NÚMEROS LIBRES DE CUADRADOS

1. Concepto y estructura de los Números

Del latín *numĕrus*, el término número se refiere a la expresión de una cantidad con relación a su unidad. Se trata, por lo tanto, de un signo o un conjunto de signos. Uno (1), dos (2), tres (3), cuatro (4), cinco (5), seis (6), siete (7), ocho (8), nueve (9) y cero (0) son los números naturales. La teoría de números reconoce otras clasificaciones, como la paridad, la primalidad o la radical cuadrática.

Por su paridad, un número puede ser Par o Impar. Es Par si es 2 o múltiplo de 2 y toma la forma $2k+0$. Es Impar cuando no es divisible por 2 y toma la forma $2k+1$.

Por su primalidad, un número puede ser Primo o Compuesto. Es Primo cuando sus únicos divisores son él mismo y la unidad. Es Compuesto cuando, aparte de ser divisible por él mismo y por la unidad, tiene otros divisores.

Dentro de los números Compuestos, pueden ser Libres de Cuadrados, si los factores primos que lo componen son todos distintos, o No Libres de Cuadrados, si uno o varios de dichos factores primos se repite.

Por la radical cuadrática, un número puede ser raíz cuadrada entera, $\sqrt{n}=q,\ q\in\mathbb{Z},$ o bien no tener raíz entera, en cuyo caso $\sqrt{n}$ está comprendida entre $q^2>n>p^2$. En este caso se produce una dispersión tal, que $p^2+p=q^2-q=pq=p(p+1),$ es el producto de dos números consecutivos a los que se denominan números Oblongos o Heterométricos.

2. Forma y estructura de los números Primos

2.1 Primos y Enteros de Gauss

De acuerdo con Karl Friedrich Gauss (1777-1855), los números primos, aunque existen muchas clasificaciones, hay dos que son fundamentales:

Enteros de la forma $p=4k+1=a^2+b^2$, pertenecen al anillo $\mathbb{Z}n$ de los números enteros y tienen como estructura algebraica $p=(a+bi)(a-bi)=(a+bi)(b+ai)(-i),$ factorización única en el campo complejo.

Primos de la forma $q=4k+3,$ pertenecen al anillo $\mathbb{Q}[D]$ de los números racionales y tienen como estructura algebraica $q=(a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})=a^2-Db^2=x^2-Dy^2\in\mathbb{R},$ o bien $q=(a+b\sqrt{-D})(a-b\sqrt{-D})=a^2+Db^2=x^2+Dy^2\in\mathbb{C}.$

Dado un cuerpo cuadrático $K=\mathbb{Q}[D],$ donde D es un entero libre de cuadrados, los enteros cuadráticos son números que tienen la forma $a+b\omega,$ donde a,b son enteros y donde ω está definido mediante

$$\omega=\begin{cases}\sqrt{D} & \text{si D}\equiv 2,3(mód.4)\\ \dfrac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{si D}\equiv 1(mód.4)\end{cases}$$

El anillo de los enteros $\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega : a,b\in\mathbb{Z}\}$ es un subanillo del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}[D]$. Por otra parte, $\mathbb{Z}[\omega]$ es la clausura integral de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}[D]$. En otras palabras, es el anillo de enteros $O_{\mathbb{Q}\sqrt{D}}$ de $\mathbb{Q}[D]$ y por tanto, un dominio de Dedekind.

El anillo de los racionales $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]=\{a+b\sqrt{D} : a,b\in\mathbb{Q}\}$ es un cuerpo cuadrático $K=\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ donde D es un número racional que no es cuadrado perfecto en $\mathbb{Q}$, pero que puede representar algunos de los elementos de un polinomio, como una raíz $r = a + b\sqrt{D}$ o un discriminante $D = b^2 - 4c$.

Enteros de Gauss de la forma $4k+1$ recogidos en la secuencia http://oeis.org/A002144.

2,5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,101,109,113,137,149,157,173,181,193,197,229,233,241,257,269,277,281,
293,313,317,337,349,353,373,389,397,401,409,421,433,449,457,461,509,521,541,557,569,577,593,601,613,
617,641,653,661,673,677,701,709,733,757,761,769,773,797,809,821,829,853,857,877,881,929,937,941,953,
977,997,1009,1013,1021,1033,1049,1061,1069,1093,1097,1109,1117,1129,1153,1181,1193,1201,1213,1217,
1229,1237,1249,1277,1289,1297,1301,1321,1361,1373,1381,1409,1429,1433,1453,1481,1489,1493,1549,1553,
1597,1601,1609,1613,1621,1637,1657,1669,1693,1697,1709,1721,1733,1741,1753,1777,1789,1801,1861,1873,
1877,1889,1901,1913,1933,1949,1973,1993,...

Primos de Gauss de la forma $4k+3$ recogidos en la secuencia http://oeis.org/A002145.

3,7,11,19,23,31,43,47,59,67,71,79,83,103,107,127,131,139,151,163,167,179,191,199,211,223,227,239,251,
263,271,283,307,311,331,347,359,367,379,383,419,431,439,443,463,467,479,487,491,499,503,523,547,563,
571,587,599,607,619,631,643,647,659,683,691,719,727,739,743,751,787,811,823,827,839,859,863,883,887,
907,911,919,947,967,971,983,991,1019,1031,1039,1051,1063,1087,1091,1103,1123,1151,1163,1171,1187,
1223,1231,1259,1279,1283,1291,1303,1307,1319,1327,1367,1399,1423,1427,1439,1447,1451,1459,1471,
1483,1487,1499,1511,1523,1531,1543,1559,1567,1571,1579,1583,1607,1619,1627,1663,1667,1699,1723,
1747,1759,1783,1787,1811,1823,1831,1847,1867,1871,1879,...

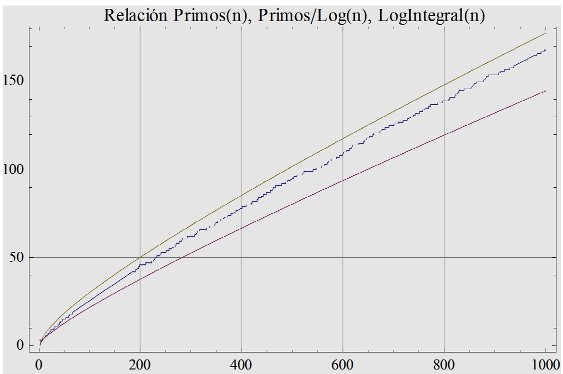
2.2 Enteros de Eisenstein

Los enteros de Eisenstein, llamados así por Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), son números complejos de la forma $z = a + b\omega$ donde a, b son números enteros donde la raíz cúbica de la unidad compleja es $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2 = e^{2\pi i/3}$. Estos enteros forman un anillo conmutativo sobre el cuerpo $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$. También forma un dominio euclídeo. Para demostrar que los enteros de Eisenstein son algebraicos, basta con saber que cada $z = a + b\omega$ es una raíz del polinomio mónico $z^2 - (2a-b)z + (a^2 - ab + b^2)$, ya que ω satisface la ecuación $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Los primos de Eisenstein, de la forma $3k-1$, están recogidos en la secuencia http://oeis.org/A003627.

2,5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,191,197,227,233,239,251,
257,263,269,281,293,311,317,347,353,359,383,389,401,419,431,443,449,461,467,479,491,503,509,521,
557,563,569,587,593,599,617,641,647,653,659,677,683,701,719,743,761,773,797,809,821,827,839,857,
863,881,887,911,929,941,947,953,971,977,983,1013,1019,1031,1049,1061,1091,1097,1103,1109,1151,
1163,1181,1187,1193,1217,1223,1229,1259,1277,1283,1289,1301,1307,1319,1361,1367,1373,1409,
1427,1433,1439,1451,1481,1487,1493,1499,1511,1523,1553,1559,1571,1583,1601, 1607,1613,1619,
1637,1667,1697,1709,1721,1733,1787,1811,1823,1847,1871,1877,1889,1901,1907,1913,1931,1949,
1973,1979,1997,2003,2027,2039,2063,2069,2081,...

El crecimiento de los números primos respecto a los números naturales lo vemos en el siguiente gráfico



3. Números Libres de Cuadrados.

3.1 Definición

Un entero positivo se dice que es Libre de Cuadrados si no lo divide ningún cuadrado perfecto. Formalmente, n será Libre de Cuadrados si no existe m tal que m^2 divida a n. En la factorización única de primos, podemos comprobar que los números Libres de Cuadrados no admiten dos veces un mismo factor primo, esto es, si p es un primo que divide a un entero n, Libre de Cuadrados, entonces p^2 no puede dividir a n. Tampoco a ninguna otra potencia de p. En resumen, si p divide a n entonces p^a no divide a n para ningún valor de $a \geq 2$. En definitiva, n será un número Libre de Cuadrados si y sólo si $n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ son primos distintos.

3.2 Números que SI son Libres de Cuadrados

Por la secuencia http://oeis.org/A005117 sabemos que algunos de los números Libres de Cuadrados son

2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,34,35,37,38,39,41,42,43,46,47, 51,53,55,57,58,59,61,62,65,66,67,69,70,71,73,74,77,78,79,82,83,85,86,87,89,91,93,94, 95,97,101,102,103,105,106,107,109,110,111,113,114,115,118,119,122,123,127,129,130, 131,133,134,137,138,139,141,142,143,145,146,149,151,154,155,157,158,159,161,163, 165,166,167,170,173,174,177,178,179,181,182,183,185,186,187,190,191,193,194, 195,197,199,...

Todos estos números son primos o producto de dos o más primos, pero no tienen ningún factor primo repetido.

Para obtener esta secuencia podemos utilizar $\mathrm{Select[Range[200],SquareFreeQ]}$ a través de WolframAlpha.

3.3 Números que NO son Libres de Cuadrados

Por la secuencia http://oeis.org/A013929 sabemos que No son Libres de Cuadrados los números

4,8,9,12,16,18,20,24,25,27,28,32,36,40,44,45,48,49,50,52,54,56,60,63,64,68,72,75, 76,80,81,84,88,90,92,96,98,99,100,104,108,112,116,117,120,121,124,125,126,128, 132,135,136,140,144,147,148,150,152,153,156,160,162,164,168,169,171,172,175, 176,180,184,188,189,192,196,198,200,...

Todos estos números o son cuadrados o producto de un cuadrado con uno o varios primos.

Para el cálculo de la secuencia $Union[Flatten[Table[ni^2,\{i,2,20\},\{n,1,400/i^2\}]]]$ podemos utilizar de WolframAlpha.

3.4 Números Primos de una secuencia

Por la secuencia http://oeis.org/A000027, el conjunto de números naturales resulta

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30, 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57, 58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84, 85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,...

de estos números, son primos 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83, 89,97, que se obtienen mediante la secuencia http://oeis.org/A000040, o bien, utilizando la función Select[Range[100],PrimeQ[#]&] a través del programa WolframAlpha.

4. Límites de los números Libres de Cuadrados

4.1 Preliminares: Funciones Multiplicativas

Aparte de la factorización, no existe ningún algoritmo polinómico conocido para reconocer si un número es Libre o No Libre de Cuadrados. De hecho este problema es uno más de los muchos que en teoría de números está pendiente de resolver. No obstante, existen las funciones multiplicativas de Möbius o de Liouville que vienen a cubrir, en parte, este problema.

La función de Möbius, en honor al matemático y astrónomo alemán August Ferdinand Möbius (1790,1868), se denota como $\mu(n)$ y se define para todos los enteros positivos n como sigue:

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & si\ n=1 \\ (-1)^k & si\ n\ es\ producto\ de\ k\ primos\ distintos \\ 0 & si\ n\ es\ divisible\ por\ el\ cuadrado\ de\ alg\acute{u}n\ primo \end{cases}$$

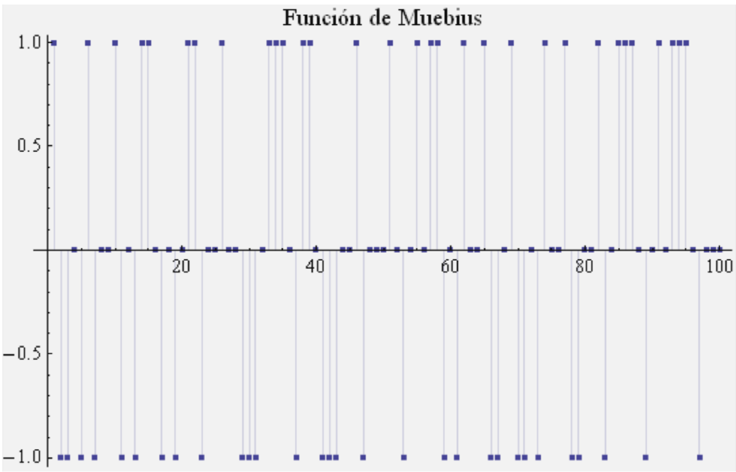
http://mathworld.wolfram.com/Squarefree.html

Por ejemplo, para

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	0

denota que si son primos {2,3,5,7,11,13,17,19}, la notación es -1; si son compuestos {6,10,14,15}, la notación es 1, y si son cuadrados o compuestos con repetición de algún factor primo {4,8,9,12,16,18,20}, la notación es 0.

En el siguiente gráfico vemos la evolución de esta función.



Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_M%C3%B6bius.

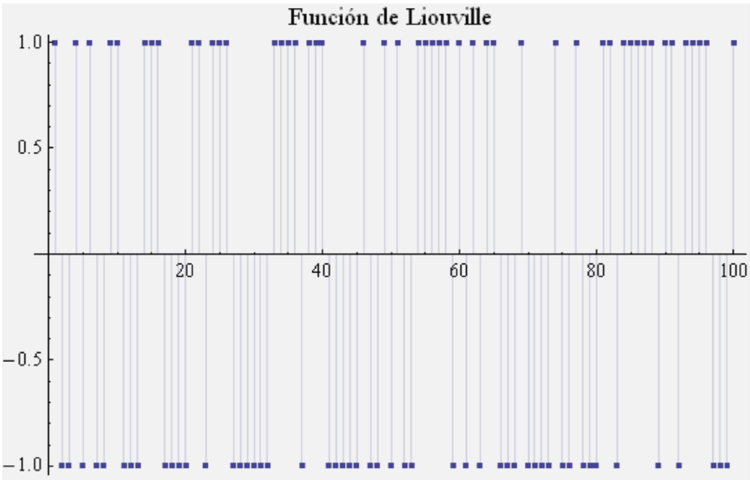
La función de Liouville, en honor al matemático francés Joseph Liouville (1809-1882), se denota como $\lambda(n)$, y para todo entero positivo, se define como $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ donde $\Omega(n)$ es el número de factores primos de n. El número 1 no tiene factores primos, así $\Omega(1)=0$ y por tanto $\lambda(1)=1$. Además, $\lambda^{-1}(n)=|\mu(n)|$ es el valor absoluto de la función Möbius.

Por ejemplo, comparándola con la función Möbius, obtenemos

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	0
$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

donde los números primos se denotan como -1 y el resto como 1.
Ver http://hojamat.es/parra/funesp.pdf

En el siguiente gráfico vemos la evolución de esta función.



Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Liouville

4.2 La función $Q[x]$ y la identificación de los números Libres de Cuadrados

Sea $Q(n)=1$ donde n es un número Libre de Cuadrados y sea $Q(n)=0$ donde n No es Libre de Cuadrados de manera que $Q(n)=\mu(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\varsigma(s)}$$

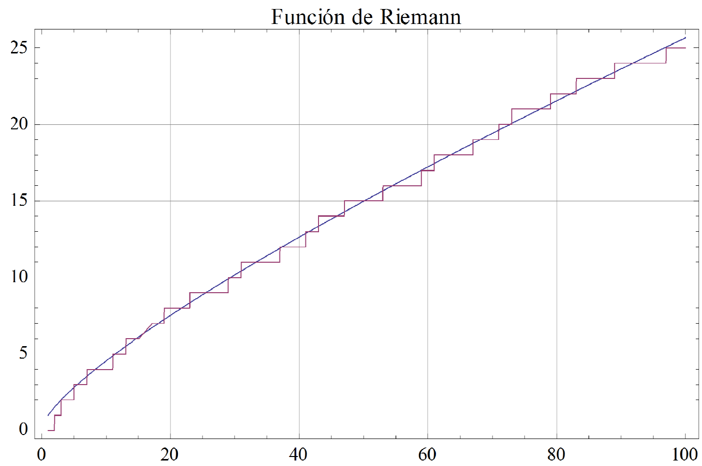
donde, para $s>1$, $\varsigma(s)$ es la función Zeta de Riemann.
Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_zeta_de_Riemann.

Para la comprobación puntual de si un número es o no es Libre de Cuadrados, mediante el programa WolframAlpha, podemos utilizar algunas funciones o programas, como

La función $MoebiusMu[97^2+1]=-1$, que significa que $97^2+1=2\times5\times941$ es compuesto y Libre de Cuadrados.

La función $SquareFreeQ[97^2+1]=True$, que devuelve True si es Libre de Cuadrados o False si no lo es.

La evolución de la función Zeta la encontramos en el siguiente gráfico



4.3 Distribución y límite de los números Libres de Cuadrados

Por el apartado anterior sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\varsigma(s)}$. Aplicando el producto de Euler, $\frac{1}{\varsigma(s)}\prod_p(1+1/p^s)=\frac{1}{\varsigma(s)}\prod_p\frac{(1-p^{-2s})}{(1-p^{-s}}=\prod_p(1+p^{-s})=\frac{1}{\varsigma(2s)}$. Cuando $s>1$, por la función Zeta de Riemann $\frac{1}{\varsigma(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, y por la función de Möbius $\frac{1}{\varsigma(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$, entonces

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n^2}-\frac{6}{\pi^2}\right|=\left|\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n^2}\right|<\sum_{n\le x}\frac{1}{n^2}<<\frac{1}{x}$$

de tal forma que $Q(x)=\frac{x}{\varsigma(2)}+0(\sqrt{x})=\frac{6x}{\pi^2}+0(\sqrt{x})$.

Bajo la hipótesis de Riemann, el término error se puede reducir a

$$Q(x)=\frac{x}{\varsigma(2)}+0(x^{17/54+\varepsilon})=\frac{6x}{\pi^2}+0(x^{17/54+\varepsilon})$$

y el límite de densidad de los números Libres de Cuadrados a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q(x)}{x}=\frac{6}{\pi^2}=\frac{1}{\varsigma(2)}$$

donde ς es la función Riemann y $1/\varsigma((2)$ es aproximadamente $0,6079271018540...$, luego más de $3/5$ de los números enteros son Libres de Cuadrados. Del mismo modo, si $Q(x,n)$ denota el número de n enteros libres, se puede demostrar que

$$Q(x,n)=\frac{x}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}}+0(\sqrt[n]{x})=\frac{x}{\varsigma(n)}+0(\sqrt[n]{x})$$

Ver la secuencia http://oeis.org/A158819
Ver http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/papers/allahabad2003.pdf

4.4 La probabilidad de que dos enteros positivos sean relativamente primos es, $6/\pi^2$

En su obra Elementary Methods in Number Theory, el profesor Melvyn B. Nathanson, bajo el número 6.22 plantea el siguiente teorema: La probabilidad de que dos enteros positivos relativamente primos entre sí, es $6/\pi^2$. Sea $N \geq 1$, donde el número de pares ordenados de enteros positivos (m,n), $1 \leq m \leq n \leq N$, es $N + \binom{N}{2} = N(N+1)/2$. El número de enteros positivos $m \leq n$ que son relativamente primos es $\varphi(n)$, donde el número de pares de enteros positivos (m,n) resulta

$$\sum_{n \leq N} \varphi(n) = \frac{3N^2}{\pi^2} + 0(N \log N)$$

por lo tanto, la frecuencia de pares relativamente primos de números enteros positivos que no excedan de N resulta

$$\frac{\frac{3N^2}{\pi^2} + 0(N \log N)}{N(N+1)/2} = \frac{6N}{\pi^2 (N+1)} \cong \frac{6}{\pi^2} + 0\left(\frac{\log N}{N}\right) \to \frac{6}{\pi^2} \text{ y } N \to \infty,$$

siendo el valor de $\dfrac{6N}{\pi^2 (N+1)} = 0,6079271079332...$ cuando $N = 100.000.000.$

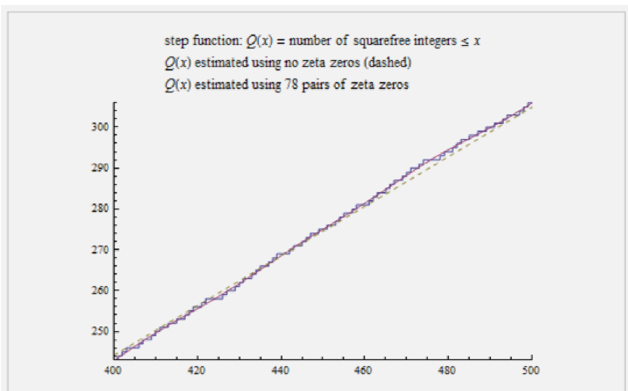
$\varphi(n)$ es la función Phi de Euler.

4.5 La demostración de Wolfram para función $Q(x)$ de los números Libres de Cuadrados

La Organización Wolfram Research, creadores de los programas Mathematicas y WolframAlpha, así como MathWorld, que es la web de recursos matemáticos más extensa y completa que hay en el panorama de Internet, a partir de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$, con ceros de Zeta, cuenta los enteros libres de cuadrados generados por la ecuación

$$Q(x) \simeq 1 + \frac{6x}{\pi^2} + 2\Re\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{x^{\frac{\rho_k}{2}} \zeta\left(\frac{\rho_k}{2}\right)}{\rho_k \zeta'(\rho_k)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-\frac{2k}{2}} \zeta\left(-\frac{2k}{2}\right)}{(-2k)\zeta'(-2k)}$$

con una valoración de $Q(x)$ bastante aceptable y cuya evolución podemos ver en el gráfico siguiente



Para un estudio más evolucionado, ver el PDF del siguiente enlace, que está relacionado con el tema. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf

5. Generadores

5.1 Concepto de Generador de números Libres Cuadrados

Aunque la palabra "generador" es frecuente en teoría de números para definir grupos de números que tengan alguna afinidad, no es menos cierto que "criba" sería más apropiada, ya que se trata de "cribar" y agrupar en función de determinadas características. La definición de criba es "selección que se efectúa entre varias cosas o personas para separar las que se consideran buenas o apropiadas para algo de las que no lo son". El matemático Eratóstenes (276-194 a.C.), utilizó el método de criba para separar los números primos de los compuestos. Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Criba_de_Erat%C3%B3stenes.

Por ejemplo, del conjunto de los 100 primeros números naturales

Clase	N	Números de la forma $n=k-1, k\geq 2$
Secuencia	100	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,...
Primos	25	2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,...
Libres	61	1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,34,35,37,38,39,41,42,43,46,47,51,53,55,57,58,59,61,62,65,66,67,69,70,71,73,74,77,78,79,82,83,85,86,87,89,91,93,94,95,97,...
No Libres	39	4,8,9,12,16,18,20,24,25,27,28,32,36,40,44,45,48,49,50,52,54,56,60,63,64,68,72,75,76,80,81,84,88,90,92,96,98,99,100,...

donde el conteo de N se ha efectuado mediante funciones a través de WolframAlpha:

$$\text{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],1]}=31$$

$$\text{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],-1]}=30$$

$$\text{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],0]}=39$$

La relación $Libres/Secuencia = 61/100 = 0,61$ es parecida a $6/\pi^2 = 0,607927...$

El cuadro siguiente recoge la evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n=k-1, k\geq 2$				
Secuencia	1000	10000	100000	1000000	10000000
Libres	608	6083	60794	607926	6079291
No Libres	392	3917	39206	392064	3920709

5.2 Números de la forma $2k+1$

Primos Impares recogidos en la secuencia http://oeis.org/A005408.

Clase	N	Números de la forma $n=2k+1$
Secuencia	100	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53,55,57,59,61,63,65,67,69,71,73,75,77,79,81,83,85,87,89,91,93,95,97,99,101,103,105,107,109,111,113,115,117,119,121,123,125,127,129,131,133,135,137,139,141,143,145,147,149,151,153,155,157,159,161,163,165,167,169,171,173,175,177,179,181,183,185,187,189,191,193,195,197,199,201,...
Primos	45	3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199,...
Libres	81	3,5,7,11,13,15,17,19,21,23,29,31,33,35,37,39,41,43,47,51,53,55,57,59,61,65,67,69,71,73,77,79,83,85,87,89,91,93,95,97,101,103,105,107,109,111,113,115,119,123,127,129,131,133,137,139,141,143,145,149,151,155,157,159,161,163,165,167,173,177,179,181,183,185,187,191,193,195,197,199,201,...
No Libres	19	9,25,27,45,49,63,75,81,99,117,121,125,135,147,153,169,171,175,189,...

La relación $Libres/Secuencia = 81/100 = 0,81$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n = 2k+1$				
Secuencia	1000	10000	100000	1000000	10000000
Libres	811	8104	81054	810591	8105700
No Libres	189	1896	18946	189409	1894300

5.3. Números de la forma $3k-1$

Primos de Eisenstein recogidos en la secuencia http://oeis.org/A003627.

Clase	N	Números de la forma $n = 3k-1$
Secuencia	100	2,5,8,11,14,17,20,23,26,29,32,35,38,41,44,47,50,53,56,59,62,65,68,71,74,77,80,83, 86,89,92,95,98,101,104,107,110,113,116,119,122,125,128,131,134,137,140,143, 146,149,152,155,158,161,164,167,170,173,176,179,182,185,188,191,194,197,200, 203,206,209,212,215,218,221,224,227,230,233,236,239,242,245,248,251,254,257, 260,263,266,269,272,275,278,281,284,287,290,293,296,299,...
Primos	32	2,5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,191, 197,227,233,239,251,257,263,269,281,...
Libres	69	2,5,11,14,17,23,26,29,35,38,41,47,53,59,62,65,71,74,77,83,86,89,95,101,107,110, 113,119,122,131,134,137,143,146,149,155,158,161,167,170,173,179,182,185,191, 194,197,203,206,209,215,218,221,227,230,233,239,251,254,257,263,266,269,278, 281,287,290,293,299,...
No Libres	31	8,20,32,44,50,56,68,80,92,98,104,116,125,128,140,152,164,176,188,200,212,224, 236,242,245,248,260,272,275,284,296,...

La relación $Libres/Secuencia = 69/100 = 0,69$ superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n = 3k-1$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	686	6842	68391	683915
No Libres	314	3158	31609	316085

5.4 Números de la forma $4k+1$

Números recogidos en la secuencia http://oeis.org/A016813. Como primos Pitagóricos los encontramos en la secuencia http://oeis.org/A002144.

Clase	N	Números de la forma $n = 4k+1$
Secuencia	100	5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45,49,53,57,61,65,69,73,77,81,85,89,93,97,101,105, 109,113,117,121,125,129,133,137,141,145,149,153,157,161,165,169,173,177,181, 185,189,193,197,201,205,209,213,217,221,225,229,233,237,241,245,249,253,257, 261,265,269,273,277,281,285,289,293,297,301,305,309,313,317,321,325,329,333, 337,341,345,349,353,357,361,365,369,373,377,381,385,389,393,397,401,...
Primos	38	5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,101,109,113,137,149,157,173,181,193,197,229, 233,241,257,269,277,281,293,313,317,337,349,353,373,389,397,401,...
Libres	80	5,13,17,21,29,33,37,41,53,57,61,65,69,73,77,85,89,93,97,101,105,109,113,129, 133,137,141,145,149,157,161,165,173,177,181,185,193,197,201,205,209,213, 217,221,229,233,237,241,249,253,257,265,269,273,277,281,285,293,301,305, 309,313,317,321,329,337,341,345,349,353,357,365,373,377,381,385,389,393, 397,401,...
No Libres	20	9,25,45,49,81,117,121,125,153,169,189,225,245,261,289,297,325,333,361,369,...

La relación $Libres/Secuencia = 80/100 = 0,80$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n = 4k+1$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	809	8099	81046	810567
No Libres	191	1901	18954	189433

5.5 Números de la forma $4k+3$

Números recogidos en la secuencia http://oeis.org/A004767. Como primos aparecen en la secuencia http://oeis.org/A002145.

Clase	N	Números de la forma $n = 4k+3$
Secuencia	100	7,11,15,19,23,27,31,35,39,43,47,51,55,59,63,67,71,75,79,83,87,91,95,99,103,107, 111,115,119,123,127,131,135,139,143,147,151,155,159,163,167,171,175,179,183, 187,191,195,199,203,207,211,215,219,223,227,231,235,239,243,247,251,255,259, 263,267,271,275,279,283,287,291,295,299,303,307,311,315,319,323,327,331,335, 339,343,347,351,,355,359,363,367,371,375,379,383,387,391,395,399,403,…
Primos	39	7,11,19,23,31,43,47,59,67,71,79,83,103,107,127,131,139,151,163,167,179,191, 199,211,223,227,239,251,263,271,283,307,311,331,347,359,367,379,383,…
Libres	82	7,11,15,19,23,31,35,39,43,47,51,55,59,67,71,79,83,87,91,95,103,107,111,115,119, 123,127,131,139,143,151,155,159,163,167,179,183,187,191,195,199,203,211,215, 219,223,227,231,235,239,247,251,255,259,263,267,271,283,287,291,295,299,303, 307,311,319,323,327,331,335,339,347,355,359,367,371,379,383,391,395,399,403
No Libres	18	27,63,75,99,135,147,171,175,207,243,275,279,315,343,351,363,375,387,…

La relación $Libres/Secuencia = 82/100 = 0,82$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927\ldots$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n = 4k+3$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	813	8107	81065	810578
No Libres	187	1893	18935	189422

5.6 Números de la forma $6k+1$

Números publicados en la secuencia http://oeis.org/A016921. Como primos se recogen en la secuencia http://oeis.org/A002476.

Clase	N	Números de la forma $n = 6k+1$
Secuencia	100	7,13,19,25,31,37,43,49,55,61,67,73,79,85,91,97,103,109,115,121,127,133,139, 145,151,157,163,169,175,181,187,193,199,205,211,217,223,229,235,241,247, 253,259,265,271,277,283,289,295,301,307,313,319,325,331,337,343,349,355, 361,367,373,379,385,391,397,403,409,415,421,427,433,439,445,451,457,463, 469,475,481,487,493,499,505,511,517,523,529,535,541,547,553,559,565,571, 577,583,589,595,601,…
Primos	36	7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97,103,109,127,139,151,157,163,181,193,199,211, 223,229,241,271,277,283,307,313,331,337,349,367,373,379,397,409,421,433,439, 457,463,487,499,523,541,547,571,577,601,…
Libres	89	7,13,19,31,37,43,55,61,67,73,79,85,91,97,103,109,115,127,133,139,145,151,157, 163,181,187,193,199,205,211,217,223,229,235,241,247,253,259,265,271,277,283, 295,301,307,313,319,331,337,349,355,367,373,379,385,391,397,403,409,415,421, 427,433,439,445,451,457,463,469,481,487,493,499,505,511,517,523,535,541,547, 553,559,565,571,577,583,589,595,601,…
No Libres	11	25,49,121,169,175,289,325,343,361,475,529,…

La relación $Libres/Secuencia = 89/100 = 0,89$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927\ldots$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n = 6k+1$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	906	9109	91169	911864
No Libres	94	891	8831	88136

5.7 Números de la forma $6k+5$

Números publicados en la secuencia http://oeis.org/A016969. Como primos se recogen en la secuencia http://oeis.org/A007528.

Clase	N	Números de la forma $n=6k+5$
Secuencia	100	5,11,17,23,29,35,41,47,53,59,65,71,77,83,89,95,101,107,113,119,125,131,137,143,149,155,161,167,173,179,185,191,197,203,209,215,221,227,233,239,245,251,257,263,269,275,281,287,293,299,305,311,317,323,329,335,341,347,353,359,365,371,377,383,389,395,401,407,413,419,425,431,437,443,449,455,461,467,473,479,485,491,497,503,509,515,521,527,533,539,545,551,557,563,569,575,581,587,593,599,...
Primos	57	5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,191,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,317,347,353,359,383,389,401,419,431,443,449,461,467,479,491,503,509,521,557,563,569,587,593,599,...
Libres	93	5, 11,17,23,29,35,41,47,53,59,65,71,77,83,89,95,101,107,113,119,131,137,143,149,155,161,167,173,179,185,191,197,203,209,215,221,227,233,239,251,257,263,269,281,287,293,299,305,311,317,323,329,335,341,347,353,359,365,371,377,383,389,395,401,407,413,419,431,437,443,449,455,461,467,473,479,485,491,497,503,509,515,521,527,533,545,551,557,563,569,581,587,593,599,...
No Libres	7	125,245,275,425,539,575,605,...

La relación $Libres/Secuencia = 93/100 = 0,93$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n=6k+5$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	917	9126	91210	911908
No Libres	83	874	8790	88092

5.8 Números de la forma n^2-2

Números recogidos en la secuencia http://oeis.org/A008865. Como primos los encontramos en la secuencia http://oeis.org/A028871.

Clase	N	Números de la forma $(n+\sqrt{2})(n-\sqrt{2}) = n^2-2, n \geq 2$
Secuencia	100	2,7,14,23,34,47,62,79,98,119,142,167,194,223,254,287,322,359,398,439,482,527,574,623,674,727,782,839,898,959,1022,1087,1154,1223,1294,1367,1442,1519,1598,1679,1762,1847,1934,2023,2114,2207,2302,2399,2498,2599,2702,2807,2914,3023,3134,3247,3362,3479,3598,3719,3842,3967,4094,4223,4354,4487,4622,4759,4898,5039,5182,5327,5474,5623,5774,5927,6082,6239,6398,6559,6722,6887,7054,7223,7394,7567,7742,7919,8098,8279,8462,8647,8834,9023,9214,9407,9602,9799,9998,10199,...
Primos	27	2,7,23,47,79,167,223,359,439,727,839,1087,1223,1367,1847,2207,2399,3023,3719,3967,4759,5039,5623,5927,7919,8647,10607,...
Libres	94	2,7,14,23,34,47,62,79,119,142,167,194,223,254,287,322,359,398,439,482,527,574,623,674,727,782,839,898,959,1022,1087,1154,1223,1294,1367,1442,1598,1679,1762,1847,1934,2114,2207,2302,2399,2498,2599,2702,2807,2914,3023,3134,3247,3598,3719,3842,3967,4094,4223,4354,4487,4622,4759,4898,5039,5182,5327,5474,5623,5774,5927,6082,6239,6398,6559,6722,6887,7054,7223,7394,7567,7919,8098,8279,8462,8647,8834,9023,9214,9407,9602,9799,9998
No Libres	6	98,1519,2023,3362,3479,7742,...

La relación $Libres/Secuencia = 94/100 = 0,94$ muy superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$
Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n=k^2-2, k \geq 2$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	939	9419	94210	941955
No Libres	61	581	5790	58045

5.9 Números de la forma n^2+2

Números recogidos en la secuencia http://oeis.org/A059100. Los primos de esta secuencia vienen determinados por http://oeis.org/A061725.

Clase	N	Números de la forma $(n+\sqrt{-2})(n-\sqrt{-2})=n^2+2$
Secuencia	100	3,6,11,18,27,38,51,66,83,102,123,146,171,198,227,258,291,326,363,402, 443,486,531,578,627,678,731,786,843,902,963,1026,1091,1158,1227,1298, 1371,1446,1523,1602,1683,1766,1851,1938,2027,2118,2211,2306,2403,2502, 2603,2706,2811,2918,3027,3138,3251,3366,3483,3602,3723,3846,3971,4098 ,4227,4358,4491,4626,4763,4902,5043,5186,5331,5478,5627,5778,5931,6086, 6243,6402,6563,6726,6891,7058,7227,7398,7571,7746,7923,8102,8283,8466, 8651,8838,9027,9218,9411,9606,9803,10002,...
Primos	11	3,11,83,227,443,1091,1523,2027,3251,6563,9803,...
Libres	74	3,6,11,38,51,66,83,102,123,146,227,258,291,326,402,443,627,678,731,786,843, 902,1091,1158,1227,1298,1371,1446,1523,1766,1851,1938,2027,2118,2211,2306, 2603,2706,2811,2918,3027,3138,3251,3602,3723,3846,4098,4227,4358,4763,4902, 5186,5331,5478,5627,6086,6243,6402,6563,6726,6891,7058,7571,7746,7923,8102, 8283,8466,8651,9218,9411,9606,9803,10002,...
No Libres	26	18,27,171,198,363,486,531,578,963,1026,1602,1683,2403,2502,3366,3483,3971, 4491,4626,5043,5778,5931,7227,7398,8838,9027,...

La relación $Libres/Secuencia = 74/100 = 0,74$ superior a $6/\pi^2 = 0,607927...$

Evolución de esta secuencia:

Clase	Números de la forma $n=k^2+2$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	749	7510	75084	750865
No Libres	251	2490	24916	249135

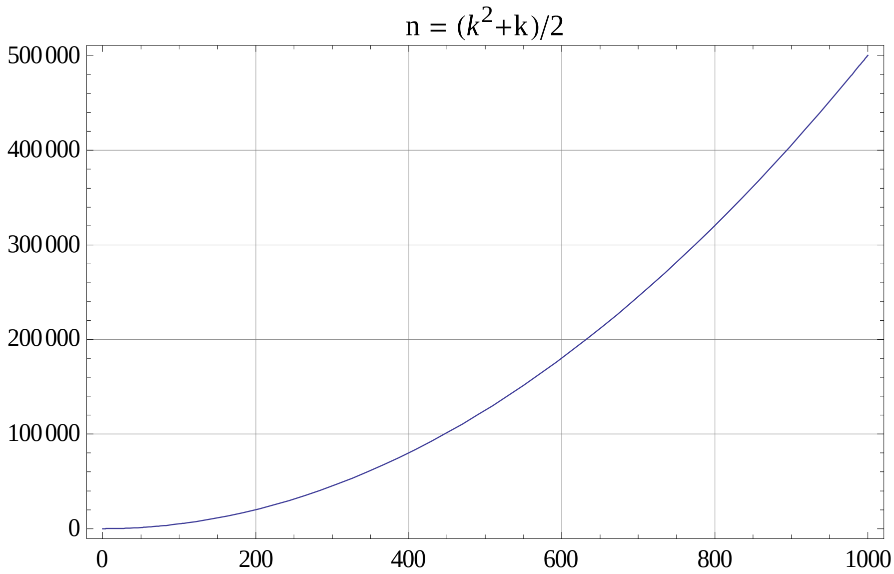
5.10 Números de la forma $n(n+1)/2$

Números Triangulares recogidos en la secuencia http://oeis.org/A000217. Ver formación en http://pedrocastroortega.es/matematicas/docs/mm/num_triang/index.html.

Clase	N	Números de la forma $n=k(k+1)/2=(k^2+k)/2$
Secuencia	100	3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120,136,153,171,190,210,231,253,276, 300,325,351,378,406,435,465,496,528,561,595,630,666,703,741,780,820,861,903, 946,990,1035,1081,1128,1176,1225,1275,1326,1378,1431,1485,1540,1596,1653, 1711,1770,1830,1891,1953,2016,2080,2145,2211,2278,2346,2415,2485,2556,2628, 2701,2775,2850,2926,3003,3081,3160,3240,3321,3403,3486,3570,3655,3741,3828, 3916,4005,4095,4186,4278,4371,4465,4560,4656,4753,4851,4950,5050,5151,...
Primos	1	3,...
Libres	52	3,6,10,15,21,55,66,78,91,105,190,210,231,253,406,435,465,561,595,703,741,861, 903,946,1081,1326,1378,1653,1711,1770,1830,1891,2145,2211,2278,2346,2415, 2485,2701,2926,3003,3081,3403,3486,3570,3655,3741,4186,4278,4371,4465,5151,...
No Libres	48	28,36,45,120,136,153,171,276,300,325,351,378,496,528,630,666,780,820,990,1035, 1128,1176,1225,1275,1431,1485,1540,1596,1953,2016,2080,2556,2628,2775,2850, 3160,3240,3321,3828,3916,4005,4095,4560,4656,4753,4851,4950,5050...

La relación $Libres/Secuencia = 52/100 = 0,52$ inferior a $6/\pi^2 = 0,607927...$

Evolución de esta secuencia mediante gráfico



5.11 Números de la forma $(p_1 + p_2 + ... + p_k)/k$

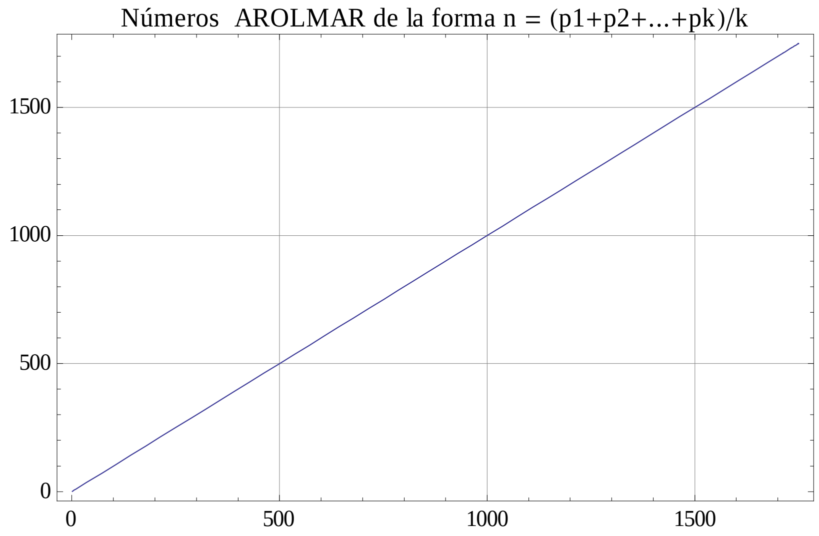
Números Arolmar recogidos en la secuencia http://oeis.org/A187073. Los asociados a estos números los recoge la secuencia http://oeis.org/A191683.

Clase	N	Números de la forma $n = (p_1 + p_2 + ... + p_k)/k$
Secuencia	100	21,33,57,69,85,93,105,129,133,145,177,195,205,213,217,231,237,249,253,265, 309,393,417,445,465,469,483,489,493,505,517,553,565,573,597,609,627,633, 645,663,669,685,697,753,781,793,813,817,861,865,889,897,913,915,933,935, 949,969,973,985,987,993,1057,1077,1137,1149,1177,1185,1221,1239,1257,1265, 1273,1285,1329,1333,1345,1357,1365,1389,1393,1417,1419,1437,1441,1465,1477, 1497,1513,1537,1545,1569,1581,1599,1633,1653,1689,1717,1729,1743
Primos	0	
Libres	100	21,33,57,69,85,93,105,129,133,145,177,195,205,213,217,231,237,249,253,265, 309,393,417,445,465,469,483,489,493,505,517,553,565,573,597,609,627,633, 645,663,669,685,697,753,781,793,813,817,861,865,889,897,913,915,933,935, 949,969,973,985,987,993,1057,1077,1137,1149,1177,1185,1221,1239,1257,1265, 1273,1285,1329,1333,1345,1357,1365,1389,1393,1417,1419,1437,1441,1465, 1477,1497,1513,1537,1545,1569,1581,1599,1633,1653,1689,1717,1729,1743,...
No Libres	0	

La relación $Libres/Secuencia = 100/100 = 1,$ máxima con relación a $6/\pi^2 = 0,607927...$

Estos números, descubiertos por el profesor español Antonio Roldán Martínez, tienen la particularidad de que, al ser media aritmética de suma de primos, son totalmente libres de cuadrados, lo que les hace idóneos para su utilización en criptosistemas.
Ver http://hojamat.es/parra/arolmar.pdf.

Evolución de esta secuencia mediante el gráfico siguiente



5.12 Números de la forma n^2+1

Números recogidos en la secuencia http://oeis.org/A002522. Como primos publicados en la secuencia http://oeis.org/A002496.

Clase	N	Números de la forma $(n+\sqrt{-1})(n-\sqrt{-1})=n^2+1$
Secuencia	100	2,5,10,17,26,37,50,65,82,101,122,145,170,197,226,257,290,325,362,401,442, 485,530,577,626,677,730,785,842,901,962,1025,1090,1157,1226,1297,1370, 1445,1522,1601,1682,1765,1850,1937,2026,2117,2210,2305,2402,2501,2602, 2705,2810,2917,3026,3137,3250,3365,3482,3601,3722,3845,3970,4097,4226, 4357,4490,4625,4762,4901,5042,5185,5330,5477,5626,5777,5930,6085,6242, 6401,6562,6725,6890,7057,7226,7397,7570,7745,7922,8101,8282,8465,8650, 8837,9026,9217,9410,9605,9802,10001,...
Primos	19	2,5,17,37,101,197,257,401,577,677,1297,1601,2917,3137,4357,5477,7057,8101, 8837,...
Libres	88	2,5,10,17,26,37,65,82,101,122,145,170,197,226,257,290,362,401,442,485,530,577, 626,677,730,785,842,901,962,1090,1157,1226,1297,1370,1522,1601,1765,1937, 2026,2117,2210,2305,2402,2501,2602,2705,2810,2917,3026,3137,3365,3482,3601, 3722,3845,3970,4097,4226,4357,4490,4762,5042,5185,5330,5477,5626,5777,5930, 6085,6242,6401,6562,6890,7057,7226,7397,7570,7745,7922,8101,8282,8465,8837, 9026,9217,9410,9605,10001,...
No Libres	12	50,325,1025,1445,1682,1850,3250,4625,4901,6725,8650,9802,...

La relación $Libres/Secuencia = 88/100 = 0{,}88$ muy superior a $6/\pi^2 = 0{,}607927...$
Evolución de esta secuencia:

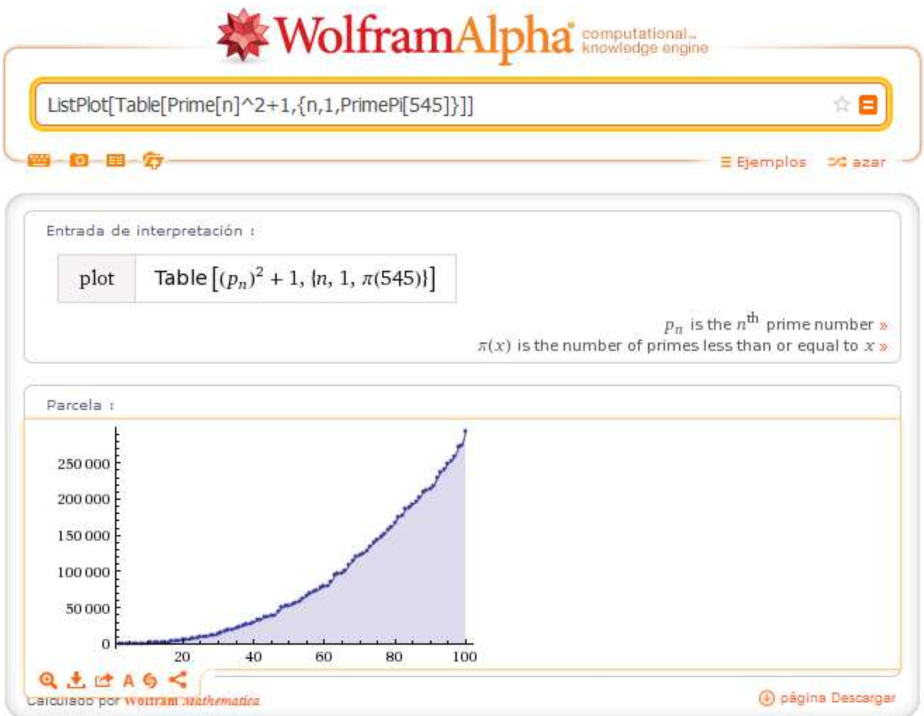
Clase	Números de la forma $n=k^2+1$			
Secuencia	1000	10000	100000	1000000
Libres	895	8952	89489	894856
No Libres	105	1048	10511	105144

5.13 Números de la forma $p^2+1, p \in P$

Estos números tienen la característica de que la base p es un número primo. Los que son Libres de Cuadrados los recoge la secuencia http://oeis.org/A225856, los No Libres de Cuadrados la secuencia http://oeis.org/A224718.

Clase	N	Números de la forma $(p+\sqrt{-1})(p-\sqrt{-1}) = p^2+1, p \in P$
Secuencia	100	2,5,10,26,50,122,170,290,362,530,842,962,1370,1682,1850,2210,2810,3482,3722, 4490,5042,5330,6242,6890,7922,9410,10202,10610,11450,11882,12770,16130, 17162,18770,19322,22202,22802,24650,26570,27890,29930,32042,32762,36482, 37250,38810,39602,44522,49730,51530,52442,54290,57122,58082,63002,66050, 69170,72362,73442,76730,78962,80090,85850,94250,96722,97970,100490,109562, 113570,120410,121802,124610,128882,134690,139130,143642,146690,151322, 157610,160802,167282,175562,177242,185762,187490,192722,196250,201602, 208850,212522,214370,218090,229442,237170,241082,249002,253010,259082, 271442,273530,292682,...
Primos	2	2,5,...
Libres	88	10,26,122,170,290,362,530,842,962,1370,2210,2810,3482,3722,4490,5042,5330, 6242,6890,7922,9410,10202,10610,11882,12770,16130,17162,18770,19322, 22202,22802,26570,27890,29930,32042,32762,36482,38810,39602,44522,49730, 51530,52442,54290,58082,69170,72362,73442,76730,78962,80090,96722,97970, 100490,109562,113570,120410,121802,124610,128882,134690,139130,143642, 146690,151322,157610,160802,167282,175562,177242,185762,187490,192722, 201602,212522,214370,218090,229442,237170,241082,249002,253010,259082, 271442,273530,292682,...
No Libres	12	50,325,1025,1445,1682,1850,3250,4625,4901,6725,8650,9802,...

La relación $Libres/Secuencia = 88/100 = 0,88$ muy superior $6/\pi^2 = 0,607927...$
La evolución de estos números a través de WolframAlpha, es



6 Números Libres y No Libres de Cuadrados de la forma $p^2+1, p\in P$

6.1 Números de la forma p^2+1.

Un número $p^2+1,\ p\in P,$ es de la forma $p\equiv 1(mód.4)$ y tiene como desarrollo algebraico $p^2+1=(p+i)(p-i),$ donde $p=\pm i,$ es un entero de Gauss, forman parte del anillo $\mathbb{Z}[i]$ y tienen como límite de densidad $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathbb{Q}[n]}{n}=\frac{6}{\pi^2}.$ Su característica principal es que, TODOS son de la forma $n=p^2+q^2,\ p,q\in P.$ Si $p=q,$ ó p ó q no son primos, entonces el número n no es libre de cuadrados. Esta aseveración debe tomarse con cierta cautela.

6.2 Descomposición en suma de los cuadrados primos de los primeros 100 números

En la tabla siguiente recogemos las peculiaridades de los primos de la forma $p^2+1=p^2+1^2=p^2+q^2...$ De esta lista, los únicos números que no son libre de cuadrados son $7, 41$ y $43.$

El $7^2+1=50=2\times 5^2=7^2+1^2=\boxed{5^2+5^2}$ donde la segunda suma de cuadrados la forma dos bases iguales.

El $41^2+1=1682=41^2+1^2=\boxed{29^2+29^2}$ donde la segunda igualdad la forman los cuadrados de dos primos iguales.

El $43^2+1=1850=43^2+1^2=41^2+13^2=\boxed{35^2+25^2}$ donde la tercera igualdad la forman dos cuadrados de números compuestos.

Encontramos dos excepciones entre estos números que son libres de cuadrados:

El $83^2+1=83^2+1^2=\boxed{77^2}+31^2=71^2+43^2=67^2+\boxed{49^2}$ donde 77 y 49 son números compuestos.

El $97^2+1=9410=\boxed{77^2}+59^2$ donde el 77 es un número compuesto.

Entre 100 y 1000, no son libres de cuadrados los números 107,157,193,251,257,293,307, 443,457,557,593,607,643,743,757,829,857 y 907, 18 números primos a los que les corresponde por la forma p^2+1: 11450,24650,37250,63002,66050,85850,94250,196250,208850,310250,351650, 368450,413450,552050,573050,687242,734450 y 822650. Todos estos números no son libres de cuadrados. Veamos algunas descomposiciones:

Para el $107^2+1=11450=107^2+1^2=103^2+29^2=\boxed{85^2+65^2}$ donde la última igualdad son números compuestos.

Para el $251^2+1=63002=251^2+1^2=\boxed{221^2+119^2}=\boxed{209^2+139^2}$ donde las dos últimas igualdades son números compuestos.

Para el $557^2+1=310250=557^2+1^2=\boxed{545^2+115^2}=\boxed{535^2+155^2}=\boxed{445^2+335^2}=...$ hay más representaciones con números compuestos y alguna con números primos.

Para el $643^2+1=413450=643^2+1^2=317^2+181^2=\boxed{515^2+385^2},$ dos representaciones, una con números primos y otra con números compuestos.

Para el $829^2+1=687242=829^2+1^2=809^2+181^2=601^2+571^2,...$ siguen tres representaciones con números compuestos.

Para el $907^2+1=822650=907^2+1^2=\boxed{871^2+253^2}=\boxed{725^2+545^2},$ dos representaciones con números compuestos.

Lo que queda claro es que todos los números son de la forma $p^2+1=a^2+b^2.$

Números primos menores a 100

p^2+1	N	Factores	$p^2+1^2=p^2+q^2,...$
2^2+1	5	5	2^2+1^2
3^2+1	10	2×5	3^2+1^2
5^2+1	26	2×13	5^2+1^2
7^2+1	50	2×5^2	$7^2+1^2=\boxed{5^2+5^2}$
11^2+1	122	2×61	11^2+1^2
13^2+1	170	$2\times5\times17$	$13^2+1^2=11^2+7^2$
17^2+1	290	$2\times5\times29$	$17^2+1^2=13^2+11^2$
19^2+1	362	2×181	19^2+1^2
23^2+1	530	$2\times5\times53$	$23^2+1^2=19^2+13^2$
29^2+1	842	2×421	29^2+1^2
31^2+1	962	$2\times13\times37$	$31^2+1^2=29^2+11^2$
37^2+1	1370	$2\times5\times137$	$37^2+1^2=29^2+23^2$
41^2+1	1682	2×29^2	$41^2+1^2=\boxed{29^2+29^2}$
43^2+1	1850	$2\times5^2\times37$	$43^2+1^2=41^2+13^2=\boxed{35^2+25^2}$
47^2+1	2210	$2\times5\times3\times17$	$47^2+1^2=43^2+19^2=41^2+23^2=37^2+29^2$
53^2+1	2810	$2\times5\times281$	$53^2+1^2=43^2+31^2$
59^2+1	3482	2×1741	59^2+1^2
61^2+1	3722	2×1861	61^2+1^2
67^2+1	4490	$2\times5\times449$	$67^2+1^2=53^2+41^2$
71^2+1	5042	2×2521	71^2+1^2
73^2+1	5330	$2\times5\times13\times41$	$73^2+1^2=71^2+17^2=67^2+29^2=59^2+43^2$
79^2+1	6242	2×3121	79^2+1^2
83^2+1	6890	$2\times5\times13\times53$	$83^2+1^2=\boxed{77^2}+31^2=71^2+43^2=67^2+49^2$
89^2+1	7922	$2\times17\times233$	$89^2+1^2=79^2+41^2$
97^2+1	9410	$2\times5\times941$	$97^2+1^2=\boxed{77^2}+59^2$

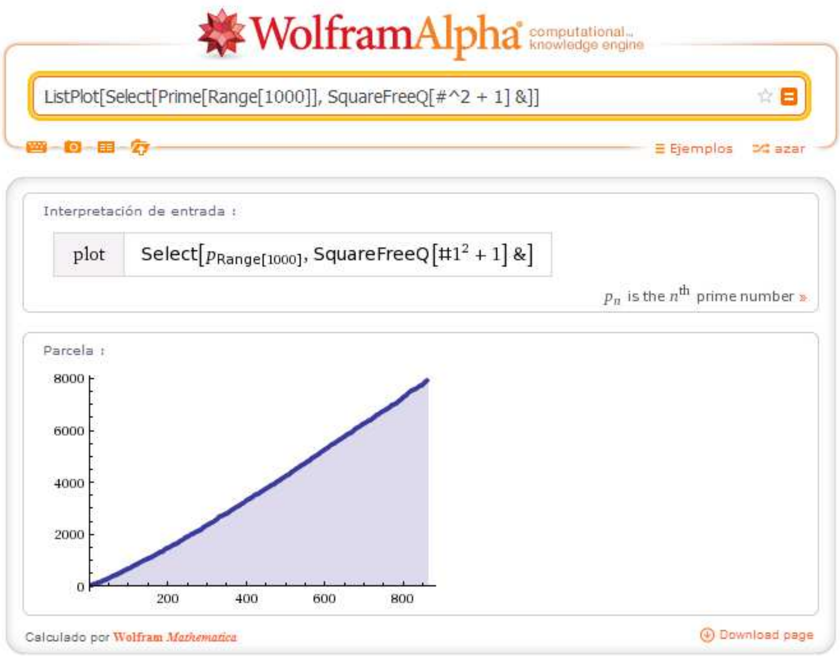
6.3 Secuencia de números Libres de Cuadrados

Como ampliación al apartado 5.13, extendemos la secuencia de los números Libres de Cuadrados hasta los 300000. Secuencia http://oeis.org/A225856.

Clase	Números primos comprendidos entre 2 y 541
100	2,3,5,11,13,17,19,23,29,31,37,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,109,113, 127,131,137,139,149,151,163,167,173,179,181,191,197,199,211,223,227,229,233, 241,263,269,271,277,281,283,311,313,317,331,337,347,349,353,359,367,373,379, 383,389,397,401,409,419,421,431,433,439,449,461,463,467,479,487,491,499,503, 509,521,523,541,...

Clase	Números de la forma $n=p^2+1,\ p\in P$
100	5,10,26,122,170,290,362,530,842,962,1370,2210,2810,3482,3722,4490,5042,5330,6242, 6890,7922,9410,10202,10610,11882,12770,16130,17162,18770,19322,22202,22802, 26570,27890,29930,32042,32762,36482,38810,39602,44522,49730,51530,52442,54290, 58082,69170,72362,73442,76730,78962,80090,96722,97970,100490,109562,113570, 120410,121802,124610,128882,134690,139130,143642,146690,151322,157610,160802, 167282,175562,177242,185762,187490,192722,201602,212522,214370,218090,229442, 237170,241082,249002,253010,259082,271442,273530,292682,...

La evolución de estos números a través de WolframAlpha, es



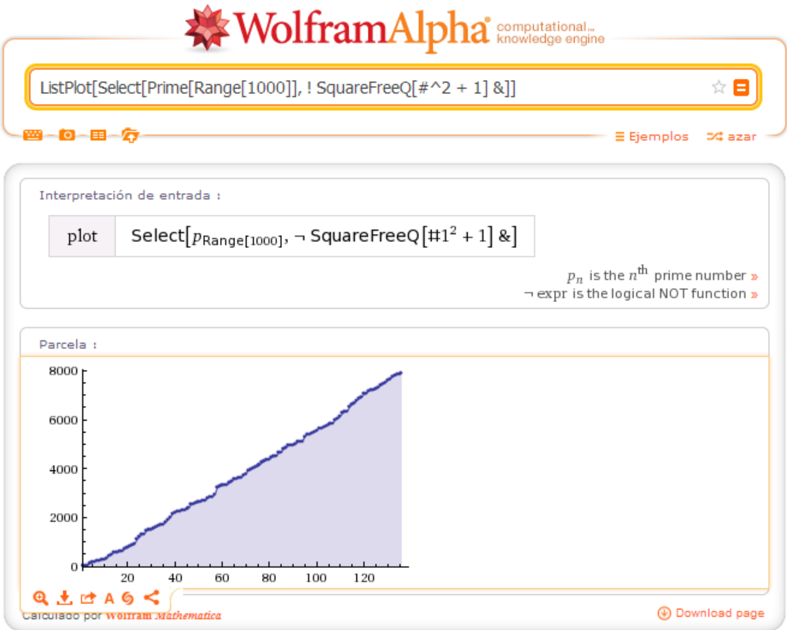
6.4 Secuencia de números No libres de Cuadrados

Como en el apartado anterior, extendemos la secuencia de los números No Libres de Cuadrados hasta los 8.000.000. Estos números se recogen en la secuencia http://oeis.org/A224718.

Clase	**Números primos comprendidos entre 7 y 2957**
55	7,41,43,107,157,193,251,257,293,307,443,457,557,593,607,643,743,757,829, 857,907,1093,1193,1303,1307,1451,1483,1493,1543,1607,1657,1693,1723,1789, 1907,1993,2143,2207,2243,2267,2293,2309,2357,2393,2543,2557,2593,2621,2657, 2693,2707,2803,2843,2857,2957,...

Clase	**Números de la forma** $n = p^2 + 1,\ p \in P$
55	50,1682,1850,11450,24650,37250,63002,66050,85850,94250,196250,208850,310250, 351650,368450,413450,552050,573050,687242,734450,822650,1194650,1423250, 1697810,1708250,2105402,2199290,2229050,2380850,2582450,2745650,2866250, 2968730,3200522,3636650,3972050,4592450,4870850,5031050,5139290,5257850, 5331482,5555450,5726450,6466850,6538250,6723650,6869642,7059650,7252250, 7327850,7856810,8082650,8162450,8743850,...

La evolución de estos números a través de WolframAlpha, es



7 Funciones Generadoras

7.1 Concepto y definición de una Función Generatriz

En matemáticas, función generadora o función generatriz es una serie formal de potencias cuyos coeficientes codifican información sobre una sucesión a_n cuyo índice corre sobre los enteros no negativos.

Hay varios tipos de funciones generadoras: funciones generadoras ordinarias, funciones generadoras exponenciales, la serie de Lambert, la serie de Bell y la serie de Dirichlet. de las cuales abajo se ofrecen definiciones y ejemplos. Cada sucesión tiene una función generadora de cierto tipo. El tipo de función generadora que es apropiada en un contexto dado depende de la naturaleza de la sucesión y los detalles del problema que se analiza.

Las funciones generadoras son expresiones cerradas en un argumento formal x. A veces, una función generadora se «evalúa» en un valor específico $x = a$ pero hay que tener en cuenta que las funciones generadoras son series formales de potencias, por lo que no se considera ni se analiza el problema de la convergencia en todos los valores de x.

Una sucesión ordinaria de una sucesión $(a_n) = a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ se define como

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_generadora.

7.2 Funciones de Dirichlet

Una función $F(s)$ definida por una serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n) n^{-s}$ se llama función generadora de los coeficientes $f(n)$. Las series de Dirichlet son útiles para funciones en una teoría multiplicativa de números en virtud de la relación $n^{-s} m^{-s} = (nm)^{-s}$. En teoría aditiva de números es más conveniente generar funciones utilizando su representación en serie de potencias $F(x) = \sum f(n) x^n$ ya que $x^n x^m = x^{n+m}$. El teorema que sigue pone de manifiesto una función generadora de la función de partición $p(n)$.

Según Euler, para $|x|<1$ tenemos $\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$ donde $p(0)=1$. En primer lugar damos una deducción formal de esta identidad, ignorando las cuestiones de convergencia, y después damos una demostración más rigurosa.

Si cada factor del producto lo desarrollamos en serie de potencias, una serie geométrica, obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=(1+x+x^2+...)(1+x^2+x^4+...)(1+x^3+x^6+...)...$$

Ahora multiplicamos las series de la derecha, tratándolas como si fuesen polinomios y agrupándolas según potencias de x a fin de obtener una serie de potencias de la forma

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}a(k)x^k$$

donde $a(k)=p(k)$. Como $x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3}...x^{mk_m}=x^k$, si $k=k_1+2k_2+3k_3+...+mk_m$ entonces

$$k=(1+1+...+1)+(2+2+...+2)+...+(m+m+...+m)$$

Ver http://www.plouffe.fr/simon/articles/FonctionsGeneratrices.pdf.

7.3 Funciones generadoras más importantes

7.3.1 Serie de los números Pares:

Serie: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54,56,58,60,62,64, 66,68,70,72,74,76,78,80,82,84,86,88,90,92,94,96,98,100,...

Función generada: $G_n[2n](x)=\frac{2x}{(x-1)^2}$.

7.3.2 Serie de los números Impares:

Serie: 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53,55,

57,59,61,63,65,67,69,71,73,75,77,79,81,83,85,87,89,91,93,95,97,99,...

Función generada: $G_n[2n-1](x)=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$.

7.3.3 Serie de los números Cuadrados:

Serie: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,441,484,529,576,625,676,

729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,...

Función generada: $G_n[n^2](x)=-\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$.

7.3.4 Serie de los números Cubos:

Serie: 1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000,1331,1728,2197,2744,3375,4096,4913,5832,6859,8000, 9261,10648,12167,13824,15625,17576,19683,21952,24389,27000,29791,32768,35937,39304,42875,...

Función generadora: $G_n[n^3](x)=\frac{x\left(x^2+4x+1\right)}{(x-1)^4}$.

7.3.5 Serie de los números Triangulares de la forma $n(n+1)/2$

Serie: 1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,120,136,153,171,190,210,231,253,276,300,325,351,378, 406,435,465,496,528,561,595,630,666,703,741,780,820,861,903,946,990,1035,1081,1128,1176,1225,1275,..

Función generadora: $G_n[n(n+1)/2](x) = -\dfrac{x}{(x-1)^3}$.

7.3.6 Serie de los números Pentagonales de la forma $n(3n-1)/2$

Serie: 1,5,12,22,35,51,70,92,117,145,176,210,247,287,330,376,425,477,532,590,651,715,782,852, 925,1001,1080,1162,1247,1335,1426,1520,1617,1717,1820,1926,2035,2147,2262,2380,2501,2625,2752,...

Función generadora: $G_n[n(3n-1)/2](x) = -\dfrac{x(2x+1)}{(x-1)^3}$.

7.3.7 Serie de los números Hexagonales de la forma $n(2n-1)$

Serie: 1,6,15,28,45,66,91,120,153,190,231,276,325,378,435,496,561,630,703,780,861,946,1035,1128, 1225,1326,1431,1540,1653,1770,1891,2016,2145,2278,2415,2556,2701,2850,3003,3160,3321,3486,3655,...

Función generadora: $G_n[n(2n-1)](x) = -\dfrac{x(3x+1)}{(x-1)^3}$.

7.3.8 Serie de los números Triangulares Centrados de la forma $(3n^2+3n+2)/2$

Serie: 4,10,19,31,46,64,85,109,136,166,199,235,274,316,361,409,460,514,571,631,694,760,829,901,976, 1054,1135,1219,1306,1396,1489,1585,1684,1786,1891,1999,2110,2224,2341,2461,2584,2710,2839,2971,3106,...

Función generadora: $G_n[(3n^2+2n+2)/2](x) = -\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$.

7.3.9 Serie de los números Pentagonales Centrados de la forma $(5(n-1)^2+5(n-1)+2)/2$

Serie: 1,6,16,31,51,76,106,141,181,226,276,331,391,456,526,601,681,766,856,951,1051,1156,1266, 1381,1501,1626,1756,1891,2031,2176,2326,2481,2641,2806,2976,3151,3331,3516,3706,3901,4101,4306,...

Función generadora: $G_n[(5(n-1)^2+5(n-1)+2)/2](x) = \dfrac{-6x^2+2x-1}{(x-1)^3}$.

7.3.10 Serie de Dirichlet de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^s} = \varsigma(s-2)$

Serie: 2^(2-s)+3^(2-s)+4^(2-s)+5^(2-s)+6^(2-s)+7^(2-s)+8^(2-s)+9^(2-s)+10^(2-s)+1,2^(2-s)+3^(2-s) +4^(2-s)+5^(2-s)+6^(2-s)+7^(2-s)+8^(2-s)+9^(2-s)+10^(2-s)+1,2^(2-s)+3^(2-s)+4^(2-s)+5^(2-s)+6^(2-s)+...

Función generadora: $G_n[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^s}](x) = \dfrac{\zeta(s-2)}{1-x}$.

Ver http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo10.pdf

7.4 Función generatriz de las secuencias generadas

7.4.1 Secuencia de la forma $n = k-1, k \geq 2$

Secuencia: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31, 32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,...

Función generatriz: $G_n[n-1](x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

7.4.2 Secuencia de la forma $n=2k+1$

Secuencia: 3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53,55,57,59, 61,63,65,67,69,71,73,75,77,79,81,83,85,87,89,91,93,95,97,99,101,..

Función generatriz: $G_n[2n+1](x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$.

7.4.3 Secuencia de la forma $n=3k-1$

Secuencia: 2,5,8,11,14,17,20,23,26,29,32,35,38,41,44,47,50,53,56,59,62,65,68,71,74,77,80,83,86,89, 92,95,98,101,104,107,110,113,116,119,122,125,128,131,134,137,140,143,146,149,...

Función generatriz: $G_n[3n-1](x)=\dfrac{4x-1}{(x-1)^2}$.

7.4.4 Secuencia de la forma $n=4k+1$

Secuencia: 5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45,49,53,57,61,65,69,73,77,81,85,89,93,97,101,105,109,113, 117,121,125,129,133,137,141,145,149,153,157,161,165,169,173,177,181,185,189,193,197,201,...

Función generatriz: $G_n[4n+1](x)=\dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$.

7.4.5 Secuencia de la forma $n=4k+3$

Secuencia: 7,11,15,19,23,27,31,35,39,43,47,51,55,59,63,67,71,75,79,83,87,91,95,99,103,107,111,115, 119,123,127,131,135,139,143,147,151,155,159,163,167,171,175,179,183,187,191,195,199,203,...

Función generatriz: $G_n[4n+3](x)=\dfrac{x+3}{(x-1)^2}$.

7.4.6 Secuencia de la forma $n=6k+1$

Secuencia: 7,13,19,25,31,37,43,49,55,61,67,73,79,85,91,97,103,109,115,121,127,133,139,145,151,157, 163,169,175,181,187,193,199,205,211,217,223,229,235,241,247,253,259,265,271,277,283,289,295,301,...

Función generatriz: $G_n[6n+1](x)=\dfrac{5x+1}{(x-1)^2}$.

7.4.7 Secuencia de la forma $n=6k+5$

Secuencia: 5,11,17,23,29,35,41,47,53,59,65,71,77,83,89,95,101,107,113,119,125,131,137,143,149,155, 161,167,173,179,185,191,197,203,209,215,221,227,233,239,245,251,257,263,269,275,281,287,293,299,...

Función generatriz: $G_n[6n+5](x)=\dfrac{x+5}{(x-1)^2}$.

7.4.8 Secuencia de la forma $n=k^2-2$

Secuencia: 2,7,14,23,34,47,62,79,98,119,142,167,194,223,254,287,322,359,398,439,482,527,574,623, 674,727,782,839,898,959,1022,1087,1154,1223,1294,1367,1442,1519,1598,1679,1762,1847,1934,2023,...

Función generatriz: $G_n[n^2-2](x)=\dfrac{x^2-5x+2}{(x-1)^3}$.

7.4.9 Secuencia de la forma $n = k^2 + 2$

Secuencia: 3,6,11,18,27,38,51,66,83,102,123,146,171,198,227,258,291,326,363,402,443,486,531,578, 627,678,731,786,843,902,963,1026,1091,1158,1227,1298,1371,1446,1523,1602,1683,1766,1851,1938,2027,...

Función generatriz: $G_n[n^2+2](x) = \dfrac{-3x^2+3x-2}{(x-1)^3}$.

7.4.10 Secuencia de la forma $n = k^2 + 1$

Secuencia: 2,5,10,17,26,37,50,65,82,101,122,145,170,197,226,257,290,325,362,401,442,485,530,577, 626,677,730,785,842,901,962,1025,1090,1157,1226,1297,1370,1445,1522,1601,1682,1765,1850,1937,... 2026,2117,2210,2305,2402,2501

Función generatriz: $G_n[n^2+1](x) = \dfrac{-2x^2+x-1}{(x-1)^3}$.

Ver ejercicios resueltos:
http://quegrande.org/apuntes/grado/1G/MDG/ejercicios/10-11/combinatoria-ejemplos_resueltos.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Alaca and Kenneth, Introductory Algebraic Number Theory, ISBN: 0-521-54011-9
Allenby, R.B.J.T., Rings, Fields and Groups, An Introduction Abstract Algebra, ISBN: 0-340-5440-6
Apostol, Tom M. Introducción a la Teoría Analítica de Números, ISBN: 84-291-5006-4
Cohen, Henri, Number Theory II, Analytic and Modern Tools, ISBN: 978-0-387-49893-5
Nathanson, Melvyn B. Elementary Methods in Number Theory, ISBN: 0-387-98912-9

FUNCIONES, PROGRAMAS Y PROCEDIMIENTOS (Utilizados)

$\mathrm{Select[Range[200],SquareFreeQ]}$ Libres de Cuadrados

$Union[Flatten[Table[ni^2,\{i,2,20\},\{n,1,400/i^2\}]]]$ No libres de Cuadrados

$Select[\Pr ime[Range[100]], SquareFreeQ[\#^2+1]\&],\ p^2+1,\ p\in P$ Libres de Cuadrados.

$Select[\Pr ime[Range[100]], !SquareFreeQ[\#^2+1]\&],\ p^2+1,\ p\in P$ No Libres de Cuadrados.

$MoebiusMu[97^2+1]=-1,$

$SquareFreeQ[97^2+1]=True,$

$\mathrm{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],1]=31}$

$\mathrm{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],-1]=30}$

$\mathrm{Count[Table[MoebiusMu[n],\{n,1,100\}],0]=39}$

$Table[Prime[n]^2+1,\{n,1,100\}]$

$\mathrm{ListPlot[Table[Prime[n]^2+1,\{n,1,PrimePi[545]\}]]}$

$$GeneratingFunction[n^2+1,n,x]=\frac{-2x^2+x-1}{(x-1)^3}$$

APOYO INTERNET

http://es.wikipedia.org/wiki/Criba_de_Erat%C3%B3stenes
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Liouville
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_M%C3%B6bius
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_generadora.
http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_zeta_de_Riemann
http://hojamat.es/parra/arolmar.pdf
http://hojamat.es/parra/funesp.pdf
http://mathworld.wolfram.com/Squarefree.html
http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf
http://pedrocastroortega.es/matematicas/docs/mm/num_triang/index.html
http://quegrande.org/apuntes/grado/1G/MDG/ejercicios/10-11/combinatoria-ejemplos_resueltos.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/papers/allahabad2003.pdf
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/papers/allahabad2003.pdf
http://www.plouffe.fr/simon/articles/FonctionsGeneratrices.pdf.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo10.pdf
http://www.wolframalpha.com/examples/