=2^2\cdot3\cdot5$ de donde podemos realizar algunas combinaciones como $4,6,10,12,\dots$, que pueden ser posibles raíces de la ecuación. Optamos por el 2 y por el 6 y aplicamos la *Regla de Ruffini*:

	1	+0	-23	-68	-60
6		+6	+36	+78	+60
	1	+6	+13	+10	0

	1	+6	+13	+10	
2		+2	+16	+78	
	1	+8	+39	88	$88\neq0$

	1	+6	+13	+10
-2		-2	-8	-10
	1	+4	+5	0

Admite las raíces 6 $y-2$ y genera la ecuación de segundo grado, $x^2+4x+5=0$ que tiene como solución $x_1=\text{-}2+i\ y\ x_2=\text{-}2\text{-}i.$

El cálculo del discriminante de una ecuación como $x^4+Px^2+Qx+R=0$ sabemos que es mediante la fórmula $D=-16rp^4+4q^2p^3-128r^2p^2+144q^2rp-27q^4-256r^3$.

En la teoría analítica de números, esta fórmula tiene la propiedad de que $D\equiv0\ ó\ 1(mód.4)$.

Tanto la ecuación original como la abreviada tienen como discriminante $D=-1081600$ y generan cuatro raíces: dos reales y dos complejas conjugadas.

Las soluciones a las ecuaciones modulares son las siguientes:

Para la ecuación $x^4-20x^3+127x^2-338x+330\equiv0(mód.17)$, que transformada a la forma $x^4+14x^3+8x^2+2x+7\equiv0(mód.17)$, tiene como solución $x\equiv3,7,11,16(mód.17)$.

La ecuación $x^4-23x^2-68x-60=0$, transformada en $x^4+11x^2+8\equiv0(mód.17)$, tiene como solución $x\equiv2,6,11,15(mód.17)$.

1.7 Resolver la ecuación $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 \equiv 0(m\acute{o}d.31)$.

Se trata de una ecuación reciproca o simétrica. Una ecuación se llama recíproca si además de tener la raíz x tiene también la raíz $1/x$. Se reconocen fácilmente porque, puesta en forma ordenada, los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales, o iguales y de signos contrarios.
La solución de una ecuación recíproca tiene los siguientes pasos:

Dividir la ecuación por la potencia de *x* cuyo exponente sea la mitad del grado de la ecuación.

En nuestro caso, por x^2 :

$$\left(10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10\right)/x^2 = 10x^2 - 77x + 150 - \frac{77}{x} + \frac{10}{x^2}$$

Agrupar coeficientes equidistantes.

$$10\left(x^2 + 1/x^2\right) - 77\left(x + 1/x\right) + 150 = 0$$

Cambio de variable.

Haciendo que:

$$z = x + 1/x;\ z^2 = x + 1/x^2 + 2$$

y, en resumen

$$x^2 + 1/x^2 = z^2 - 2.$$

Sustituimos:

$$10(z^2 - 2) - 77z + 150 = 10z^2 - 77z + 130 = 0$$

Esta ecuación tiene como resultado:

$$z_1 = 26/5 \ y \ z_2 = 5/2$$

Sustituimos los valores anteriores en las ecuaciones de segundo grado.

Como $x + 1/x = z,$ sustituimos las dos siguientes ecuaciones:

Para $x + 1/x - 26/5 = 0,$ resultan $x_1 = 5,\ \ x_4 = 1/5$

Para $x + 1/x - 5/2 = 0,$ resultan $x_2 = 2,\ \ x_3 = 1/2$

Conocida la solución algebraica, la solución modular la planteamos como sigue.
Transformamos la ecuación respecto al módulo:

$$10x^4 + 16x^3 + 26x^2 + 16x + 10 \equiv 0(m\acute{o}d.31)$$

Resolvemos y resulta:

$$x \equiv 2,5,16,25(m\acute{o}d.31).$$

Como cabía esperar, las soluciones modulares son enteras.

8.2. *Ecuación de la forma:* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 0(m\acute{o}d.m)$, *con m compuesto*

2.1 Resolver la ecuación $x^4 - 37x^2 + 24x + 180 \equiv 0(m\acute{o}d.65)$.

Dado que el módulo se factoriza como $65 = 5 \cdot 13$, esta ecuación tendrá solución si, y sólo si tiene solución en función de los factores que lo componen.
Planteando soluciones separadas, tenemos:

Para la ecuación $x^4 - 37x^2 + 24x + 180 \equiv 0(m\acute{o}d.5)$, que transformada en función del módulo resulta $x^4 + 3x^2 + 4x \equiv 0(m\acute{o}d.5)$, con solución $x \equiv 0,3,4(m\acute{o}d.5)$.

Para la ecuación $x^4 - 37x^2 + 24x + 180 \equiv 0(m\acute{o}d.13)$, que transformada en función del módulo en $x^4 + 2x^2 + 11x + 11 \equiv 0(m\acute{o}d.13)$, tiene como solución $x \equiv 3,5,7,11(m\acute{o}d.13)$.

Si ahora utilizamos el *Teorema Chino de Restos*, $x^4 - 37x^2 + 24x + 180 \equiv 0(m\acute{o}d.65)$ tiene como soluciones, $x \equiv 3,5,18,20,24,29,33,44,50,55,59,63(m\acute{o}d.65)$.

2.2 Resolver la ecuación $x^4 - 73x^2 - 132x + 540 \equiv 0(m\acute{o}d.77)$.

El módulo se factoriza como $77 = 7 \cdot 11$, probemos la solución en función de estos factores.

Para $x^4 - 73x^2 - 132x + 540 \equiv 0(m\acute{o}d.7)$, que reducimos a $x^4 + 4x^2 + x + 1 \equiv (m\acute{o}d.7)$, tiene como solución $x \equiv 1,2(m\acute{o}d.7)$.

Para $x^4 - 73x^2 - 132x + 540 \equiv 0(m\acute{o}d.11)$ que reducimos a $x^4 + 4x^2 + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.11)$, tiene como solución $x \equiv 2,5,6,9(m\acute{o}d.11)$.

Para $x^4 - 73x^2 - 132x + 540 \equiv 0(m\acute{o}d.77)$ reducida a $x^4 + 4x^2 + 22x + 1 \equiv 0(m\acute{o}d.77)$, tiene como soluciones $x \equiv 2,9,16,50,57,64,71,72(m\acute{o}d.77)$.

Los mismos resultados podríamos haberlos conseguido aplicando el *Teorema Chino de Restos*.

2.3 Resolver la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0(m\acute{o}d.57)$.

Esta ecuación es una cuartica de la forma $x^4 + Px^2 + R = 0$ que tiene solución como ecuación de segundo grado $x^2 + Px + R = 0$ generando dos raíces dobles.
Si la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ se resuelve como $x^2 - 5x + 4 = 0$, genera dos raíces que son $x_1 = 1 \;\; y \;\; x_2 = 4$ y cuatro raíces para la cuartica de la forma $x_1 = \pm\sqrt{1} \;\; y \;\; x_2 = \pm\sqrt{4}$, esto es:

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2.$

Para la solución modular partimos de la solución cuartica, ya que la abreviada nos puede llevar a un resultado erróneo.

La ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0(mód.57)$ tendrá solución si, y sólo si la tiene con los distintos divisores del módulo.

Para $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0(mód.3),$ que transformamos en $x^4 + x^2 + 1 \equiv 0(mód.3),$ tiene como solución $x \equiv 1,2(mód.3).$

Para $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0(mód.19),$ que transformamos en $x^4 + 14x^2 + 4 \equiv 0(mód.19),$ tiene como solución $x \equiv 1,2,17,18(mód.19).$

Utilizando el *Teorema Chino de Restos*, la solución para $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv 0(mód.57),$ transformada en $x^4 + 52x^2 + 4 \equiv 0(mód.57),$ será $x \equiv\ 1,2,17,20,37,40,55,56(mód.57).$

2.4 Resolver la ecuación $x^4 + 10x^2 + 9 \equiv 0(mód.377)$.

Si resolvemos la ecuación $x^4 + 10x^2 + 9 \equiv 0,$ obtenemos $x_1 = \pm 3i$ y $x_2 = \pm i$ como soluciones de la cuartica.
El módulo se factoriza como $377 = 13 \cdot 29.$ Debemos plantear la solución en función de los divisores del módulo.

Para la ecuación $x^4 + 10x^2 + 9 \equiv 0(mód.13),$ que no necesita transformación ya que los coeficientes *10* y *9* son menores que el módulo y no hay ningún signo negativo, tiene como solución $x \equiv 2,5,8,11(mód.13).$

Para la ecuación $x^4 + 10x^2 + 9 \equiv 0(mód.29),$ que tampoco necesita transformación por los motivos expuestos anteriormente, tiene como solución $x \equiv 7,12,17,22(mód.29).$

Observar que la ecuación tiene cuatro raíces con cada uno de los módulos y que estas raíces forman parejas que suman el módulo, esto es, $2 + 11 = 5 + 8 = 13$ y $7 + 22 = 12 + 17 = 29.$ Se trata de una propiedad muy importante en casi todas las ecuaciones modulares.
La ecuación $x^4 + 10x^2 + 9 \equiv 0(mód.377)$ tiene ocho raíces por cada factor del módulo, esto es, 16 raíces.
Si utilizamos el *Teorema Chino de Restos*, deberemos relacionar cada una de las raíces paramétricas del primer módulo con cada una de las raíces paramétricas del segundo.
Tomemos $y_1 = 2 + 13t$ y $y_2 = 11 + 13t$ para el módulo *13*, y $z_1 = 7 + 29t$ y $z_2 = 22 + 29t$ para el módulo *29*. Las soluciones que generan estas combinaciones para la ecuación original son:

- Para $2 + 13t \equiv 7(mód.29),$ que tiene como valor para $t \equiv 16(mód.29),$ genera una solución de $x = 2 + 13(16 + 29t) = 210 + 377t.$
- Para $2 + 13t \equiv 22(mód.29),$ que tiene como valor para $t \equiv 6(mód.29),$ genera una solución de $x = 2 + 13(6 + 29t) = 80 + 377t.$
- Para $11 + 13t \equiv 7(mód.29),$ que tiene como valor para $t \equiv 22(mód.29),$ genera una solución de $x = 11 + 13(22 + 29t) = 297 + 377t.$

- Para $11+13t\equiv 22(mód.29),$ que tiene como valor para $t\equiv 11(mód.29),$ genera una solución de $x=11+13(12+29t)=167+377t.$

Dejamos en sus manos encontrar las ocho raíces que faltan.
La solución completa a la ecuación $x^4+10x^2+9\equiv 0(mód.377)$ resulta:

$$x\equiv 41{,}70{,}80{,}99{,}109{,}128{,}138{,}167{,}210{,}239{,}249{,}268{,}278{,}297{,}307{,}336(mód.377)$$

2.5 Resolver la ecuación $x^4+8x^2+12\equiv 0(mód.217)$.

La ecuación $x^4+8x^2+12=0$ tiene como solución $x_1=\pm\sqrt{6}i$ y $x_2=\pm\sqrt{2}i.$
El módulo se factoriza como $217=7\cdot 31.$ Resolvemos en función de los divisores:

Para $x^4+8x^2+12\equiv 0(mód.7),$ que transformamos en $x^4+3x^2+5\equiv 0(mód.7),$ tiene como solución $x\equiv 1,6(mód.7).$

Para $x^4+8x^2+12\equiv 0(mód.31),$ que no es necesaria la transformación ya que ningún coeficiente es mayor que el módulo y todos los monomios son positivos, tiene como solución $x\equiv 5,26(mód.31).$

Si utilizamos el *Teorema Chino de Restos*, deberemos relacionar $y_1=1+7t$ y $y_2=6+7t,$ soluciones paramétricas del módulo *7* con, $z_1=5+31t$ y $z_2=26+31t,$ soluciones paramétricas del módulo 31. Esto nos avisa de que la ecuación $x^4+8x^2+12\equiv 0(mód.217)$ tiene cuatro soluciones, dos por cada factor del módulo. Veamos cuáles son:

- Para $1+7t\equiv 5(mód.31),$ que tiene como valor para $t\equiv 5(mód.31),$ genera una solución de $x=1+7(5+31t)=36+217t.$
- Para $1+7t\equiv 26(mód.31),$ que tiene como valor para $t\equiv 8(mód.31),$ genera una solución de $x=1+7(8+31t)=57+217t.$
- Para $6+7t\equiv 5(mód.31),$ que tiene como valor para $t\equiv 22(mód.31),$ genera una solución de $x=6+7(22+31t)=160+217t.$
- Para $6+7t\equiv 26(mód.31),$ que tiene como valor para $t\equiv 25(mód.31),$ genera una solución de $x=6+7(25+29t)=181+217t.$

Luego, $x^4+8x^2+12\equiv 0(mód.217)$ tiene como solución:

$$x\equiv 36,57,160,181(mód.217)$$

8.3. *Ecuación de la forma: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d\equiv 0(mód.p^n)$, con n>1*

3.1 Resolver la ecuación $x^4+7x^2+17\equiv 0(mód.7^2)$.

Si la ecuación $x^4+7x^2+17\equiv 0(mód.7)$ la transformamos en función del módulo, obtenemos $x^4+3\equiv 0(mód.7)$ que tiene como solución $x\equiv 3,4(mód.7).$

Si a partir de esta solución le dedicamos tiempo, un poco de paciencia y algunos cálculos, podremos determinar que $x^4+7x^2+17\equiv 0(mód.7^2)$ tiene como solución $x\equiv 18,31(mód.\ 7^2)$
Como partimos de dos soluciones paramétricas $x_1=3+7t$ y $x_2=6+7t,$ nos basta dar valores a t para averiguar que *18* es igual a $x=4+7\cdot 2\equiv 18(mód.7^2)$ o bien, que 31 es igual a $x=3+4\cdot 7\equiv 31(mód.7^2).$
Esta solución es aceptable pero de emergencia, ya que si el módulo es alto, la solución se hace interminable.
Vamos a exponer otro método basado en *el Teorema de Brosk Taylor (1685-1731),* matemático inglés que contribuyó notablemente al desarrollo del cálculo infinitisimal.
Sabemos que las soluciones de $x^4+7x^2+17\equiv 0(mód.7)$ son $x\equiv 3,4(mód.7).$ Calculemos ahora los valores para la ecuación y su derivada, que son:

$$f(x)=x^4+7x^2+17=\begin{cases} f(3)=161 \\ f(4)=385 \end{cases} \quad f'(x)=4x^3+14x=\begin{cases} f'(3)=150 \\ f'(4)=312 \end{cases}$$

A partir de estos valores resolvemos la ecuación $f(x)+f'(x)\cdot p\cdot t_1\equiv 0(mód.p^n)$ de la forma siguiente:

Sustituimos valores

$$161+150\cdot 7\cdot t_1\equiv 0(mód.7^2)$$

dividimos por 7 y obtenemos

$$23+150t_1\equiv 0(mód.7)$$

esto es $t_1\equiv 4(mód.7)$ de donde $x=3+7(4+7t)=31+7^2t.$

Sustituyendo en $f(x)+f'(x)\cdot p\cdot t_1\equiv 0(mód.p^n)$ valores de la otra raíz, obtenemos:

$$385+312\cdot 7t_1\equiv 0(mód.7^2)$$

que divida por 7 resulta:

$$55+312t_1\equiv 0(mód.7)$$

y despejando, $t_1\equiv 2(mód.3)$ de donde $x=4+7(2+7t)=18+7^2t.$

Luego, la solución a la ecuación planteada resulta:

$$x\equiv 18,31(mód.7^2)$$

3.2 Resolver la ecuación $x^4-12x^2+17x-10\equiv 0(mód.425)$.

La factorización del módulo resulta $425=5^2\cdot 17$. La solución pasa por resolver la ecuación con los módulos $5,17,25,85\ y\ 425$. Si alguno de estos módulos tiene solución nula, la ecuación no tendrá solución. Veamos:

La ecuación $x^4-12x^2+17x-10\equiv 0(mód.5)$, transformada en $x^4+3x^2+2x\equiv 0(mód.5)$, admite una única solución, $x\equiv 0(mód.5)$.

La ecuación $x^4-12x^2+17x-10\equiv 0(mód.17)$, transformada en $x^4+5x^2+7\equiv 0(mód.17)$, no admite ninguna solución y por tanto $x^4+5x^2+7\not\equiv 0(mód.17)$.

Para $x^4-12x^2+17x-10\equiv 0(mód.25)$, equivalente a $x^4+13x^2+17x+15\equiv 0(mód.25)$, admite como solución $x\equiv 5(mód.25)$.

Tampoco tiene solución con el módulo 85 por lo que la ecuación planteada no tiene solución.

3.3 Resolver la ecuación $x^4+12x^2+17x+10\equiv 0(mód.529)$.

El módulo se factoriza como 23^2. Esto hace que la ecuación, con los módulos 23 ó 529, no haga falta transformarse. Procedemos:

La solución de $x^4+12x^2+17x+10\equiv 0(mód.23)$ es $x\equiv 6,12,13,15(mód.23)$.

Calculemos ahora los valores de la ecuación y su derivada.

$$f(x)=x^4+12x^2+17x+10\begin{cases} f(6)=1840\\ f(12)=22678\\ f(13)=30820\\ f(15)=53590\end{cases}\quad f'(x)=4x^3+24x+17\begin{cases} f'(6)=1025\\ f'(12)=7217\\ f'(13)=9117\\ f'(15)=13877\end{cases}$$

Estos valores deben ser sustituidos en la ecuación $f(x)+f'(x)pt_1\equiv 0(mód.p^n)$ para poder determinar las distintas soluciones.

Para la raíz *6*, tenemos $1840+1025\cdot 23\cdot t_1\equiv 0(mód.23^2)$. Si esta ecuación la dividimos por 23 resulta $80+1025t_1\equiv 0(mód.23)$ y haciendo operaciones $t_1\equiv 8(mód.23)$ entonces, el valor de $x=6+23(8+23t)=190+23^2t$.

Para la raíz *12*, tenemos $22678+7217\cdot 23\cdot t_1\equiv 0(mód.23^2)$. Si esta ecuación la dividimos por 23 resulta $986+7217t_1\equiv 0(mód.23)$ y haciendo operaciones $t_1\equiv 4(mód.23)$ con lo que obtenemos $x=12+23(4+23t)=104+23^2t$.

Para la raíz *13*, tenemos $30820+9117\cdot 23\cdot t_1\equiv 0(mód.23^2)$. Si esta ecuación la dividimos por 23 resulta $1340+9117t_1\equiv 0(mód.23)$ y haciendo operaciones $t_1\equiv 7(mód.23)$ el valor obtenido es $x=13+23(7+23t)=174+23^2t$.

Para la raíz *15*, tenemos $53590+13877\cdot 23\cdot t_1\equiv 0(mód.23^2)$. Si esta ecuación la dividimos por 23, resulta $2330+13877t_1\equiv 0(mód.23)$ que, haciendo operaciones $t_1\equiv 2(mód.23)$ obtenemos $x=15+23(2+23t)=61+23^2t$.

La solución a la ecuación planteada es $x\equiv 61,104,174,190(mód.529)$.

3.4 Resolver la ecuación $x^4+13x^2+7\equiv 0(mód.847)$.

El módulo se factoriza como $847=7\cdot 11^2$ luego, debemos buscar la solución de la ecuación con los módulos $7,11,77,121\,y$ 847. Si en algún caso no hay solución, tampoco la tendrá la ecuación original.

Para $x^4+13x^2+7\equiv 0(mód.7)$, que se reduce a $x^4+6x^2\equiv 0(mód.7)$, tiene como solución $x\equiv 0,1,6(mód.7)$.

Para $x^4+13x^2+7\equiv 0(mód.11)$, que se reduce a $x^4+2x^2+7\equiv 0(mód.11)$, tiene como solución $x\equiv 5,6(mód.11)$.

Para $x^4+13x^2+7\equiv 0(mód.77)$, tiene como solución $x\equiv 6,27,28,49,50,71(mód.77)$.

Para $x^4+13x^2+7\equiv 0(mód.11^2)$, utilizaremos $f(x)+f'(x)pt_1\equiv 0(mód.p^n)$ con los valores de las raíces del módulo 11, y obtendremos como solución, $x\equiv 49,72(mód.11^2)$.

La solución general es $x\equiv 49,314,412,435,533,798(mód.847)$.

3.5 Resolver la ecuación $x^4-23x^2+1\equiv 0(mód.2125)$.

La factorización del módulo es $2125=5^3\cdot 17$.

Para $x^4-23x^2+1\equiv 0(mód.17)$, que se reduce a $x^4+11x^2+1\equiv 0(mód.17)$, tiene como solución $x\equiv 5,7,10,12(mód.17)$.

Para $x^4-23x^2+1\equiv 0(mód.5)$, que se reduce a $x^4+2x^2+1\equiv 0(mód.5)$, tiene como solución $x\equiv 2,3(mód.5)$.

Para $x^4-23x^2+1\equiv 0(mód.25)$, que se reduce a $x^4+2x^2+1\equiv 0(mód.25)$, tiene como solución $x\equiv 2,3,7,8,12,13,17,18,22,23(mód.25)$.

Utilizando la ecuación $f(x)+f'(x)pt_1\equiv 0(mód.p^n)$, obtenemos:

$$f(x)=x^4-23x^2+1=\begin{cases} f(2)=-75 \\ f(3)=-125 \end{cases},\quad f'(x)=4x^3+14x=\begin{cases} f'(2)=-59 \\ f'(3)=-29 \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos $-75-59\cdot 5t_1\equiv 0(mód.5^2)$, dividida por 5, $-15-59t_1\equiv 0(mód.5)$ que tiene como solución $x=0+5t$ de donde, $x=2+5(0+5t)=2+5^2t$.

Sustituyendo tenemos $-125-29\cdot 5t_1 \equiv 0(mód.5^2)$, dividida por 5, $-25-29t_1 \equiv 0(mód.5)$ que tiene como solución $x=0+5t$ de donde, $x=3+5(0+5t)=3+5^2 t$.

El resto de soluciones se pueden encontrar por el mismo procedimiento. De hecho, la ecuación tiene $x \equiv 2,3,7,8,12,13,17,18,22,23(\text{mód}.25)$ soluciones, como indicamos más arriba.

Para la ecuación $x^4-23x^2+1\equiv 0(mód.2125)$, reducida a $x^4+2102x^2+1\equiv 0(mód.2125)$, tiene como solución:

$$\begin{aligned} x \equiv\ & 22,58,78,92,97,158,192,197,228,233,267,328,333,347,367,403,\\ & 447,483,503,517,522,583,617,622,653,658,692,753,758,772,792,\\ & 828,872,908,928,942,947,1008,1042,1047,1078,1083,1117,1178,\\ & 1183,1197,1217,1253,1297,1333,1353,1367,1372,1433,1467,1472,\\ & 1503,1508,1542,1603,1608,1622,1642,1678,1722,1758,1778,1792,\\ & 1797,1858,1892,1897,1928,1933,1967,2028,2033,2047,2067,2103(mód.2125). \end{aligned}$$

8.4. *Ecuación de la forma:* $x^{\varphi(p)+4}+ax^{\varphi(p)+3}+bx^{\varphi(p)+2}+cx^{\varphi(p)+1}+dx+e\equiv(mód.p$, ó $p^n)$

4.1 Resolver la ecuación $x^{22}+31x^{20}+7x^{19}+5\equiv 0(mód.19)$.

Primero resolvamos la ecuación $x^4+31x^2+7x+5\equiv 0(mód.19)$, que podemos transforma en $x^4+12x^2+7x+5\equiv 0(mód.19)$ y que tiene como solución $x\equiv 12,13(mód.19)$.
La función $\varphi(n)$ de Euler determina que, si n es primo, $\varphi(n)=n-1$ por tanto, dado que $n=19$, $\varphi(19)=19-1=18$.
Como los exponentes de la ecuación $x^{22}+31x^{20}+7x^{19}+5\equiv 0(mód.19)$ se puede descomponer en $22=4+18$, $20=2+18$ y $19=1+18$, la ecuación planteada tiene como solución la misma que $x^4+31x^2+7x+5\equiv 0(mód.19)$, esto es $x\equiv 12,13(mód.19)$.
Podemos determinar que las soluciones paramétricas del sistema planteado son:

Para el módulo: $x_1=12+19t\ y\ x_2=13+19t$

Para los exponentes: $e_1=4+18s,\ e_2=2+18s\ y\ e_3=1+18s$

4.2 Resolver la ecuación $x^{28}+11x^2+5\equiv 0(mód.13^2)$.

Si resolvemos la ecuación $x^4+11x^2+5=0$, resulta:

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{\sqrt{101}}{2}}i=\pm 0,6892i \text{ y } x_2=\pm\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{101}}{2}}i=\pm 3,2442i$$

Dos pares de raíces que conforman la solución a la cuartica.

Para $x^4+11x^2+5\equiv 0(mód.13)$, dado que no procede ninguna transformación, la solución será $x\equiv 2,11(mód.13)$.

Si aplicamos valores de estas raíces a

$$f(x) = x^4 + 11x^2 + 5$$

y a sus derivadas

$$f'(x) = 4x^3 + 22x$$

obtendremos para

$$f(x) + f'(x)pt_1 \equiv 0(mód.p^n)$$

$$f(x) = x^4 + 11x^2 + 5 = \begin{cases} f(2) = \quad 65 \\ f(11) = 15977 \end{cases} \quad f'(x) = 4x^3 + 22x, = \begin{cases} f'(2) = \quad 76 \\ f'(11) = 5566 \end{cases}$$

Sustituimos $65 + 76 \cdot 13t_1 \equiv 0(mód.13^2)$ y obtenemos para $t_1 \equiv 9(mód.13)$ y para x un valor de $x = 2 + 13(9 + 13t) = 119 + 13^2 t.$

Si utilizamos el mismo procedimiento para la raíz 11, el resultado será $x = 50 + 13^2 t.$
Resultando para $x^4 + 11x^2 + 5 \equiv 0(mód.13^2)$ una solución de $x \equiv 50,119(mód.13^2).$

El valor de la función $\varphi(n)$ de Euler para 13 es

$$\varphi(13) = 13(1 - 1/13) = 13(12/13) = 12$$

aplicado a la ecuación

$$x^{2\cdot12+4=28} + 11x^2 + 5 \equiv 0(mód.13)$$

la solución es

$$x \equiv 2,11(mód.13).$$

Observar que se ha modificado el exponente del monomio x^4 pero no el $11x^2,$ lo que significa que los parámetros exponenciales $e_1 = 4 + 12s \ y \ e_2 = 2 + 12s,$ son totalmente autónomos en su aplicación.

La solución de

$$x^{28} + 11x^2 + 5 \equiv 0(mód.13^2)$$

no es

$$x \equiv 50,119(mód.13^2)$$

si no

$$x \equiv 28,141(mód.13^2)$$

Esto es debido a que el valor de

$$\varphi(13^2)=13^2-13^{2-1}=156$$

es distinto al de

$$\varphi(13)=13(12/13)=12$$

luego, el exponente no puede ser 28 si no 160, así la ecuación $x^{160}+11x^2+5\equiv 0(mód.13^2)$ tendría como solución:

$$x\equiv 50,119(mód.13^2)$$

4.3 Resolver la ecuación $x^4+13x^{32}+11\equiv 0(mód.11^3)$.

La solución cuartica de la ecuación $x^4+13x^2+11=0$ es:

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{13}{2}-\frac{5\sqrt{5}}{2}}i=\pm 0.9538i \text{ y } x_2=\pm\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{2}}i=\pm 3,4771i$$

Para la ecuación modular $x^4+13x^2+11\equiv 0(mód.11),$ que podemos transforma en $x^4+2x^2\equiv 0(mód.11),$ obtenemos la solución de $x\equiv 0,3,8(mód.11).$

Aplicando métodos anteriores, para $x^4+13x^2+11\equiv 0(mód.11^2)$ obtenemos la solución de $x\equiv 30,91(mód.11^2)$ y para $x^4+13x^2+11\equiv 0(mód.11^3),$ $x\equiv 454,877(mód.11^3).$

La ecuación $x^4+13x^{32}+11\equiv 0(mód.11)$ tiene como solución $x\equiv 0,3,8(mód.11),$ pero la ecuación $x^4+13x^{32}+11\equiv 0(mód.11^3)$ presenta $x\equiv 470,861(mód.11^3),$ una solución diferente por los motivos que apuntamos en el apartado anterior. El valor de la función $\varphi(n)$ es

$$\varphi(11)=10,\ \varphi(11^2)=110\ y\ \varphi(11^3)=1210$$

lo que hace que el exponente 32 sólo sea válido para el primero. Pueden comprobarlo modificando dicho exponente.

4.4 Resolver la ecuación $x^{18}-20x^{30}-21x^{43}+4\equiv 0(mód.1521)$.

La factorización del módulo es $1521=3^2\cdot 13^2.$
Empecemos por resolver la ecuación $x^4-20x^2-21x+4\equiv 0(mód.3),$ que podemos transformar en $x^4+x^2+1\equiv 0(mód.3)$ y que tiene como solución $x\equiv 1,2(mód.3).$

Para $x^4-20x^2-21x+4\equiv 0(mód.3^2),$ equivalente a $x^4+7x^2+6x+4\equiv 0(mód.3^2),$ obtenemos la solución de $x\equiv 1,4,7(mód.3^2).$

Esta solución es idéntica a la ecuación $x^{18}-20x^{30}-21x^{43}+4\equiv 0(mód.3^2)$, que se puede transformar en $x^{18}+7x^{30}+6x^{43}+4\equiv 0(mód.3^2)$.

Los exponentes se ajustan al valor de la función $\varphi(3)=3(2/3)=2$ y, por tanto

$$x^{18=2\cdot 7+4}+7x^{30=2\cdot 14+2}+6x^{43=2\cdot 21+1}+4\equiv 0(mód.3^2)$$

Aplicando la función $f(x)+f'(x)pt_1\equiv 0(mód.p^n)$ con los valores de la ecuación $f(x)=x^4+7x^2+6x+4$ y su derivada $f´(x)=4x^3+14x+6$ obtenemos para

$$f(x)=x^4+7x^2+6x+4=\begin{cases} f(1)= & 18 \\ f(4)= & 396 \\ f(7)= & 2790 \end{cases} \text{ y } f´(x)=4x^3+14x+6=\begin{cases} f´(1)= & 24 \\ f´(4)= & 318 \\ f´(7)= & 1476 \end{cases}$$

Para $18+24\cdot 3t_1\equiv 0(mód.3^2)$, que dividida por 3 resulta $6+8t_1\equiv 0(mód.3)$, tiene para $t_1\equiv 0(mód.3)$ y para $x=1+3(0+3t)=1+3^2t$.

Para $396+318\cdot 3t_1\equiv 0(mód.3^2)$, que dividida por 3 resulta $132+106t_1\equiv 0(mód.3)$, tiene para $t_1\equiv 0(mód.3)$ y para $x=4+3(0+3t)=4+3^2t$.

Para $2790+1476\cdot 3t_1\equiv 0(mód.3^2)$, que dividida por 3 resulta $930+492t_1\equiv 0(mód.3)$, tiene para $t_1\equiv 0(mód.3)$ y para $x=7+3(0+3t)=7+3^2t$.

$$f(x)=x^{18}+7x^{30}+6x^{43}+4=\begin{cases} f(1)= & 18 \\ f(4)=2^2\cdot 3^2\cdot 61\cdot 21139686830713488344926 1 \end{cases}$$

$$f´(x)=18x^{13}+210x^{29}+258x^{42}=\begin{cases} f´(1)= & 486 \\ f´(4)=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13^2\cdot 17\cdot 107\cdot 439\cdot 6419969128008473 \end{cases}$$

Para $18+486\cdot 3t_1\equiv 0(mód.3^2)$, que dividida por 3 resulta $6+486t_1\equiv 0(mód.3)$, tiene para $t_1\equiv 0(mód.3)$ y un valor para $x=1+3(0+3t)=1+3^2t$.

Para las dos restantes raíces, este método resulta imposible.

Dejamos en manos del lector buscar la solución de

$$x^{18}-20x^{30}-21x^{43}+4\equiv 0(mód.13^2),$$

que es

$$x\equiv 2,3(mód.13^2)$$

y las de

$$x^{18}-20x^{30}-21x^{43}+4\equiv 0(mód.1521)$$

que resultan ser

$$x \equiv 172, 340, 679, 847, 1186, 1354(mód.1521)$$

4.5 Resolver la ecuación $x^{32} - 18x^{30} + 3 \equiv 0(mód.1127)$.

La factorización del módulo es $1127 = 7^2 \cdot 23$.
La función $\varphi(n)$ de Euler da como valores para *7 y 23*, *6 y 22*, respectivamente. Esto nos permite ajustar los exponentes a $32-(6+22)=4$ y $30-(6+22)=2$ luego, la ecuación con exponentes normales es $x^4 - 18x^2 + 3 \equiv 0(mód.7^2 \cdot 23)$.

Para $x^4 - 18x^2 + 3 \equiv 0(mód.7)$, que transformamos en $x^4 + 3x^2 + 3 \equiv 0(mód.7)$, tiene como solución $x \equiv 1, 6(mód.7)$.

Para $x^4 - 18x^2 + 3 \equiv 0(mód.23)$, que transformamos en $x^4 + 5x^2 + 3 \equiv 0(mód.23)$, tiene como solución $x \equiv 9, 11, 12, 14(mód.23)$.

Para $x^4 - 18x^2 + 3 \equiv 0(mód.7^2)$, que transformamos en $x^4 + 31x^2 + 3 \equiv 0(mód.7^2)$, tiene como solución $x \equiv 22, 27(mód.7^2)$. A este resultado se puede llegar fácilmente dando valores a la ecuación $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$ y a su derivada $f'(x) = 4x^3 + 6x$, y aplicando la ecuación $f(x) + f'(x)pt_1 \equiv 0(mód.p^n)$.

Para $x^{32} - 18x^{30} + 3 \equiv 0(mód.7)$, que transformamos en $x^{32} + 3x^{30} + 3 \equiv 0(mód.7)$, obtenemos $x \equiv 1, 6(mód.7)$. La misma solución que con exponentes normales.

Para $x^{32} - 18x^{30} + 3 \equiv 0(mód.7^2)$, que transformamos en $x^{32} + 31x^{30} + 3 \equiv 0(mód.7^2)$, obtenemos $x \equiv 22, 27(mód.7^2)$ que es igual a la obtenida anteriormente.

Para $x^{32} - 18x^{30} + 3 \equiv 0(mód.23)$, que transformamos en $x^{32} + 5x^{30} + 3 \equiv 0(mód.23)$, obtenemos $x \equiv 5, 18(mód.23)$. Esta solución es distinta a $x \equiv 9, 11, 12, 14(mód.23)$. ¿Por qué?

Porque los exponentes contienen la suma de $\varphi(7) = 7 - 1 = 6$, que nada tiene que ver con el módulo 23 así, para

$$x^{26} - 18x^{24} + 3 \equiv 0(mód.23)$$

que podemos transformar en

$$x^{26} + 5x^{24} + 3 \equiv 0(mód.23)$$

y que sí que tiene como solución

$$x \equiv 9, 11, 12, 14(mód.23)$$

Para $x^{32} - 18x^{30} + 3 \equiv 0(mód.7^2 \cdot 23)$

obtenemos

$$x \equiv 120, 419, 708, 1007 (mód.7^2 \cdot 23)$$

sin embargo

$x^4 - 18x^2 + 3 \equiv 0 (mód.7^2 \cdot 23)$ tiene $x \equiv 218, 267, 517, 561, 566, 610, 860, 909 (mód.7^2 \cdot 23).$

Dejamos en manos del lector la demostración del por qué no coinciden los resultados finales.

8.5 *Ecuación cuartica a partir de un número dado.*

5.1 A partir del número 60 generar una ecuación cuartica.

El coeficiente independiente se factoriza como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot$ Uno de los números 2, 3, 4 ó 5 o todos pueden ser raíces primitivas de la ecuación propuesta.
Si tomamos los cuatro números, obtenemos:

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$$

La comprobación de cada uno de estos elementos viene determinado por la *Ley de Coeficientes*. A saber

$$-14x^3 = 2+3+4+5 = 14$$
$$71x^2 = 2\cdot3 + 2\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 4\cdot5 = 6+8+10+12+15+20 = 71$$
$$-154x = 2\cdot3\cdot4 + 2\cdot3\cdot5 + 2\cdot4\cdot5 + 3\cdot4\cdot5 = 24+30+40+60 = 154$$
$$-154 = 2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$$

Como no podía ser de otra manera, esta ecuación tiene como soluciones:

$x_1 = 2,\ \ x_2 = 3,\ \ x_3 = 4$ y $x_4 = 5$

Sabemos que el cuadrado de 60 se encuentra entre $8^2 > 60 > 7^2$. Ahora supongamos que tomamos

$$P = \left(4 + 2\sqrt{-11}\right)\left(4 - 2\sqrt{-11}\right) = 4^2 + 11\cdot 2^2 = 60$$
$$S = \left(4 + 2\sqrt{-11}\right) + \left(4 - 2\sqrt{-11}\right) = 2\cdot 4 = 8$$

Esto nos va a permitir dar solución a la ecuación:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 8x + 60 = 0$$

que le satisfacen las raíces: $x = 4 \pm 2\sqrt{11}i$
Pero el $mcd(4,2) = 2,$ luego

$$P = \left(2 + \sqrt{-11}\right)\left(2 - \sqrt{-11}\right) = 2^2 + 11\cdot 1^2 = 15$$
$$S = \left(2 + \sqrt{-11}\right)\left(2 - \sqrt{-11}\right) = 2\cdot 2 = 4$$

genera una cuadrática como

$$x^2-4x+15=0$$

que tiene como soluciones: $x=2\pm\sqrt{11}i$
Si ahora tomamos la cuartica $x^4-4x^2+15=0,$ esta ecuación tiene como soluciones:

$$x=\pm\sqrt{2+\sqrt{11}i}\ \text{ y }\ x=\pm\sqrt{2-\sqrt{11}i}$$

5.2 A partir del número 7 se ha generado la ecuación: $x^4 - 22x^3 + 162x^2 - 434x + 245 \equiv 0(mód.13).$ ¿Cómo se ha realizado?

La factorización de $245=5\cdot7^2$ y la solución a la ecuación modular es de $x\equiv5,7(mód.13).$ Podemos deducir que, al menos, el 5 y el 7 puedan ser raíces primitivas de la ecuación.
Por la Ley de Ruffini:

	1	-22	+162	-434	+245
5		+5	-85	+385	-245
	1	-17	+77	-49	0

El 5 es raíz de la cuartica y genera la cuadrática $x^3-17x^2+77x-49=0$ con solución

$$x_1=7\ \text{ y }\ x_{2,3}=5\pm3\sqrt{2}$$

Esta solución denota que 7 también puede ser un raíz. Probamos:

	1	-22	+162	-434	+245
7		+7	-105	+399	-245
	1	-15	+57	-35	0

El 7 también es raíz de la cuartica y genera la cuadrática $x^3-15x^2+57x-35=0$ con solución

$$x_1=5\ \text{ y }\ x_{2,3}=5\pm3\sqrt{2}$$

Queda demostrado que las dos raíces que faltan son $x_{3,4}=5\pm3\sqrt{2}$ por lo que las raíces que satisfacen a la ecuación planteada son:

$$x_1=5,\ \ x_2=7\ \text{ y }\ x_{3,4}=5\pm3\sqrt{2}$$

Se trata de dos raíces reales generadas a partir del número 7. Como $3^2>7>2^2,$ para la norma de un número real procede:

$$P=\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=3^2-2\cdot1^2=7\ \text{ y }\ S=\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)=2\cdot3=6$$

que genera una cuadrática de la forma $x^2-6x+7=0$ que tiene como solución $x_{1,2}=5\pm3\sqrt{2}.$

5.3 A partir del número 43 se ha generado la ecuación: $x^4 - 8x^3 + 44x^2 - 8x + 43 \equiv 0(m\acute{o}d.43)$. Demostrar cómo.

La solución modular es igual a $x \equiv 0,8(m\acute{o}d.43)$.

El coeficiente independiente es 43 y primo e igual al número que se propone, eso nos lleva a pensar que, al menos, dos de las raíces son complejas. Si tenemos en cuenta que la raíz cuadrada de 43 está comprendida entre $7^2 > 43 > 6^2$, existe un cuadrado igual o menor a 6^2 que genera dos raíces de una cuadrática. Veamos.

Para $43-6^2 = 7 \to \left(6+\sqrt{-7}\right)\left(6-\sqrt{-7}\right) = 43 = 6^2 + 7\cdot 1^2$

Para $43-5^2 = 18 \to \left(5+3\sqrt{-2}\right)\left(5-3\sqrt{-2}\right) = 43 = 5^2 + 2\cdot 3^2$

Para $43-4^2 = 27 \to \left(4+3\sqrt{-3}\right)\left(4-3\sqrt{-3}\right) = 43 = 4^2 + 3\cdot 3^2$

Para $43-3^2 = 34 \to \left(3+\sqrt{-34}\right)\left(3-\sqrt{-34}\right) = 43 = 3^2 + 34\cdot 1^2$

Para $43-2^2 = 39 \to \left(2+\sqrt{-39}\right)\left(2-\sqrt{-39}\right) = 43 = 2^2 + 39\cdot 1^2$

Para $43-1^2 = 42 \to \left(1+\sqrt{-42}\right)\left(1-\sqrt{-42}\right) = 43 = 1^2 + 42\cdot 1^2$

De todas estas posibles representaciones nos quedamos con la correspondiente 4^2 ya que una de las soluciones modulares es, precisamente, 8 y eso genera una ecuación cuadrática de la forma:

$$P = \left(4+3\sqrt{-3}\right)\left(4-3\sqrt{-3}\right) = 43$$
$$S = \left(4+3\sqrt{-3}\right)+\left(4-3\sqrt{-3}\right) = 8$$
$$x^2 - 8x + 43 = 0$$

ecuación que admite como soluciones: $x = 4 \pm 3\sqrt{3}i$.

Si ahora dividimos la ecuación original por alguna de estas raíces, obtenemos:

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 44x^2 - 8x + 43}{4+3\sqrt{-3}} = \frac{(x+i)(x-i)(x^2-8x+43)}{4-3\sqrt{3}i}$$

donde se ve claramente que las dos raíces que faltan son: $x = \pm i$. Luego, la ecuación planteada admite como solución:

$$x_{1,2} = \pm i \text{ y } x_{3,4} = 5 \pm 2\sqrt{3}i$$

5.4 A partir del número 46 genere una ecuación cuartica que tenga las siguientes características: Raíces $x = a \pm b\sqrt{D}i$, $x = a \pm b\sqrt{D}$ con $a,b \in Z$ y $\mathrm{mcd(a,b)=1}$.

Estamos buscando una ecuación con dos raíces complejas y dos reales que tengan una estructura de la forma

$$P = \left(a+b\sqrt{D}\right)\left(a-b\sqrt{D}\right) = a^2 - Db^2 = 46$$

$$P=\left(a+b\sqrt{-D}\right)\left(a-b\sqrt{-D}\right)=a^2+Db^2=46$$

y que a y b sean coprimos.
Como la raíz cuadrada de 46 está comprendida entre $7^2>46>6^2$, la primera admitirá valores para $a=1,2,3,4,5,6$ y la segunda $a=7,8,9,10,...$ admitirá valores infinitos. Veamos algunos valores:

$$46-1^2=45=5\cdot 3^2,\quad 46-2^2=42=2\cdot 3\cdot 7,\quad 46-3^2=37=37$$
$$46-4^2=30=2\cdot 3\cdot 5,\quad 46-5^2=21=3\cdot 7,\quad 46-6^2=10=2\cdot 5$$

De todas estas representaciones, la única con $b\neq 1$ es la primera, esto es

$$46-1^2=45\rightarrow\left(1+3\sqrt{-5}\right)\left(1-3\sqrt{-5}\right)=46=1^2+5\cdot 3^2$$

Esta representación nos proporciona una ecuación de $x^2-2x+46=0$ que tiene como soluciones: $x=1\pm 3\sqrt{5}i.$
Para las raíces reales encontramos algunos valores tales como:

$$7^2-46=3,\ 8^2-46=18=2\cdot 3^2,\ 9^2-46=35=5\cdot 7,\ 10^2-46=54=2\cdot 3^3$$

Aquí encontramos dos que se ajustan a las necesidades del supuesto:

$$8^2-46=18\rightarrow\left(8+3\sqrt{2}\right)\left(8-3\sqrt{2}\right)=46=8^2-2\cdot 3^2$$
$$10^2-46=54\rightarrow\left(10+3\sqrt{6}\right)\left(10-3\sqrt{6}\right)=46=10^2-6\cdot 3^2$$

Estas representaciones generan dos ecuaciones cuadráticas de la forma y solución:

$x^2-16x+46=0$ con soluciones: $x=8\pm 3\sqrt{2}.$
$x^2-20x+46=0$ con soluciones: $x=10\pm 3\sqrt{6}.$

Combinando debidamente estas soluciones, obtenemos:

$$\left(x-\left(1+3\sqrt{-5}\right)\right)\left(x-\left(1-3\sqrt{-5}\right)\right)\left(x-\left(8+3\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(8-3\sqrt{2}\right)\right)$$
$$\left(x-\left(1+3\sqrt{-5}\right)\right)\left(x-\left(1-3\sqrt{-5}\right)\right)\left(x-\left(10+3\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(10-3\sqrt{6}\right)\right)$$

En el primer caso se genera la ecuación $x^4-18x^3+124x^2-828x+2116=0$ que tiene como soluciones: $x_{1,2}=1\pm 3\sqrt{5}i$ y $x_{3,4}=8\pm 3\sqrt{2}.$

En el segundo caso la ecuación resulta $x^4-22x^3+132x^2-1012x+2116=0$ y la solución que admite es: $x_{1,2}=1\pm 3\sqrt{5}i$ y $x_{3,4}=10\pm 3\sqrt{6}.$

5.5 Sea N un número entero positivo y a,b,c su mitad, quinto y séptimo que representan las tres raíces de una ecuación cúbica y cuya suma es un número primo. Sean $a,b,c\pm\sqrt{-10}$ las raíces de una ecuación cuartica. Determinar dichas ecuaciones.

Sabemos que la estructura de una cúbica es:

$$x^3+B(a+b+c)x^2+C(ab+ac+bc)x+D(abc)$$

Mediante fracciones unitarias determinamos esta estructura:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{Q}{Q+1},Q=\frac{ab+ac+bc}{abc-(a(b+c)+bc)}=\frac{Cx}{D-Cx}$$

Aplicando los datos aportados:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{Q}{Q+1},\ Q=\frac{2\cdot5+2\cdot7+5\cdot7}{2\cdot5\cdot7-59}=\frac{59}{70-59}\frac{59}{11}\to59+11=70$$

Las raíces primitivas de la cúbica son 2, 5 y 7 y el número $N=59,$ ya que:

$$70/2+70/5+70/7=35+14+10=59$$

La ecuación cúbica que admite como solución 2, 5 y 7, es:

$$(x-2)(x-5)(x-7)=x^3-14x^2+59x-70$$

de las que, 2 y 5 serán raíces enteras de la cuartica.
Para las otras dos raíces de la forma $c\pm\sqrt{-10}$ son dos conjugadas que debemos buscar entre alguna de las raíces del número 59 y donde $a=7.$ En este caso: $59-7^2=10=7^2+10\cdot1^2.$
Esta representación genera la ecuación $x^2-14x+59=0$ que tiene como soluciones: $x=7\pm\sqrt{10}i.$
Aplicando cualquiera de los procedimientos expuestos anteriormente, la ecuación generada resulta: $x^4-21x^3+167x^2-553x+590=0$ con solución $x=2,\ x=5\ y\ \ x=7\pm\sqrt{10i}.$

8.6 *Algunas Aplicaciones: CRONOLOGIA*

6.1 Calendarios.

DICIEMBRE año 1 a. C.						
L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

ENERO año 1 d. C.						
L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Desde el calendario de Numa, creado por Numa Pompilio (715-676 a.C.) que sucedió en el trono de Roma a Rómulo, hasta Julio César, el calendario romano, del que deriva el nuestro, no tenía ninguna regla precisa. La correspondencia del año lunar de 12 lunaciones, que forman 355 días, con el año solar, que rige las estaciones, se hacía mediante intercalaciones fijadas arbitrariamente. El último año de este calendario, que se llamó *año de la confusión (*46 a.C.), fue de 455 días. En el año 45 a.C., Julio César, dueño del mundo romano, ordenó a Sosígenes (siglo I a.C.), astrónomo griego de Alejandría, la confección de un calendario al que denominó **Juliano**. El año tendría 365 días y cada cuatro años se añadiría un día, o sea 366. Este calendario se mantuvo vigente durante mucho tiempo, pero tenía un fallo: el calendario Juliano excedía al año solar real en 11 minutos y 14 segundos, lo que acumulaba una diferencia de un día en 128 años. Después de varios siglos, este desfase hizo que los equinoccios *(periodo en que los días y las noches tienen la misma duración. Sucede anualmente el 21 ó 22 de marzo -equinoccio de primavera- y 22 ó 23 de septiembre -equinoccio de otoño-)* y solsticio *(periodo en que la duración del día es más larga -21 de junio, solsticio de verano- y más corta -21 de diciembre, solsticio de invierno-)* retrocedieran hacia el inicio del año.

El calendario Juliano se regula por ciclos solares. Es un ciclo de 28 años con respecto a la semana. Como los años bisiestos se suceden cada 4 años y hay 7 días posibles a su comienzo, se crea la secuencia de $4 \cdot 7 = 28$. Estos 28 años lo componen 21 años de 365 días y 7 de 366 que hacen un total de $21 \cdot 365 + 7 \cdot 366 = 7665 + 2562 = 10.227$ días. Por ejemplo, en el cuadro siguiente se indica que, a partir del 1 de enero del año 1 (sábado), todos los días 1 de enero de los siguientes años también son sábado:

Calendario Juliano: En todos estos años, el día *1 de enero* es **sábados**											
29	*57*	*85*	*113*	*141*	*169*	*197*	*225*	*253*	*281*	*309*	*337*
365	*393*	*421*	*449*	*477*	*505*	*533*	*561*	*589*	*617*	*645*	*673*
701	*729*	*757*	*785*	*813*	*841*	*869*	*897*	*925*	*953*	*981*	*1009*
1037	*1065*	*1093*	*1121*	*1149*	*1177*	*1205*	*1233*	*1261*	*1289*	*1317*	*1345*
1373	*1401*	*1429*	*1457*	*1485*	*1513*	*1541*	*1569*				

En 1582, el Papa Gregorio XIII, basándose en los trabajos realizados por el jesuita Cristóbal Clavius (1537-1612), derogó el calendario Juliano y lo sustituyó por el calendario **Gregoriano**. Al jueves 4 de octubre de 1582 le siguió el viernes 15 de octubre de 1582, manteniendo la secuencia de los días de la semana.

OCTUBRE año 1582						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Según este nuevo calendario, los años serán de 365 días si el número no es divisible por 4. Los que sean divisibles por 4, tendrán 366 días, con excepción de los años que ponen fin a los siglos y que terminan en dos ceros. Para estos años, existe una regla adicional según la cual sólo cuentan como bisiestos los años seculares cuyo número sea divisible por 400. Serán años bisiestos $1600, 2000, 2400, \ldots$ y no serán bisiestos $1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300.$

En el calendario Gregoriano, a partir del día 1 de enero de 1569 (miércoles), podemos establecer ciclos de 28 años en donde el día 1 de enero es miércoles. Esta circunstancia queda reflejada en el siguiente cuadro:

Calendario Gregoriano: En todos estos años, el día **1 de enero** es **miércoles**											
1569	*1597*	*1625*	*1653*	*1681*	*1709*	*1737*	*1765*	*1793*	*1821*	*1849*	*1877*
1905	*1933*	*1961*	*1989*	*2017*	*2045*	*2073*	*2101*	*2129*	*2157*	*2185*	*2213*
2241	*2269*	*2297*	*2325*	*2353*	*2381*	*2409*	*2437*	*2465*	*2493*	*2521*	

Al forzar el ciclo de 28 años, en el cuadro anterior se mezclan fechas que se rigen por el Calendario Juliano y por el Gregoriano. Desde el día 1 de enero de 1569 (sábado) hasta el día 4 de octubre de 1582 (jueves), se rige por el Calendario Juliano; desde el día 15 de octubre de 1582 en adelante, se rige por el Calendario Gregoriano. En el cuadro siguiente recogemos las variaciones del día de la semana correspondientes al día 1 de enero:

Calendario Juliano: En todos estos años, al día **1 de enero** le corresponde como **día de la semana**													
1569	*1570*	*1571*	*1572*	*1573*	*1574*	*1575*	*1576*	*1577*	*1578*	*1579*	*1580*	*1581*	*1582*
S	*S*	*L*	*M*	*J*	*V*	*S*	*D*	*M*	*Mi*	*J*	*V*	*D*	*L*

OCTUBRE 1582 (Juliano)						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

OCTUBRE 1582 (Gregoriano)						
L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

El calendario Gregoriano se regula por periodos de 400 años durante los cuales se añaden 97 días intercalares el 29 de febrero, como bisiestos, de forma que 400 años contienen $400 \cdot 365 + 97 = 146.097$ días, por lo que la duración de un año gregoriano es, por tanto, de $146097 / 400 = 365,2425$ días. Como la duración del año solar medio es de $365,242199$ o sea, 365 días, 5 horas, 48 minutos y 45,25 segundos, el año gregoriano excede en $0,0003$ días ó $25,92$ segundos al año. Este error es desdeñable ya que se necesitan $3.333,33$ años para completar un día, sin embargo, el astrónomo Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) propuso corregir este ligero desvío haciendo que el año 4000 y sus múltiplos sean años comunes en lugar de bisiestos así, el error sería sólo de un día dentro de 100.000 años.
Hasta el 4 de octubre de 1582 sólo se usaba el calendario Juliano, que era el único sistema de datación. A partir de esta fecha se produce una divergencia: la fecha de aquellos que siguieron usando el calendario Juliano presentaba un retraso con relación a la fecha de aquellos que habían adoptado el calendario Gregoriano. Ello por dos motivos:

- Cuando se implantó el calendario Gregoriano, se produjo un salto hacia delante de 10 días.
- El calendario Juliano considera bisiestos los años seculares que no son divisibles por 400, es decir, 1700, 1800 y 1900, mientras que para el calendario Gregoriano son años comunes, lo que añade un día más la diferencia a cada uno de estos años. El desfase a partir de febrero/marzo de 1900 es de 13 días. Así, si siguen coexistiendo ambos calendarios, a partir de febrero/marzo de 2100, la diferencia será de 14 días.

En el cuadro siguiente se recogen las variaciones en el día de la semana en los calendarios Juliano y Gregoriano correspondientes a los ciclos de 400 años.

Día de la **semana** *que corresponde al* ***día*** **1 de enero** de cada año *en los calendarios* **Juliano y Gregoriano**									
años	1	401	801	1201	1601	2001	2401	2801	3201
Juliano	S	M	V	L	J	D	Mi	S	M
Gregoriano	L	L	L	L	L	L	L	L	L

6.2 Los Cómputos.

Los días julianos tiene la misma duración que los días solares, sin embargo éstos se cuentan a partir del primero de enero de año 4713 a.C., el cual es el día juliano 1 y de allí en adelante se enumeran los días en sucesión creciente. Estos días julianos se agrupan en periodos de 7980 años. Cada uno de estos periodos se denomina Ciclo Juliano ó Periodo Juliano. Veamos por qué.
Tenemos $7980 = 28 \cdot 19 \cdot 15$ y cada uno de estos factores tiene un significado dentro de los calendarios:

I. **Ciclo Solar de 28 años**: Corresponde al ciclo solar de 28 años. Este es el ciclo más pequeño en el cual los días de la semana se repiten. El primer año de un ciclo solar es aquel en donde el día primero de enero es lunes. Por ejemplo, el año 1560 tiene **Año Solar 1**.

II. **Ciclo Lunar o áureo de 19 años**: Corresponde al ciclo lunar o metónico, el cual dura 19 años. Es el menor ciclo en el cual las fases de la luna se repiten en las mismas fechas del calendario. Provienen del astrónomo Metón (siglo V a.C.), quien descubrió que 19 años solares corresponden exactamente a 235 lunaciones o meses lunares. Los años del ciclo lunar se llaman **Años Dorados** porque los griegos hicieron inscribir tan notable descubrimiento con letras de oro en el templo de Minerva. Este sistema fue introducido por el Emperador Dionisio Exigus en el año 533 d.C. y este año tiene **Año Dorado 1**. Se obtiene sumando 1 al año y dividiendo por 19. Si el cociente es cero, el número áureo sería el 19.

III. **<u>Ciclo de la Indicción de 15 años</u>**: Se trata del ciclo de recolección de impuestos en la antigua Roma, que consta de 15 años y se llama **la Indicción**. Este ciclo fue introducido por el Emperador Constantino en el año 313 d.C. correspondiendo este año el primer año de dicho ciclo. Se obtiene sumando 3 al número del año y dividiendo el resulta por 15. El residuo expresa la indicción del año. Si no hay residuo, la indicción es 15.

Esto nos permite calcular con facilidad una determinada fecha al pasar de un sistema a otro. El problema entonces es escoger una fecha apropiada para iniciar la cuenta de los años julianos. Para ello se necesita un año x de las Historia, tal que en ese año se den inicio a los tres ciclos. Esta x debe tener

$$\begin{aligned} &Año\ Solar = 1 \\ &Año\ Dorado = 1 \\ &Año\ de\ Indicción = 1 \end{aligned}$$

que usando congruencias podemos establecer

$$\begin{aligned} x &\equiv 1560(mód.28) \\ x &\equiv \ \ 532(mód.19) \\ x &\equiv \ \ 313(mód.15) \end{aligned}$$

y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &\equiv 20(mód.28) \\ x &\equiv \ \ 0(mód.19) \\ x &\equiv \ \ 13(mód.15) \end{aligned}$$

Aplicando el *Sistema Chino de Restos*, resulta para

$$x = 3268 + 7980t$$

donde t es un entero cualquiera.

Descartamos el año 3268 por pertenecer al futuro y buscamos un año del pasado a partir del cual se inicio el periodo juliano, esto es $3269 - 7980 = -4712$ que corresponde al año 4713 a.C. y este se toma como **Año 1 Juliano**.

6.3 Calcular el año juliano para 2010 y 2011.

En el caso del año 2010 procedemos:

$$x = 4713 + 2010 = 6723$$

ahora

Año Solar: $6723 \equiv 3(m\acute{o}d.28) \quad \Rightarrow \; 3$
Año Dorado: $6723 \equiv 3(m\acute{o}d.19) \quad \Rightarrow \; 16$
Año de la Indicción: $6723 \equiv 3(m\acute{o}d.15) \quad \Rightarrow \; 3$

Para el año 2011:

$$x = 4713 + 2011 = 6724$$

Año Solar: $6724 \equiv 4(m\acute{o}d.28) \quad \Rightarrow \; 4$
Año Dorado: $6724 \equiv 17(m\acute{o}d.19) \quad \Rightarrow \; 17$
Año de la Indicción: $6724 \equiv 4(m\acute{o}d.15) \quad \Rightarrow \; 4$

El año 2007 fue Año Solar y de la Indicción; el Año 2013 será Dorado.

6.4 Calendario Perpetuo.

Un calendario perpetuo es aquel que está formado por unas tablas que permiten calcular los días de la semana de cualquier año.

CALENDARIO PERPETUO: *Periodo del año 1 al 2799*
(J) Siglo Juliano, **(G)** Siglo Gregoriano

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
J	5 12 19 26	4 11 18 25	3 10 17 24	2 9 16 23	1 8 15 22	0 7 14 21	6 13 20 27
G	16 20 24	15 19 23 27		18 22 26		17 21 25	
Año	00 06 17 23 28 34 45 51 56 62 73 79 84 90	01 07 12 18 29 35 40 46 57 63 68 74 85 91 96	02 13 19 24 30 41 47 52 58 69 75 80 86 97	03 08 14 25 31 36 42 53 59 64 70 81 87 92 98	09 15 20 26 37 43 48 54 65 71 76 82 93 99	04 10 21 27 32 38 49 55 60 66 77 83 88 94	05 11 16 22 33 39 44 50 61 67 72 78 89 95
Mes	Octubre	Enero* Mayo	Agosto	Marzo Noviembre	Febrero* Junio	Septiembre Diciembre	Abril Julio
Día	7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27
Suma	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
	Domingo	*Lunes*	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*	*Sábado*

*Debe restarse **uno** del año

De hecho la semana, con sus siete días, es la medida más exacta que se utilizada en Cronologia. La utilidad de este tipo de calendarios es evidente en las investigaciones históricas.
Aunque existen muchos calendarios de este tipo, el que reseñamos a continuación es una copia actualizada del que fue confeccionado por Édouard Lucas (1842-1891), un militar franco prusiano y profesor de matemáticas.
Calcular el día de la semana correspondiente a una determinada fecha es una operación relativamente fácil. He aquí algunos ejemplos calculados:

	1-1-1	**13-2-333**	**16-7-1212**	**3-10-1582**	**16-10-1582**	**21-2-1941**	**28-2-2011**
Calendarios	**J**	**J**	**J**	**G**	**G**	**G**	**G**
Siglo	4	2	0	4	0	1	0
Año	1	6-1	1	4	1	2-1	6-1
Mes	1	4	6	0	5	4	4
Día	1	6	2	3	1	0	0
Suma	**7**	**17**	**9**	**11**	**7**	**6**	**9**
Semana	*Sábado*	*Martes*	*Lunes*	*Miércoles*	*Sábado*	*Viernes*	*Lunes*

AYUDA INTERNET Calendarios

http://5ko.free.fr/en/jul.php?y=1
http://es.wikipedia.org/wiki/Calcular_el_d%C3%ADa_de_la_semana
http://es.wikipedia.org/wiki/Calendario_perpetuo
http://www.eldiade.com/es/1582/
http://www.rosettacalendar.com/

BIBLIOGRAFÍA

ALEGRE ESPADA, GARCIA y TARRÉS, Problemas sobre Funciones de Variable Compleja, ISBN: 84-89607-30-3
APOSTOL, Tom M., Cálculus I, ISBN: 84-291-5002-1
CHICA BLAS, Ángel, Descartes: Geometría y método, ISBN: 84-95599-07-4
CORTÁZAR, Juan, Tratado de Álgebra Superior, Edición especial de 1858
DUNHAM, William, Euler El Maestro de todos los Matemáticos, ISBN: 84-930719-6-X
EDWARDS, Harold M., Galois Theory, ISBN: 0-38790-980-X
JOUETTE, André, El Secreto de los Números, ISBN: 84-95601-00-1
LUCAS, E., Recreaciones Matemáticas tomo IV, ISBN: 978-84-96566-78-1
MARTIN CASALDERREY, F., Cardano y Tartaglia, Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano, ISBN: 84-930719-5-1
MEAVILLA SEGUI, Vicente, Ruffini: popular y desconocido, ISBN: 84-96566-09-9
SWOKOWSKI y COLE, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, ISBN: 968-7529-26-1

AYUDA INTERNET

http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_cuarto_grado
http://www.rmm.cl/index_sub.php?id_contenido=10331&id_seccion=3438&id_portal=520
http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html
http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/es/Quartic_equation
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html
http://www.wolframalpha.com/examples/ (Resoluciones matemáticas)
http://www.vadenumeros.es/actividades/division-por-ruffini.htm (Soluciones Ruffini)
http://departamento.us.es/da/apuntes/algebra/t7-2004-05.pdf